

ISSN 1149 - 0039

# *Les Cahiers de Rhéologie*



Volume XII, Numéro 3

Octobre 1994

Edités par :

Le Groupe Français de Rhéologie

*Les Cahiers de Rhéologie*



**GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE**

---

Président : JM. PIAU

Trésorier : R. BLANC

Secrétaire : R. GAUDU

ENSCP

351 cours de la Libération

33405 TALENCE CEDEX

Tél. 56 84 66 88

Fax. 56 84 66 68

---

**SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS**

Les Cahiers paraissent deux à trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement.

Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant au Secrétariat du Groupe moyennant une participation au frais.

*"Les articles sont publiés sous la responsabilité de leur (s) auteur (s)"*

# *Les Cahiers de Rhéologie*

SOMMAIRE DU VOLUME XII, n° 3  
OCTOBRE 1994

## ARTICLES

- **ETUDE NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT ET DU TRANSFERT DE CHALEUR POUR LES FLUIDES COMPLEXES PSEUDOPLASTIQUES THERMODÉPENDANTS RECHERCHE DES CORRELATIONS GÉNÉRALES ..... p. 89**

**K. KAHINE, V-T. NGUYEN et M. LÉBOUCHE**  
LEMTA - URA CNRS 875  
Université de Nancy I  
2 Avenue de la Forêt de Haye  
54504 VANDŒUVRE-LES-NANCY - France, cedex

- **MODÉLISATION DE LA RIGIDITÉ DU PAPIER COUCHÉ ..... p. 95**

**F. CELLA et C. BACON**  
Laboratoire de Mécanique-Physique - URA CNRS 867  
Université Bordeaux I  
351 cours de la Libération  
33405 TALENCE cedex

**F-C. GILLET**  
Saint Gobain Papier Bois Recherche  
351 cours de la Libération  
33405 TALENCE cedex

- **MODÉLISATION RHÉOLOGIQUE DE SUSPENSIONS AQUEUSES DE SILICE COLLOIDALE À PARTIR D'UN POTENTIEL EFFECTIF D'INTERACTION ..... p. 107**

**A. PONTON et D. QUEMADA**  
Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico-chimique (LBHP)  
CNRS URA 343  
Université Paris VII  
2 Place Jussieu  
75251 PARIS cedex 05

- **COMPORTEMENT DU POLYÉTHYLÈNE DANS LES ESSAIS DE TRACTION AVEC SAUT DE VITESSE ..... p. 113**

**S. BELOUETTAR et J-D. WEBER**  
ISGMP - LPMM - URA CNRS 1215  
Université de Metz  
Ile du Saulcy  
57045 METZ cedex 01 - France

**ETUDE NUMERIQUE DE L'ECOULEMENT ET DU TRANSFERT DE  
CHALEUR POUR DES FLUIDES COMPLEXES PSEUDOPLASTIQUES  
THERMODEPENDANTS  
RECHERCHE DES CORRELATIONS GENERALES**

**K. KAHINE, V.T. NGUYEN et M. LÉBOUCHE**  
LEMTA - URA CNRS 875  
Université de Nancy I  
2, Avenue de la Forêt de Haye  
54504 Vandoeuvre-lès-Nancy - France, cedex

**Résumé** - Dans cet article on étudie par simulation numérique la convection thermique laminaire pour des fluides pseudoplastiques thermodépendants dans une conduite cylindrique ou entre deux plaques planes. La paroi est soumise à une densité de flux de chaleur constante. Nous proposons des corrélations générales permettant de calculer le nombre de Nusselt local en fonction de l'indice de structure  $n$  et d'autres quantités adimensionnelles.

**Abstract** - In this article, we study numerically the laminar thermal convection to thermodependent pseudoplastic fluids in a cylindrical duct or between parallel plates. The wall is heated by a constant heat flux density. General correlations are proposed to compute local Nusselt number as a function of the behavior index  $n$  and an other dimensionless quantity.

## **I. INTRODUCTION**

Le développement industriel des échangeurs de chaleur est considérable, notamment dans le domaine agro-alimentaire. Néanmoins, on ne dispose pas jusqu'à ce jour de corrélations générales permettant de prédire correctement le transfert de chaleur pour les fluides rencontrés dans ce secteur industriel. Ils sont non seulement non-newtoniens, mais leurs propriétés physiques sont très sensibles à la température, en particulier leur consistance [1, 2, 3].

Dans un travail antérieur, nous avons étudié le problème des pertes de charge et une corrélation générale a été proposée pour calculer la chute de pression [4]. En ce qui concerne le transfert de chaleur, quelques corrélations ont été proposées [5, 6] mais, seulement pour certains fluides, en particulier, la solution de carboxyméthylcellulose.

Dans ce travail, nous considérons l'écoulement de fluides rhéofluidifiants fortement thermodépendants dans un tube cylindrique ou entre deux plaques parallèles, chauffé à densité de flux de chaleur pariétale constante. Le comportement rhéologique de ces fluides est donné par la loi d'Oswald:

$$\tau = K(T) \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^n \quad (1)$$

où  $\tau$  est la contrainte de cisaillement,  $n$  l'indice de structure et  $K$  la consistance du fluide. L'examen des rhéogrammes de ces fluides à différentes densités de flux montrent qu'ils sont fortement thermodépendants et la consistance est décrit par la relation:

$$K(T) = a \exp(-bT) \quad (2)$$

Le but de cette étude est d'étudier numériquement l'influence de l'indice de structure sur le coefficient de transfert de chaleur et surtout de proposer des corrélations générales qui permettent de calculer le nombre de Nusselt en fonction des différents paramètres du problème, en particulier de l'indice de structure.

## II- PROCEDURE NUMERIQUE

### II-1 Position du problème

La Figure 1 illustre le problème étudié:

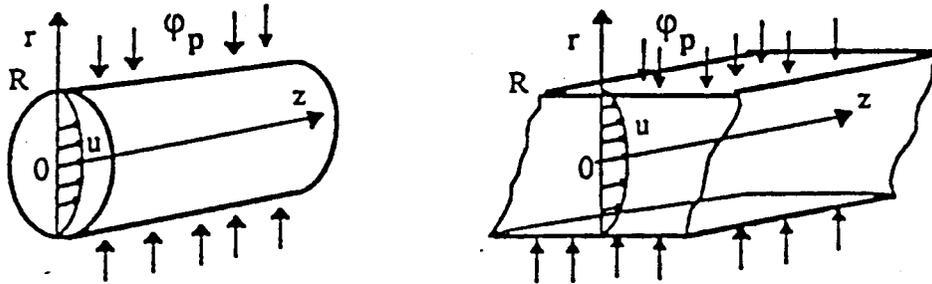


Figure 1 : Position du problème étudié.

- a) A l'amont, nous supposons que l'écoulement est laminaire, que le régime dynamique isotherme est établi et que le profil de température est uniforme.
- b) A la paroi, nous supposons que la densité de flux de chaleur est constante.

### II-2. Modèle mathématique et algorithme de résolution

Les équations générales qui gouvernent l'écoulement d'un fluide sont:

$$\text{équation de continuité : } \operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\text{équation du mouvement : } \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\operatorname{grad}(p) + \operatorname{div}(\vec{\tau}) \quad (4)$$

$$\text{équation de l'énergie : } \rho \frac{D(C_p T)}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) - p \operatorname{div}(\vec{V}) - \vec{\tau} : \operatorname{grad}(\vec{V}) \quad (5)$$

Sous certaines hypothèses ( écoulement axisymétrique, conduction de chaleur axiale négligeable, chaleur spécifique et conductivité thermique constantes ), les équations précédentes s'écrivent respectivement comme suit :

$$\text{équation de continuité : } \frac{\partial(\rho r^\alpha u)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho r^\alpha v)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

$$\text{équation du mouvement : } \rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial(r^\alpha \tau)}{\partial r} \quad (7)$$

$$\text{équation de l'énergie : } \rho C_p u \frac{\partial T}{\partial z} + \rho C_p v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^\alpha \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \tau \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (8)$$

l'équation exprimant la conservation de débit :

$$\int_A^R (2\pi r)^\alpha \rho u \, dr = \dot{m} = \text{Constante} \quad (9)$$

Nous notons que le terme de dissipation visqueuse est pris en compte.

A ce système d'équations, on associe les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} u(r=R) &= v(r=R) = 0 \\ T(z=0) &= T_0 \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r=0) &= \frac{\partial v}{\partial r}(r=0) = \frac{\partial T}{\partial r}(r=0) = 0 \\ u &= u_0 \left( \frac{(2+\alpha)n+1}{n+1} \right) \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right) \\ \varphi_p &= -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_p \end{aligned}$$

L'introduction du paramètre de géométrie  $\alpha$  permet de donner une écriture unique pour les deux systèmes de coordonnées :

$\alpha = 1$  correspond au cas de l'écoulement en conduite cylindrique

$\alpha = 0$  correspond au cas de l'écoulement entre plaques

Le système d'équations précédent est intégré par un schéma numérique basé sur les différences finies de Dufort-Frankel. A chaque itération, il permet de calculer la pression à l'aide des équations (7) et (9), puis la composante axiale de la vitesse par (7), ensuite la température par (8) et enfin la composante radiale de la vitesse à partir de (6). Les détails de cet algorithme peuvent être trouvés dans [6].

### III- RESULTATS ET DISCUSSION

Le nombre de Nusselt qui caractérise le transfert de chaleur est défini par:

$$Nu = \frac{D_h}{\lambda} \frac{\varphi_p}{T_p(z) - T_m(z)}$$

où  $T_p(z)$  et  $T_m(z)$  sont respectivement les températures à la paroi et de mélange et  $D_h$  le diamètre hydraulique.

L'évolution du nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale réduite  $z/d$  pour différentes valeurs de l'indice de structure  $n$  est tracée sur la Figure 2. On observe qu'une diminution de l'indice de structure entraîne une augmentation du nombre de Nusselt. On note aussi qu'en début de zone chauffée, les nombres de Nusselt sont très élevés, ce résultat est expliqué facilement par la présence d'un fort gradient thermique dans cette zone.

Dans la recherche des corrélations, pour les fluides Newtoniens ( $n = 1$ ), nous trouvons la corrélation suivante dans le cas de l'écoulement en conduite cylindrique :

$$Nu = 1,45 \left( \frac{b \varphi_p D_h}{2\lambda} \right)^{0,14} (X^+)^{-0,32}$$

qui donne le nombre de Nusselt en fonction des quantités adimensionnelles:  $(b\varphi_p D_h/2\lambda)$  et le nombre de Caméron  $X^+ = 2z/D_h / Re Pr$ . Ces dernières caractérisent respectivement les effets de la thermodépendance et du nombre de Reynolds et elles sont déjà utilisées dans les références [4, 6].

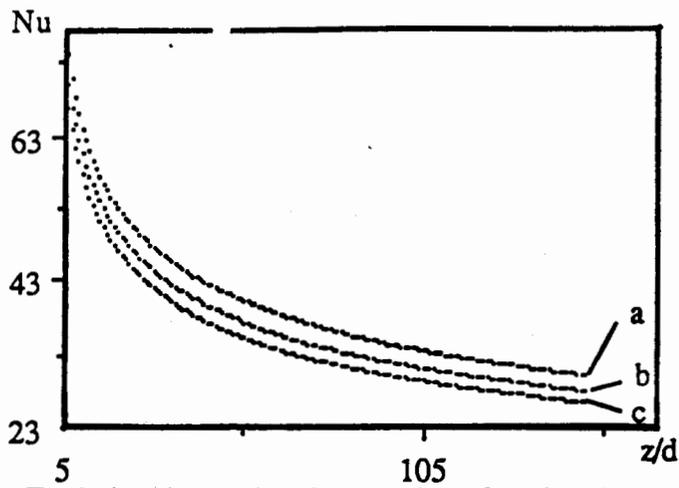


Figure 2 : Evolution du nombre de Nusselt en fonction de  $z/D_h$

a)  $n = 0,6$  ; b)  $n = 0,8$  ; c)  $n = 1$

Notre idée est de chercher une loi plus générale valable pour toutes les valeurs de l'indice de structure. Nous proposons des corrélations de la forme:

$$Nu = A(n) \left( \frac{b \varphi_p D_h}{2\lambda} \right)^{C(n)} (X^+) B(n)$$

Nous trouvons que:

- L'exposant  $B(n)$  reste inchangé
- L'exposant  $C(n)$  et le coefficient  $A(n)$  dépendent effectivement de  $n$ .

$$\text{Ln} \frac{Nu}{\Delta^{1/3} \left( \frac{b \varphi_p D_h}{2\lambda} \right)^{0,14} n^{0,7}}$$

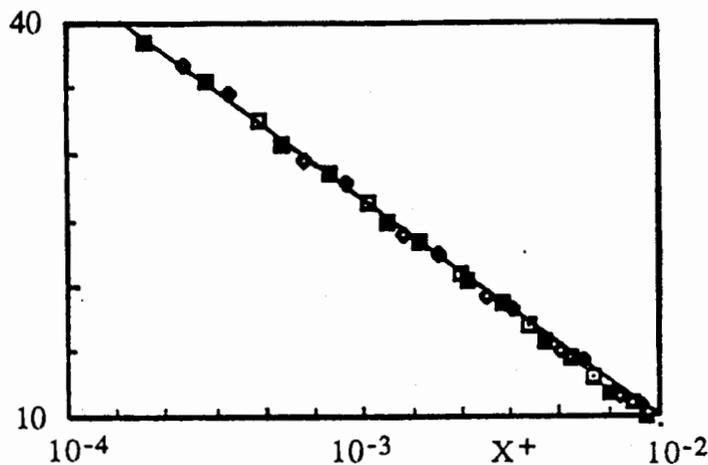


Figure 3 : Evolution du nombre de Nusselt réduit.

La Figure 3 donne l'évolution du nombre de Nusselt réduit en fonction de  $X^+$  en échelle logarithmique pour différentes valeurs de  $n$ . Elle montre que toutes les courbes correspondant à différentes valeurs de l'indice de structure se regroupent en une seule.

Ce résultat nous conduit à une loi générale qui traduit le transfert de chaleur en fonction de l'indice de structure  $n$  :

en conduites cylindriques:

$$Nu = 1,45 \Delta^{1/3} \left( \frac{b \varphi_p D_h}{2\lambda} \right)^{\frac{0,14}{n^{0,7}}} (X^+)^{-0,32}$$

en ce qui concerne l'écoulement entre deux plaques planes des processus similaires nous amènent à la corrélation suivante:

$$Nu = 2,88 \Delta^{1/3} \left( \frac{b \varphi_p D_h}{2\lambda} \right)^{\frac{0,14}{n^{0,7}}} (X^+)^{-0,26}$$

où  $\Delta$  est le facteur de correction bien connu,  $\Delta = (3n+1)/4n$  et  $(2n+1)/3n$  respectivement dans les deux cas considérés.

En comparant cette dernière relation avec la corrélation obtenue expérimentalement dans notre laboratoire [7], sur une solution de carboxyméthylcellulose à 3% en poids, considérée comme modèle de beaucoup de fluides rencontrés fréquemment dans l'industrie agro-alimentaire, nous notons qu'il y a un bon accord.

### III- CONCLUSION.

Pour les fluides non-newtoniens pseudoplastiques thermodépendants, l'étude de l'influence de l'indice de structure présentée dans ce travail permet de proposer deux corrélatons qui expriment le nombre de Nusselt en fonction des différentes valeurs de la densité de flux, du nombre de Reynolds et de l'indice de structure, donc de calculer efficacement le transfert de chaleur dans le cas de chauffage à densité de flux constante. Ces relations théoriques peuvent être utiles aux concepteurs des échangeurs de chaleurs.

**Mots clés:** Fluide non-newtonien, différences finies, convection forcée, écoulement laminaire, thermodépendance.

### REFERENCES

- (1) Chandrupatla A.R. & Start V.M., 1978, Laminar flow and transfer to a non newtonian fluid in an entrance region of a square duct with prescribed constant axial wall heat flux, Num. Heat Transfer, Vol.1, pp. 234 - 254.
- (2) Huang M.J & Chen C.K., 1987, Conjugate forced convection conduction plate, Int. Commun. Heat Mass Transfer, Vol. 14, pp. 371-380.
- (3) Mahalingam R., Tilton L.O & Coulson J.M, 1975, Heat Transfer in laminar flow of non newtonien fluids, Chem. Engin. Science, Vol 30, pp. 921 - 929.
- (4) Nguyen V.T., El ouardighi A. & Lebouche M., une corrélation pour les pertes de charge des fluides non-Newtoniens thermodépendants, Comptes Rendus Acad. Sciences Paris, T.312, S.II, 345 - 348 (1991).
- (5) Nouar C., Devienne R. & Lebouché M., 1986, Heat Transfer in Couette Poiseuille flow. Case of pseudoplastic fluid, Proc. Heat Transfer 86, San Francisco, Vol.3, pp 951 - 956 .
- (6) El ouardighi A, Nguyen V.T., Devienne R & Lebouché M., Etude numérique de la convection thermique pour les fluides d'Oswald, Actes Coll. Rhéologie Matières Agro-Alimentaires, 305 - 315, Nancy (1987).
- [7] V. Scirocco, R. Devienne et M. Lebouché In. J. Heat Mass Transfer 1, 91 (1985).

## MODÉLISATION DE LA RIGIDITÉ DU PAPIER COUCHÉ

**F. CELLA, C. BACON,**

Laboratoire de Mécanique Physique - URA CNRS 867, Université Bordeaux I

**F. C. GILLET,**

Saint-Gobain Papier Bois Recherche

351, Cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX

### RÉSUMÉ

Nous avons modélisé le papier couché comme un stratifié symétrique 3 couches puis établi une expression de la rigidité en flexion. Partant de cette formulation, nous proposons deux modèles: Dans le premier modèle, nous tenons compte du fait qu'une partie de la sauce pénètre dans le support fibreux en supposant toutefois que les caractéristiques mécaniques du support demeurent inchangées. Le second modèle ne prend pas en compte la pénétration. Les rigidités expérimentales ont été comparées aux valeurs théoriques. Par la suite, la rigidité issue du modèle n°1 a été exprimée à l'aide du grammage de la couche et de deux paramètres dépendant du taux de matière sèche de la sauce.

### ABSTRACT

We have modeled the coated paper as a symmetric laminate constituted by three plies and established an expression of the bending stiffness. With the help of this formulation, we propose two models: The first model considers that a part of the coating color penetrates into the paper and the mechanical characteristics of paper stay unchanged. The second model ignores the penetration. The experimental stiffness have been compared to theoretical values. Then the rigidity predicted by model 1 has been expressed in fonction of laminate basis weight and two parameters dependent on the percentage of solid contents of the coating color.

### I. INTRODUCTION

Un papier couché doit posséder, outre l'aspect homogène de sa surface, une rigidité en flexion suffisante pour ne pas être endommagé au cours de l'impression. Le papetier doit donc élaborer une feuille de papier couché ayant une rigidité donnée pour un grammage fixé. Pour y parvenir, il lui faut évaluer l'importance relative des principaux paramètres gouvernant la rigidité. Expérimentalement, cela se traduit par une multitude d'essais sur différents papiers en changeant un ou plusieurs paramètres de process (composition et grammage du support et de la sauce de couchage) et par un calcul de rigidité déduit des principes de la résistance des matériaux. La

formulation de la rigidité tirée de la modélisation présentant la feuille comme un stratifié permet de quantifier l'influence de ces paramètres. L'objectif de cette étude est de valider cette formulation à partir d'une série de mesures de rigidité menées sur un papier couché pour lequel on fera varier le grammage de la top couche en fonction du taux de matière sèche.

## **II. LA RIGIDITÉ EN FLEXION ISSUE DE LA MODÉLISATION DU PAPIER COUCHÉ**

### **II. 1. LE PAPIER**

#### **II. 1. 1. Modélisation de la structure du papier**

Sur le plan mécanique, le papier peut être assimilé à un matériau composite multi-phases.

Il présente toutes les caractéristiques d'un matériau orthotrope dans le plan de la feuille.

En particulier, il possède trois axes principaux (axes de symétrie matérielle) directement lié au processus de fabrication et facilement identifiables [1]:

- Le sens marche SM, direction privilégiée d'orientation des fibres
- Le sens travers ST, perpendiculaire au SM dans le plan de la feuille
- La direction Z, normale au plan de la feuille

#### **II. 1. 2. Comportement mécanique**

Le milieu hétérogène anisotrope est remplacé par un milieu homogène orthotrope dans le plan de la feuille.

Etant donné sa faible épaisseur, le matériau se trouve dans un état de contraintes planes défini dans le plan de la feuille.

En élasticité linéaire, son comportement mécanique peut être décrit dans ce plan par la connaissance de quatre grandeurs indépendantes intrinsèques au matériau [2]:

- deux modules d'élasticité  $E_1 = E_{SM}$ ,  $E_2 = E_{ST}$
- un coefficient de Poisson  $\nu_{12}$
- un module de cisaillement  $G_{12}$

### **II. 2. LE PAPIER COUCHÉ**

#### **II. 2. 1. Généralités sur le couchage**

L'opération de couchage consiste à déposer sur les deux faces d'un papier support précouché un enduit à base de pigments minéraux et de liants. Cet enduit est généralement appelé "sauce".

Le but de cette opération est d'améliorer les caractéristiques physiques du papier (blancheur, opacité) et surtout son état de surface (passage d'une surface rugueuse et macroporeuse à une surface unie et microporeuse).

## II. 2. 2. Modélisation de la structure du papier couché

De part son mode d'élaboration, le papier couché appartient à la catégorie des composites de type stratifiés. En observant un papier couché au microscope électronique à balayage, on constate qu'une partie de l'enduit sert à remplir les espaces vides entre les fibres et crée ainsi une couche intermédiaire située entre la saucée et le papier support. On observe également une dissymétrie de la couche de contour qui est essentiellement due à la pénétration différente de la saucée côté toile et côté feutre du papier. Pour simplifier au maximum le problème, nous n'incluons pas l'interface saucée-support dans le cadre de notre étude et nous supposons que la feuille de papier couché possède des propriétés mécaniques et géométriques identiques sur chacune de ses faces.

Le papier couché peut donc être considéré en première approximation comme un stratifié symétrique 3 couches (cf Fig. 1).

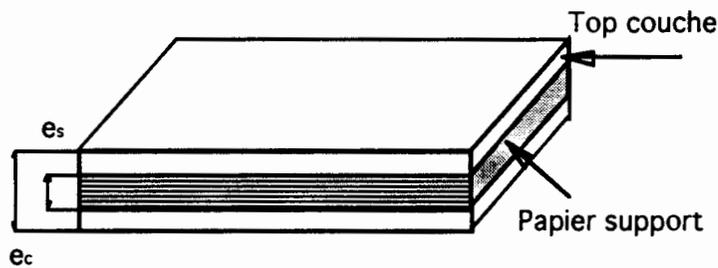


Fig. 1. Modélisation d'une feuille de papier couché par un stratifié symétrique 3 couches

## II. 2. 3. Formulation simplifiée de la rigidité en flexion

Une étude portant sur le comportement en flexion de cartons multicouches a permis de valider une expression relativement simple de la rigidité en flexion selon le SM et le ST déduite de la théorie des stratifiés [3].

Dans cette étude, on néglige les contraintes dans le ST lorsque l'on réalise une flexion suivant le SM et vice versa.

Si l'on applique ce résultat à la feuille de papier couché, la rigidité en flexion SM et ST s'exprime simplement en fonction des modules d'élasticité et des épaisseurs de chaque couche:

$$R_{1fc} = \frac{1}{12} \{ E (e_c^3 - e_s^3) + E_1 e_s^3 \} : \text{rigidité en flexion SM} \quad (1)$$

$$R_{2fc} = \frac{1}{12} \{ E (e_c^3 - e_s^3) + E_2 e_s^3 \} : \text{rigidité en flexion ST} \quad (2)$$

## III. LA RIGIDITÉ EN FLEXION EXPÉRIMENTALE

La rigidité en flexion d'un échantillon peut être déterminée à partir du rigidimètre Lorentzen & Wettre [4]. Son calcul est déduit des équations de la RDM. Le principe de cet appareil couramment utilisé en papeterie est le suivant:

Un capteur de force mesure la force nécessaire pour fléchir d'un angle donné  $\theta$  une éprouvette rectangulaire (largeur  $b$ ) située dans un plan vertical et encastree à une extrémité. La force de flexion  $F$  est appliquée à une distance fixe  $L$  de l'encastrement.

La rigidité en flexion par unité de largeur est donnée par:

$$R = \frac{F L^2}{3 b \theta} \quad (3)$$

Remarque:

Chaque éprouvette est fléchie successivement des deux côtés de la position de repos. La force de flexion correspondante est calculée en prenant la valeur moyenne des deux lectures.

## IV. CARACTÉRISATION DE LA TOP COUCHE

### IV. 1. DÉTERMINATION DU MODULE D'ÉLASTICITÉ DE LA COUCHE

#### IV. 1. 1. Principe

Les propriétés mécaniques de la couche ainsi que sa masse volumique sont influencées [6]:

- par les conditions de séchage de la sauce sur le matelas fibreux qui dépendent de l'épaisseur déposée,
- par la nature de sa liaison interfaciale avec le support fibreux

En pratique, il est quasiment impossible de recréer une top couche dissociée de son support possédant les mêmes caractéristiques que la top couche recouvrant le support fibreux. Dans cette étude, nous supposons que les propriétés mécaniques de la couche ne dépendent pas du support mais uniquement de l'épaisseur déposée.

Plutôt que de réaliser des éprouvettes de sauce et d'être confronté à un matériau trop cassant après séchage pour pouvoir subir des essais de traction, le module de la sauce est déterminé indirectement à partir d'un modèle. Il s'agit de calculer expérimentalement puis à l'aide de la théorie des stratifiés la rigidité en flexion d'une feuille de plastique couchée deux faces assimilée à un stratifié 3 couches symétrique. De l'égalité des rigidités théorique et mesurée, nous en déduisons le module de la couche. En utilisant cette méthode, on peut déterminer le module d'élasticité de la couche ayant des épaisseurs comparables à celles que l'on rencontre pour les papiers couchés.

L'avantage du couchage sur une feuille de plastique est que l'on peut connaître avec précision l'épaisseur déposée étant donné que le plastique utilisé est imperméable (ce qui a été confirmé à partir d'une observation faite au microscope électronique).

Pour simplifier les calculs, nous considérons que:

- la couche est un matériau homogène et isotrope, au comportement élastique linéaire.
- le plastique est un matériau orthotrope, au comportement élastique linéaire (les axes d'orthotropie étant définis par les directions 1, 2 et la direction normale associée 3).

#### IV. 1. 2. Mode opératoire et traitement

Nous déposons manuellement un film de sauce sur une des faces d'une feuille de plastique. Après séchage à l'air libre, nous recommençons sur l'autre face de manière à obtenir une feuille couchée des deux côtés. En renouvelant l'opération sur plusieurs feuilles de plastique, nous pouvons ensuite découper des éprouvettes dans la direction 1 puis effectuer des mesures d'épaisseur (micromètre L&W) et de rigidité (rigidimètre L&W). Le module de la couche est calculé pour deux épaisseurs de dépôt obtenues à l'aide d'un tire-film.

Expérimentalement, la rigidité en flexion selon 1 d'un échantillon de plastique couché deux faces s'obtient à partir de la relation (3) en réalisant un essai de flexion ( $L = 2,5$  cm,  $b = 3,8$  cm,  $\theta = 10^\circ$ ). Par le calcul, elle est issue de la théorie des stratifiés symétriques 3 couches en flexion (relation (1)). En comparant ces deux valeurs, nous en déduisons une expression du module:

$$E = \frac{12 R_{1fm} - E_{1s} e_s^3}{e_c^3 - e_s^3} \quad (4)$$

#### IV. 1. 3. Résultats

D'après le tableau n°1, on constate que le module diminue d'environ 9% lorsque l'épaisseur de la couche est multipliée par deux. On peut penser qu'il est plus élevé pour des dépôts encore plus faibles, comparables à ceux des papiers couchés. Par conséquent, le module de la couche retenu pour la suite des calculs est:

$$E = 3,2 \text{ GPa}$$

Epaisseur de la couche ( $\mu\text{m}$ )	Lorentzen & Wettre	
	E	
	Moyenne (GPa)	Ecart type (GPa)
20	3,2	0,3
40	2,9	0,3

Tableau n°1: Module d'élasticité de la couche

#### Remarque:

Cette valeur est à rapprocher de la valeur obtenue à partir d'un essai de traction sur des "éprouvettes de sauce":  $E = 0,4$  GPa [5].

#### IV. 2. CALCUL DE LA MASSE VOLUMIQUE DE LA COUCHE

Il s'agit de calculer pour plusieurs dépôts de sauce sur feuilles de plastique, le grammage du film de sauce  $W$  obtenu après séchage et d'en déduire sa masse volumique  $\rho$ . Nous pouvons par la suite interpoler les points expérimentaux et établir une loi d'évolution de la masse volumique en fonction du grammage  $\rho(W)$ .

#### IV. 2. 1. Détermination du grammage

En utilisant un tire-film et en jouant sur le pourcentage de matière sèche, nous avons fait varier la quantité de sauce déposée puis calculé le grammage correspondant en mesurant la masse de la couche  $M$  et la surface de dépose  $S$ :

$$W = \frac{M}{S} \quad (5)$$

avec

$$M = M_c - M_s$$

où  $M_s$ ,  $M_c$  représentent respectivement la masse du plastique et du plastique couché

#### IV. 2. 2. Détermination de la masse volumique

Elle se calcule en évaluant l'épaisseur de la couche  $e$  et en appliquant la relation suivante:

$$\rho = \frac{W}{e} \quad (6)$$

avec

$$e = e_c - e_s$$

où  $e_s$ ,  $e_c$  représentent respectivement l'épaisseur du plastique et du plastique couché

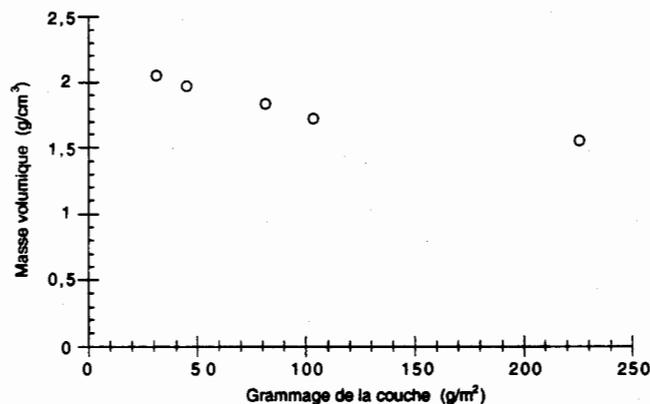


Fig.2. Evolution de la masse volumique en fonction du grammage de la sauce déposée

Comme on peut le constater sur la fig. 2, la masse volumique de la couche diminue lorsque le grammage augmente. Si l'on exclue le dernier point de la courbe non représentatif dans le cadre d'une étude sur les papiers couchés, elle varie linéairement et a pour équation:

$$\rho = 2,181 - 0,004 W \quad (7)$$

## V. ESSAIS SUR PAPIERS - VALIDATION DU MODÈLE

### V. 1. CONDITIONS D'ESSAIS

Nous avons sélectionné un papier support précouché (108 g/m<sup>2</sup>) et une sauce de couchage constituée de carbonate de chaux et de latex. Le grammage de la couche est variable et fonction du pourcentage de matière sèche (% MS):

- W = 17,6; 21,6; 26,4; 28,9 g/m<sup>2</sup> à 63% MS
- W = 25,2; 29,3; 33,3; 40,3; 43,7; 48,4 g/m<sup>2</sup> à 71% MS

Le module d'Young E et la loi d'évolution de la masse volumique de la couche  $\rho(W)$  ont été déterminés au §IV.

Afin d'accéder aux caractéristiques mécaniques (modules d'élasticité) et géométriques (épaisseurs) des papiers supports et des papiers couchés, nous avons effectué une série de mesures sur:

- le rigidimètre Lorentzen & Wettre
- le micromètre Lorentzen & Wettre

Les essais de flexion et de mesure d'épaisseur sur les papiers supports et papiers couchés ont été réalisés dans les conditions définies par les normes AFNOR [7], en particulier en ce qui concerne:

- *L'échantillonnage et le prélèvement des éprouvettes*
- *Le conditionnement des éprouvettes*
- *Les paramètres de l'essai de flexion*

Les dimensions des éprouvettes de flexion employées sont:

- Longueur totale: 8 cm
- Longueur de flexion: 2,5 cm
- Largeur: 3,81 cm

La vitesse et l'angle de flexion sont respectivement égaux à 5°/s et 15°.

- *Le nombre d'échantillons*

La structure hétérogène du papier conduit à des dispersions toujours importantes des mesures. Pour obtenir des résultats représentatifs, nous avons fixé le nombre de déterminations à 10 pour mesurer la rigidité selon le sens marche ou le sens travers et à 40 pour évaluer l'épaisseur des différents papiers.

### V. 2. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX - VALIDATION DU MODÈLE

#### V. 2. 1. Caractérisation du papier support précouché

Le module d'élasticité du papier dans le sens marche (1) et dans le sens travers (2) est déduit des mesures d'épaisseur et de rigidité en flexion selon 1, 2.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant:

E <sub>1</sub>		E <sub>2</sub>	
Moyenne (GPa)	Ecart type (GPa)	Moyenne (GPa)	Ecart type (GPa)
5,3	0,2	2,5	0,2

Tableau n°2: Modules d'Young du papier support précouché

### V. 2. 2. Caractérisation du papier couché

Dans un premier temps, il s'agit de déterminer expérimentalement la rigidité du papier couché dans le sens marche et dans le sens travers pour les différents grammages de la top couche.

Lorsque le papier couché est modélisé par un stratifié symétrique 3 couches, la rigidité en flexion selon 1, 2 s'écrit simplement:

$$R_{1fc} = \frac{1}{12} \left\{ E (e_s + e)^3 + (E_1 - E) e_s^3 \right\} \quad (8)$$

$$R_{2fc} = \frac{1}{12} \left\{ E (e_s + e)^3 + (E_2 - E) e_s^3 \right\} \quad (9)$$

A partir des éq. (8) et (9), nous pouvons tirer 2 modèles:

- Le modèle n°1 qui tient compte du fait qu'une partie de la sauce pénètre dans le support fibreux. Cependant, on considère que la partie qui a pénétré ne modifie pas les caractéristiques du papier support. Les rigidités  $R_{1fc}$  et  $R_{2fc}$  s'obtiennent en déterminant l'épaisseur de la couche:

$$e = e_c - e_s$$

- Le modèle n°2 qui ne prend pas en compte la pénétration. Dans ce cas, les rigidités sont déduites des relations précédentes en remplaçant l'épaisseur de la couche mesurée par l'épaisseur correspondant au grammage de la couche déposée:

$$e = \frac{W}{\rho}$$

Afin de valider l'un des 2 modèles proposés, nous avons confronté les résultats expérimentaux aux valeurs théoriques en représentant sur un même graphique (Fig. 3, 4, 5 et 6) et pour un pourcentage de matière sèche donné:

- la rigidité en flexion mesurée au L&W:  $R_{1fm}$  ou  $R_{2fm}$
- la rigidité en flexion issue du modèle n°1:  $R_{1fc}$  ou  $R_{2fc}$
- la rigidité en flexion issue du modèle n°2:  $R_{1fc}'$  ou  $R_{2fc}'$

Par ailleurs, il est intéressant de tracer:

- L'épaisseur de la couche mesurée en fonction du grammage de la couche déposée (Fig. 7)
- La quantité de sauce qui a pénétré dans le papier support en fonction du grammage de la couche déposée (Fig. 8)

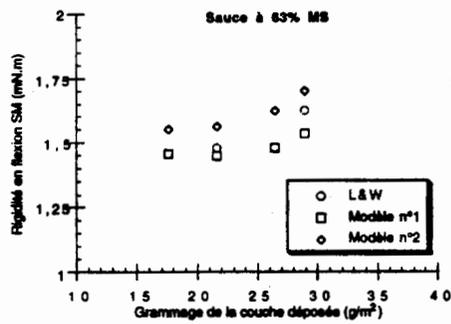


Fig. 3. Evolution des rigidités mesurée et calculées SM (sauce à 63% MS)

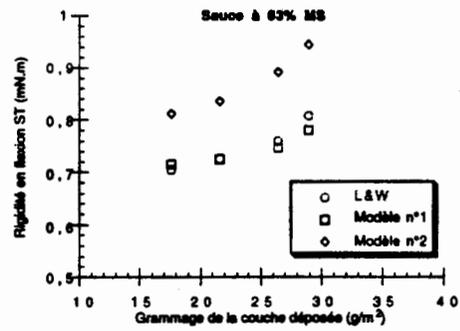


Fig. 4. Evolution des rigidités mesurée et calculées ST (sauce à 63% MS)

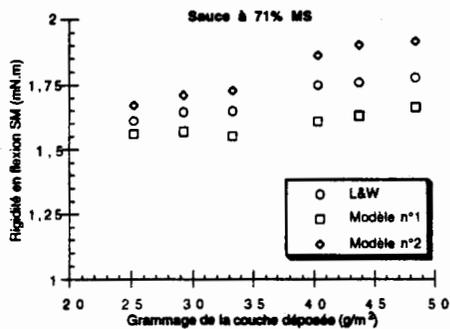


Fig. 5. Evolution des rigidités mesurée et calculées SM (sauce à 71% MS)

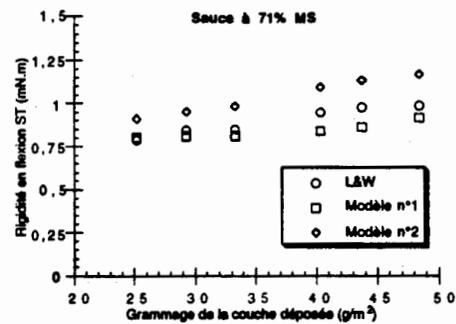


Fig. 6. Evolution des rigidités mesurée et calculées ST (sauce à 71% MS)

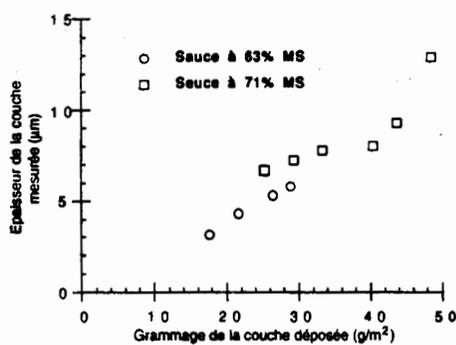


Fig. 7. Epaisseur de la couche mesurée

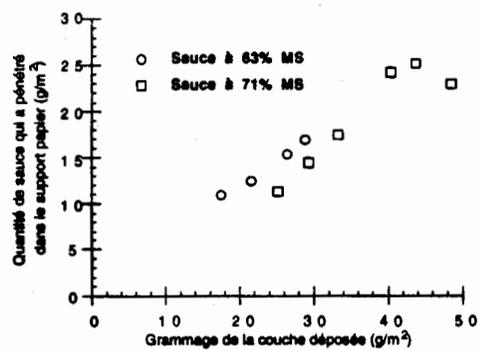


Fig. 8. Quantité de sauce qui a pénétré dans le papier support

La rigidité mesurée est encadrée par les deux rigidités théoriques.

- Modèle n°1:

- Les rigidités calculées sont inférieures aux valeurs mesurées

Ceci signifierait que la partie de la sauce qui a pénétré dans le matelas fibreux augmente la rigidité de celui-ci, peut être en limitant les degrés de liberté des fibres les unes par rapport aux autres.

- L'écart augmente progressivement lorsque le grammage de la couche croît puis, à partir de 43,7 g/m<sup>2</sup>, il diminue. Cette diminution peut provenir d'une baisse de la quantité de sauce pénétrant dans le support fibreux (cf Fig. 8):

Pour les faibles grammages, la quantité de sauce qui pénètre le matelas fibreux doit augmenter jusqu'à saturation puisque que la quantité de sauce déposée augmente. C'est bien ce que l'on observe sur la Fig. 8. A partir du point de saturation, on devrait cependant observer un palier alors que la quantité de sauce pénétrante diminue pour les grammages importants (cf Fig. 8). Ceci peut s'expliquer par le fait que, plus la quantité de sauce déposée est importante, plus la force exercée sur la lame enductrice est faible, ce qui a tendance à diminuer la quantité de sauce qui pénètre.

• Modèle n°2:

- Il surestime la rigidité en flexion.

- Quel que soit le grammage de la couche et son pourcentage de matière sèche, la différence entre le calcul et la mesure est importante.

Comme on pouvait s'y attendre, le modèle n°1 qui tient compte du fait qu'une partie de la sauce pénètre dans le papier support, est sans aucun doute plus proche de la réalité et des mesures que le modèle n°2.

### V. 2. 3. Optimisation du modèle n°1

Nous allons exprimer pour la sauce à 63% MS et à 71% MS, la rigidité en flexion SM et ST en fonction du grammage de la couche, cette quantité pouvant être connue a priori par le papetier.

Le modèle n°1, plus réaliste, sera utilisé. Les grandeurs  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E$  et  $e_s$  sont considérées comme étant connues. Il reste donc à évaluer l'épaisseur de la couche déposée en fonction du grammage de la sauce. Dans le domaine de grammages qui intéresse le papetier (inférieurs à 40 g/m<sup>2</sup>), on remarque que l'évolution de l'épaisseur déposée en fonction du grammage est quasiment linéaire croissante quelque soit le taux de matière sèche. L'épaisseur du papier couché  $e_c$  peut donc s'écrire:

$$e_c = e_s + e = m_1 + m_2 W \quad (10)$$

En reportant (10) dans (8) et (9), nous obtenons:

$$R_{1fc} = \frac{1}{12} \left\{ E (m_1 + m_2 W)^3 + (E_1 - E) e_s^3 \right\} \quad (11)$$

$$R_{2fc} = \frac{1}{12} \left\{ E (m_1 + m_2 W)^3 + (E_2 - E) e_s^3 \right\} \quad (12)$$

Les valeurs  $m_1$  et  $m_2$  peuvent être déterminées de 2 façons:

Soit on réalise une régression linéaire sur la courbe donnant l'épaisseur de la couche en fonction du grammage (cf Fig. 7), soit on effectue une interpolation à l'aide des fonctions (11) et (12) sur les valeurs expérimentales de la rigidité. Dans le premier cas, seules des mesures d'épaisseurs et de masses sont nécessaires avant et après couchage. Dans le second cas, nous n'avons besoin que des mesures de rigidités. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous:

A partir de	63% MS			71% MS		
	$e_c(W)$	$R_{1fc}(W)$	$R_{2fc}(W)$	$e_c(W)$	$R_{1fc}(W)$	$R_{2fc}(W)$
$m_1$ ( $\mu m$ )	146,1	137,3	140,7	152,8	146,4	141,4
$m_2$ ( $10^{-6} m^3/g$ )	0,2	0,7	0,5	0,1	0,4	0,5

Tableau n°3

- Les coefficients  $m_1$  et  $m_2$  diffèrent suivant le % MS. Si l'on compare les rigidités théoriques correspondantes à grammage de couche fixé, on peut évaluer l'influence du % MS. Les rigidités sont légèrement plus élevées pour la sauce à 71% MS.
- Pour connaître l'évolution de la rigidité en fonction du grammage de la top couche pour un % MS donné, il suffit d'effectuer 2 mesures (2 paramètres).

## VI. CONCLUSIONS

La modélisation du papier couché et l'utilisation de la théorie des stratifiés nous a permis d'établir une expression simplifiée de la rigidité en flexion du papier couché selon le sens marche et le sens travers fonction des modules d'Young et des épaisseurs du papier support et de la top couche. A partir de cette formulation, nous avons tiré deux modèles: Le premier modèle tient compte du fait qu'une partie de la sauce déposée pénètre dans le support fibreux lors du couchage en considérant toutefois que les caractéristiques mécaniques du papier support ne sont pas modifiées, le modèle n°2 ne prend pas en compte la pénétration. Afin de valider l'un des deux modèles proposés, nous avons confronté les rigidités mesurées au Lorentzen & Wettre aux valeurs théoriques pour un % MS donné. La rigidité mesurée est encadrée par les deux rigidités issues de la modélisation. Comme on pouvait s'y attendre, les meilleurs résultats sont obtenus à partir du modèle n°1, le deuxième modèle surestimant la rigidité. La rigidité déduite du modèle n°1 a été ensuite exprimée à l'aide du grammage de la couche et de deux paramètres dépendants du % MS de la sauce. Dans ce cas, l'évolution de la rigidité en fonction du grammage de la couche pour un % MS donné peut être connue en évaluant ces deux paramètres, soit par deux mesures de masses et d'épaisseurs avant et après couchage, soit en interpolant deux valeurs expérimentales de la rigidité. Le modèle peut être amélioré en tenant compte de la dissymétrie de la top couche dans la théorie des stratifiés ou bien en considérant un modèle à cinq couches si l'on prend en considération l'interface sauce-support. Dans le dernier cas, il faudrait être en mesure d'évaluer "l'épaisseur" et le module de l'interface sans pour autant avoir la certitude d'obtenir un résultat meilleur qu'avec le modèle trois couches...

## RÉFÉRENCES

- [1] **POUYET J., HUCHON R., URRUTY J. P.**  
 "Mécanique d'un composite ancien:le papier". Composites, n°2, pp 7075, 1991

- [2] **JONES A. R.**  
"An experimental investigation of the in - plane elastic moduli of paper". Tappi  
Vol. 51, n°5, Mai 1968
- [3] **CARLSSON A., FELLERS C.**  
"Flexural stiffness of multi-ply paperboard". Fibre, Science and Technology-  
Chap. 13, 1980
- [4] **HAKAN MARKSTROM, Manager Development & Design**  
"The Elastic Properties of Paper-Test Methods and Measurement  
Instruments". Lorentzen & Wettré, Stockholm (1991).
- [5] **ROUDIL E.**  
"Modélisation de la rigidité du papier couché". Rapport de DEA, Laboratoire  
de Mécanique Physique, Université de Bordeaux I, 1992
- [6] **MORIN V.**  
"Contribution à l'étude de la résistance des tubes multicouches en carton".  
Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1987
- [7] Norme AFNOR - 1988  
"Conditionnement des papiers et cartons pour essais - Détermination de  
l'épaisseur du papier et du carton - Plan d'échantillonnage"

# MODELISATION RHEOLOGIQUE DE SUSPENSIONS AQUEUSES DE SILICE COLLOIDALE A PARTIR D'UN POTENTIEL EFFECTIF D'INTERACTION

A. PONTON et D. QUEMADA

Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico-chimique (L.B.H.P.)

CNRS URA 343, Université Paris VII, 2 Place Jussieu - 75251 Paris Cedex 05

## Résumé :

Une nouvelle modélisation de la viscosité non-newtonienne de suspensions colloïdales est effectuée à l'aide du potentiel effectif d'interaction proposé par R. Buscall. Nous avons pu montrer la validité de ce modèle phénoménologique dans le cas où le potentiel d'interaction se réduit au potentiel électrostatique. Nous donnons un premier exemple de l'analyse des données expérimentales sur une dispersion de billes de silice dans un milieu aqueux à faible force ionique. L'accord satisfaisant obtenu permet de calculer une valeur du potentiel de surface des particules tout à fait comparable à celle déterminée dans un travail précédent à partir de la modélisation de la viscosité limite à cisaillement nul.

## Abstract :

A new analysis of the non-newtonian viscosity of colloidal dispersions is given in terms of the effective pairwise interaction-potential proposed by R. Buscall. The validity of this empirical model is shown when this potential can be reduced to the electrostatic one. A first example illustrates the comparison between experimental data and model predictions. The good agreement observed allow us to calculate the surface potential of the particles. This result is well corroborated with the value obtained in a previous work from the modelisation of the low shear viscosity.

## INTRODUCTION

Dans un article précédent [1], nous avons présenté une modélisation rhéologique de suspensions concentrées de particules colloïdales monodispersées dans un milieu aqueux peu ionisé. Basé sur l'approximation des sphères dures, le modèle structural proposé de la viscosité  $\eta$  a pris en compte la double dépendance avec la fraction volumique  $\Phi$  des particules et avec la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  de l'écoulement. La suspension a été décrite comme une dispersion de sphères fictives dont le rayon effectif inclut la présence de bicouches ioniques dont l'épaisseur (longueur de Debye classique) est modifiée afin de prendre en considération les effets de concentration.

La confrontation de ce modèle aux données expérimentales a permis de déterminer la viscosité limite  $\eta_0$  à faible cisaillement et sa variation avec  $\Phi$ . Cette dernière a été comparée à celle

prédite par la théorie de W.B. Russel [2] dans le cas où les répulsions électrostatiques sont dominantes. Pour une densité de charge fixée à sa valeur mesurée, nous en avons déduit le potentiel de surface des particules.

L'objet de ce papier est d'analyser ces mêmes résultats expérimentaux à la lumière d'une seconde approche qui permet d'éviter l'étape initiale d'ajustement d'un modèle aux mesures rhéologiques. Elle relie la viscosité non-newtonienne à un potentiel effectif d'interaction de paires dépendant de la contrainte de cisaillement. Elle permet ainsi une relation directe entre les propriétés globales de l'écoulement et les caractéristiques microscopiques de la suspension.

## PRESENTATION DU MODELE

L'idée de base est que le rayon effectif  $a_{eff}$  des particules (rayon réel  $a$ ) dépend de la contrainte de cisaillement  $\sigma$  nécessaire pour la mise en écoulement. La viscosité d'une telle suspension est égale à la viscosité  $\eta$  d'une dispersion de sphères dures fictives, de rayon  $a_{eff}$  et de fraction volumique  $\Phi_{eff}$ . La relation entre  $\eta$  et  $\Phi_{eff}$  est donnée par :

$$\eta = \eta_f \left( 1 - \frac{\Phi_{eff}}{\Phi_m} \right)^{-2} \quad (1)$$

où  $\eta_f$  est la viscosité du fluide suspensé,  $\Phi_m$  la fraction volumique d'empilement compact et :

$$\Phi_{eff} = \Phi \left( \frac{a_{eff}}{a} \right)^3 \quad (2)$$

Ce rayon effectif, obtenu à partir de  $\Phi_{eff}$  (Eq. 2) peut être exprimé à l'aide de l'équation de Barker et Anderson [3] dans laquelle intervient le potentiel effectif d'interaction  $V_{eff}$  :

$$a_{eff} = a + \frac{1}{2} \int_{2a}^{\infty} \left\{ 1 - \exp(V_{eff}(r) / kT) \right\} dr \quad (3)$$

La dépendance avec la contrainte est introduite par R. Buscall [4] qui, en considérant la compétition entre les énergies associées aux forces hydrodynamiques et au mouvement brownien, a proposé l'expression suivante pour  $V_{eff}(a_{eff})$  :

$$\frac{V_{eff}(a_{eff})}{kT} \approx 1 + \frac{\sigma a_{eff}^3}{kTC} \quad (4)$$

où  $C$  est une constante phénoménologique,  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température.

Ainsi l'ensemble des équations (1), (2) et (4) permet une détermination indirecte du potentiel effectif d'interaction.

## RESULTATS - DISCUSSION

Nous avons appliqué ce modèle aux mesures rhéologiques sur des suspensions soumises à un écoulement cisailé, suspensions précédemment utilisées dont on trouvera une description détaillée dans la référence [1].

La figure 1 présente la variation de la viscosité  $\eta$  en fonction de la contrainte  $\sigma$  de cisaillement pour une fraction volumique  $\Phi = 28.6\%$ . On observe une dépendance en comportement newtonien aux faibles et aux fortes contraintes et un comportement rhéofluidifiant pour des contraintes intermédiaires.

Ce type de courbe peut être analysé à l'aide du modèle présenté ci-dessus. En effet, on peut obtenir la dépendance  $a_{eff}(\sigma)$  et donc les variations du potentiel  $V_{eff}$  avec la distance (Eq.4) à partir de la viscosité mesurée  $\eta(\sigma)$  identifiée à  $\eta(\Phi_{eff})$  (Eq. 1 et 2).

Dans le cas du système étudié {billes de silice de rayon  $a = 50 \text{ nm}$  et dispersées dans un milieu aqueux de permittivité  $\varepsilon$ , à faible concentration en électrolyte (symétrique, de valence  $z$ , de force ionique  $I = 4.10^{-4} \text{ M}$  et à  $\text{pH} = 8$ )}, les interactions colloïdales sont dominées par les répulsions électrostatiques. Le potentiel d'interaction se réduit au potentiel électrostatique dont l'expression théorique [1], dans le cas des doubles couches minces, est :

$$V_{el}(r) = 32\pi\varepsilon \left( \frac{kT}{ze} \right)^2 a \tanh^2 \left( \frac{\Psi_s ze}{4kT} \right) \exp\{-\kappa_{eff}(r-2a)\} \quad (5)$$

où  $\kappa_{eff}^{-1}$ , fonction de la densité de charge  $q$  des particules, est la longueur de Debye modifiée pour tenir compte des effets de concentration et  $\Psi_s$  le potentiel de surface.

L'identification des deux potentiels  $\{V_{eff}(a_{eff}) \text{ et } V_{el}(a_{eff})\}$  est illustrée sur la figure 2.

La corrélation a été recherchée en fixant  $q$  à sa valeur mesurée ( $q=25 \pm 3 \text{ mC.m}^{-2}$ ) et en déterminant les paramètres  $\Psi_s$  et  $C$  par une méthode des moindres carrés. Le meilleur accord est obtenu pour  $\Psi_s = -106 \text{ mV}$  et  $C = 0.223$ .

Il est important de remarquer que la superposition des deux courbes (fig.2) est satisfaisante sur la totalité du domaine des distances minimales d'approche entre sphères. De plus la valeur du potentiel de surface est très voisine de celle trouvée ( $\Psi_s = -110 \text{ mV}$ , ref[1]) avec le modèle structurel.

## CONCLUSION

Des mesures viscosimétriques de suspensions colloïdales de silice stabilisées électrostatiquement ont été interprétées à l'aide d'un modèle qui relie la viscosité non-newtonienne à un potentiel effectif d'interaction.

Un bon accord a été obtenu, à une fraction volumique donnée, avec les données expérimentales pour lesquelles le potentiel colloïdal a pu être identifié au potentiel électrostatique.

Cela nous a permis de déterminer une valeur du potentiel de surface des particules très proche de celle obtenue précédemment à l'aide d'un modèle structurel. Ceci conforte cette nouvelle tentative de modélisation qui ne requiert aucune extrapolation ou ajustement limite.

L'extension à diverses fractions volumiques de ce premier résultat est en cours.

Nous comptons ensuite utiliser ce modèle pour calculer les variations de la viscosité en fonction de la contrainte de cisaillement.

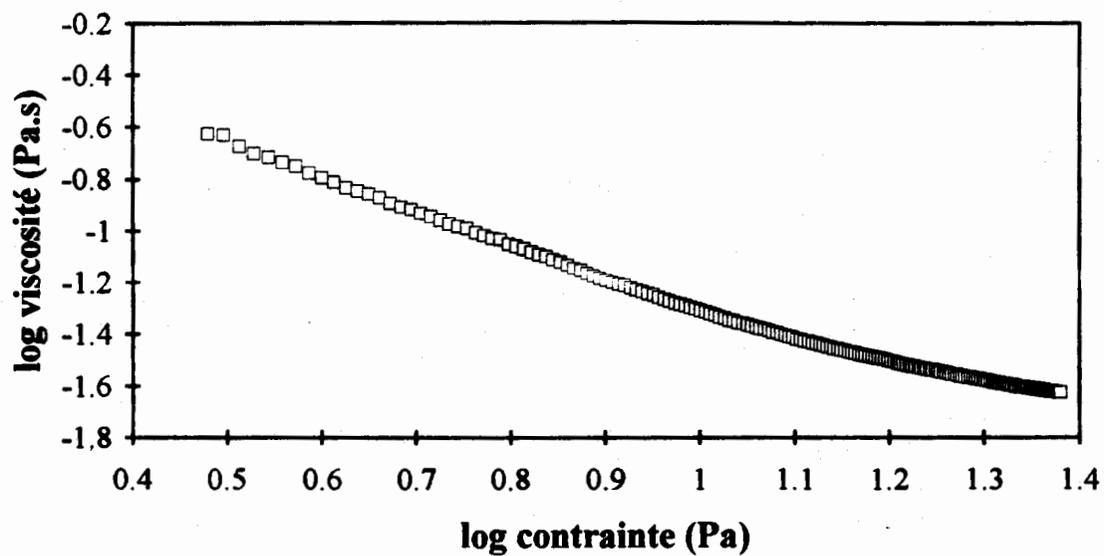


Figure 1 : Variation de la viscosité en fonction de la contrainte ( $\Phi = 28.6\%$ .)

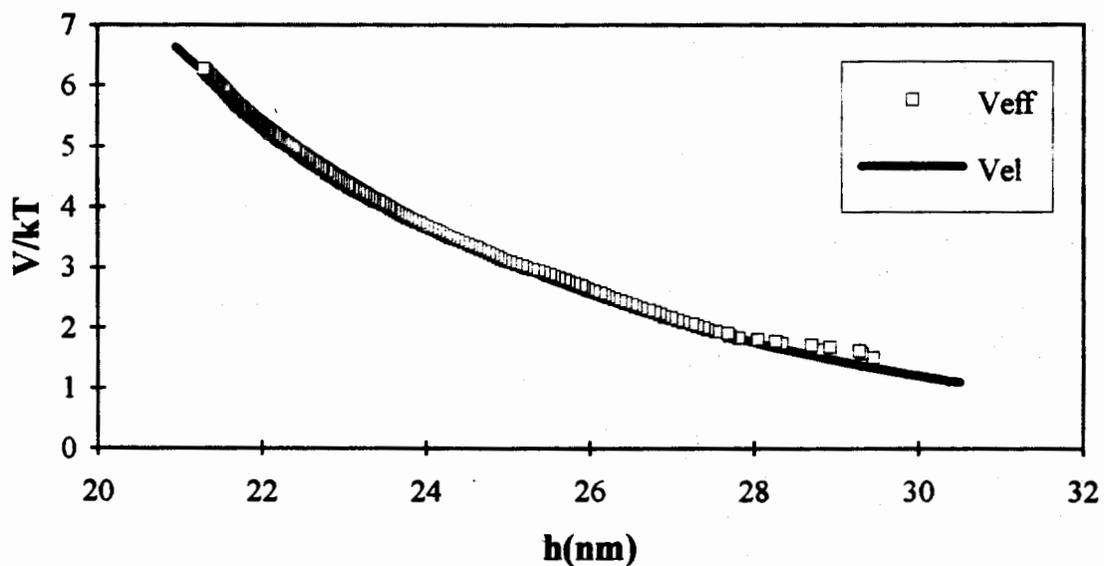


Figure 2 : Variations du potentiel effectif  $V_{eff}$  (méthode de Buscall) et du potentiel électrostatique  $V_{el}$  en fonction de la distance entre les surfaces des sphères  $h = 2(a_{eff} - a)$  pour  $\Phi = 28.6\%$ .

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué dans le cadre du programme Ecotech, projet : "Suspensions Colloïdales Concentrées". Les auteurs tiennent à remercier le CNRS et les partenaires industriels (Rhône Poulenc, Institut Français du Pétrole, Lafarge Coppee, Pechiney et Total) pour leur soutien financier.

## REFERENCES

- [1] A. PONTON, D. QUEMADA ET O. NEEL, "Comportement rhéologique à cisaillement nul de suspensions aqueuses de silice colloïdale", à paraître dans les *Cahiers de Rhéologie*.
- [2] W.B. RUSSEL, D.A. SAVILLE ET W.R. SCHOWALTER, *Colloidal Dispersions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1989, p. 473-474.
- [3] J.A. BARKER ET D. HENDERSON, "Perturbation theory and equation of state for fluids", *J. Chem. Phys.*, 47, 1967, p. 2856-4721.
- [4] R. BUSCALL, "An empirical model for the viscosity of soft-sphere dispersions", *Théo. Appli. Rhéo., Proc. XIth Int. Congr. on Rheology*, Bruxelles, 1992, p. 591-594

# Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse

par

Salim BELOUETTAR et Jean Daniel WEBER

I.S.G.M.P, L.P.M.M, URA CNRS 1215

Université de METZ, Ile du Saulcy, 57045 METZ

cedex 01 FRANCE

## Abstract

*The internal variables allows the description of most types of rheological behaviours, by indicating in each case wich variables must appear in the free energy and in the dissipation potential.*

*The representation of non-linear rheological behaviour of polyethylene is investigated. Simple tension tests whith discontinuous rates show when*

$$0 \leq \varepsilon \leq 0.35 \text{ and } 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \leq \dot{\varepsilon} \leq 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

*the behaviour can be represented in the case of a single internal variable by the equation :*

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma)$$

*Such an equation, wich has been used in the case of metals should be convenient for large deformations of many materials.*

## Résumé

*Les variables internes permettent de décrire la plupart des comportements rhéologiques en indiquant dans chaque cas les variables dont doit dépendre l'énergie libre et le potentiel de dissipation.*

*Ce travail est consacré à la représentation à l'aide de variables internes du comportement rhéologique non-linéaire du polyéthylène. Des essais de traction avec saut de vitesse ont montré pour*

$$0 \leq \varepsilon \leq 0.35 \text{ et } 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \leq \dot{\varepsilon} \leq 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

*que ce comportement peut être représenté dans le cas d'une seule variable interne par l'équation :*

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma)$$

*Une telle équation déjà utilisé dans le cas des métaux peut être appliqué aux déformations finies de plusieurs matériaux.*

## Introduction

Deux types d'approche sont utilisés pour décrire les milieux continus présentant des effets de mémoire:

- L'approche utilisant des variables internes d'état en supposant que l'histoire passée n'intervient que par la valeur actuelle d'un certain nombre de variables, les variables d'état dont l'évolution est régie par une équation d'évolution

- L'approche fonctionnelle qui considère les contraintes comme étant des fonctionnelles de l'histoire de la déformation et de la température.

L'utilisation des variables internes conduit à une théorie plus maniable et a été envisagée en milieux continus et en viscoélasticité après le développement de la théorie de MANDEL pour les systèmes thermodynamiques .

En 1967, COLEMAN et GURTIN [2] ont présenté une théorie thermodynamique générale des milieux continus avec variables internes basée sur des équations d'évolution non linéaire tout à fait générales.

WEBER [1] en 1972 avait utilisé ces relations pour décrire le comportement des milieux viscoélastiques avec élasticité instantanée dans des essais de traction avec sauts de vitesse sur du polyéthylène en essayant de trouver une relation reliant la vitesse de contrainte à la vitesse de déformation, c'est le but que nous nous fixons .

## Variables internes et équation rhéologique

Le comportement en traction de n'importe quel matériau visqueux peut être décrit par l'équation

rhéologique  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$  (pour  $\dot{\epsilon}$  constante dans chaque essai):

$\sigma$  et  $\epsilon$  auront dans tout ce qui suit la signification suivante:

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

avec  $F$ : effort appliqué,  $S_0$ : Section initiale de l'éprouvette,  $l_0$ : Longueur initiale et  $\Delta l$  allongement de l'éprouvette.

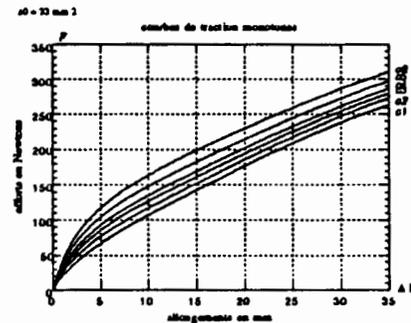


fig 1

Les variables internes fournissent un cadre rationnel pour la description des comportements rhéologiques, en effet en se donnant  $\phi(\epsilon, \xi)$ : énergie libre,  $\xi$  variables d'état internes et en se posant les relations:  $\dot{\xi} = f_u(\epsilon, \xi)$  qui définissent l'évolution des variables internes pour une déformation  $\epsilon(t)$  donnée, on en déduit la contrainte:

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}(\epsilon, \xi) \quad (1)$$

On a:

$$d\sigma = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} d\epsilon + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \xi} d\xi$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \xi} \dot{\xi} \quad (2)$$

avec

$$\dot{\xi} = f_u(\epsilon, \xi)$$

i.e.:

$$\dot{\sigma} = A(\epsilon, \xi)\dot{\epsilon} + B(\epsilon, \xi) \quad (3)$$

dans le cas où il n'y a qu'une seule variable interne, on peut éliminer celle-ci grâce à (1) et écrire

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \alpha(\epsilon, \sigma) + \frac{\beta(\epsilon, \sigma)}{\dot{\epsilon}} \quad (4)$$

$\alpha$  et  $\beta$  dépendent de l'histoire de déformation mais ne changent pas dans une discontinuité de la vitesse de déformation.

Par exemple cette relation est bien vérifiée dans toute déformation viscoélastique ou viscoplastique d'un matériau dans laquelle celui-ci manifeste de l'élasticité instantanée, c'est le cas des corps de Zener ou de Maxwell.

#### Essais de traction sur le polyéthylène

Des essais de traction sur le polyéthylène ont montré la validité de ce raisonnement où une discontinuité au niveau de la vitesse de déformation provoque une discontinuité au niveau de la vitesse de contrainte et montre ainsi l'existence d'une forme linéaire entre les vitesses de contrainte et les vitesses de déformation.

Le polyéthylène nous a été livré sous forme d'éprouvettes moulées (fig2), les éprouvettes comprennent une partie utile constituée d'un parallépipède relié aux deux têtes de fixation par des raccords conçus spécialement pour minimiser les concentrations de contraintes

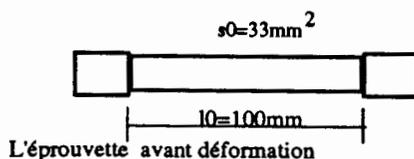


fig2

Tous les essais ont été effectués sur la même éprouvette, pour réduire la dispersion des résultats ( $\sigma, \epsilon$ ) correspondant à une vitesse de déformation.

Après chaque essai, et après avoir été déformée, l'éprouvette est laissée déchargée pendant au moins 12 mn

La machine utilisée pour les essais est une machine de traction - compression ZWICK d'une capacité de 200KN pilotée par un micro ordinateur (HP 300) d'une vitesse d'acquisition de 50 points par seconde (50 pts/s). Cette machine est de type cinématique d'une vitesse maximale de 500 mm/mn (8.33 mm/s) et minimale de 0.125 mm/mn ( $2.08 \cdot 10^{-2}$  mm/s).

La réponse de l'éprouvette aux quatre premiers essais est différente du reste des essais ultérieurs, cette différence réside en effet au niveau du comportement viscoplastique lors des premiers allongements de 35 mm, au cours desquels se produit une déformation permanente de 6 %, portant la longueur utile de l'éprouvette de 100 mm initialement à 106 mm

#### Sauts de vitesse

Un changement brusque de vitesse de déformation produit un changement immédiat de la courbe de traction qui rejoint la courbe monotone correspondant à la nouvelle vitesse de déformation (fig1).

Les sauts de vitesse ont été provoqués en différents points et à différentes vitesses de déformation. Il est présenté ci-dessous (fig 3,4) 2 éventails de sauts de vitesse, le premier à la vitesse de 10 mm/mn après

un allongement de 25mm et le deuxième à la vitesse de 20 mm/mn après un allongement de 7mm. Après le saut, les vitesses ont été dans chaque cas les suivantes : 1, 5, 10, 20, 50, 100 mm/mn .

1<sup>er</sup> Eventail

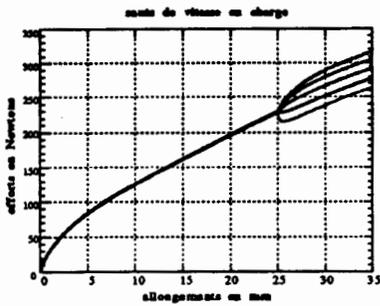


fig3

1<sup>er</sup> éventail de sauts de vitesse

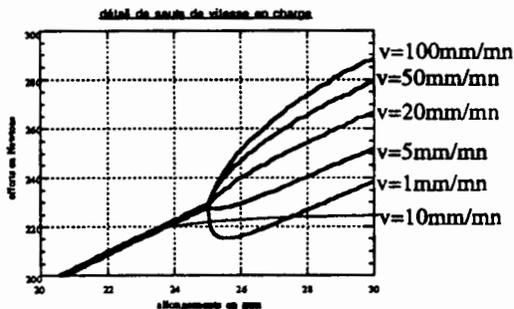


fig3 bis

Détail du 1<sup>er</sup> éventail de sauts de vitesse en charge

2<sup>ème</sup> Eventail

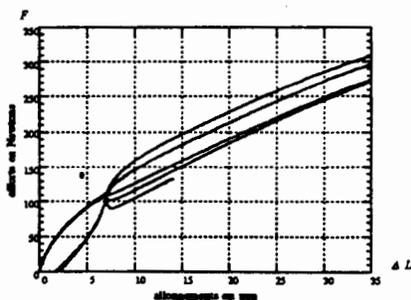


fig4

Deuxième éventail de courbes après sauts de vitesse

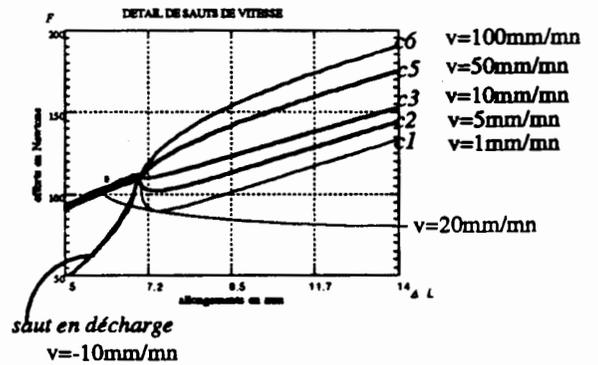


fig4 bis

Détail du deuxième éventail de courbes

Détermination de l'équation rhéologique

Déterminer l'équation rhéologique de comportement revient à déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  à partir des éventails de sauts de vitesse.

A l'origine ( $\sigma = 0, \epsilon = 0$ ), la valeur de  $\beta$  est nulle, ce qui permet en fait une première approche de la valeur de  $\alpha$ , c'est à dire :

$$\alpha = \frac{d\sigma}{d\epsilon} (\epsilon = 0) = 8 \cdot 10^7 \text{ pascals.}$$

Suite à ce raisonnement, nous pouvons considérer la valeur de  $\alpha$  comme étant constante puisque le polyéthylène pour des très petites valeurs de déformations a un comportement élastique.

Les valeurs de  $\alpha$  peuvent être aussi déterminées à partir d'un éventail de sauts de vitesse pour cela, supposons qu'un saut de vitesse soit effectué à l'instant  $t$  et soit  $\dot{\epsilon}(t + 0)$  la nouvelle vitesse.

Les variables obtenues  $\xi$  ne subissent pas de discontinuité -caractéristiques de variables internes- tandis que  $\dot{\sigma}(t)$  devient égal à  $\dot{\sigma}(t + 0)$ .

On a donc :

$$\text{avant } (\dot{\sigma}(t) = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon}(t) + \beta(\varepsilon, \sigma))$$

après le saut :

$$(\dot{\sigma}(t+0) = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon}(t+0) + \beta(\varepsilon, \sigma))$$

les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  de l'équation dépendent de l'histoire de déformation sans dépendre de la vitesse de déformation.

On obtient après résolution de ce système de deux équations à deux inconnues:

$$\alpha = \frac{(\dot{\sigma}(t+0) - \dot{\sigma}(t))}{\dot{\varepsilon}(t+0) - \dot{\varepsilon}(t)} = \frac{\frac{d\sigma}{d\varepsilon}(t+0)\dot{\varepsilon}(t+0) - \frac{d\sigma}{d\varepsilon}(t)\dot{\varepsilon}(t)}{\dot{\varepsilon}(t+0) - \dot{\varepsilon}(t)}$$

Les différentes valeurs de  $\alpha$  trouvées pour les différents sauts de vitesse et pour les différents éventails montrent que la valeur de  $\alpha(\varepsilon, \sigma)$  est sensiblement constante et on peut la considérer égale à  $8 \cdot 10^7$  pascals pour des essais de traction où la vitesse de déformation varie entre 1mm/mn et 100 mm/mn.

En fait ceci n'est qu'une approximation. La valeur de  $\alpha$  — la pente à l'origine des courbes  $(\sigma, \varepsilon)$  — est variable et dépend de la vitesse de déformation comme le montrent les courbes sur la figure 5 où la valeur de la pente varie de  $7 \cdot 10^7$  pascals pour une vitesse de déformation de l'ordre du 0 (0.125 mm/mn) à  $14 \cdot 10^7$  pascals pour de très grandes vitesses de déformation (2000 mm/mn).

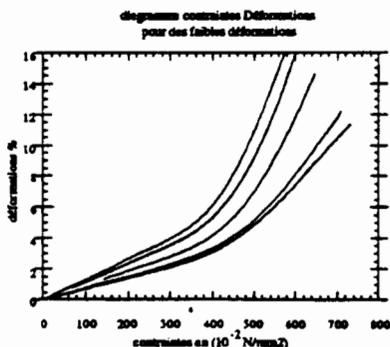


fig 5

La valeur de la courbe  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  est ensuite déterminée en un point quelconque du domaine des courbes de traction ( fig 1). En effet , en un point M quelconque sur les courbes C1, C2, C3, ... C6 de ce domaine, on connaît les valeurs de  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$  où la valeur de  $\beta$  :

$$\beta = \dot{\sigma} - \alpha\dot{\varepsilon}.$$

Pour les essais avec saut de vitesse à partir d'un même point  $(\varepsilon, \sigma)$  on trouve sensiblement le même  $\beta$ , ce qui confirme la loi du saut de vitesse (1) ou (2) ou (3) ou (4)

Il faut noter que la valeur de  $\beta$  est négative dans le cas d'une charge (vitesse de déformation positive) et positive en décharge (vitesse de déformation négative) et nulle au repos (contrainte nulle, déformation nulle) (fig 6).

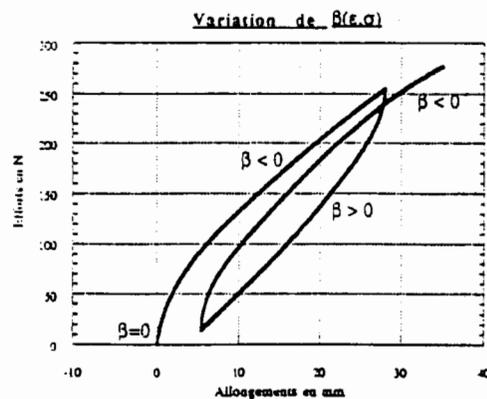


fig 6

## Conclusion

*Dans ce travail, nous nous sommes attachés à comprendre les phénomènes rhéologiques et principalement les comportements viscoélastiques et à montrer que les variables internes fournissent bien un cadre rationnel pour la description rhéologique des corps réels.*

*En ce qui concerne les essais de traction, nous sommes arrivés à des résultats concluants montrant une propriété fondamentale, dans les essais avec saut de vitesse.*

*La méthode des variables internes conduit à différentes conséquences, en accord avec l'expérience. Elle permet aussi un exposé plus rationnel de la mécanique des milieux continus.*

*En ce qui concerne nos résultats sur le polyéthylène et sur la forme de  $\alpha$  et  $\beta$ , il y a bonne corrélation entre théorie et expérience. Cependant on garde toujours une certaine prudence pour le modèle à une seule variable interne.*

## Remerciements

*On exprime notre reconnaissance au laboratoire de physique et mécanique des matériaux de l'ISGMP pour l'appui qu'il nous a accordé dans la présente étude, ainsi qu'à messieurs les professeurs ROTH et KLEPACZKO dont les précieux conseils nous ont permis de mener ce travail à bonne fin.*

## Bibliographie

- [1] WEBER J D.  
Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse.  
*Cahiers du groupe français de rhéologie 15 novembre 73*
- [2] COLEMAN et GURTIN  
Thermodynamics with internal state variables  
*The journal of chemical physics volume 47, number 2 15 July 1967*
- [3] MANDEL J  
Cours de mécanique des milieux continus.  
*Eyrolles, Paris (1966)*
- [4] BELOUETTAR S.  
Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse .  
*Rapport de stage de D E A, soutenu le 29 juin 93 à l'ISGMP.*
- [5] BASSOUT -LELLICH M  
Sur la théorie des milieux viscoélastiques standards.  
*thèse de l'université de METZ (1986).*