

ISSN 1149 - 0039

Les Cahiers de Rhéologie



GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Président : JM. PIAU

Trésorier : R. BLANC

Secrétaire : R. GAUDU

ENSCP

351 cours de la Libération

33405 TALENCE CEDEX

Tél. 56 84 66 88

Fax. 56 84 66 68

SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS

Les Cahiers paraissent deux à trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement.

Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant
au Secrétariat du Groupe moyennant une participation au frais.

S. KACI

Directeur Adjoint chargé de la post-graduation et de la recherche
Université de Tizi-Ouzou - Tizi-Ouzou (Algérie)

J.-C. ROTH

Professeur, LPMM, URA CNRS 1215

Université de Metz - Ile du Saulcy - 57045 METZ cedex 01

Les Cahiers de Rhéologie

SOMMAIRE DU VOLUME XI, n° 2

MAI 1993

ARTICLES

- Comportement Rhéologique de suspensions colloïdales concentrées monodispersées et bidisperséesp. 45

A - Matériels et méthodes

I. TALBI, D. QUEMADA

Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico-Chimique,
CNRS URA 343 - Université Paris VII
2 place Jussieu - 75005 PARIS

- Application du modèle de la fissure fictive à la détermination de courbes de résistance dans le boisp. 58

T. MEHINTO, G. VALENTIN

Laboratoire de Rhéologie du Bois de Bordeaux
UMR 123 CNRS - INRA - Université Bordeaux 1
BP 10 - 33610 CESTAS-GAZINET

- Ecoulements secondaires de fluides non-newtoniens dans des tubes rectilignesp. 72

G. MAYNE

Département de Mathématique - Université Libre de Bruxelles
Campus Plaine, C.P. 218/1
B-1050 Bruxelles - Belgium

- Etude des réactions d'encombrement des granulats dans la mise en œuvre du béton fraisp. 88

The Study of aggregate bulkiness reactions in fresh concrete

S. KACI

Directeur Adjoint chargé de la post-graduation et de la recherche
Université de Tizi-Ouzou - Tizi-Ouzou (Algérie)

J-C. ROTH

Professeur, LPMM, URA CNRS 1215
Université de Metz - Ile du Saulcy - 57045 METZ cedex 01

COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE SUSPENSIONS COLLOIDALES CONCENTREES MONODISPERSEES ET BIDISPERSEES.

A. Matériels et méthodes

TALBI I., et QUEMADA D.

Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico chimique

CNRS URA 343 - Université Paris VII

2 place Jussieu - 75005 PARIS

RESUME

Ce travail a porté sur l'étude du comportement rhéologique des suspensions colloïdales concentrées monodispersées et bidispersées de particules de latex. Un modèle de viscosité mis au point par un des auteurs^{8,13} pour les suspensions monodispersées a été étendu aux suspensions colloïdales bidispersées, en utilisant l'expression de la fraction de packing maximum d'un mélange de sphères rigides développée par Ouchiya et Tanaka⁹.

ABSTRACT

The present work is devoted to rheological behavior of monodispersed and bidispersed concentrated colloidal suspensions of latex particles. A viscosity model established by one of the authors^{8,13} for monodispersed suspensions is extended to bidispersed colloidal suspensions by using the expression of the maximum packing fraction developed by Ouchiya and Tanaka⁹ for bidispersed suspensions of rigid spheres.

INTRODUCTION

La viscosité des suspensions monodispersées concentrées de particules sphériques rigides peut être exprimée, en fonction de la fraction volumique ϕ et de la fraction de packing maximum ϕ_p de la suspension, sous la forme¹ d'une fonction croissante de ϕ qui diverge quand $\phi = \phi_p$:

$$\eta_r = (1 - \phi / \phi_p)^{-q}$$

Dans le cas des suspensions concentrées de particules non colloïdales qui montrent un comportement newtonien, plusieurs expériences et théories^{2,3,4,5} ont permis de voir que

l'ajout de "petites" particules (S) à une suspension concentrée de "grosses" particules (L) diminuait la viscosité de celle-ci, bien que la suspension soit alors plus concentrée. La viscosité de tels systèmes bidispersés a pu être décrite⁶ par une expression du type cité plus haut^{7,8} :

$$\eta_r = (1 - \phi / \phi_{MB})^{-2}$$

où $\phi (= \phi_S + \phi_L)$ représente la fraction volumique totale et ϕ_{MB} la fraction de packing maximum du mélange bidispersé. Pour cette dernière, un modèle d'empilement géométrique⁹ a été utilisé, qui donne ϕ_{MB} en fonction de la distribution des tailles et des rapports des rayons des particules.

Le travail qui est présenté ici a consisté en l'étude du comportement rhéologique de suspensions colloïdales concentrées monodispersées et bidispersées de particules de latex.

Les systèmes colloïdaux concentrés de particules sphériques mettent en jeu principalement des interactions browniennes, de van der Waals, et électrostatiques. L'étude du comportement rhéologique de ces systèmes nécessite la prise en compte de ces différentes interactions, et des interactions hydrodynamiques qui interviennent sous l'effet du cisaillement. Ces systèmes ont un comportement rhéologique non newtonien, avec une viscosité (Fig.1) présentant deux plateaux newtoniens limités à très faible et très fort cisaillement, qui encadrent un domaine rhéofluidifiant.

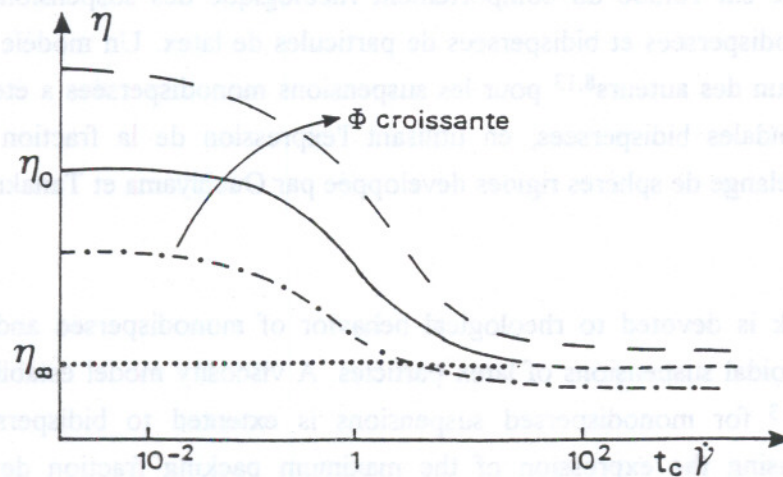


Fig.1. Viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement relative et de la fraction volumique.

Le but de cette étude est de proposer une description de ces systèmes colloïdaux au moyen d'un modèle basé sur une approximation de sphères dures (dans le cas où les répulsions électrostatiques sont prépondérantes).

Dans une 1^{ère} partie (partie A), nous décrivons les systèmes étudiés, et les rhéomètres utilisés, ainsi que la méthode proposée pour la modélisation de la viscosité des suspensions colloïdales concentrées monodispersées et bidispersées.

Une 2^{ème} partie (partie B) sera consacrée à l'application de la modélisation proposée aux deux latex purs, ce qui permettra de les caractériser et, à partir de ces caractérisations, de modéliser des mélanges bidispersés.

I. MATERIELS

I. 1 SYSTEMES ETUDIES

Pour étudier l'effet de la bidispersité sur le comportement rhéologique des suspensions colloïdales de particules sphériques, nous avons étudié deux latex fournis par la Société Rhône-Poulenc et dont les caractéristiques sont les suivantes.

I.1.1 GRANULOMETRIE

a/ LATEX POLYSTYRENE

L'observation au microscope électronique d'un échantillon de ce latex permet de voir (Fig.2) une faible variation du diamètre des particules.

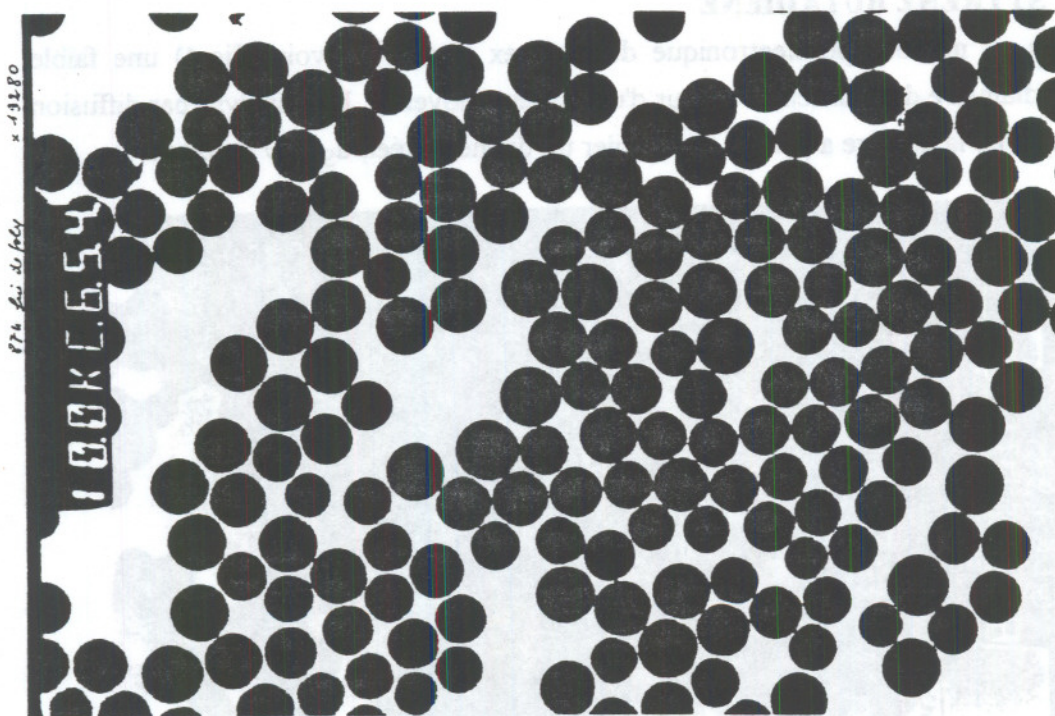


Fig.2. Microscopie électronique du latex Polystyrène.

Un diamètre moyen est calculé à partir de mesures, soit de diffraction de la lumière (granulomètre CILAS) (Fig.3) (valeur obtenue $d_L \cong 400$ nm), soit de diffusion quasi-élastique de la lumière (valeur obtenue $d_L \cong 400 \pm 20$ nm).

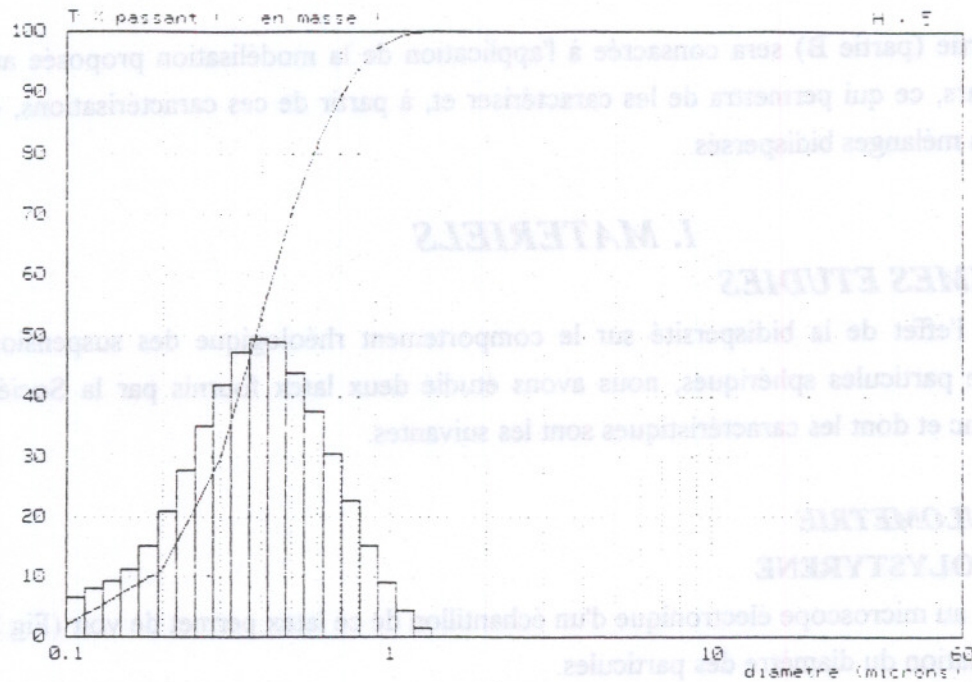


Fig.3. Distribution granulométrique du latex Polystyrène.

b/ LATEX STYRENE BUTADIENE

L'observation au microscope électronique de ce latex permet de voir (Fig.4) une faible variation du diamètre des particules autour d'une valeur moyenne. Une analyse par diffusion quasi-élastique de la lumière a permis de calculer un diamètre réel, $d_s \approx 80 \pm 10$ nm.

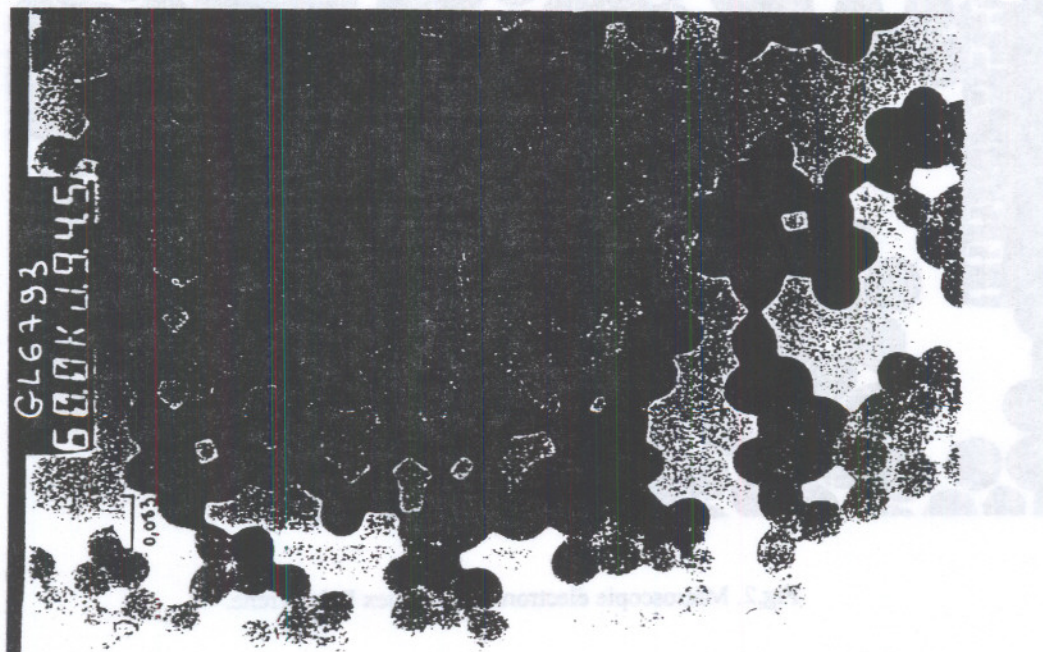


Fig.4. Microscopie électronique du latex Styrene Butadiène.

La suspension de styrène-butadiène montre une aptitude à former des films de polymère après élimination de la phase aqueuse.

1.1.2 DENSITES DE CHARGE ELECTRIQUE

Quand ils sont en suspension, ces deux latex sont stabilisés électrostatiquement par des groupements distribués à la surface des particules et dont l'ionisation partielle fait apparaître des charges électriques (ici négatives). Les dosages des acides superficiels (par titration potentiométrique) permettent de constater que le Polystyrène est peu chargé, tandis que le Styrène-Butadiène est très fortement chargé. Les valeurs des taux d'acides superficiels par unité de masse de polymère, pour ces deux latex, sont reportées sur le tableau T1 :

TABLEAU T1:

Latex	acides superficiels (μ eq.acide/g. polymère sec)	
	acides forts	acides faibles
Polystyrène	4	9
Styrène-Butadiène	64	590

Quand tous les acides sont supposés dissociés, le calcul de la densité de charge donne les valeurs suivantes :

$$q_L \cong 8,8 \mu\text{C}/\text{cm}^2.$$

$$q_S \cong 89 \mu\text{C}/\text{cm}^2.$$

La valeur obtenue pour le latex Styrène Butadiène excède la densité de charge "maximale".

1.2 APPAREILS UTILISES

Nous avons réalisé une étude rhéologique sur les systèmes décrits précédemment et sur leurs mélanges en utilisant deux rhéomètres, le Carri-Med CS100 (Controlled Stress 100) et le Contraves LS40 (Low Shear 40).

1.2.1 RHEOMETRE CARRI-MED CS100

Le rhéomètre Carri-Med CS100 est un viscosimètre de Couette à contrainte imposée. La géométrie de mesure utilisée est un coaxial cylindrique dont le cylindre intérieur (rotor) possède une extrémité conique. Cette géométrie permet d'explorer des gammes de cisaillement allant jusqu'à 600 s^{-1} , ce qui fixe une limite supérieure à τ , telle que $\tau_{\text{max}} = \tau(600)$. Elle fixe aussi une limite inférieure à la contrainte limite ($\tau_{\text{inf}} = 0,1 \text{ Pa.}$) en dessous de laquelle les mesures ne sont plus fiables.

Des mesures d'étalonnage ont été faites avec des huiles étalons (huile de silicone) ayant les viscosités suivantes : 5, 10, 20, 50 et 100 cSt (à 25°C). La comparaison des résultats

expérimentaux aux valeurs nominales des viscosité, nous a permis de définir le domaine de validité des mesures rhéologiques effectuées sur Carri-Med (Fig.5).

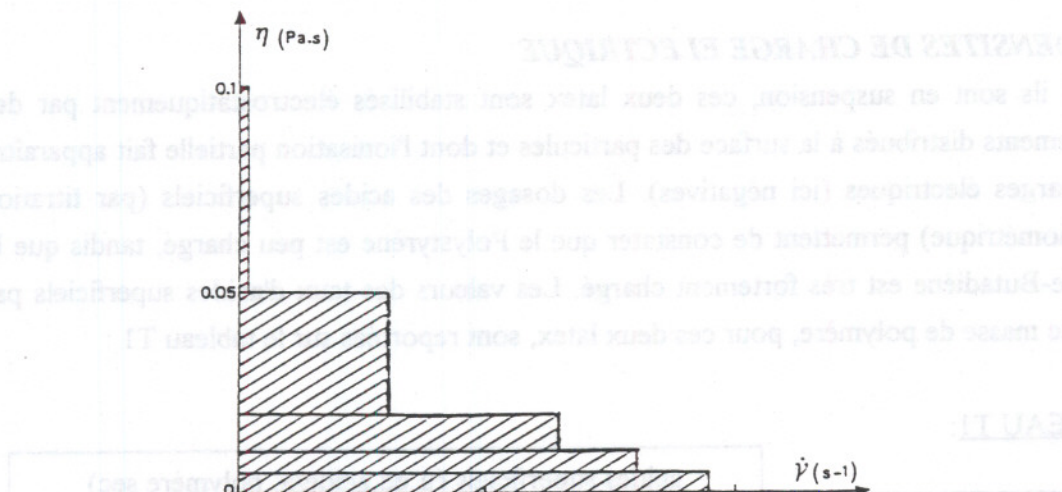


Fig.5. Etalonnage du Carri Med CS100. //// Domaine de non validité des mesures rhéologiques.

1.2.2 RHEOMETRE CONTRAVES LS40

Le rhéomètre Contraves LS40 est un viscosimètre de Couette à cisaillement imposé. La géométrie de mesure utilisée est un système à cylindres coaxiaux dont le cylindre intérieur possède une extrémité conique. Cette géométrie permet d'explorer des gammes de contrainte de cisaillement allant jusqu'à 1,6 Pa et des gammes de vitesses de cisaillement allant de 10^{-2} jusqu'à $120 s^{-1}$.

Nous avons effectué des mesures d'étalonnage de ce système de mesure, en utilisant les mêmes huiles étalons que pour le Carri-Med. Une représentation (Fig.6) de même type que celle de la figure 5 permet, pour le système utilisé, de définir le domaine de validité des mesures rhéologiques.

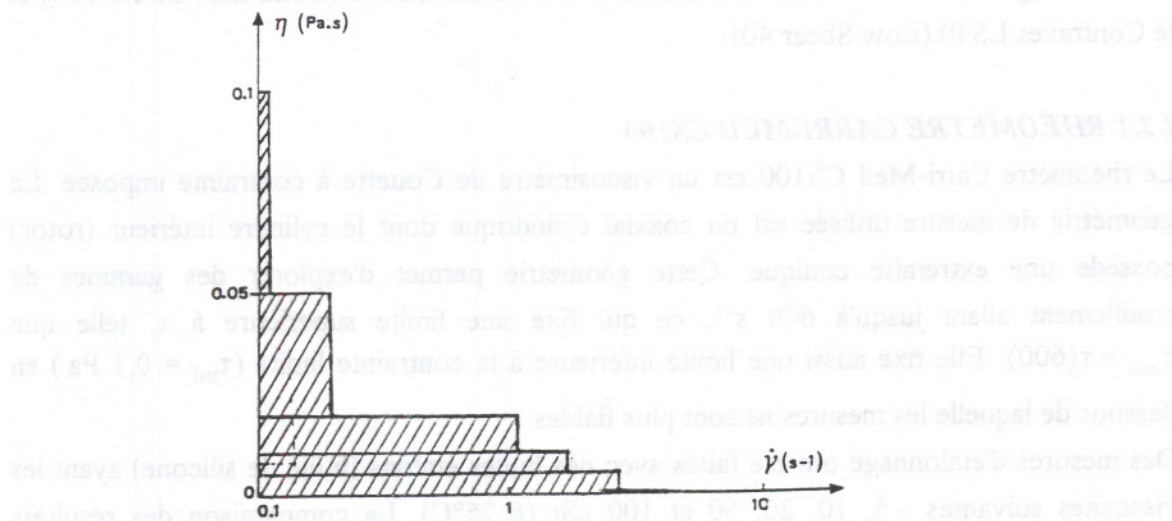


Fig.6. Etalonnage du Contraves LS40. //// Domaine de non validité des mesures rhéologiques.

II. METHODES

Les suspensions de sphères dures, si elles sont suffisamment concentrées, se comportent pratiquement toujours comme des fluides rhéofluidifiants avec une viscosité qui croît en fonction de la fraction volumique. Dans le cadre de ce travail, nous avons cherché à développer un modèle rhéologique pour les suspensions de particules colloïdales, et ce en faisant une approximation de sphères dures pour ces particules.

II.1 APPROXIMATION DE SPHERES DURES

Dans les suspensions de particules chargées, quand les répulsions électrostatiques dominent toutes les autres forces, les particules en suspension peuvent obéir au modèle de sphères dures¹⁰, selon lequel le rayon effectif de ces particules est donné par :

$$a_{\text{eff}} = a + \delta \quad (1)$$

où δ est une longueur proportionnelle à l'épaisseur de la double couche ionique,

$$\delta = \xi \lambda_D \quad (2)$$

ξ étant un facteur dépendant de l'énergie d'interaction entre particules, et λ_D la longueur de Debye caractérisant l'épaisseur de la double couche ionique.

Le système de particules chargées peut alors être considéré comme une suspension de sphères dures ayant une fraction volumique effective ϕ_{eff} qui s'exprime en fonction de la fraction volumique réelle ϕ par la relation :

$$\phi_{\text{eff}} = \phi (a_{\text{eff}} / a)^3 = \phi (1 + \delta / a)^3 \quad (3)$$

C'est cette fraction volumique effective qui va être prise en compte dans le calcul de la viscosité de ces systèmes.

Dans le cas des suspensions concentrées de particules chargées, nous avons pris en compte l'effet de la concentration en utilisant pour l'épaisseur de la double couche ionique, une longueur effective de Debye, λ_{Deff} , au lieu de la longueur classique λ_D . Cette longueur effective, proposée par Russel¹¹, tient compte de l'effet de la concentration à travers un paramètre Q fonction de la densité de charge q des particules. Elle s'écrit :

$$\lambda_{\text{Deff}} = \kappa_{\text{eff}}^{-1} = \kappa_{\infty}^{-1} (1 + Q)^{-1/2} \quad (4)$$

$$\text{où} \quad \kappa_{\infty} = ze(2N_A / \epsilon k_B T)^{1/2} \quad (5)$$

$$Q = 3\phi q / 2(1 - \phi) ze a N_A \quad (6)$$

N_A étant le nombre d'Avogadro, z la valence ionique (nous supposons ici un électrolyte symétrique $z = z^+ = z^-$), e la charge électronique, ϵ la permittivité du fluide suspensé, et I la force ionique totale.

II.2 VISCOSITE NON NEWTONIENNE, modèle structural de viscosité

De nombreux auteurs^{12,7} ont tenté de décrire le comportement non newtonien, mais un nombre beaucoup plus restreint de travaux^{1,13} se sont appuyés sur des relations donnant la viscosité en fonction à la fois de la vitesse de cisaillement et de la fraction volumique. Nous

nous limitons ici au rappel du modèle structurel proposé par un des auteurs^{8,13}. Pour exprimer la dépendance de la viscosité des suspensions concentrées, en fonction de la vitesse de cisaillement, il a supposé l'existence "d'unités structurales" (amas, agrégats,...) qui évoluent entre état complètement structuré et un état complètement déstructuré, un état intermédiaire, fonction du cisaillement, étant obtenu sous conditions stationnaires. Il en a déduit un modèle à quatre paramètres : η_0 , η_∞ , t_c et p , qui s'exprime comme suit :

$$\eta = \eta_f (1 - \phi_{\text{eff}} / \phi_p)^{-2} \quad (7)$$

ϕ_{eff} est la fraction volumique effective (eq.3) et ϕ_p la fraction de packing maximum sous cisaillement γ , qui s'exprime par

$$\phi_p^{-1} = \phi_\infty^{-1} + \left((\phi_0^{-1} - \phi_\infty^{-1}) / (1 + (t_c \gamma)^p) \right) \quad (8)$$

où ϕ_0 et ϕ_∞ sont les fractions de packing maximum correspondant à $\gamma \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow \infty$, t_c le temps caractéristique lié aux cinétiques structurales, et p un paramètre semi empirique relié à la pente de la courbe de viscosité.

Dans le cas des dispersions de silices stabilisées stériquement de Kruif et ses collaborateurs^{14,15} ont déterminé les valeurs $\phi_0 = 0,63 \pm 0,02$ et $\phi_\infty = 0,71 \pm 0,02$, valeurs qui ont été confirmées récemment par Boger et ses collaborateurs¹⁶ sur des systèmes de même nature. Ces fractions de packing limites peuvent être considérées comme témoins des structures à $\gamma \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow \infty$ on peut donc écrire :

$$\eta_{0,\infty} = \eta_f (1 - \phi_{\text{eff}}^{0,\infty} / \phi_{0,\infty})^{-2} \quad (9)$$

$$\text{où } \phi_{\text{eff}}^{0,\infty} = \phi (1 + \delta_{0,\infty} / a)^3 \quad (10)$$

Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé ce modèle structurel :

- dans un premier temps, pour l'ajustement des rhéogrammes expérimentaux $\eta(\gamma)$, ce qui nous a permis d'obtenir les viscosités limites η_0 et η_∞ .
- dans un deuxième temps, pour modéliser ces viscosités limites dans le cas :
 - des suspensions colloïdales monodispersées pour différents ajouts de sel.
 - des suspensions colloïdales bidispersées, en utilisant une fraction volumique effective et une fraction de packing maximum d'un mélange de sphères rigides.

II.3 SUSPENSIONS DE SPHERES DURES MONODISPERSÉES

Pour modéliser les viscosités limites η_0 et η_∞ des suspensions colloïdales monodispersées, nous nous sommes placés sous l'hypothèse d'une suspension de sphères dures, pour lesquelles les répulsions électrostatiques sont dominantes, et nous avons utilisé les équations (3) et (7), avec :

$$\delta = \xi \kappa_{\text{eff}}^{-1} \quad (11)$$

Dans le cas où nous faisons varier la force ionique par addition de sel, l'expression de κ_{eff} donnée par l'équation (4) peut s'écrire :

$$\kappa_{\text{eff}}^2 = \kappa_{\text{o.o}}^2 (I_1 + I_{\text{sel}} + Q) \quad (12)$$

où I_1 est la force ionique "initiale" de la suspension (avant ajout de sel) et I_{sel} la force ionique supplémentaire apportée par l'ajout de sel, ces deux grandeurs étant définies par rapport au volume du fluide suspendant.

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la variation de δ^{-2} en fonction de I_{sel} qui correspond à une variation linéaire. D'après l'équation (11) nous pouvons, en effet écrire :

$$\delta^{-2}(I_{\text{sel}}) = (\kappa_{\text{o.o}} / \xi)^2 (I_1 + Q + I_{\text{sel}}) \quad (13)$$

II.3.2 DETERMINATION EXPERIMENTALE DE δ^{-2}

Cette détermination peut se faire à partir de la connaissance des viscosités limites $\eta_0(I_{\text{sel}})$ et $\eta_{\infty}(I_{\text{sel}})$, pour chacun des deux systèmes monodispersés et ce, en utilisant l'expression suivante

$$\delta_{\text{o.o}}^{-2} = a^{-2} \left((\phi_{\text{o.o}} / \phi) (1 - \eta_{\text{ro.o}}^{-1/2})^{1/3} - 1 \right)^{-2} \quad (14)$$

Pour une suspension colloïdale monodispersée ayant une fraction volumique ϕ , l'équation (14) permet de calculer les valeurs de $\delta_{\text{o.o}}^{-2}$ correspondant aux viscosités limites $\eta_{\text{o.o}}(I_{\text{sel}})$.

D'après l'expression théorique (eq.13), ces valeurs $\delta^{-2} = \delta^{-2}(I_{\text{sel}})$ doivent se placer sur une droite de pente ξ et d'abscisse à l'origine $-(I_1 + Q)$. Une régression linéaire est effectuée sur les données expérimentales et permet d'obtenir les paramètres ξ et $(I_1 + Q)$. Remarquons qu'une connaissance précise de la valeur de la densité de charge permettrait alors de calculer la valeur de la force ionique "initiale" de la suspension monodispersée.

Une fois les paramètres ξ et $(I_1 + Q)$ obtenus (et tant que la loi linéaire est vérifiée), le calcul des viscosités limites des systèmes monodispersés devient possible pour toute force ionique totale connue.

Cette analyse sera effectuée indépendamment pour chacun des deux latex, et donnera quatre régressions linéaires, c'est à dire quatre couples $[\xi, I_1 + Q]$, correspondant aux limites $\gamma \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow \infty$ pour chacun des deux latex.

II.4 SUSPENSIONS DE SPHERES DURES BIDISPERSEES

Pour modéliser les viscosités limites des suspensions colloïdales bidispersées, nous avons supposé que :

- 1) les deux types de particules continuent à se comporter dans le mélange comme des sphères dures, c'est à dire caractérisées par leurs rayons effectifs $a_{\text{seff}} (=a_S + \delta_S)$ (pour les "petites" particules) et $a_{\text{Leff}} (=a_L + \delta_L)$ (pour les "grosses" particules).
- 2) chaque composant ("S" et "L") dans le mélange est caractérisé par "ses" deux relations linéaires $\delta_{\text{o.o}}^{-2}(I)$ obtenues par des régressions linéaires sur les données des latex purs.

- 3) la fraction de packing maximum des mélanges de sphères dures est calculée en utilisant l'expression théorique développée pour des systèmes de "grosses" sphères rigides⁹.
- 4) l'expression de la viscosité d'un système bidispersé de sphères rigides⁶ reste valable, pour décrire les viscosités limites des mélanges bidispersés de particules colloïdales.

$$\eta_{ro,\infty} = \left(1 - \frac{\phi_{\text{eff}}^{0,\infty}}{\phi_{\text{MB}}^{0,\infty}}\right)^{-2} \quad (15)$$

$$\text{où } \phi_{\text{eff}}^{0,\infty} = \phi \left(\left(\frac{\phi_s}{\phi}\right) (1 + \delta_s^{0,\infty} / a_s)^3 + \left(\frac{\phi_L}{\phi}\right) (1 + \delta_L^{0,\infty} / a_L)^3 \right) \quad (16)$$

est la fraction volumique effective du mélange de sphères dures avec $\phi_L = \phi - \phi_s$, et où ϕ_{MB} est sa fraction de packing maximum qui est rappelée au paragraphe suivant.

II.4.1 FRACTION DE PACKING MAXIMUM D'UN MELANGE BIDISPERSE DE SPHERES DURES

Ouchiyama et Tanaka⁹ ont proposé une expression analytique de la fraction de packing maximum ϕ_{MB} d'un système polydispersé de sphères rigides, expression qui, pour un système bidispersé de sphères rigides peut se mettre sous la forme :

$$\phi_{\text{MB}} = \frac{A}{B + \frac{1}{\bar{n}}(C + E)} \quad (17)$$

$$\text{avec } A = (2a_L)^3 f_L + (2a_s)^3 f_s$$

$$B = (2(a_L - \bar{a}))^3 f_L$$

$$C = \left[(2(a_L + \bar{a}))^3 - (2(a_L - \bar{a}))^3 \right] f_L$$

$$E = (2(a_s + \bar{a}))^3 f_s$$

$$\bar{n} = 1 + \frac{4}{13} (8\phi_p - 1) \bar{a} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_3 + n_4} \right)$$

$$n_1 = (a_L + \bar{a})^2 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\bar{a}}{a_L + \bar{a}} \right) f_L$$

$$n_2 = (a_s + \bar{a})^2 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\bar{a}}{a_s + \bar{a}} \right) f_s$$

$$n_3 = \left[a_L^3 - (a_L - \bar{a})^3 \right] f_L$$

$$n_4 = a_s^3 f_s$$

$$f_L = \frac{\phi_L / a_L^3}{(\phi_L / a_L^3) + (\phi_s / a_s^3)}$$

$$f_s = \frac{\phi_s / a_s^3}{(\phi_L / a_L^3) + (\phi_s / a_s^3)}$$

$$\bar{a} = a_L f_L + a_s f_s$$

ϕ_p = fraction volumique de packing maximum pour un système monodispersé, c'est à dire

$$\phi_p \equiv \phi_0 = 0,637 \quad \text{pour } \gamma \rightarrow 0$$

$$\phi_p \equiv \phi_\infty = 0,71 \quad \text{pour } \gamma \rightarrow \infty$$

Pour le calcul de $\phi_{\text{MB}}^{0,\infty}$ figurant dans l'équation (15) nous utiliserons l'expression (17) en mettant $a_{L\text{eff}}$ et $a_{S\text{eff}}$ à la place de a_L et a_s , ces rayons effectifs apparaissant donc comme les deux seuls paramètres ouverts.

II.4.2 CALCUL DES RAYONS EFFECTIFS DANS LES SUSPENSIONS BIDISPERSEES

La modélisation des suspensions monodispersées a permis d'obtenir une relation linéaire qui caractérise le rayon effectif pour chacun de ces systèmes. Dans le cas des suspensions bidispersées nous avons supposé ces relations toujours valables pour chaque système monodispersé dans le mélange, ce qui nous permet de décrire les variations du rayon effectif des particules en fonction de la force ionique totale du mélange bidispersé, qui s'exprime en fonction des forces ioniques initiales de chaque composant, I_{iS} et I_{iL} par :

$$I = I_{im} + I_{sel}$$

avec
$$I_{im} = I_{iS} (\phi_S / \phi) + I_{iL} (\phi_L / \phi) \quad (18)$$

I_{im} étant la force ionique "initiale" du mélange bidispersé.

L'utilisation des relations linéaires $\delta_{S,L}^{-2} (I_{sel})$ pour un ajout de sel donné, donne

$$\delta_{S,L}^{-2} (I) = (\kappa_{oo} / \xi_{S,L})^2 (Q_{S,L} + I) = (\kappa_{oo} / \xi_{S,L})^2 (Q_{S,L} + I_{im} + I_{sel}) \quad (19)$$

qui permet alors de calculer pour chaque valeur I_{im} les rayons effectifs a_{seff} et a_{Leff} des particules colloïdales. A partir de ces rayons le calcul de la fraction volumique effective et de la fraction volumique de packing maximum est immédiat. Une fois les deux grandeurs ϕ_{eff} et ϕ_{MB} obtenues, l'utilisation de l'équation (15) permet la détermination des viscosités limites η_0 et η_∞ du mélange bidispersé pour chaque valeur de I_{sel} .

Ces valeurs limites sont alors comparées aux valeurs expérimentales avec, comme seul paramètre ouvert, le temps caractéristique t_c . Dans le rhéogramme ($\log \eta, \log \dot{\gamma}$), la variation de ce temps caractéristique représente une translation par rapport à l'axe des $\dot{\gamma}$ (Fig.7), translation qui se fait sans variation de la position des plateaux η_0 et η_∞ et sans modification de la courbure. En ajustant la courbe théorique (modèle) à la courbe expérimentale par la seule variation de t_c , nous pourrions donc estimer si la modélisation proposée est valable ou non pour les systèmes étudiés.

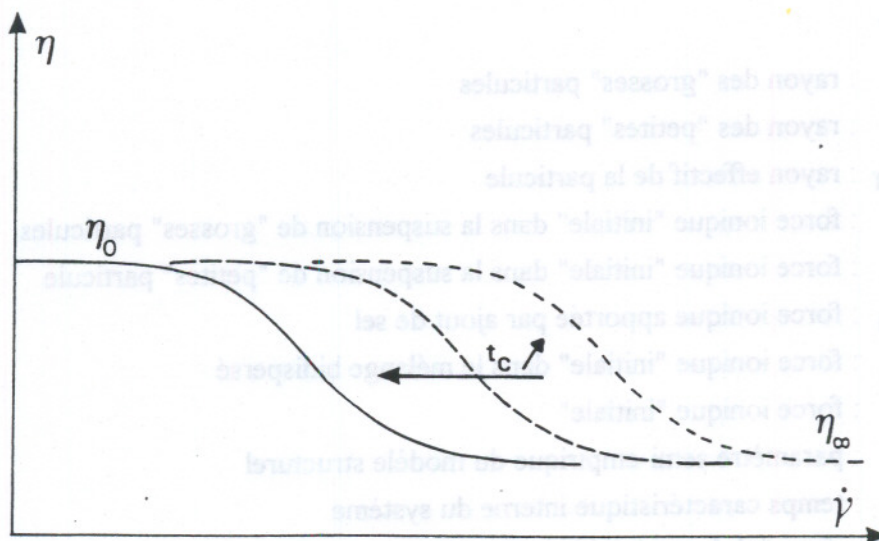


Fig.7. Translation des rhéogrammes ($\log \eta, \log \dot{\gamma}$) parallèlement à l'axe des $\dot{\gamma}$ quand t_c varie.

CONCLUSION

D'ans cette première partie nous avons proposé une modélisation de la viscosité des systèmes colloïdaux bidispersés, cette modélisation a été effectuée en deux étapes :

- 1/ dans le cas des suspensions monodispersées, la méthode utilisée a consisté en l'extension aux suspensions colloïdales d'un modèle mis au point pour les suspensions non colloïdales. Cette extension a été faite à travers l'utilisation d'un rayon effectif (rayon de sphère dure, a_{eff}) supérieur au du rayon réel (a) de la particule. La différence $\delta (= a_{\text{eff}} - a)$ est proportionnelle à l'épaisseur de la double couche ionique (qui prend en compte l'effet de la concentration) et δ^{-2} varie linéairement en fonction de la force ionique. Ceci va permettre de caractériser chaque suspension monodispersée par une relation linéaire $\delta^{-2}(I)$.
- 2/ dans le cas des suspensions bidispersées, nous avons appliqué le modèle de viscosité utilisé pour les suspensions colloïdales monodispersées. Nous avons considéré les mélanges colloïdaux bidispersés comme des suspensions bidispersées de sphères dures dont les rayons sont calculés à partir des relations linéaires $\delta^{-2}(I)$ (obtenues à partir des latex purs), et la fraction de packing maximum est celle donnée par l'expression analytique développée par Ouchiyama et Tanaka⁹ pour un mélange de sphères rigides, bien sûr en remplaçant, là encore, le rayon réel par le rayon effectif de chaque particule.

Dans un prochain article (partie B) cette modélisation sera appliquée à deux latex, un Polystyrène et un Styrene Butadiène, et à leurs mélanges bidispersés.

Ce travail a bénéficié du soutien financier de la société Rhône Poulenc, qui a assuré la fourniture des latex utilisés. Plusieurs de leurs caractéristiques ont été déterminés lors de collaborations étroites avec plusieurs membres du Centre de Recherches d'Aubervilliers, qu'ils en soient remerciés ici.

NOTATIONS

- a_L : rayon des "grosses" particules
- a_S : rayon des "petites" particules
- a_{eff} : rayon effectif de la particule
- I_{iL} : force ionique "initiale" dans la suspension de "grosses" particules
- I_{iS} : force ionique "initiale" dans la suspension de "petites" particule
- I_{sel} : force ionique apportée par ajout de sel
- I_{im} : force ionique "initiale" dans le mélange bidispersé
- I_i : force ionique "initiale"
- p : paramètre semi-empirique du modèle structurel
- t_c : temps caractéristique interne du système
- η : viscosité dynamique la suspension

- η_0 : plateau de viscosité à $\gamma \rightarrow 0$
 η_∞ : plateau de viscosité à $\gamma \rightarrow \infty$
 η_f : viscosité du fluide suspendant
 η_r : viscosité relative de la suspension : η/η_f
 γ : vitesse de cisaillement
 δ : (rayon effectif) - (rayon réel de la particule)
 ϕ : fraction volumique réelle
 ϕ_{eff} : fraction volumique effective
 ϕ_L/ϕ : fraction en volume des "grosses" particules dans le mélange
 ϕ_S/ϕ : fraction en volume des "petites" particules dans le mélange
 ϕ_p : fraction de packing maximum pour une suspension monodispersée
 ϕ_{MB} : fraction de packing maximum pour une suspension bidispersée
 τ : contrainte de cisaillement
 λ_D : longueur de DEBYE
 λ_{Deff} : longueur de DEBYE effective
 ξ : facteur de proportionnalité

REFERENCES

1. Krieger I.M. et Dougherty T.J., *Trans. Soc. Rheol.* **3**, 137-152 (1959).
2. Roscoe R., *British J. Chem. Phys.* **3**, 267-269 (1952).
3. Mooney M., *J. Colloid Sci.* **6**, 162-170 (1951).
4. Farris R.J., *Trans. Soc. Rheol.* **12** (2), 281-301 (1968).
5. Chong J.S., Christiansen E.B. et Baer A.D., *J. Appl. Polym. Sci.* **15**, 2007-2021 (1971).
6. Poslinski A.J., Rayan M.E. et Gupta R.K., Seshadri S.G. et Frechette F.J., *J. Rheol.* **32** (8), 751-771 (1988).
7. Maron S.H. et Pierce P.E., *J. Colloid Sci.* **11**, 80-95 (1956).
8. Quemada D., *Rheol. Acta.* **16**, 82-94 (1977).
9. Ouchiyama N. et Tanaka T., *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **23** (4), 490-493 (1984).
10. Russel W.B., *J. Rheol.* **24** (3), 287-317 (1980).
11. Russel W.B., in *"Theory of Multiphase Flow"* (Ed. R. E. Meyer), 1-34 (Acad. Press 1983).
12. Ree T. et Eyring H., *J. Appl. Phys.* **26** (7), 793-809 (1955).
13. Quemada D., *Rheol. Acta.* **17**, 632-642 (1978).
14. de Kruif C.G., van Iersel E.M.F., Vrij A. et Russel W.B., *J. Chem. Phys.* **83** (89), 4717-4725 (1985).
15. van der Werff J.C. et de Kruif C.G., *J. Rheol.* **33** (3), 421-454 (1989).
16. Andrew D., Jones R., Leary B. et Boger D.V., *J. Colloid Interface Sci.* **147** (2), 479-495 (1991).

APPLICATION DU MODELE DE LA FISSURE FICTIVE A LA DETERMINATION DE COURBES DE RESISTANCE DANS LE BOIS

MEHINTO Théophile et VALENTIN Gérard

Laboratoire de Rhéologie du Bois de Bordeaux UMR 123 CNRS - INRA - Université Bx I
B.P. 10 33610 CESTAS - GAZINET

RESUME

Sur la base de simulations numériques de propagation de fissures à partir du modèle de la fissure fictive (HILLERBORG *et al.*), une approche par les courbes de résistance est développée pour du bois considéré comme un matériau orthotrope à comportement adoucissant. La présente étude fait une analyse comparative des facteurs d'intensité de contraintes en mode I pour trois géométries d'éprouvettes de même épaisseur : la double poutre en flexion (DCB), l'éprouvette compacte de traction (CT) et l'éprouvette de flexion trois points (SENB). Une bonne approximation de la longueur efficace de zone endommagée à la pointe de la fissure conduit à des courbes de résistance à la propagation pratiquement identiques - indépendantes de la géométrie et de la longueur initiale de fissure.

ABSTRACT

An R-curve approach is developed for wood considered as an orthotropic strain-softening material, based on numerical simulations of crack propagation using the fictitious crack model (HILLERBORG *et al.*). This study makes a comparative analysis of the SIFs in mode I for three specimen geometries with the same thickness : double cantilever beam (DCB), compact in tension (CT) and single-edge notched in bending (SENB). A good approximation of the effective fracture process zone length leads to almost identical - independent of specimen geometries and initial crack lengths - crack growth resistance curves.

I - INTRODUCTION

Le caractère adoucissant de certains matériaux (bétons, roches, bois) est illustré par une courbe contrainte (σ)-déformation (ϵ) décroissante après un maximum σ_m . Ce phénomène peut s'expliquer par la présence d'une zone endommagée et l'un des modèles utilisés pour prendre en compte ce comportement est celui de la fissure à zone de cohésion, introduit pour simuler la propagation de fissure dans le béton [8]. Depuis lors, il a été adapté avec succès à l'étude de l'endommagement dans le bois : BOSTRÖM [6] pour le pin d'Ecosse (*Pinus Silvestris*) et ADJANOHOUN [1] pour le peuplier (*Populus Euramericana*).

Le présent travail s'appuie sur les diagrammes de simulation numérique de ce dernier ainsi que sur les résultats expérimentaux de AL-KADDOUR [2]. La prise en compte d'une longueur efficace de la zone d'endommagement permet d'une part de déterminer les courbes de résistance (courbes "R"), d'autre part d'apporter une légère correction aux valeurs résultant des études précédentes. Les paramètres à la rupture pour les trois géométries d'éprouvette en sont

déduits. Le bois étant considéré comme orthotrope d'axes R(radial), L(longitudinal) et T(tangentiel), trois directions essentielles de propagation ont été retenues pour cette étude : RL, TL et TR (Figure 1).

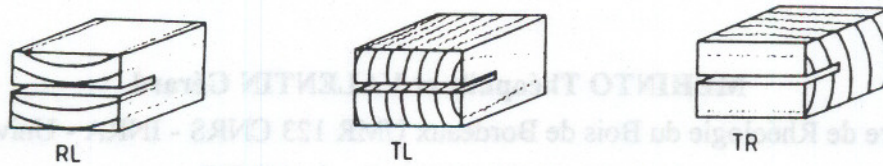


Fig. 1 : Directions de propagation de fissure (le premier indice donne la direction normale au plan de fissure, le deuxième celle de la propagation)

II - APPLICATION DU MODELE DE LA FISSURE FICTIVE AU PEUPLIER

II.1 - Description

Le comportement adoucissant du bois peut être mis en évidence en se référant à un essai de traction asservi en déplacement (Figure 2.a).

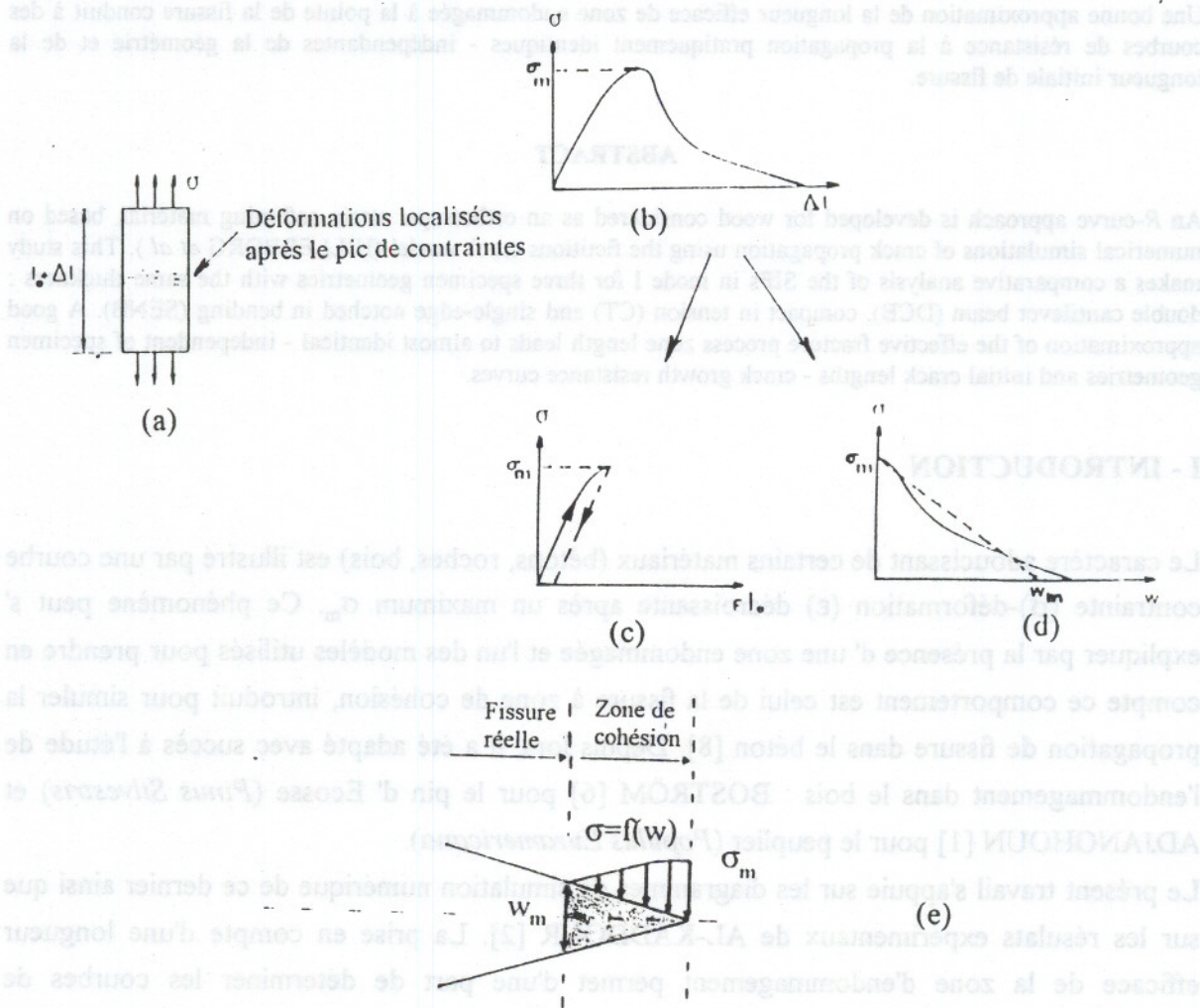


Fig. 2 : Le modèle de la fissure fictive

La partition de la courbe contrainte-déplacement en deux portions (l'une $\sigma-\varepsilon$ pour décrire le matériau hors zone de rupture, l'autre $\sigma-w$ pour le comportement dans cette zone) permet de préciser les caractéristiques du modèle (Fig. 2.c, 2.d):

- dans une éprouvette à macro-fissure initiale, la zone de rupture s'étend dès que la contrainte limite σ_m est atteinte à la pointe ;
- le point où la distance entre les surfaces de rupture est égale au déplacement maximal d'ouverture w_m est le *fond de fissure réelle*; la contrainte normale au plan de fissure est nulle;
- le point où cette contrainte atteint la valeur maximale σ_m et où le déplacement d'ouverture est nul est le *fond de la zone cohésive* (Figure 2.e).

En faisant l' hypothèse simplificatrice que la partie post-pic de la courbe est linéaire (Fig. 2.d), l'énergie de rupture G_F peut être exprimée par:

$$G_F = \int_0^{w_m} \sigma(w) \cdot dw = \frac{\sigma_m \cdot w_m}{2} \quad (1)$$

II.2 - Modélisation numérique par éléments finis

Le principe, détaillé par ailleurs [1], consiste à analyser la structure en plusieurs étapes en modifiant pour chaque étape une condition aux limites au fond de la fissure ce qui amène à calculer les forces de cohésion, déplacements, réactions et contraintes. La fissure se propage lorsque la contrainte atteint la valeur limite σ_m (préalablement déterminée par l'expérience).

Les éléments utilisés pour cette étude (quadrilatères à 8 noeuds) ont permis de simuler la propagation de fissures dans des éprouvettes de peuplier sollicitées en mode I. Des tracés de courbes P- δ qui en découlent, il est déduit les paramètres de rupture : facteurs d'intensité de contraintes K_{IC} et énergie de rupture G_F .

II.3 - Facteurs d' intensité de contraintes pour diverses éprouvettes.

Les formes d'éprouvettes et leurs dimensions sont données sur les figures ci-dessous.

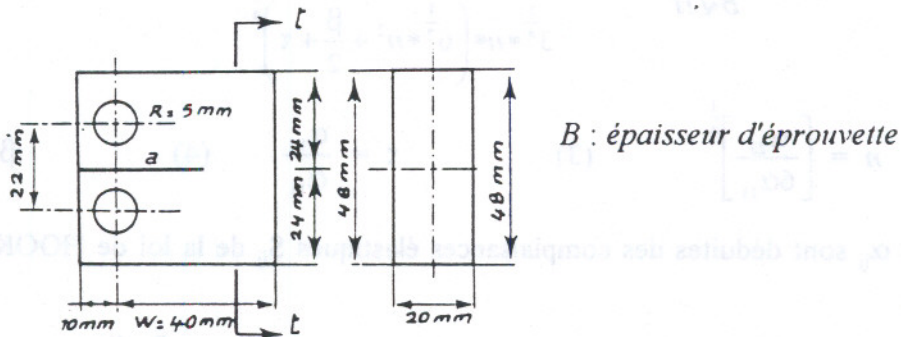


Fig. 3 : Epreuve CT

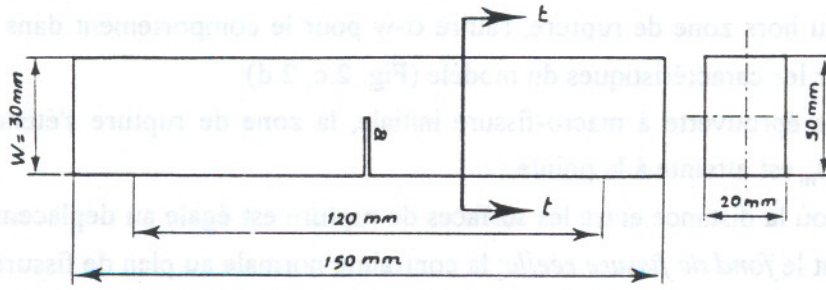


Fig. 4 : Epreuve SENB

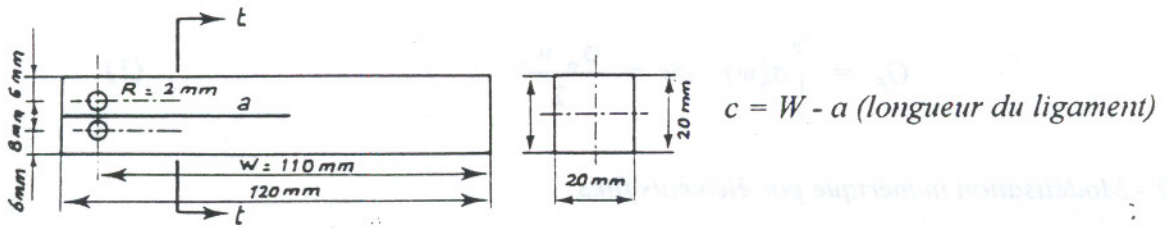


Fig. 5 : Epreuve DCB

Les valeurs de facteurs d'intensité de contraintes sont calculées à l'aide de polynômes de calibration tenant compte du caractère orthotrope du matériau considéré et des différentes courbes de simulation numérique.

Les différentes expressions sont extraites de la référence [12]. A ce sujet, signalons pour l'éprouvette DCB une erreur de transcription dans la formule. Nous donnons ici l'expression exacte:

$$K_I(a) = \frac{P}{B\sqrt{H}} * \frac{\left\{ 12 * \left(n + \frac{a}{H} \right)^2 * \left[1 + \left(\frac{nH}{c} \right)^{\frac{9}{2}} \right]^2 + \frac{6\beta}{5} \right\}^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}} * n * \left(6^{\frac{1}{2}} * n^2 + \frac{\beta}{2} + \tau \right)^{\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

$$n = \left[\frac{\alpha_{22}}{6\alpha_{11}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

$$\tau = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\alpha_{66}}{\alpha_{11}} \quad (5)$$

où les α_{ij} sont déduites des complaisances élastiques S_{ij} de la loi de HOOKE en déformation plane:

$$\epsilon_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \sigma_{ij} \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3} \cdot S_{j3}}{S_{33}} \quad i, j = 1, 2 \quad (6)$$

II.4 - Résultats de la modélisation

Sur la base des courbes numériques $P-\delta$ détaillés par ailleurs [1] et dont un exemple est donné (Figure 6), les relations (2) à (6) ont permis de déterminer les facteurs d'intensité de contraintes critiques résumés dans le Tableau 1. Il ressort qu'à configuration fixée, on observe des différences non négligeables entre géométries d'éprouvettes, alors que le facteur d'intensité de contraintes devrait être une caractéristique intrinsèque du matériau. L'approche par les courbes R introduite ici tente d'expliquer ces différences et d'apporter une correction à la méthode de calcul utilisée jusqu'alors.

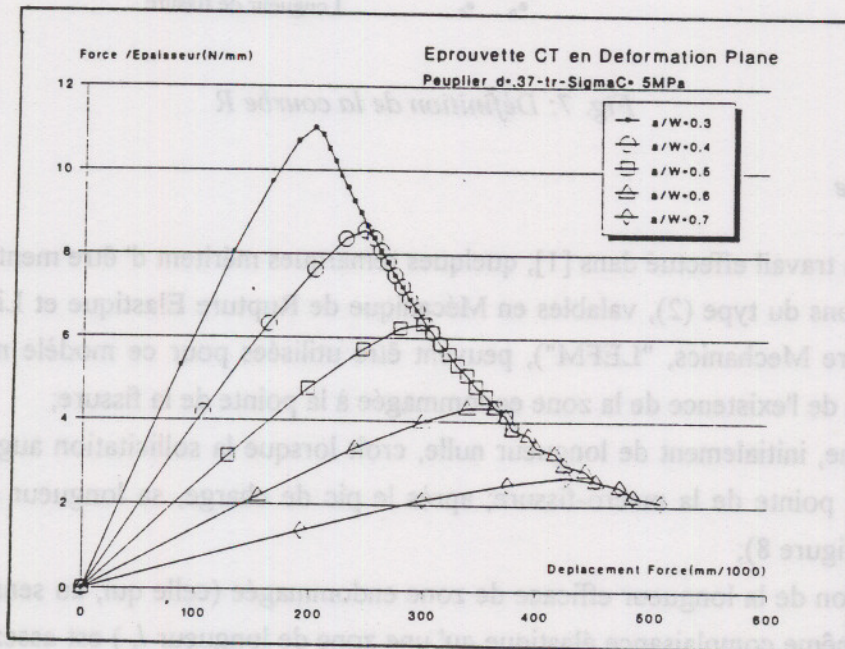


Fig. 6 : Exemple de courbe numérique $P-\delta$ [1] pour la géométrie CT en configuration TR

III - APPROCHE PAR LES COURBES R

III.1 - Définitions

Les courbes R traduisent la résistance à la rupture d'un matériau lors de la propagation sous-critique de fissures. Dépendantes de l'épaisseur de l'éprouvette considérée, elles donnent une idée de la ténacité du matériau en fonction de l'extension de la fissure. Il est possible d'exprimer ces courbes en termes de K_R (facteur d'intensité de contraintes) ou de G_R (taux de restitution d'énergie). C'est la première option qui a été retenue dans ce qui suit. Chaque courbe R peut être associée avec des courbes de facteurs d'intensité de contraintes à charge constante (Figure 7) pour déterminer la force critique. La courbe $K(a, P = C^{ste})$ unique qui se développe tangentiellement à la courbe R définit la valeur critique K_R^* du facteur d'intensité de contraintes et la force à la rupture.

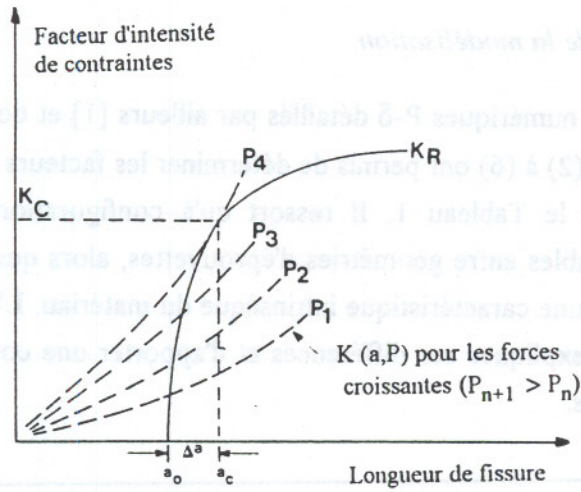


Fig. 7: Définition de la courbe R

III.2 - Principe

Par rapport au travail effectué dans [1], quelques remarques méritent d'être mentionnées :

- (a) - les relations du type (2), valables en Mécanique de Rupture Élastique et Linéaire (Linear Elastic Fracture Mechanics, "LEFM"), peuvent être utilisées pour ce modèle non-linéaire en tenant compte de l'existence de la zone endommagée à la pointe de la fissure;
- (b) - cette zone, initialement de longueur nulle, croît lorsque la sollicitation augmente tout en étant liée à la pointe de la macro-fissure; après le pic de charge, sa longueur devient quasi-constante l_f (Figure 8);
- (c) - l'estimation de la longueur efficace de zone endommagée (celle qui, au sens de la LEFM, produirait la même complaisance élastique qu'une zone de longueur l_f) est assez délicate. Des travaux effectués sur d'autres matériaux, bétons et céramiques notamment [5], indiquent des valeurs comprises entre $0.42 \cdot l_f$ et $0.57 \cdot l_f$.

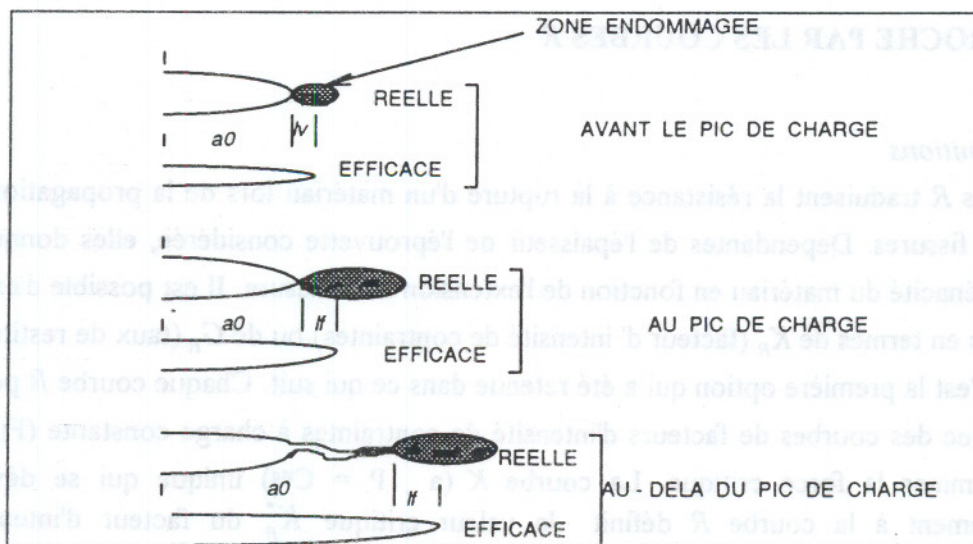


Fig. 8 : Zone endommagée à diverses étapes [5]

La méthode proposée ici pour le bois reprend une approximation de ce type en introduisant le terme correctif Δa dans l'expression de la longueur de fissure efficace a_e .

$$a_e = a_0 + \Delta a \quad \Delta a = 0.5 * l_v \text{ ou } 0.5 * l_f \quad (7),$$

selon que l'endommagement a lieu avant ou après le pic de charge.

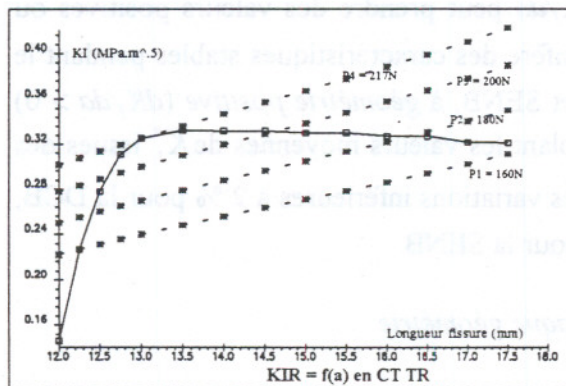
Les valeurs de K_R seront calculées avec cette longueur efficace.

IV - RESULTATS ET DISCUSSION

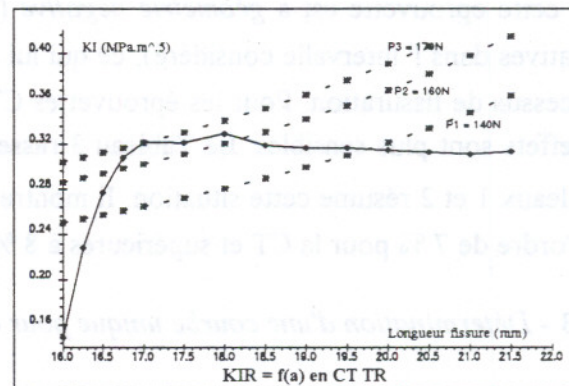
Sur cette base, des courbes K_R ont été tracées en vue de déterminer les paramètres de rupture.

IV.1 - Effet de la longueur initiale de fissure sur les courbes R

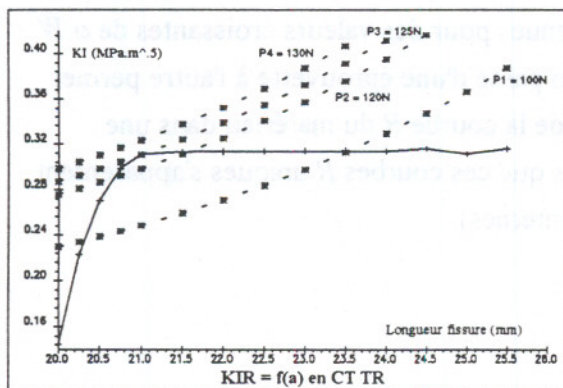
A configuration de propagation et à géométrie d'éprouvette fixées, les tracés de K_R pour différentes longueurs initiales ($0.3 \leq a/W \leq 0.7$) font ressortir des profils pratiquement identiques. Un exemple en est donné pour la géométrie CT dans la direction TR (Figures 9). On peut parfois noter une légère décroissance des courbes dans les phases terminales. Ce phénomène trouve son interprétation dans une possible contraction de la zone endommagée due à la fin imminente du ligament [4], [5], [10].



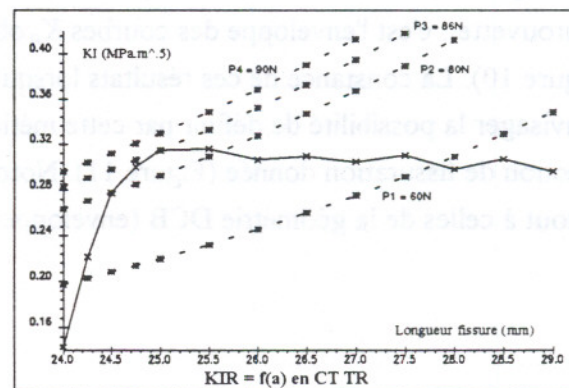
9 a : $a/W = 0.3$



9.b : $a/W = 0.4$



9 c : $a/W = 0.5$



9.d : $a/W = 0.6$

Fig. 9 : Exemple de courbes K_R en mode I avec tracé des charges

D'autre part, résumées dans le Tableau 2 les valeurs critiques des facteurs d'intensité de contraintes s'avèrent uniformément croissantes en fonction des longueurs initiales dans le cas de la propagation RL (hormis le cas $a/W = 0.7$ de la DCB qui s'explique par la décroissance mentionnée plus haut) alors que pour les directions TL et la TR, la seule tendance véritable qui se dégage semble être, pour la géométrie SENB, celle d'une légère croissance et pour la DCB une relative stabilité détaillée plus loin.

IV.2 - Effet de la géométrie d'éprouvette sur les valeurs critiques K_I^*

Le Tableau 2 montre qu'à configuration fixée les différences entre valeurs critiques de K_I^* sont minimales, et ce quel que soit le rapport a/W . En d'autres termes, ces valeurs K_I^* semblent indépendantes de la géométrie d'éprouvette. En tout état de cause, les écarts entre valeurs moyennes déduites de cette étude et valeurs de référence sont nettement plus réduits que ceux observés dans le Tableau 1.

En comparant ces deux Tableaux, on peut du reste noter que la modification apportée par l'introduction de la relation (7) a des effets variés suivant la géométrie. Pour l'éprouvette DCB, les valeurs de K_I^* varient peu d'un tableau à l'autre. Ceci peut s'expliquer par la valeur élevée de W ($W = 110 \text{ mm}$) si bien que $\Delta a/W$ est très faible. Cet argument peut être étayé par le fait que cette éprouvette est à *géométrie négative* (dK_I/da peut prendre des valeurs positives ou négatives dans l'intervalle considéré), ce qui lui confère des caractéristiques stables pendant le processus de fissuration. Pour les éprouvettes CT et SENB, à *géométrie positive* ($dK_I/da > 0$) les effets sont plus sensibles. Le Tableau 3 rassemblant les valeurs moyennes de K_I^* issues des Tableaux 1 et 2 résume cette situation. Il montre des variations inférieures à 2 % pour la DCB, de l'ordre de 7 % pour la CT et supérieures à 8 % pour la SENB.

IV.3 - Détermination d'une courbe unique pour chaque géométrie

A partir des remarques précédentes concernant la quasi-indépendance des courbes R vis-à-vis des longueurs initiales de fissure, on peut déterminer une courbe unique pour chaque géométrie d'éprouvette : c'est l'enveloppe des courbes K_R obtenues pour des valeurs croissantes de a/W (Figure 10). La constance de ces résultats lorsqu'on passe d'une éprouvette à l'autre permet d'envisager la possibilité de définir par cette méthode la courbe R du matériau dans une direction de fissuration donnée (Figure 11). Notons que ces courbes R uniques s'apparentent surtout à celles de la géométrie DCB (enveloppes internes).

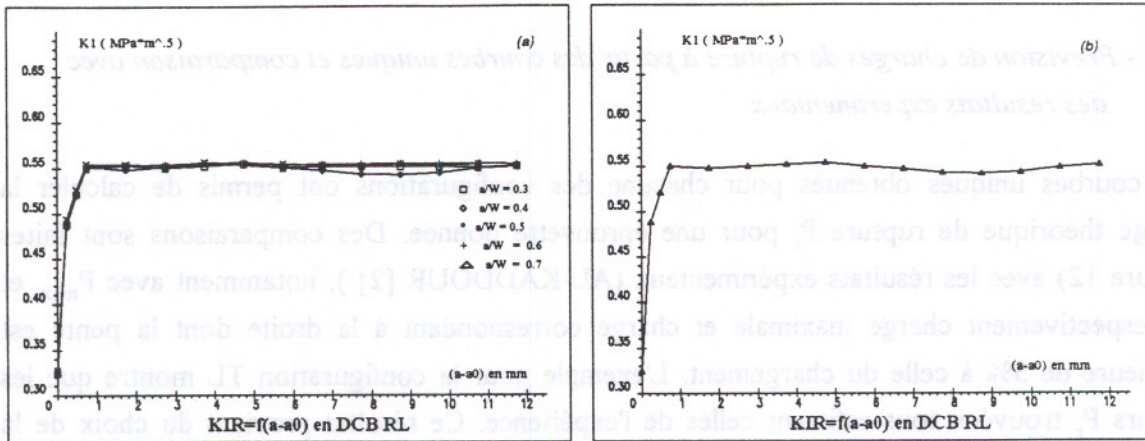


Fig. 10 : Courbe R pour la DCB en configuration RL

(a) : Courbes obtenues pour différentes longueurs relatives de fissure a/W ; (b) : Enveloppe

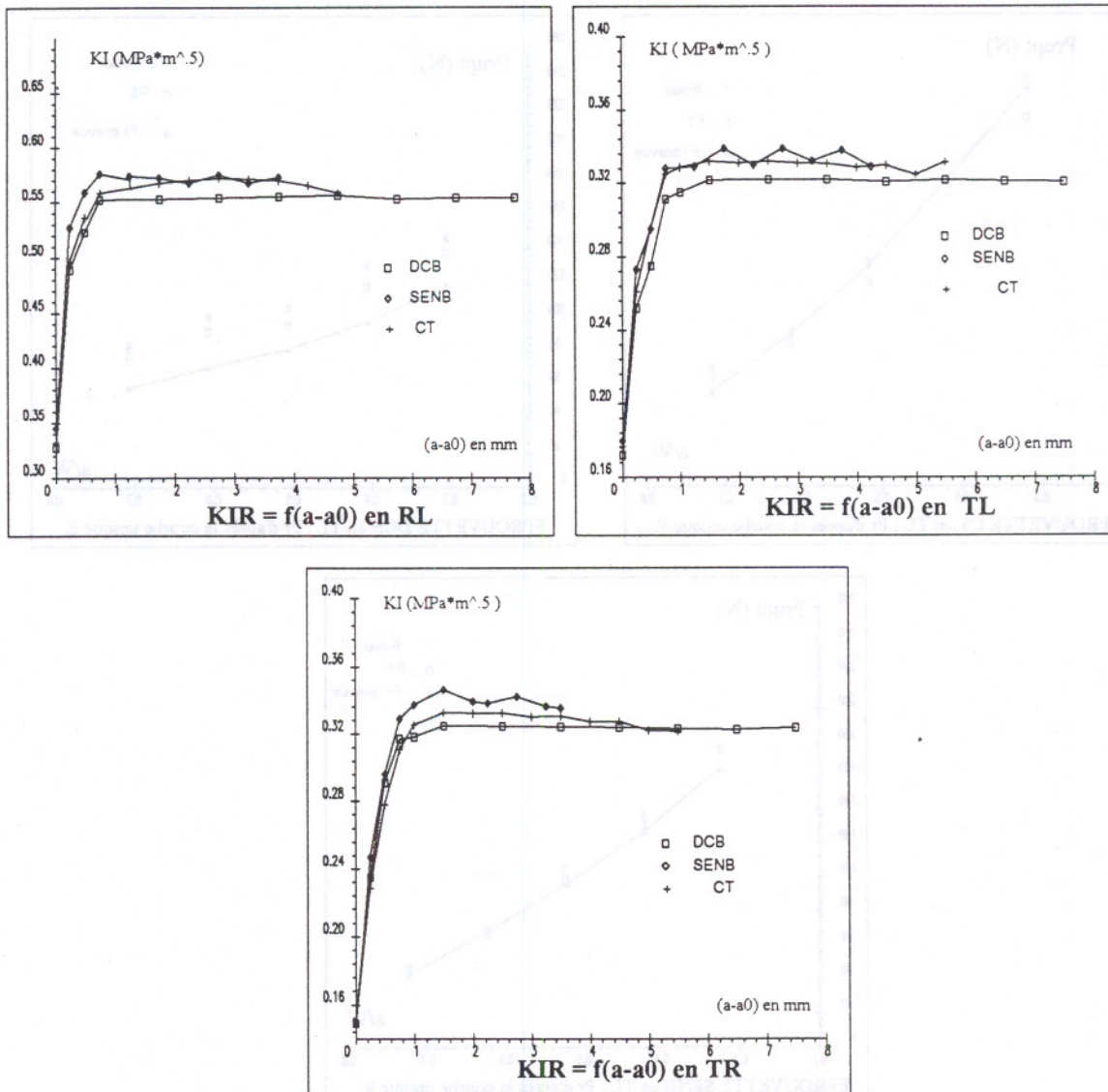


Fig. 11 : Possibilité de définir une courbe unique par configuration

IV.4 - Prédiction de charges de rupture à partir des courbes uniques et comparaison avec des résultats expérimentaux

Les courbes uniques obtenues pour chacune des configurations ont permis de calculer la charge théorique de rupture P_r pour une éprouvette donnée. Des comparaisons sont faites (Figure 12) avec les résultats expérimentaux (AL-KADDOUR [2]), notamment avec P_{max} et P_5 respectivement charge maximale et charge correspondant à la droite dont la pente est inférieure de 5% à celle du chargement. L'exemple pour la configuration TL montre que les valeurs P_r trouvées sous-estiment celles de l'expérience. Ce résultat provient du choix de la courbe unique R prise comme l'enveloppe interne des différentes courbes. Les écarts sont cependant peu élevés. Dans les directions RL et TR les accords entre calcul numérique et résultats des expériences sont du même ordre.

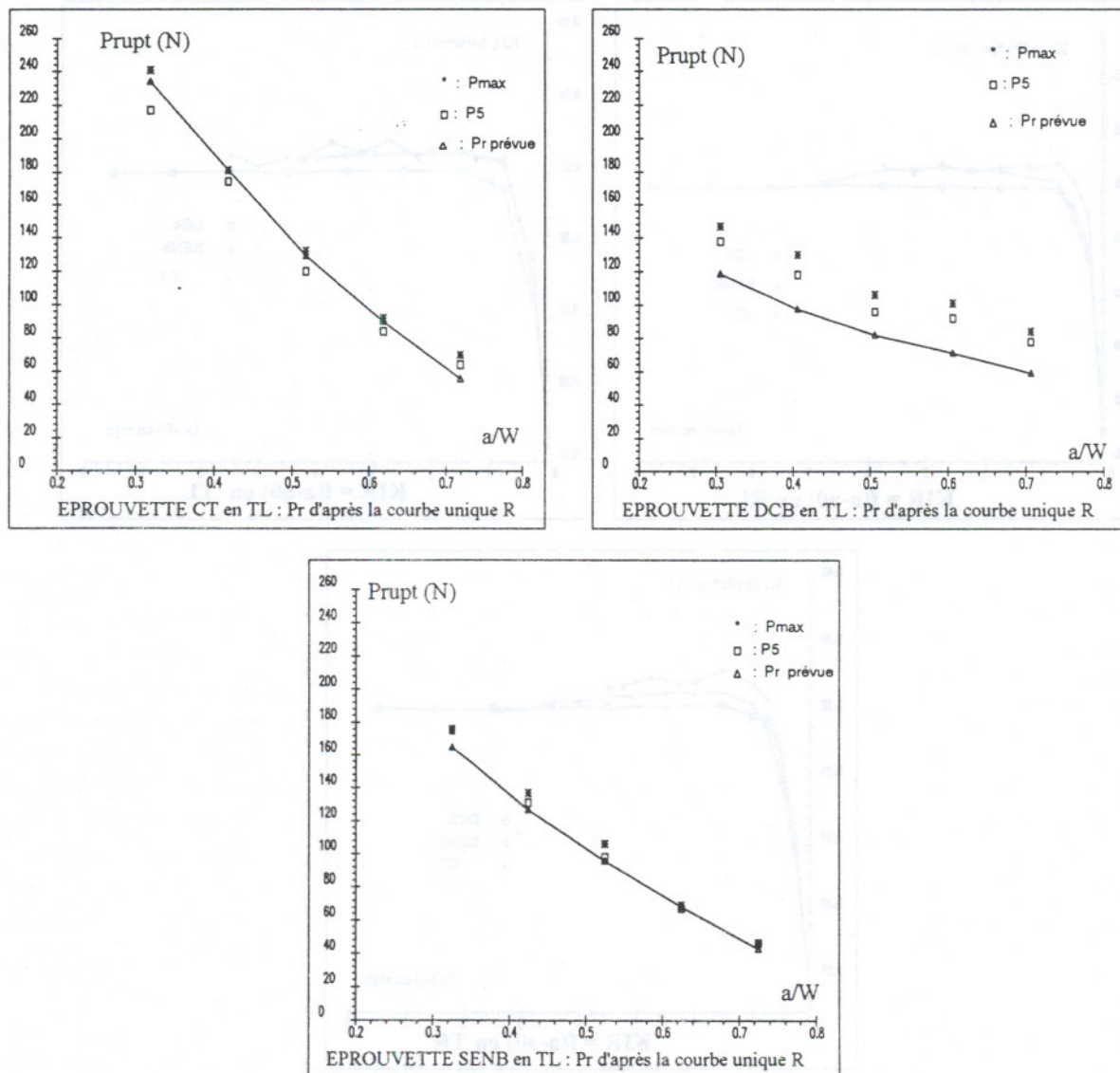


Fig. 12 : Charges de rupture prévues en TL et comparées avec des résultats d'expérience [2]

V - CONCLUSION

Partant de la simulation numérique de propagation de fissures dans différentes géométries d'éprouvette de peuplier, des courbes de résistance ont été tracées en tenant compte du caractère adoucissant du matériau grâce à un modèle non linéaire. Ces tracés montrent la possibilité d'obtenir des courbes indépendantes des longueurs initiales de fissure. De ces tracés il a été possible de déterminer des charges de rupture assez cohérentes avec l'expérience. En tout état de cause les résultats obtenus pour les géométries négatives apparaissent plus fiables.

MOTS CLES : *Courbes R, Eléments finis, Endommagement, Facteurs d'intensité de contraintes, Fissure, Zone de cohésion*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ADJANOHOUN, G. "Endommagement et mécanique de la rupture du bois" - *Thèse de Doctorat* Université de Bordeaux I No 657 (1991)
- [2] AL-KADDOUR, G. "Propagation de fissure dans un matériau orienté" - *Thèse de Doctorat* Université de Bordeaux I No 564 (1990)
- [3] ASTM "Standard practice for *R*-curve determination" - *Annual book of ASTM Standards* Vol. 03 - 01 E - 561.81 pp. 611-630 (1983)
- [4] BAZANT, Z.P. and KAZEMI, M.T. "Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect with application to rock and concrete" - *Int. Jnal of Fracture* Vol. 44 No 2 pp. 111-131 (1990)
- [5] BAZANT, Z.P. and KAZEMI, M.T. "Size effect in fracture of ceramics and its use to determine fracture energy and effective process zone length" - *Jnal. of American Ceramic Society* Vol. 73 No 7 pp. 1841-1853 (1990)
- [6] BOSTRÖM, L. "Method for determination of the strain-softening behaviour of wood and the applicability of a non linear fracture mechanics model" - *Doctoral Thesis Report* TVBM-1012 Lund Sweden (1992)
- [7] FOOTE, R.M.L., MAI, Y.-W. and COTTERELL, B. "Crack growth resistance curves in strain-softening materials" - *Jnal. of Mech. and Phys. of Solids* Vol.34 No 6 pp.593-607 (1986)
- [8] HILLERBORG, A., MODEER, M. and PETERSSON, P.E. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements" - *Cement and Concrete Research* Vol. 6 No 6 pp. 773-782 (1976)
- [9] LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.-L. "Mécanique des matériaux solides" - *Editions Dunod Paris* (1985)
- [10] OUYANG, C., MOBASHER, B. and SHAH, S.P. "An *R*-curve approach for fracture of quasi-brittle materials" - *Engng. Fract. Mechanics* Vol. 37 No 4 pp. 901-913 (1990)
- [11] VALENTIN, G., KADDOUR, G. et ADJANOHOUN, G. "Sur la ténacité du bois" - *Les Cahiers de Rhéologie* Vol. IX No 2 pp. 85-96 (1991)
- [12] VALENTIN, G. and ADJANOHOUN, G. "Applicability of classical isotropic fracture mechanics specimens to wood crack propagation studies" - *Materials and Structures* Vol. 25 No 145 pp. 3-13 (1992)

	RL (0.550 MPa* \sqrt{m})		
a/W	CT	SENB	DCB
0.3	0.518	0.520	0.544
0.4	0.532	0.522	0.547
0.5	0.519	0.521	0.550
0.6	0.524	0.515	0.552
0.7	0.510	0.510	0.546
Moyenne	0.521	0.518	0.548
Ecart (%)	- 5.2 %	- 5.8 %	- 0.4 %

	TL (0.320 MPa* \sqrt{m})		
a/W	CT	SENB	DCB
0.3	0.296	0.290	0.312
0.4	0.301	0.293	0.313
0.5	0.294	0.295	0.315
0.6	0.298	0.295	0.314
0.7	0.293	0.292	0.307
Moyenne	0.296	0.293	0.312
Ecart (%)	- 7.5 %	- 8.4 %	- 2.5 %

	TR (0.320 MPa* \sqrt{m})		
a/W	CT	SENB	DCB
0.3	0.306	0.294	0.311
0.4	0.307	0.293	0.313
0.5	0.291	0.291	0.315
0.6	0.285	0.291	0.317
0.7	0.277	0.286	0.319
Moyenne	0.293	0.291	0.315
Ecart (%)	- 8.4 %	- 9.1 %	- 1.5 %

TABLEAU 1 : Comparaison entre les valeurs de facteurs d'intensité de contraintes obtenues[1](entre parenthèses les valeurs servant de référence)

	RL (0.550 MPa*√m)		
a/W	CT	SENB	DCB
0.3	0.552	0.555	0.550
0.4	0.552	0.560	0.552
0.5	0.553	0.564	0.551
0.6	0.558	0.567	0.554
0.7	0.558	0.576	0.548
Moyenne	0.554	0.564	0.551
Ecart (%)	0.7 %	2.5 %	0.2 %

	TL (0.320 MPa*√m)		
a/W	CT	SENB	DCB
0.3	0.323	0.308	0.321
0.4	0.325	0.310	0.322
0.5	0.315	0.318	0.320
0.6	0.324	0.320	0.321
0.7	0.320	0.328	0.314
Moyenne	0.322	0.317	0.317
Ecart (%)	0.8 %	- 1.4 %	- 0.8 %

	TR (0.320 MPa*√m)		
a/W	CT	SENB	DCB
0.3	0.325	0.316	0.318
0.4	0.322	0.318	0.318
0.5	0.311	0.317	0.316
0.6	0.315	0.318	0.318
0.7	0.310	0.329	0.317
Moyenne	0.316	0.319	0.317
Ecart (%)	- 1.2 %	- 0.4 %	- 0.9 %

TABLEAU 2 : Comparaison entre les valeurs de facteurs d'intensité de contraintes obtenues en prenant $\Delta \alpha = 0.5 * I_f$ (entre parenthèses les valeurs servant de référence)

Moyenne des K_{Ic} (MPa* \sqrt{m})	RL		
	CT	SENB	DCB
Tableau 1	0.521	0.518	0.548
Tableau 2	0.554	0.564	0.551
Variation (%)	6.3 %	8.9%	0.7 %

Moyenne des K_{Ic} (MPa* \sqrt{m})	TL		
	CT	SENB	DCB
Tableau 1	0.296	0.293	0.312
Tableau 2	0.322	0.317	0.317
Variation (%)	8.7 %	8.2 %	1.6 %

Moyenne des K_{Ic} (MPa* \sqrt{m})	TR		
	CT	SENB	DCB
Tableau 1	0.293	0.286	0.315
Tableau 2	0.316	0.319	0.317
Variation (%)	7.8 %	11.5 %	0.6 %

TABLEAU 3 : Comparaison entre les valeurs moyennes issues des deux méthodes

ÉCOULEMENTS SECONDAIRES DE FLUIDES NON-NEWTONIENS DANS DES TUBES RECTILIGNES

Georges MAYNE

Département de Mathématique

Université Libre de Bruxelles

Campus Plaine, C.P.218/1

B-1050 Bruxelles - Belgium

Résumé

On propose une méthode de perturbation pour déterminer l'écoulement secondaire d'un fluide non newtonien incompressible dans un tube rectiligne de section non circulaire. Pour des tubes de section elliptique, on montre que l'écoulement secondaire peut présenter deux tourbillons dans chaque quart d'ellipse si le gradient de pression axiale se situe entre deux bornes bien définies.

Abstract

We propose a perturbation method to investigate the secondary flow of an incompressible non newtonian fluid in a straight duct of non circular cross-section. For a tube of elliptic cross-section, we show that the secondary flow may exhibit two vortices per quadrant if the axial pressure gradient of the flow lies between two definite bounds.

1 Introduction

Considérons l'écoulement d'un fluide non newtonien incompressible du type Rivlin-Ericksen dans un tube rectiligne de section non circulaire. On sait [1] que l'écoulement n'est généralement pas rectiligne et qu'un écoulement secondaire apparaît transversalement. Cet écoulement secondaire, qui est lié à l'inégalité des contraintes normales, peut être considéré comme une perturbation de l'écoulement de Poiseuille si la seconde fonction constitutive relative aux contraintes normales est petite [2].

Dodson, Townsend et Walters [3] ont étudié les écoulements de tels fluides dans des tubes de sections carrée et rectangulaire en utilisant des équations de perturbation traitées numériquement. Leurs conclusions principales portent sur les écoulements secondaires : pour un tube à section carrée, ils trouvent deux tourbillons symétriques dans chaque quadrant. Dans le cas de sections rectangulaires, un des deux tourbillons s'amenuise si le rapport des dimensions augmente; il disparaît si ce rapport est supérieur à deux.

Dans le présent travail, nous supposons que les fonctions constitutives sont analytiques en l'invariant $\alpha \operatorname{tr} A_2$, α désignant une constante constitutive supposée petite; A_2 est le second tenseur de Rivlin-Ericksen. En utilisant une méthode de perturbation impliquant deux petits paramètres, nous obtenons, à chaque ordre d'approximation, des équations de Poisson pour déterminer la vitesse axiale et des équations biharmoniques pour calculer la fonction de courant de l'écoulement secondaire. Dans le cas particulier de la section elliptique, il est possible d'obtenir des solutions exactes pour toutes ces équations. La première approximation recoupe les résultats de Böhme [2] et de Rivlin [4]. A la seconde approximation, il apparaît que l'écoulement secondaire peut présenter un second tourbillon si certaines conditions de caractère non géométrique sont remplies.

2 Equation constitutive

On sait [2] que lors d'un écoulement viscométrique, un fluide simple incompressible peut être décrit à partir de l'équation constitutive

$$\mathcal{T} = \eta A_1 + (N_1 + N_2) A_1^2 - \frac{N_2}{2} A_2 \quad (1)$$

où \mathcal{T} est la contrainte de viscosité, A_1, A_2 sont respectivement le premier et le second tenseur de Rivlin-Ericksen. Les fonctions viscométriques η, N_1, N_2 dépendent du seul invariant

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_2 \quad (2)$$

L'écoulement rectiligne permanent dans un tube ou écoulement de Poiseuille est viscométrique. Toutefois, pour des tubes à section non circulaire [5] la relation (1) conduit pour des écoulements de Poiseuille à des équations incompatibles sauf si on postule des relations très particulières entre η et N_2 ; par exemple, si on admet que N_2 et η sont proportionnelles ou plus particulièrement que $N_2 = 0$. La seule manière de résoudre cette contradiction est d'admettre que, pour de tels tubes, un écoulement transversal (secondaire) se superpose à l'écoulement longitudinal (primaire). Cet écoulement secondaire est la manifestation d'un effet non linéaire lié à l'inégalité des contraintes normales dont la fonction viscométrique N_2 constitue une mesure.

Nous supposons que N_2 reste petite pour toute valeur de I de sorte que l'écoulement est quasi-viscométrique [2] et nous admettons que le fluide non newtonien continue à être régi par l'équation constitutive (1). Ces hypothèses restrictives se justifient par notre désir de construire des solutions de type analytique. Par rapport aux solutions de type numérique, ces solutions présentent l'avantage de permettre une étude complète et systématique de la dépendance du flot aux constantes physiques et géométriques du problème.

Nous supposons donc que la fonction constitutive N_2 est de la forme

$$N_2 = \varepsilon F(I) \quad (3)$$

ε désignant une constante constitutive positive très petite par rapport à 1 de sorte que les termes non linéaires en ε puissent être négligés. Dans ce cas, la différence des contraintes normales est petite par rapport à la contrainte de glissement et l'écoulement secondaire peut être considéré comme une perturbation d'un écoulement de Poiseuille.

Dans un système d'axes cartésiens (x, y, z) d'axe z parallèle au tube, le champ de vitesse sera du type

$$v_x = \varepsilon \psi_{,y} \quad v_y = -\varepsilon \psi_{,x} \quad v_z = w_0 + \varepsilon w_1 \quad (4)$$

où ψ, w_0, w_1 sont des fonctions inconnues de x, y .

En négligeant les termes non linéaires en ε , on trouve :

$$A_1 = \overset{0}{A}_1 + \varepsilon \overset{1}{A}_1 \quad A_2 = \overset{0}{A}_2 + \varepsilon \overset{1}{A}_2 \quad (5)$$

$$\overset{0}{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w_{0,x} \\ 0 & 0 & w_{0,y} \\ w_{0,x} & w_{0,y} & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{1}{A}_1 = \begin{pmatrix} 2\psi_{,xy} & \psi_{,yy} - \psi_{,xx} & w_{1,x} \\ \psi_{,yy} - \psi_{,xx} & -2\psi_{,xy} & w_{1,y} \\ w_{1,x} & w_{1,y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{0}{A}_2 = 2 \begin{pmatrix} w_{0,x}^2 & w_{0,x}w_{0,y} & 0 \\ w_{0,x}w_{0,y} & w_{0,y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\overset{1}{A}_2 = \begin{pmatrix} 4w_{0,x}w_{1,x} & 2w_{0,x}w_{1,y} + 2w_{0,y}w_{1,x} & w_{0,x}\psi_{,xy} - w_{0,y}\psi_{,xx} + w_{0,x}\psi_{,y} - w_{0,xy}\psi_{,x} \\ & 4w_{0,y}w_{1,y} & w_{0,x}\psi_{,yy} - w_{0,y}\psi_{,xy} + w_{0,xy}\psi_{,y} - w_{0,y}\psi_{,x} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{1}{2} \text{tr} A_2 = I_0 + \varepsilon I_1 \quad (7)$$

$$I_0 = w_{0,x}^2 + w_{0,y}^2 \quad I_1 = 2(w_{0,x}w_{1,x} + w_{0,y}w_{1,y}) \quad (8)$$

$$\eta(I_0 + \varepsilon I_1) = \overset{0}{\eta} + \varepsilon I_1 \overset{0}{\eta}' \quad (9)$$

$$N_1(I_0 + \varepsilon I_1) = \overset{0}{N}_1 + \varepsilon I_1 \overset{0}{N}'_1 \quad (10)$$

$$N_2 = \varepsilon F(I_0 + \varepsilon I_1) = \varepsilon \overset{0}{F} \quad (11)$$

$\overset{0}{\eta}, \overset{0}{\eta}', \overset{0}{N}_1, \overset{0}{N}'_1, \overset{0}{F}$ sont des fonctions de I_0 .

En introduisant (5), (9) (10) (11) dans (1), on obtient

$$\mathcal{T} = \overset{0}{\mathcal{T}} + \varepsilon \overset{1}{\mathcal{T}} \quad \text{avec} \quad (12)$$

$$\overset{0}{\mathcal{T}} = \overset{0}{\eta} \overset{0}{A}_1 + \overset{0}{N}'_1 \overset{0}{A}_1^2 - \frac{1}{2} \overset{0}{N}_1 \overset{0}{A}_2 \quad (13)$$

$$\overset{1}{\mathcal{T}} = I_1(\overset{0}{\eta}' \overset{0}{A}_1 + \overset{0}{N}'_1 \overset{0}{A}_1^2 - \frac{1}{2} \overset{0}{N}'_1 \overset{0}{A}_2) + \overset{0}{F} \overset{0}{A}_1^2 + \overset{0}{\eta} \overset{1}{A}_1 + \overset{0}{N}_1 (\overset{0}{A}_1 \overset{1}{A}_1 + \overset{1}{A}_1 \overset{0}{A}_1) - \frac{1}{2} \overset{0}{N}_1 \overset{1}{A}_2 \quad (14)$$

Explicitement,

$$\overset{0}{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{0}{\eta} w_{0,x} \\ 0 & 0 & \overset{0}{\eta} w_{0,y} \\ \overset{0}{\eta} w_{0,x} & \overset{0}{\eta} w_{0,y} & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \overset{1}{T}_{xx} &= \overset{0}{F} w_{0,x}^2 + 2 \overset{0}{\eta} \psi_{,xy} \\ \overset{1}{T}_{xy} &= \overset{0}{F} w_{0,x} w_{0,y} + \overset{0}{\eta} (\psi_{,yy} - \psi_{,xx}) \\ \overset{1}{T}_{yy} &= \overset{0}{F} w_{0,y}^2 - 2 \overset{0}{\eta} \psi_{,xy} \end{aligned} \quad (16)$$

Il est intéressant de remarquer que ces trois composantes de $\overset{1}{T}$ ne dépendent que de w_0 et ψ alors que les trois autres, que nous n'explicitons pas, dépendent de w_0 , ψ et w_1 . Par conséquent, la fonction ψ qui définit entièrement l'écoulement secondaire peut être calculée sans détermination préalable de w_1 . Comme, dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à l'écoulement secondaire, nous ne calculerons pas w_1 .

3 Equation du mouvement

En l'absence de forces extérieures, l'équation du mouvement s'écrit

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + \text{grad } p = \text{div } T \quad (17)$$

En négligeant les termes non linéaires en ε , on a :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \frac{dv_y}{dt} = 0 \quad \frac{dv_z}{dt} = \varepsilon (w_{0,x} \psi_{,y} - w_{0,y} \psi_{,x}) \quad (18)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 \quad (19)$$

A l'ordre 0 en ε , on trouve, grâce à (15) et (17) :

$$-G = (\overset{0}{\eta} w_{0,x})_{,x} + (\overset{0}{\eta} w_{0,y})_{,y} \quad (20)$$

$$p_0 = -Gz + L \quad (21)$$

La constante G est le gradient de pression axial.

A l'ordre 1 en ε , nous n'écrivons que les composantes x et y de (17) qui contiennent les inconnues p_1 , w_0 et ψ . La composante z , qui fait intervenir en plus w_1 , n'est intéressante que si on désire calculer cette fonction.

$$\begin{aligned} p_{1,x} &= \overset{1}{T}_{xx,x} + \overset{1}{T}_{xy,y} \\ p_{1,y} &= \overset{1}{T}_{xy,x} + \overset{1}{T}_{yy,y} \end{aligned} \quad (22)$$

En éliminant p_1 entre ces deux équations, on trouve :

$$(\overset{1}{T}_{xx} - \overset{1}{T}_{yy})_{,xy} + (\overset{1}{T}_{xy})_{,yy-xx} = 0 \quad (23)$$

En introduisant (16) dans (23), il vient :

$$\begin{aligned} \overset{0}{\eta} \Delta^2 \psi + 2 \overset{0}{\eta}_{,x} (\Delta \psi)_{,x} + 2 \overset{0}{\eta}_{,y} (\Delta \psi)_{,y} + 4 \overset{0}{\eta}_{,xy} \psi_{,xy} + (\overset{0}{\eta}_{,yy} - \overset{0}{\eta}_{,xx}) (\psi_{,yy} - \psi_{,xx}) = \\ (\overset{0}{F} w_{0,x} w_{0,y})_{,xx-yy} + (\overset{0}{F} w_{0,y}^2 - \overset{0}{F} w_{0,x}^2)_{,xy} \end{aligned} \quad (24)$$

Si on peut déterminer w_0 en résolvant l'équation (20) non linéaire aux dérivées partielles du second ordre, la fonction ψ apparaît alors comme solution d'une équation (24) linéaire non homogène aux dérivées partielles du quatrième ordre.

4 Méthode de perturbation

On ne peut résoudre (20) que par une méthode de perturbation.

Nous allons supposer que les fonctions constitutives η et F sont des fonctions analytiques de αI , α désignant une constante constitutive positive supposée petite. Dans la suite, nous nous limiterons aux termes du second ordre en α mais des perturbations d'ordre quelconque peuvent être calculées.

On posera donc

$$\begin{aligned} \overset{0}{\eta} &= \eta_0 + \alpha \eta_1 I_0 + \alpha^2 \eta_2 I_2 + \dots \\ \overset{0}{F} &= N_2 + \alpha N_2^1 I_0 + \alpha^2 N_2^2 I_0^2 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} w_0 &= w_{00} + \alpha w_{01} + \alpha^2 w_{02} + \dots \\ \psi &= \psi_0 + \alpha \psi_1 + \alpha^2 \psi_2 + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Il en résulte que

$$I_0 = I_{00} + \alpha I_{01} + \alpha^2 I_{02} + \dots \quad (27)$$

avec

$$\begin{aligned} I_{00} &= w_{00,x}^2 + w_{00,y}^2 \\ I_{01} &= 2(w_{00,x} w_{01,x} + w_{00,y} w_{01,y}) \\ I_{02} &= w_{01,x}^2 + w_{01,y}^2 + 2w_{00,x} w_{02,x} + 2w_{00,y} w_{02,y} \end{aligned} \quad (28)$$

et aussi que

$$\begin{aligned} \overset{0}{\eta} &= \eta_0 + \alpha \eta_1 I_{00} + \alpha^2 (\eta_1 I_{01} + \eta_2 I_{00}^2) + \dots \\ \overset{0}{F} &= N_2 + \alpha N_2^1 I_{00} + \alpha^2 (N_2^1 I_{01} + N_2^2 I_{00}^2) + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

En introduisant (29) et (26) dans (20) et (24), on obtient, aux ordres 0, 1, 2 en α , respectivement :

$$\eta_0 \Delta w_{00} = -G \quad (30)$$

$$\eta_0 \Delta w_{01} + \eta_1 [(I_{00} w_{00,x})_{,x} + (I_{00} w_{00,y})_{,y}] = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta w_{02} + \eta_1 [(I_{00} w_{01,x} + I_{01} w_{00,x})_{,x} + (I_{00} w_{01,y} + I_{01} w_{00,y})_{,y}] \\ + \eta_2 [(I_{00}^2 w_{00,x})_{,x} + (I_{00}^2 w_{00,y})_{,y}] = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Delta^2 \psi_0 = 0 \quad (33)$$

$$\eta_0 \Delta^2 \psi_1 = N_2^0 D_{11}(w_{00}, \Delta w_{01}) + N_2^1 E_{11}(w_{00}) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta^2 \psi_2 = & \eta_1 D_{12}(w_{00}, \psi_1) + N_2^0 E_{12}(w_{00}, w_{01}, \Delta w_{02}) \\ & + N_2^1 F_{12}(w_{00}, w_{01}) + N_2^2 G_{12}(w_{00}) \end{aligned} \quad (35)$$

où

$$\begin{aligned} D_{11} &= w_{00,y}(\Delta w_{01})_{,x} - w_{00,x}(\Delta w_{01})_{,y} \\ E_{11} &= (w_{00,y}^4 - w_{00,x}^4)_{,xy} + (w_{00,x}^3 w_{00,y} + w_{00,x} w_{00,y}^3)_{,xx-yy} \\ D_{12} &= -(I_2^2)_{00} \Delta^2 \psi_1 - 4(I_2^2)_{00,xy} \psi_{1,xy} + (I_2^2)_{00,yy-xx} (\psi_1)_{,xx-yy} \\ &\quad - 2(I_2^2)_{00,x} (\Delta \psi_1)_{,x} - 2(I_2^2)_{00,y} (\Delta \psi_1)_{,y} \\ E_{12} &= w_{00,y}(\Delta w_{02})_{,x} + w_{01,y}(\Delta w_{01})_{,x} - w_{00,x}(\Delta w_{02})_{,y} - w_{01,x}(\Delta w_{01})_{,y} \\ F_{12} &= 4(w_{01,y} w_{00,y}^3 - w_{01,x} w_{00,x}^3)_{,xy} \\ &\quad + [w_{01,x}(3w_{00,x}^2 w_{00,y} + w_{00,y}^3) + w_{01,y}(w_{00,x}^3 + 3w_{00,x} w_{00,y}^2)]_{,xx-yy} \\ G_{12} &= [(I_2^4)_{00}(w_{00,y}^2 - w_{00,x}^2)]_{,xy} + [(I_2^4)_{00} w_{00,x} w_{00,y}]_{,xx-yy} \end{aligned}$$

La solution de (33) qui vérifie les conditions d'adhérence aux parois :

$$\psi_{0,x} = \psi_{0,y} = 0$$

est $\psi_0 = 0$. Le terme w_0 de la vitesse axiale s'obtient par résolution d'équations de Poisson alors que la fonction de courant ψ de l'écoulement secondaire s'obtient par résolution d'équations biharmoniques.

5 Application aux tubes de section elliptique

En plaçant l'axe x sur le grand axe de l'ellipse, l'équation de la section droite du tube est

$$\mathcal{C} \equiv ax^2 + by^2 - 1 = 0 \quad (36)$$

avec $0 < a < b$. La solution de (30) qui s'annule sur \mathcal{C} est

$$w_{00} = k(ax^2 + by^2 - 1) \quad \text{avec } k = -\frac{G}{2(a+b)\eta_0} \quad (37)$$

(31) se réduit alors à

$$\Delta w_{01} = -8 \frac{\eta_1 k^3}{\eta_0} [a^2(3a+b)x^2 + b^2(a+3b)y^2] \quad (38)$$

dont la solution est

$$w_{01} = \frac{\eta_1 k^3}{\eta_0} (ax^2 + by^2 - 1)(px^2 + qy^2 + r) \quad (39)$$

où

$$\begin{aligned} p &= -\frac{2}{3}a \frac{3a^3 + 19a^2b + 5ab^2 - 3b^3}{a^2 + 6ab + b^2} \\ q &= -\frac{2}{3}b \frac{-3a^3 + 5a^2b + 19ab^2 + 3b^3}{a^2 + 6ab + b^2} \\ r &= \frac{p+q}{a+b} \end{aligned} \quad (40)$$

(32) s'écrit alors

$$\Delta w_{02} = k^5 (Ax^4 + By^4 + Cx^2y^2 + Dx^2 + Ey^2) \quad (41)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= -8 \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} a^2 (30ap + aq + 5bp) - 32 \frac{\eta_2}{\eta_0} a^4 (5a + b) \\ B &= -8 \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} b^2 (30bq + bp + 5aq) - 32 \frac{\eta_2}{\eta_0} b^4 (5b + a) \\ C &= -72 \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} (a+b)^2 (aq + bp) - 192 \frac{\eta_2}{\eta_0} a^2 b^2 (a+b) \\ D &= -8 \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} (9a^2r - 9ap + 3abr - aq - 2bp) \\ E &= -8 \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} (9b^2r - 9bq + 3abr - bp - 2aq) \end{aligned} \quad (42)$$

En utilisant (37) et (38), (34) devient

$$\Delta^2 \psi_1 = 96k^4 M_2 ab (b^2 - a^2) xy \quad (43)$$

où

$$M_2 = \frac{1}{\eta_0} \left(\frac{\eta_1}{\eta_0} N_2^0 - N_2 \right) \quad (44)$$

La solution de (43) telle que $\psi_{1,x} = \psi_{1,y} = 0$ sur C est

$$\psi_1 = 4k^4 M_2 \frac{ab(b^2 - a^2)}{5a^2 + 6ab + 5b^2} xy (ax^2 + by^2 - 1)^2 \quad (45)$$

On retrouve la solution obtenue par G.Böhme [2] (formule 9.82 page 324). Les lignes de courant $\psi_1 = \text{constante}$ de l'écoulement secondaire ont été décrites par W.E.Langlois et R.S.Rivlin [4]. Elles présentent un tourbillon dans chaque quart d'ellipse. La position du centre du tourbillon ne dépend que de la forme de la section elliptique.

En tenant compte de (37) (39) (41) (45), (35) se réduit à

$$\Delta^2 \psi_2 = 128k^6 \frac{\eta_1}{\eta_0} M_2 ab (a-b) xy (Ux^2 + Vy^2 + W) \quad (46)$$

avec

$$U = (a+b) \frac{50a^4 + 33a^3b + 20a^2b^2 + 9b^3a}{5a^2 + 6ab + 5b^2} + a \frac{30a^4 + 199a^3b + 181a^2b^2 + 41ab^3 - 3b^4}{a^2 + 6ab + b^2} - 2a^2(5a+3b)L_2$$

$$V = (a+b) \frac{9a^3b + 20a^2b^2 + 33ab^3 + 50b^4}{5a^2 + 6ab + 5b^2} + b \frac{-3a^4 + 41a^3b + 181a^2b^2 + 199ab^3 + 30b^4}{a^2 + 6ab + b^2} - 2b^2(3a+5b)L_2 \quad (47)$$

$$W = \frac{(3a^2 + 10ab + 3b^2)(a^2 - 4ab + b^2)}{a^2 + 6ab + b^2} - 3(a+b) \frac{3a^3 + a^2b + ab^2 + 3b^3}{5a^2 + 6ab + 5b^2}$$

$$L_2 = \frac{\eta_0 \eta_2 \overset{0}{N_2} - \eta_0 \overset{2}{N_2}}{\eta_1 \eta_1 \overset{0}{N_2} - \eta_0 \overset{1}{N_2}} \quad (48)$$

La solution de (46) vérifiant les conditions aux limites est

$$\psi_2 = 4 \frac{\eta_1}{\eta_0} k^6 M_2 ab (a-b) xy (ax^2 + by^2 - 1)^2 (fx^2 + gy^2 + h) \quad (49)$$

où

$$f = \frac{4}{15T} [(a^2 + 4ab + 7b^2)U - 2a(a+b)V]$$

$$g = \frac{4}{15T} [-2b(a+b)U + (7a^2 + 4ab + b^2)V] \quad (50)$$

$$h = \frac{2}{5a^2 + 6ab + 5b^2} \left[\frac{2}{3}W + (5a+3b)f + (5b+3a)g \right]$$

$$T = 7a^4 + 28a^3b + 58a^2b^2 + 28ab^3 + 7b^4$$

Au second ordre en α , la fonction de courant de l'écoulement secondaire s'écrit

$$\psi = \alpha\psi_1 + \alpha^2\psi_2$$

$$= 4 \frac{\eta_1}{\eta_0} M_2 \alpha^2 k^6 ab (a-b) xy (ax^2 + by^2 - 1)^2 (S + fx^2 + gy^2 + h) \quad (51)$$

avec

$$S = -\frac{\eta_0}{\alpha k^2 \eta_1} R \quad R = \frac{a+b}{5a^2 + 6ab + 5b^2} \quad (52)$$

On voit que si $a = b$ (section circulaire), ψ est identiquement nulle et l'écoulement dans le tube est rectiligne.

6 Etude de l'écoulement secondaire dans un tube elliptique

Les lignes de courant de l'écoulement secondaire sont les lignes de niveau de la surface $z = \psi(x, y)$. Ces courbes sont fermées et se réduisent à un point là où la surface présente un extrémum. Ces points peuvent être considérés comme les centres de tourbillons pour l'écoulement secondaire. Ils déterminent l'aspect général de cet écoulement et la topologie de ses lignes de courant. Ils sont définis par les conditions

$$\psi_{,x} = \psi_{,y} = 0 \quad (53)$$

qui montrent qu'en ces points la vitesse transverse est nulle et l'écoulement est rectiligne. De (51) et (53), il résulte que les coordonnées (x, y) des tourbillons sont solutions de deux équations du second degré en les inconnues positives x^2, y^2 :

$$(5ax^2 + by^2 - 1)(S + fx^2 + gy^2 + h) + 2fx^2(ax^2 + by^2 - 1) = 0 \quad (54)$$

$$(ax^2 + 5by^2 - 1)(S + fx^2 + gy^2 + h) + 2gy^2(ax^2 + by^2 - 1) = 0$$

Ces équations possèdent au plus quatre solutions réelles. L'une d'entre elles se trouve sur l'ellipse \mathcal{C} . En raison des symétries de la fonction ψ , seules nous intéressent les solutions situées à l'intérieur du quart d'ellipse défini par les inégalités

$$x > 0 \quad y > 0 \quad ax^2 + by^2 - 1 < 0$$

Comme ψ s'annule sur le bord de ce domaine que nous appellerons \mathcal{D} , on peut voir que les équations (54) auront deux ou une solution réelle dans \mathcal{D} suivant que la conique d'équation

$$S + h + fx^2 + gy^2 = 0 \quad (55)$$

coupe ou ne coupe pas \mathcal{D} . Cette conique coupera \mathcal{D} si deux des trois inégalités suivantes sont vérifiées :

$$0 < -\frac{h+S}{c\delta} < \frac{1}{c}$$

$$0 < -\frac{h+S}{\gamma} < \frac{1}{c} \quad (56)$$

$$0 < \frac{\delta+h+S}{c\delta-\gamma} < \frac{1}{c}$$

$$\text{où } f = b\gamma \quad g = b\delta \quad c = \frac{a}{b} < 1. \quad (57)$$

Il résulte de (47) et (50) que γ, δ et h sont de la forme

$$\gamma = \gamma_1 - L_2\gamma_2 \quad \delta = \delta_1 - L_2\delta_2 \quad h = h_1 - L_2h_2 \quad (58)$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, h_1, h_2$ sont des fonctions rationnelles de c bien déterminées.

La forme de la section elliptique étant donnée (c fixé), l'écoulement secondaire présentera deux tourbillons dans chaque quart d'ellipse si deux des trois inégalités (56) sont satisfaites.

7 Discussion

c étant fixé, chacune des inégalités doubles (56) définit, dans le plan (L_2, S) , deux angles aigus opposés par le sommet dont les côtés sont des droites bien déterminées. Par exemple, pour (56.1), ces droites d_1 et d_2 ont pour équations

$$d_1 \equiv h_2 L_2 - S - h_1 = 0$$

$$d_2 \equiv (h_2 + \delta_2) L_2 - S - h_1 - \delta_1 = 0$$

Les deux autres inégalités de (56) introduisent une troisième droite d_3 d'équation

$$d_3 \equiv \left(h_2 + \frac{\gamma_2}{c}\right) L_2 - S - h_1 - \frac{\gamma_1}{c} = 0$$

Pour chaque valeur de c , comprise entre 0 et 1, l'ensemble de toutes les constantes sans dimensions L_2 et S qui donnent lieu à des écoulements secondaires présentant deux tourbillons par quadrant, est la réunion de tels domaines angulaires limités par ces trois droites. Nous les avons représentés dans les trois cas particuliers $c = 0.1$, $c = 0.5$, $c = 0.9$ (fig. 1, 2, 3). Dans chaque cas, la région du plan (L_2, S) qui donne lieu à des tourbillons doubles, est une bande de largeur variable avec L_2 , délimitée par les portions de droites $ABCDEFGF$. Cette bande a une largeur minimale pour une valeur de L_2 que nous noterons l_c ; cette valeur, qui dépend de c est toujours positive. La bande s'élargit indéfiniment quand L_2 tend vers l'infini par valeurs positives ou négatives. En dehors de cette bande, l'écoulement secondaire ne présentera qu'un seul tourbillon mais contrairement à la première approximation ψ_1 , les coordonnées du centre de ce tourbillon dépendront de L_2 et S . On constate que lorsque c augmente, les droites limites se rapprochent de sorte que la bande se retrécit.

Grâce aux figures 1, 2, 3, il est possible de préciser, pour chaque valeur de L_2 , l'intervalle des valeurs de S pour lesquelles les lignes de courant de l'écoulement secondaire présenteront deux tourbillons. Par exemple,

$$c = 0.1 \quad L_2 = 10 \quad 1.1103 < S < 6.5181$$

$$L_2 = 0 \quad -4.2744 < S < -1.0839$$

$$c = 0.9 \quad L_2 = 10 \quad 3.5856 < S < 5.2222$$

$$L_2 = 0 \quad -2.9831 < S < -1.7533$$

Les valeurs de S peuvent être positives (fluides pseudo-plastiques) ou négatives (fluides dilatants).

Comme S est lié au gradient de pression axial G par l'intermédiaire de k (37) (52), il en résulte que l'écoulement secondaire présentera deux tourbillons si G se situe entre deux limites positives qui diminuent en se rapprochant quand $|L_2|$ augmente à partir de l_c . Par exemple, avec $c = 0.5$, on a

$$L_2 = 5 \quad 1.0856 < \sqrt{\frac{|\eta_1| \alpha}{\eta_0^3 b}} G < 1.4062$$

$$L_2 = 10 \quad 0.5004 < \sqrt{\frac{|\eta_1| \alpha}{\eta_0^3 b}} G < 0.63$$

L_2 étant fixé, ces intervalles se rétrécissent si l'excentricité de la section décroît. Pour illustrer cette discussion, rappelons que l'expression (51) de ψ montre que l'écoulement secondaire présentera deux tourbillons si la conique d'équation (55) coupe le quart d'ellipse \mathcal{D} . Cette conique (55) découpe \mathcal{D} en deux domaines contenant chacun un tourbillon entouré de lignes de courant fermées de sorte que (55) peut être considérée comme une courbe séparatrice des tourbillons. Les positions des centres de tourbillons et le graphe de la séparatrice permettent une bonne visualisation de l'écoulement secondaire.

En adoptant le demi petit axe de la section elliptique comme unité de longueur ($b = 1$), (55) devient

$$(\gamma_1 - \gamma_2 L_2)x^2 + (\delta_1 - \delta_2 L_2)y^2 + S + h_1 - h_2 L_2 = 0 \quad (59)$$

En choisissant $c = 0.5$ et $L_2 = 10$, nous savons, grâce à la figure 2, que (59) coupera le quadrant d'ellipse \mathcal{D} si

$$3.6777 < S < 5.8277$$

Pour $S = 4.2$, (59) devient

$$0.12x^2 + 2.15y^2 = 0.52$$

Cette courbe séparatrice est un arc d'ellipse que nous avons représenté sur la figure 4. Si $c = 0.5$ et $L_2 = 5$, la figure 2 nous dit que (59) coupera \mathcal{D} si

$$0.8969 < S < 1.2381$$

Pour $S = 1$, (59) se réduit à

$$0.08x^2 - 0.34y^2 = -0.1$$

Cette courbe séparatrice est un arc d'hyperbole représenté sur la figure 5. Pour conclure, nous dirons que les écoulements secondaires de fluides de Rivlin-Ericksen dans des tubes elliptiques présenteront deux tourbillons dans chaque quart d'ellipse si la constante S , liée au gradient de pression axial G , se situe entre deux bornes bien déterminées qui dépendent de la constante géométrique c , liée à l'excentricité de la section, et de la constante constitutive L_2 .

Mots-cles : Non-newtonien - Tubes non circulaires - Ecoulement secondaire - Perturbations - Tubes elliptiques - Tourbillon

8 Bibliographie

- [1] J.L.ERICKSEN. *Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-newtonian fluids* Quat. appl. Math **14** (1956) 318-321.
- [2] G.BÖHME. *Non newtonian Fluid Mechanics* North Holland, Amsterdam 1987.
- [3] A.G.DODSON, P.TOWSEND and K.WALTERS. *Non-newtonian flow in pipes of non-circular cross-section*. Computers and Fluids, **2**, (1974) 317-338.

[4] W.E.LANGLAIS and R.S.RIVLIN. *Slow steady-state flow of visco-elastic fluids through non-circular tubes.* Rend.Mat. **22**, (1963) 169-185.

[5] G.MAYNE. *Geometrical Method in non-newtonian fluid mechanics.* Q.J.Mech. appl. Math. **42** (1989) 239-247.

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2 + x_1 - x_2 = 0 \quad (59)$$

En choisissant $c = 0.5$ et $L_2 = 10$, nous savons, grâce à la figure 2, que (59) coupe le

$$3.8777 < S < 5.8277$$

Pour $S = 4.2$, (59) devient

$$0.12x^2 + 2.15y^2 = 0.32$$

Cette courbe séparatrice est un arc d'ellipse que nous avons représenté sur la figure 4.

$$0.2889 < S < 1.3281$$

Pour $S = 1$, (59) se réduit à

$$0.02x^2 - 0.34y^2 = -0.1$$

Cette courbe séparatrice est un arc d'hyperbole représenté sur la figure 5. Pour conclure, nous dirons que les écoulements secondaires de fluides de Rivlin-Ericksen dans des tubes elliptiques présentent deux tourbillons dans chaque quart d'ellipse si la constante S , liée au gradient de pression axial G , se situe entre deux bornes bien déterminées qui dépendent de la constante géométrique c , liée à l'excentricité de la section, et de la constante constitutive L_2 .

Mots-clés : Non-newtonien - Tubes non circulaires - Écoulement secondaire - Perturbations - Tubes elliptiques - Tourbillon

8 Bibliographie

- [1] J.L.ERICKSEN. Overdetermination of the speed in rotational motion of non-newtonian fluids. *Quart. Appl. Math.* **14** (1956) 318-321.
- [2] G.BÖHME. *Non newtonian Fluid Mechanics* North Holland, Amsterdam 1987.
- [3] A.G.DODSON, P.TOWSEND and K.WALTERS. Non-newtonian flow in pipes of non-circular cross-section. *Computers and Fluids*, **2**, (1978) 317-338.

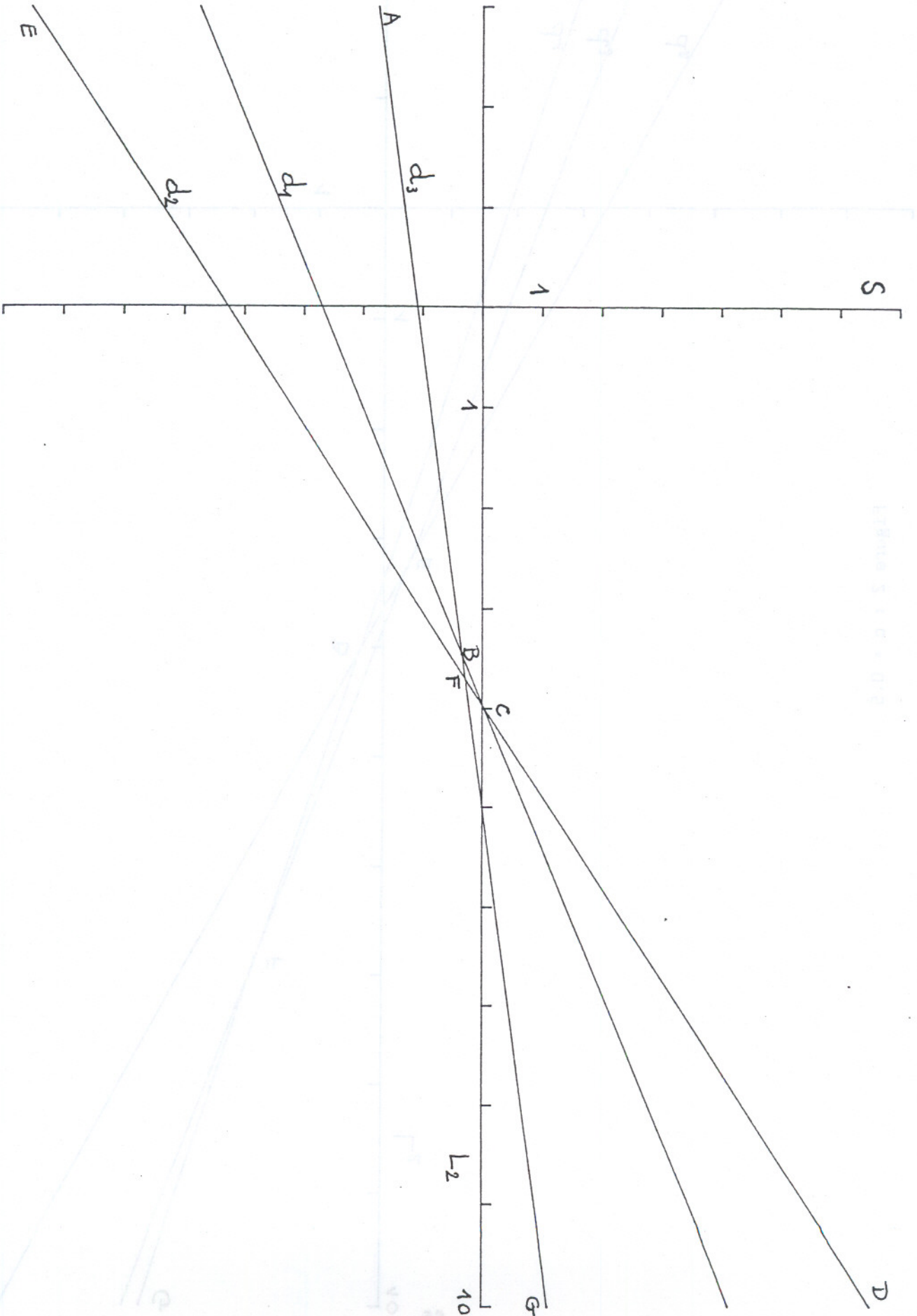


Figure 1 : $c = 0.1$

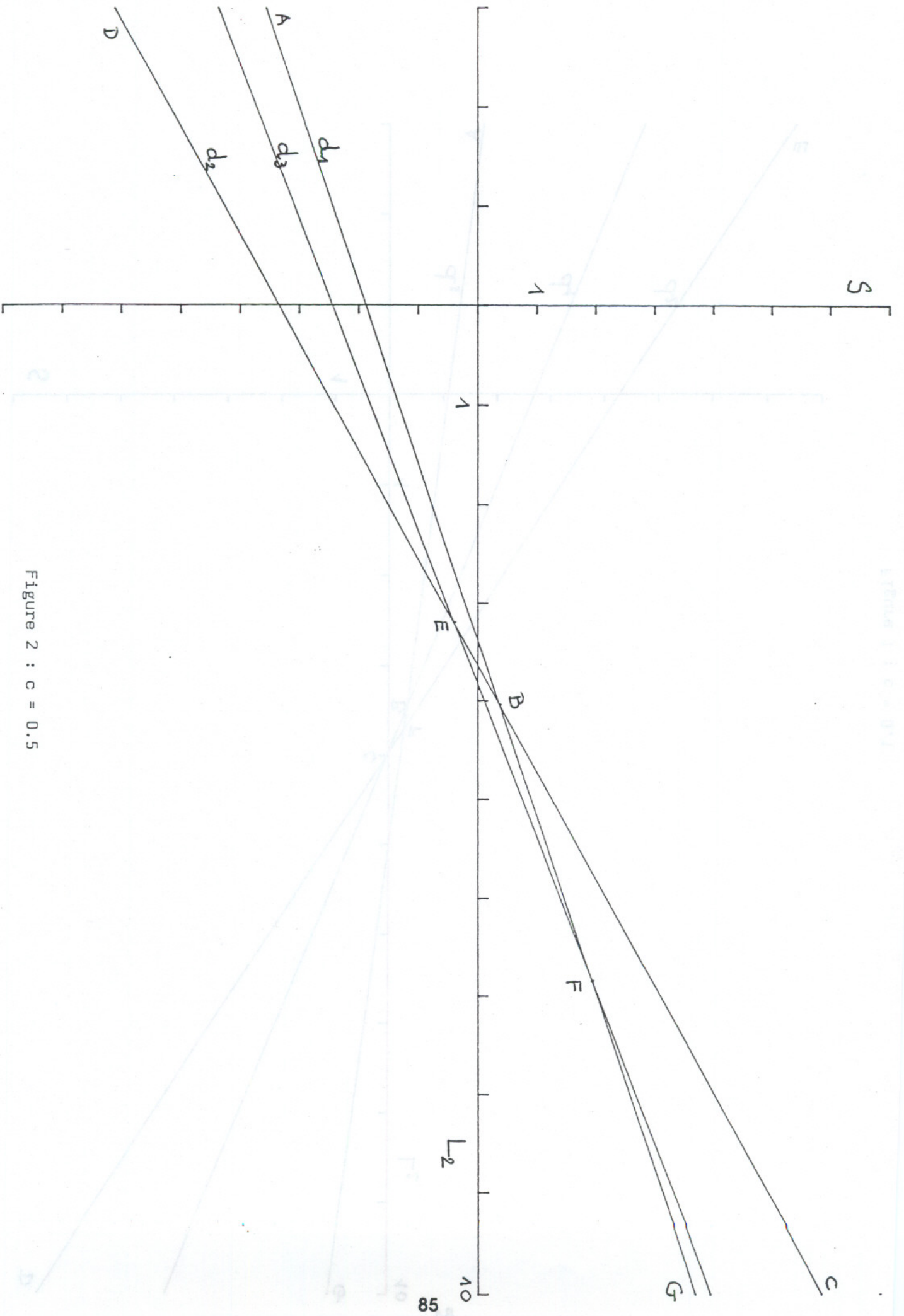


Figure 2 : $c = 0.5$

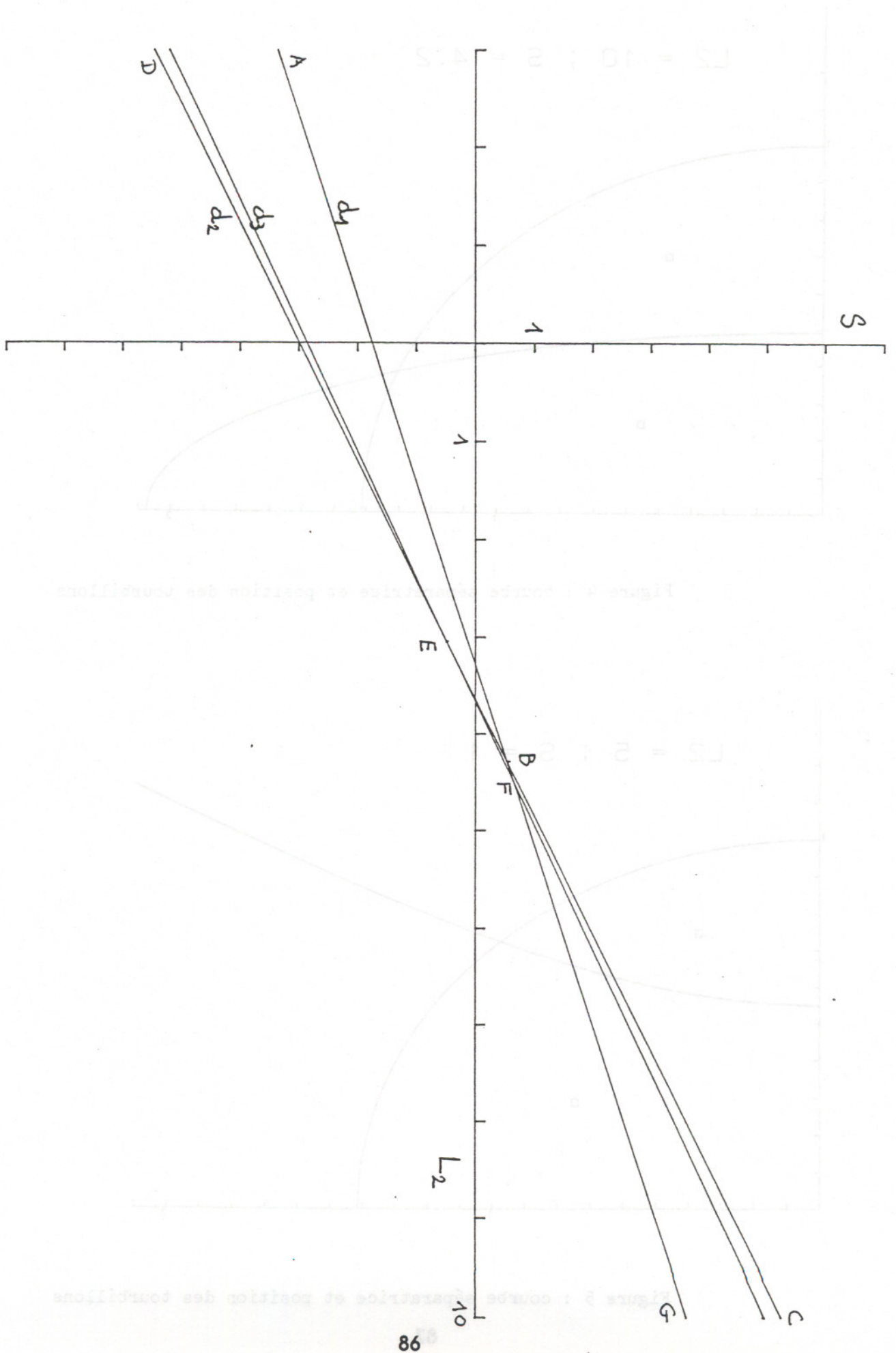


Figure 3 : $c = 0.9$

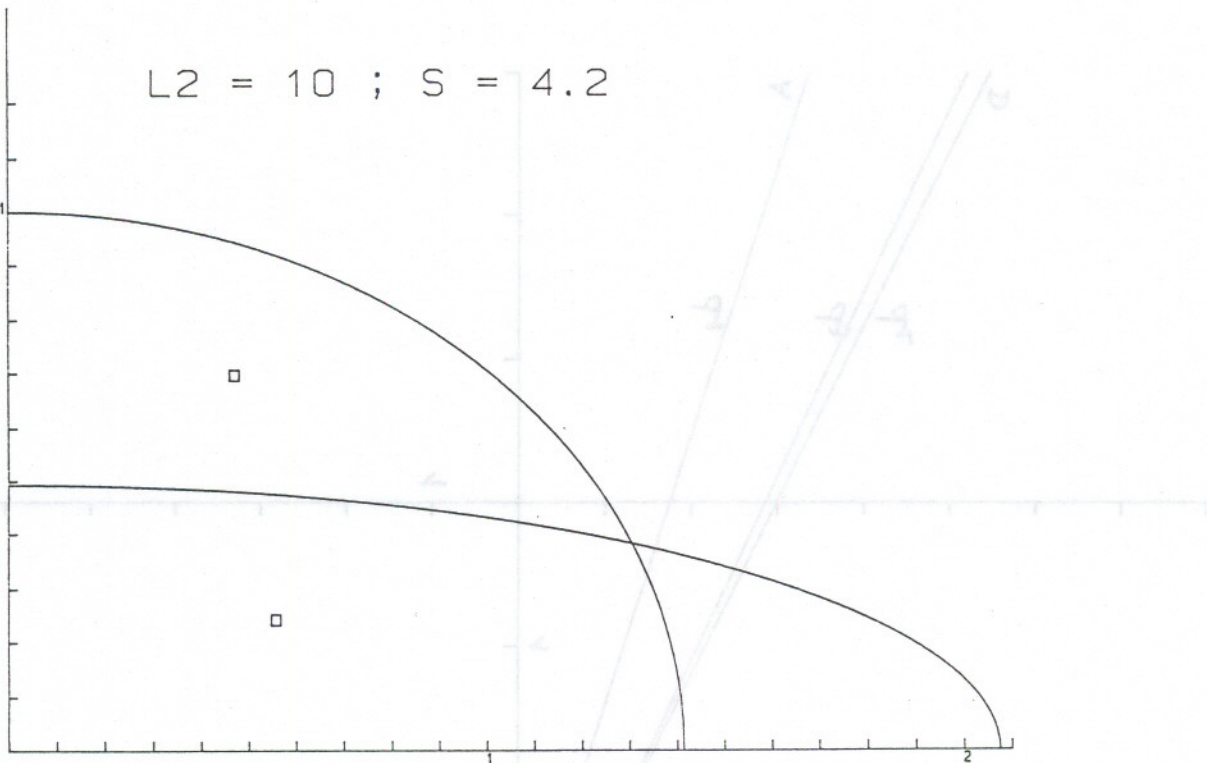


Figure 4 : courbe séparatrice et position des tourbillons

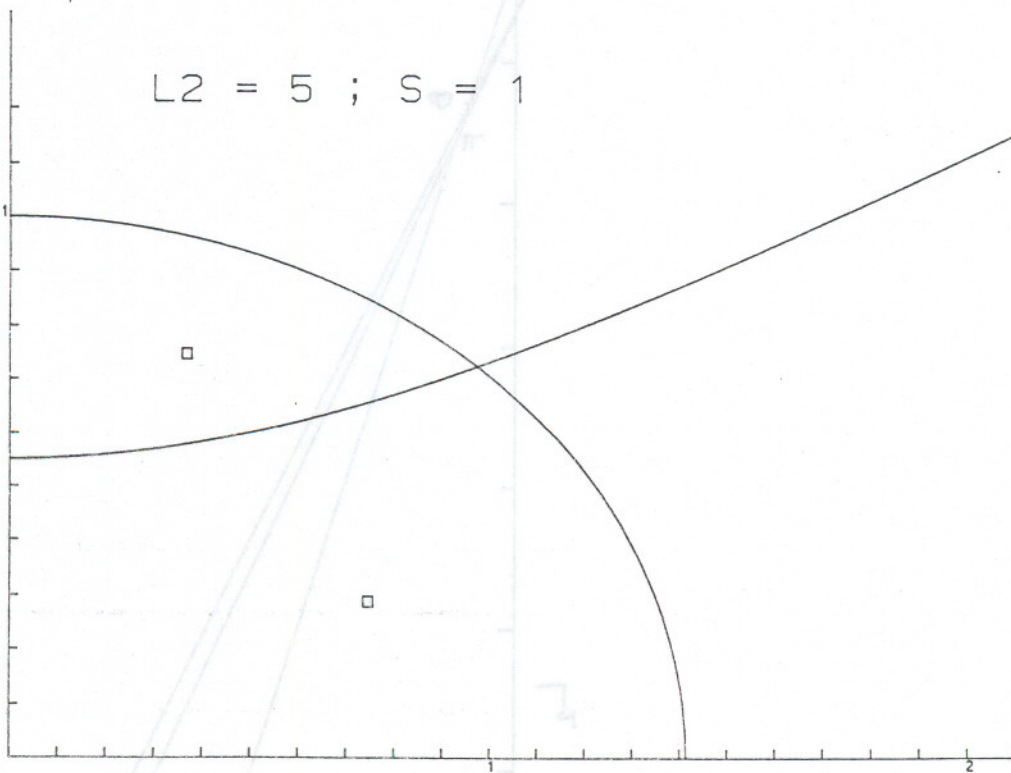


Figure 5 : courbe séparatrice et position des tourbillons

ÉTUDE DES RÉACTIONS D'ENCOMBREMENT DES GRANULATS DANS LA MISE EN OEUVRE DU BÉTON FRAIS

THE STUDY OF AGGREGATE BULKINESS REACTIONS IN FRESH
CONCRETE

par **S. KACI**, Directeur-Adjoint chargé de la post-graduation et de la recherche
Université de Tizi-Ouzou
TIZI-OUZOU (Algérie)
et **J.C. ROTH**, Professeur, LPMM, URA CNRS 1215
Université de METZ - Ile du Saulcy
57045 METZ Cedex 01

RÉSUMÉ

L'analyse du comportement mécanique et rhéologique du béton frais, considéré comme un milieu polyphasique (pâte+granulats) est fonction du comportement de chacune des phases en présence et de l'interaction existante entre elles.

L'objectif de ce travail est de mieux comprendre les phénomènes d'interaction granulaire au sein du milieu et le rôle joué par les gros granulats à travers l'analyse des réactions d'encombrement des granulats.

L'expérimentation a été menée sur des mélanges de granulats et de bromophorme, liquide de densité voisine de celle des granulats, permettant ainsi de nous affranchir des effets de la pesanteur et de l'influence rhéologique de la phase interstitielle. Les réactions d'encombrement de la phase granulaire lors de la mise en oeuvre du béton frais ont ainsi pu être étudiées par analogie en fonction de la concentration, de la forme et des dimensions des granulats.

Les résultats obtenus nous permettent d'établir quelques recommandations pour améliorer l'ouvrabilité des bétons.

ABSTRACT

The mechanical and rheological behaviour of fresh concrete, considered in a polyphase domain, depends on the behaviour of each phase and the interaction between them.

The purpose of this work is to better understand the grain interaction phenomena in this domain and the role played by the big aggregate in the bulkiness reaction study.

Experiments were conducted with a mixture of aggregate and bromophorme a liquid with a density near the aggregate density, allowing the gravity and rheological behaviour of the interstitial phase to be neglected.

By means of an analogical study it was possible to analyse the bulkiness reaction in fresh concrete in relation to the aggregate concentration, shape and size.

The results enable us to make several recommendations in order to improve the workability of the concrete.

1.- INTRODUCTION

Du point de vue rhéologique, le comportement du béton à l'état frais n'est pas totalement maîtrisé. En effet, M. BARIOULET [1], a constaté dans l'écoulement du béton frais que:

"dans un domaine où la concentration en granulats est faible l'influence de la phase granulaire sur le comportement du béton est négligeable; par contre dans un domaine où la la concentration est importante son influence est déterminante".

Par ailleurs, d'autres chercheurs, en voulant incorporer de gros granulats, dans le but d'améliorer la résistance du béton, ont obtenu une mauvaise ouvrabilité. Ce sont donc ces phénomènes désignés sous le nom de *réaction d'encombrement des granulats* que nous allons étudier moyennant deux hypothèses:

1- afin de simplifier l'étude du comportement rhéologique du béton à l'état frais nous considérons ce dernier comme un composite à deux phases: une pâte interstitielle comme première phase et une phase granulaire comme deuxième.

2- par ailleurs, nous prendrons en considération le fait que la pâte interstitielle, à un comportement assimilé à celui d'un fluide non-Newtonien. Quant aux granulats, le comportement relève davantage de celui d'un milieu granulaire.

Cette étude a un objectif double:

-d'abord mieux comprendre le phénomène d'interactions granulaires; ce qui permettra de compléter l'étude du rôle joué par les gros granulats dans le comportement mécanique du béton avant la prise.

-ensuite essayer de trouver une solution relative au problème de mise en place du béton à très haute résistance, composé à partir de gros granulats.

2.- MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

2-1.- PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Le principe repose essentiellement sur deux critères:

- 1) Respect de l'arrangement spatial des granulats baignés dans un milieu interstitiel.
- 2) L'affranchissement de l'influence rhéologique de ce milieu interstitiel sur la mesure.

Ces deux critères permettent de caractériser les phénomènes résultants d'actions propres aux granulats, tout en gardant leur compacité, ainsi que le nombre de contacts intergranulaires très peu différents de ceux de béton.

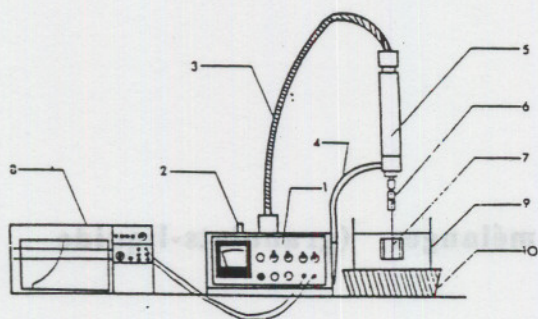
2-2.- APPAREILLAGE UTILISÉ

2-2-1. Description d'ensemble

L'ensemble de l'appareillage (Fig. A) est un viscosimètre HAAKE et son environnement classique en métrologie.

APPAREILLAGE DE MESURE

Schéma D'Ensemble



LEGENDE

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1. PUPITRE DE COMMANDE | 6. SUSPENSION A LA CARDAN |
| 2. LEVIER DE VITESSE | 7. MOBILE A AILETTES |
| 3. FLEXIBLE | 8. ENREGISTREUR |
| 4. BRAS DE SUPPORT | 9. CUVE DE MESURE |
| 5. TETE DE MESURE | 10. CALLE |

Fig. A

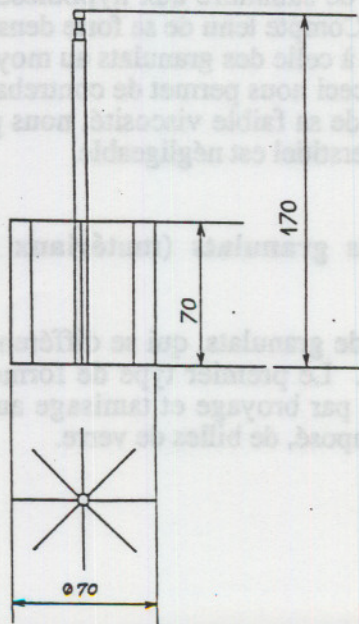


Fig. C

TÊTE DE MESURE

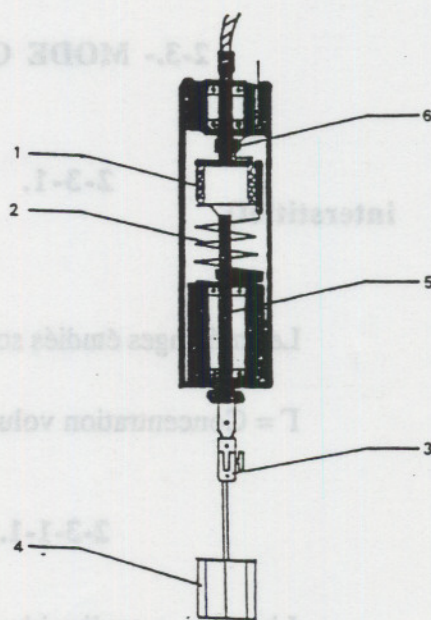


FIGURE B

LEGENDE

- | |
|---------------------------|
| 1. POTENTIOMETRE |
| 2. DYNAMOMETRE |
| 3. SUSPENSION A LA CARDAN |
| 4. MOBILE A AILETTE |
| 5. AXE DU MOBILE |
| 6. AXE D'ENTRAINEMENT |

Fig. B

Remarques: La liaison entre le mobile (Fig.C et Fig.B-4)) et le moteur est assurée par un flexible de transmission (Fig. A-3) constitué par un câble métallique.

La tête de mesure (Fig.B et Fig.A-5) est pourvue d'un axe comportant deux parties: une partie haute renfermant un axe d'entraînement et une partie basse contenant l'axe du mobile. Elles sont reliées entre elles par un dynamomètre à ressort (Fig. B-2) ne présentant aucune déformation résiduelle.

Le mobile est rattaché à la partie basse de l'axe par une suspension à la cardan (Fig.B-3) assurant ainsi la verticalité aussi bien de la tête de mesure que du mobile.

2-2-2. Principe de fonctionnement

Le moteur fait tourner le mobile à l'intérieur de la cuve contenant le mélange à étudier. Toute résistance s'opposant à la rotation du mobile engendre une déformation mécanique du dynamomètre(Fig. B -2).

2-3.- MODE OPERATOIRE

2-3-1. Choix des mélanges (granulats-liquide interstitiel)

Les mélanges étudiés sont caractérisés par le rapport volumique:

$$\Gamma = \text{Concentration volumique} = \frac{\text{Volume de granulats}}{\text{Volume total}}$$

2-3-1-1. Choix du liquide interstitiel

L'un des rares liquides permettant de satisfaire aux hypothèses imposées à la température ambiante est le Bromoforme. Compte tenu de sa forte densité (supérieure à celle des granulats), nous pouvons l'ajuster à celle des granulats au moyen d'un ajout en proportion convenable d'alcool éthylique; ceci nous permet de contrebalancer les effets de la pesanteur. Par ailleurs compte tenu de sa faible viscosité, nous pouvons assurer que l'influence rhéologique de ce milieu interstitiel est négligeable.

2-3-1-2. Choix des granulats (matériaux étudiés)

Nous avons considéré deux types de granulats, qui se différencient en plus de leur forme, par leur mode de fabrication. Le premier type de forme anguleuse, est composé de granulats de calcite, obtenus par broyage et tamisage au laboratoire. Le deuxième type, de forme sphérique est composé, de billes de verre.

Granulats de calcite:

1) Granulométrie relativement serrées:

Dans un premier temps, nous avons confectionné au laboratoire des classes relativement serrées, Tableau 1.

NATURE	CALCITE	
CLASSE GRANULOMETRIQUE EN mm	$G_1 = 0,4 - 0,8$	$G_5 = 5 - 10$
	$G_2 = 0,8 - 1,6$	$G_6 = 12,5 - 16$
	$G_3 = 1,6 - 3,15$	$G_7 = 10 - 16$
	$G_4 = 2,5 - 5$	$G_8 = 16 - 20$

Tableau 1 : Granulométries relativement serrées

2) Granulométries relativement étalées:

A partir des classes ci-dessus, nous avons obtenu des mélanges ternaires composé comme suit:

NATURE	CALCITE	
CLASSE GRANULOMETRIQUE EN mm	M_1	$50\% G_1 + 30\% G_5 + 20\% G_6$
	M_2	$20\% G_4 + 30\% G_5 + 50\% G_6$

Tableau 2 : Granulométries relativement étalées

3) Granulométries étalées:

Puis en dernier lieu, des granulométries étalées comportant de gros granulats telle que représentées par les courbes granulométriques sur les Figs. D et E.

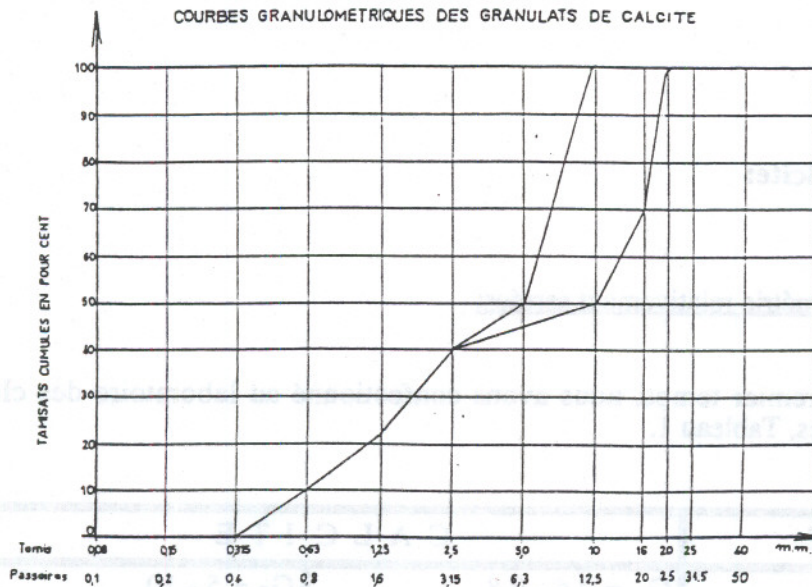


Fig. D : Courbes granulométriques des granulats de CALCITE

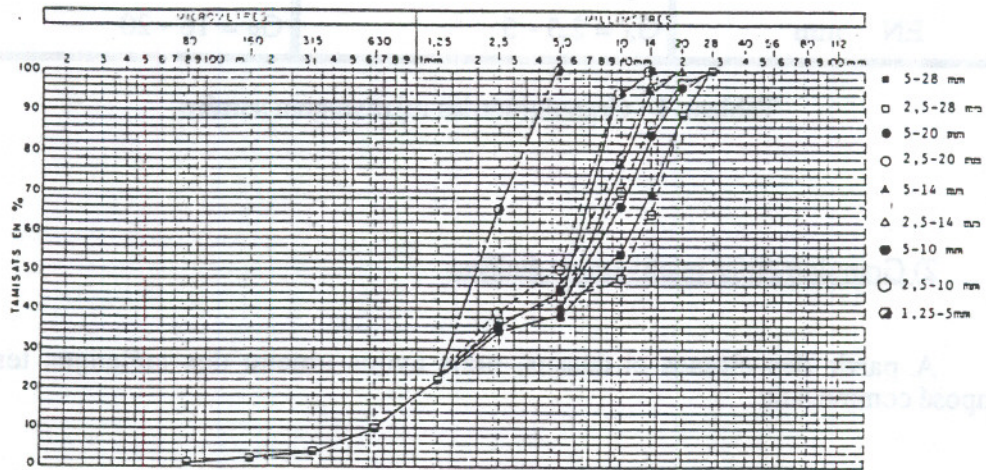


Fig. E : Gros granulats

Granulats de billes de verre:

1) Granulométries serrées:

Les billes de verre utilisées sont celles représentées par leur diamètre sur le tableau 3.

NATURE	BILLES DE VERRE	
DIAMETRE	B ₁ = 1	B ₃ = 10
EN mm	B ₂ = 5	B ₄ = 25

Tableau 3 : Granulométries serrées

2) Granulométries relativement étalées:

Tout comme pour les granulats de calcite, à partir de ces billes, de diamètre différent, nous avons testé des mélanges représentés au tableau 4.

MELANGE TERNAIRE, M' ₁	50% B ₁ + 40% B ₃ + 10% B ₄
MELANGE QUATERNAIRE, M' ₂	30% B ₁ + 30% B ₂ + 25% B ₃ + 15% B ₄

Tableau 4 : Granulométries relativement étalées

2-4.- MESURES EXPÉRIMENTALES

La mesure consiste à déterminer le couple de torsion qui s'exerce sur l'axe du dispositif de mesure (qui est complètement immergé dans le mélange et animé d'un mouvement de rotation permanente). La valeur de ce couple de torsion, ainsi que les caractéristiques géométriques du mobile, permettent d'obtenir la valeur de contrainte de cisaillement. Cette contrainte est le paramètre traduisant au mieux le caractère dynamique des réactions d'encombrements.

2-4-1. Résultats expérimentaux et interprétations

Tous les résultats obtenus sont représentés par $\Gamma = f(\tau)$ où Γ représente le pourcentage en granulats du mélange et τ représente la contrainte de cisaillement.

Essai préliminaire: analyse qualitative du phénomène observé:

Avant de présenter les résultats obtenus, il est utile de donner l'allure générale du phénomène observé en faisant varier la concentration en granulats de la valeur zéro à la valeur maximum.

La courbe se compose de trois parties distinctes, déterminées par les domaines 1-2-et 3 sur l'axe des ordonnées . (voir Fig.1).

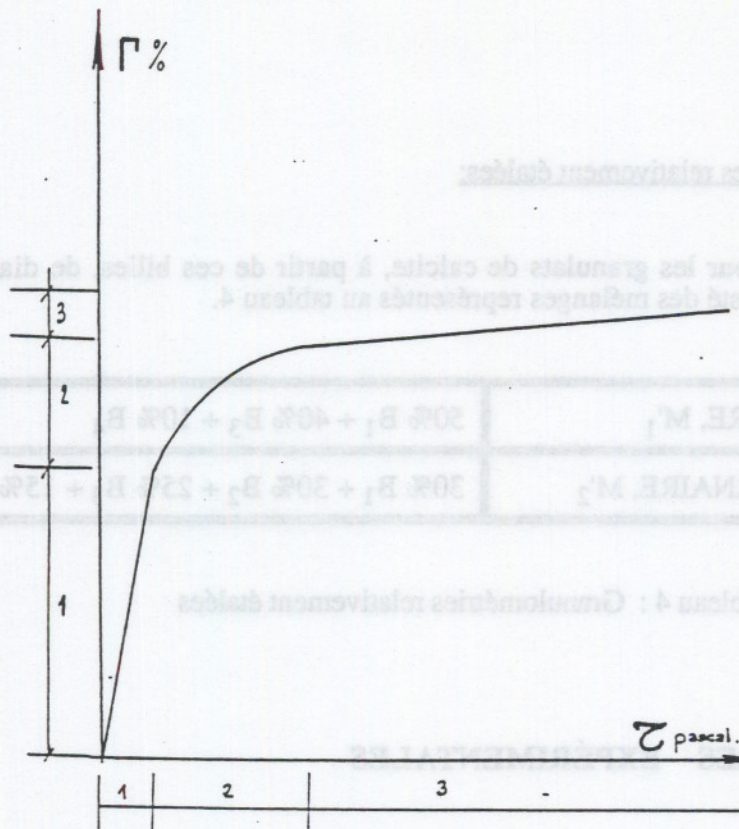


Fig. 1 Variation des réactions d'encombrement en fonction de la concentration en granulats.

a) Domaine 1

Pour des concentrations faibles en granulats, l'évolution de contrainte de cisaillement en fonction de la concentration est linéaire:

- Au repos, les grains sont éloignés les uns des autres; le nombre de contacts intergranulaires est nul; la structure de cette phase granulaire est lâche.

- Pour déplacer les granulats, il suffit d'une petite énergie, puisque les effets de la pesanteur sur les granulats sont totalement compensés par la poussée d'Archimède. De plus cette énergie de déplacement est d'autant plus faible que le nombre de granulats est peu élevé.

- Lorsque le mobile tourne, il fait déplacer les grains dans son mouvement; mais le nombre peu élevé de contacts pouvant s'y produire limite la valeur de la contrainte à une faible valeur. Dans ce cas les réactions d'encombrement des granulats sont nulles.

b) Domaine 2

Pour des concentrations relativement élevées, l'évolution de la contrainte de cisaillement est plus rapide.

- Au repos, les contacts entre grains, sont encore peu nombreux dans le mélange; et la structure est encore lâche.

- Lorsque le mobile tourne, il entraîne les grains dans son mouvement, il se produit alors des contacts qui deviennent de plus en plus nombreux au fur et à mesure que la concentration en granulats augmente, ce qui engendre un accroissement de la contrainte de cisaillement τ . Ce grand nombre de contact conduit à des réactions d'encombrements.

c) Domaine 3

Pour des fortes concentrations, on constate une évolution encore plus rapide de la contrainte de cisaillement. Dans cette zone, un petit ajout de granulat entraîne une très forte augmentation de la contrainte de cisaillement.

- Au repos, la structure est compacte; le nombre de contact entre grains dans le mélange est très important.

- Lorsque le mobile tourne, il se produit d'abord une rupture de la structure puis un réarrangement des granulats. Avec un nombre de grains très élevé, nous constatons un phénomène de *rhéoépaississement du milieu*. En effet, le désenchevêtrement des grains se produisant lors de rotation du mobile, s'accompagne d'une augmentation de volume du mélange.

d) Et enfin, lorsque la concentration en granulats devient très importante, au point où les forces des contact, dues aux réactions d'encombrement deviennent supérieures à celles développées par le couple maximum exercé, il s'en suit un blocage du mobile, qui se traduit en réalité par un non écoulement du béton frais.

Remarque importante :

Il est à remarquer, que pour des solutions composées uniquement de bromoforme, la valeur du couple résistant s'opposant au mobile lors de sa rotation est nulle; ce résultat montre bien que toutes les mesures reflètent bien les effets imputables aux granulats.

3.- INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DES GRANULATS

3-1.- INFLUENCE DE LA CONCENTRATION

Sur la totalité des graphes $\Gamma = f(\tau)$, Figs 2 à 7, les courbes obtenues, aussi bien avec les granulats de calcite, que les billes de verre, fait apparaître une augmentation de la contrainte de cisaillement τ au fur et à mesure que la concentration en granulats augmente. La courbe $\Gamma = f(\tau)$ est une fonction monotone croissante.

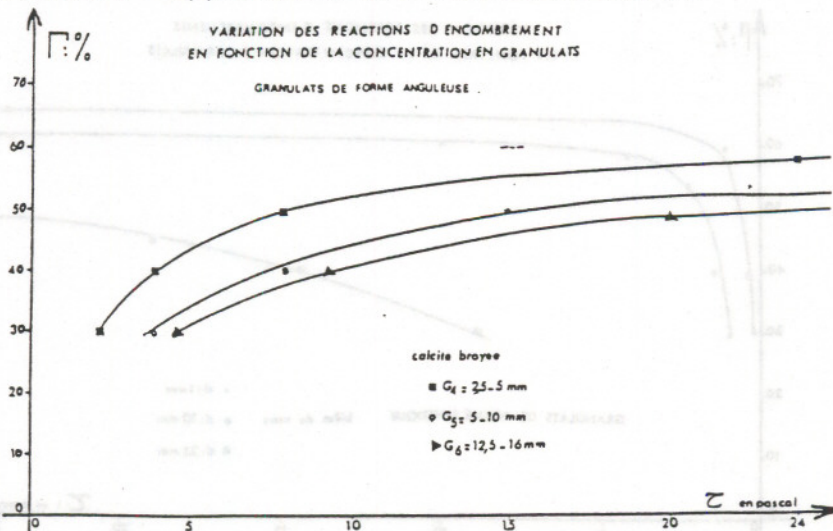


Fig. 2 Granulats de forme anguleuse

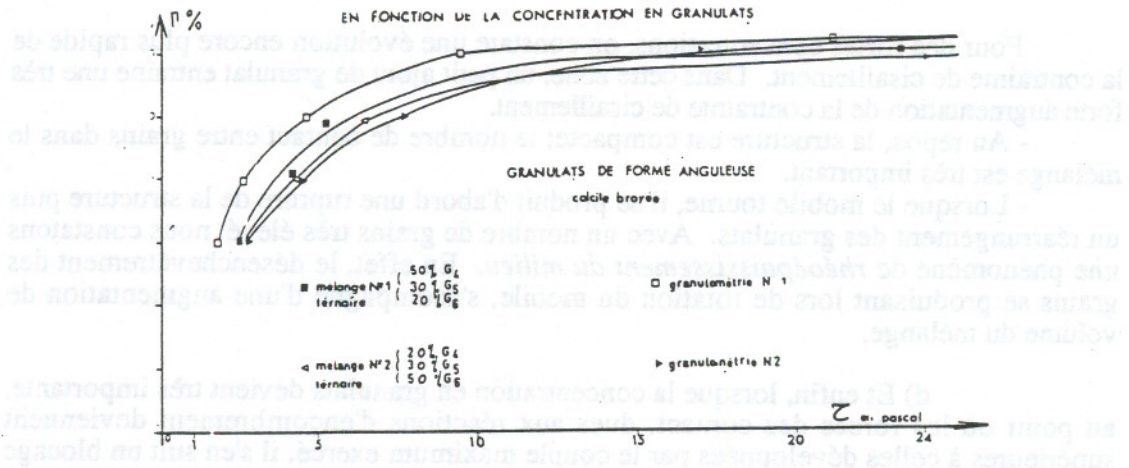


Fig. 3 Granulats de forme anguleuse

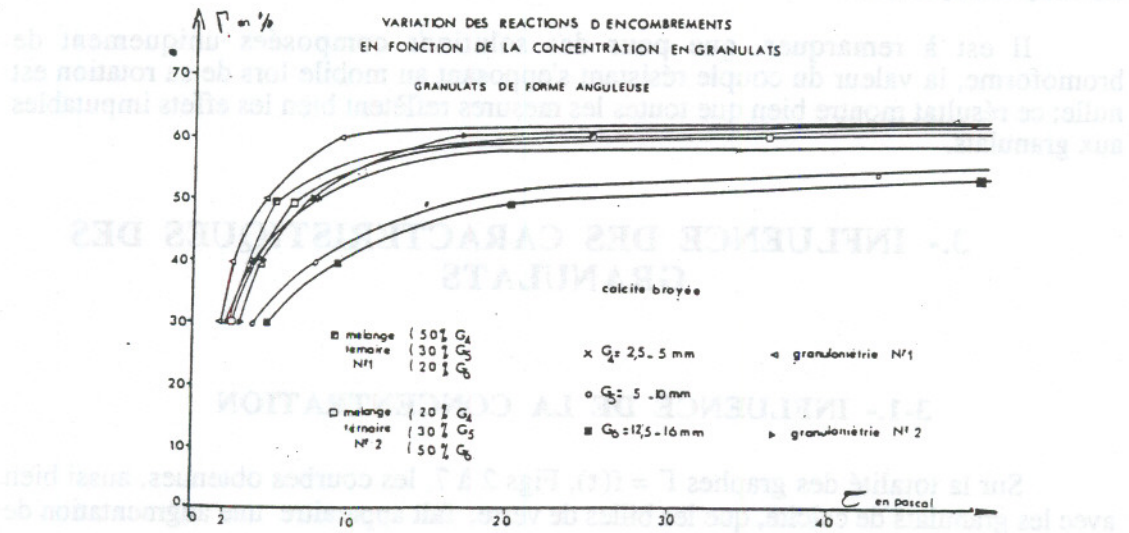


Fig. 4 Granulats de forme anguleuse

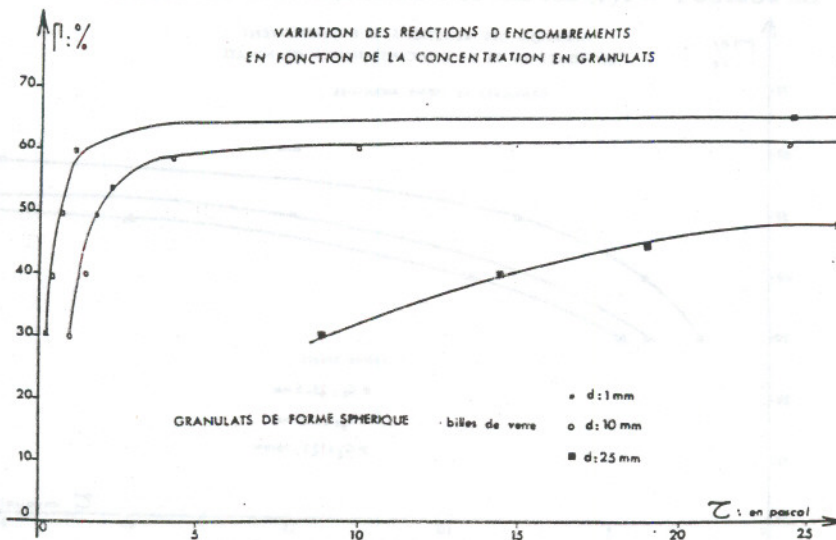


Fig. 5 Granulats de forme sphérique

VARIATION DES REACTIONS D'ENCOMBREMENTS
EN FONCTION DE LA CONCENTRATION EN GRANULATS

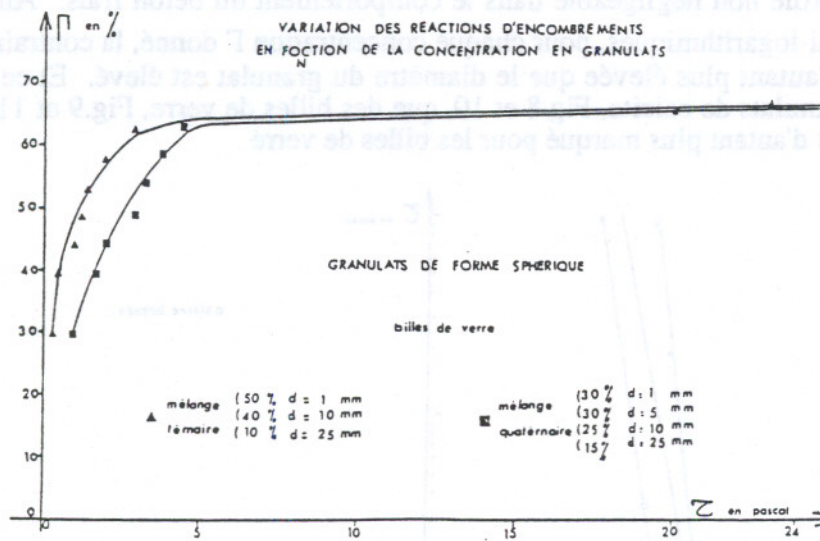


Fig. 6 Granulats de forme sphérique

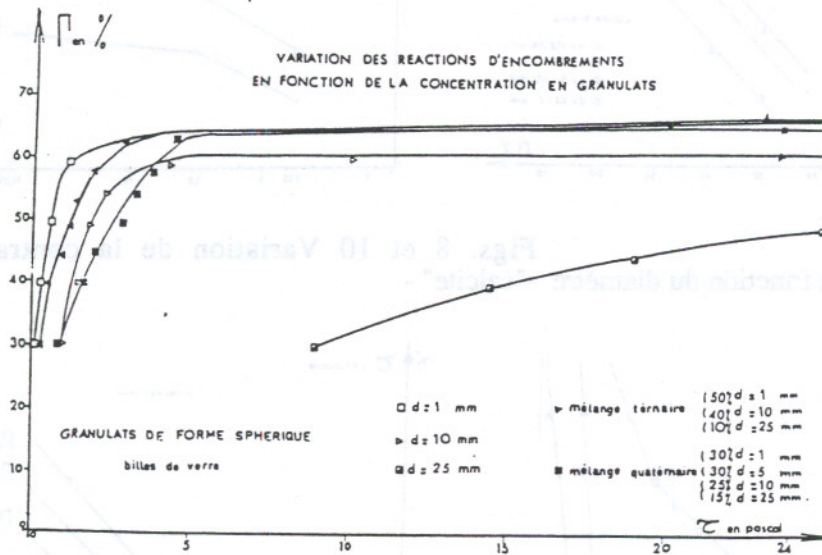
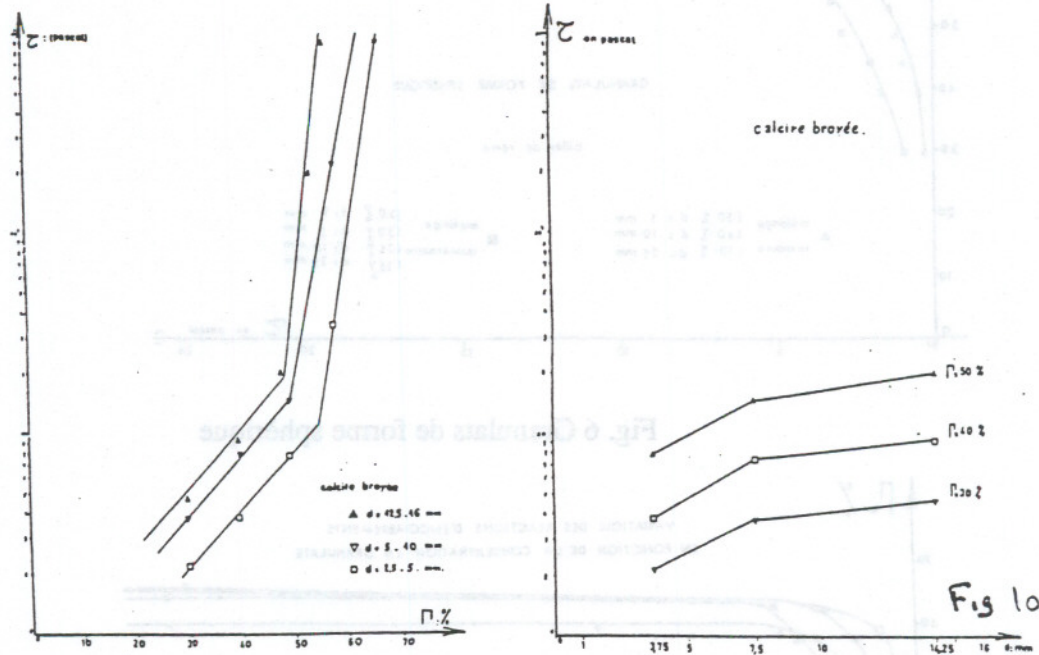


Fig. 7 Granulats de forme sphérique

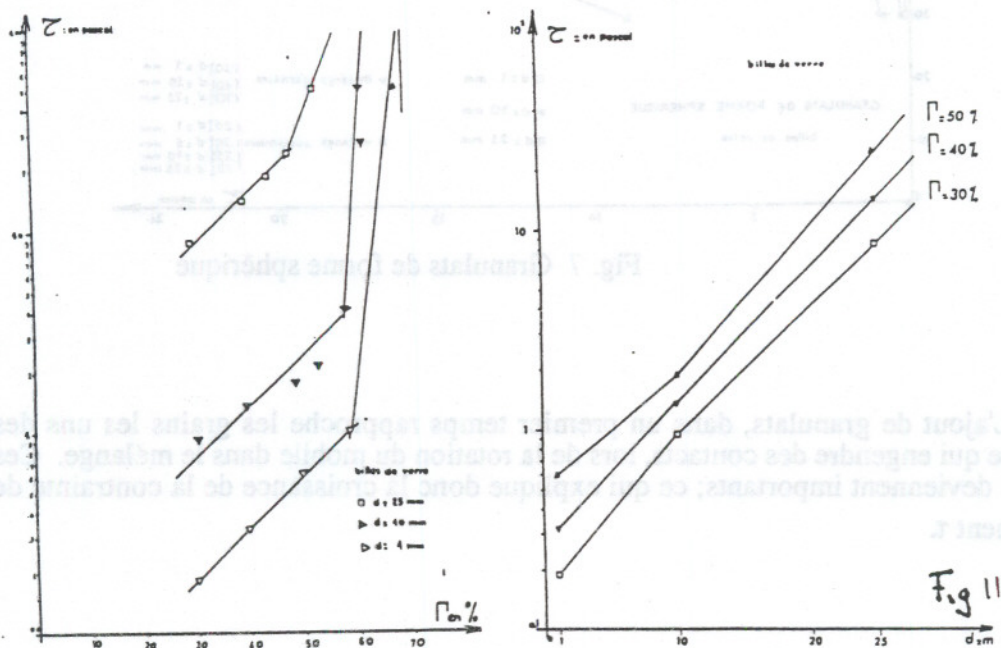
L'ajout de granulats, dans un premier temps rapproche les grains les uns des autres, ce qui engendre des contacts, lors de la rotation du mobile dans le mélange. Ces contacts deviennent importants; ce qui explique donc la croissance de la contrainte de cisaillement τ .

3-2.- INFLUENCE DE LA DIMENSION DES GRANULATS

Ce paramètre auquel nous n'avons accordé aucune importance dans le passé, semble jouer un rôle non négligeable dans le comportement du béton frais. Ainsi en coordonnées semi-logarithmiques, pour chaque concentration Γ donné, la contrainte de cisaillement et d'autant plus élevée que le diamètre du granulat est élevé. Et ce aussi bien pour des granulats de calcite, Fig.8 et 10, que des billes de verre, Fig.9 et 11. Cet accroissement est d'autant plus marqué pour les billes de verre.



Figs. 8 et 10 Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du diamètre - "calcite" -



Figs. 9 et 11 Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du diamètre - "billes de verre" -

Interprétation des graphes

N étant le nombre de granulats par unité de volume; pour un volume donné, le nombre de granulats étant lié au diamètre, nous avons donc tracé les courbes $\tau = f(N)$ représentant l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du nombre de granulats par unité de volume. Pour une concentration donnée, la contrainte de cisaillement τ est d'autant plus élevée que le nombre de granulats est petit, Figs. 12 et 13.

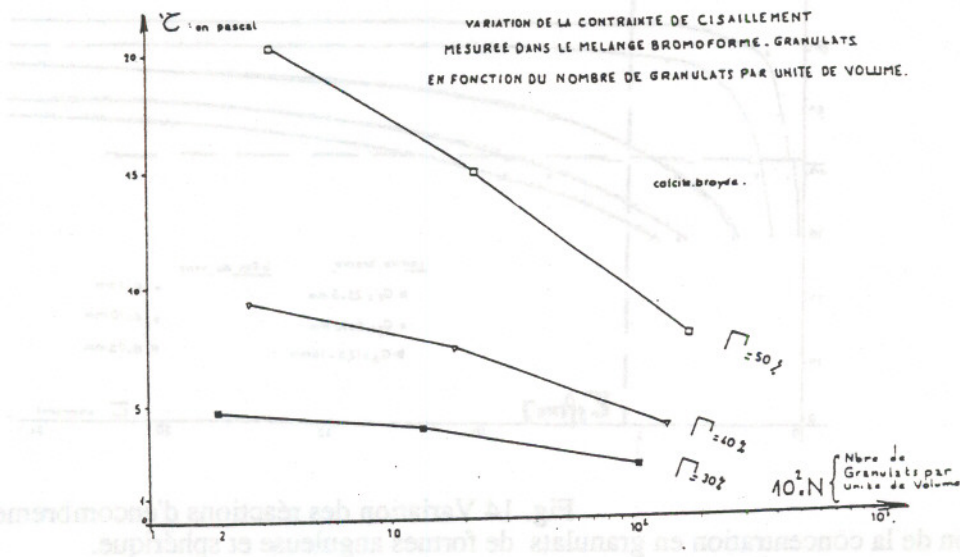


Fig. 12 Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du nombre de granulats par unité de volume: bromoforme-calcite broyée.

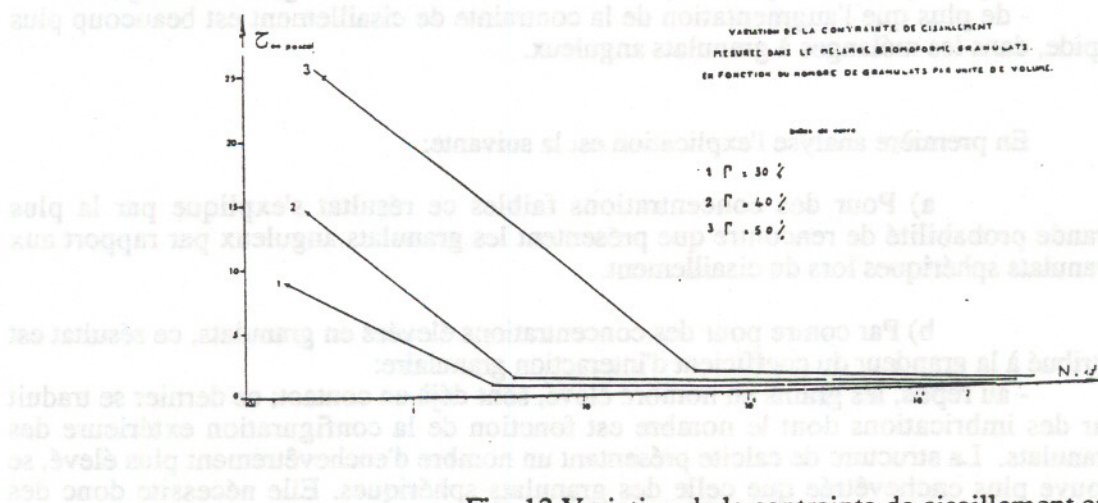


Fig. 13 Variation de la contrainte de cisaillement en fonction du nombre de granulats par unité de volume: bromoforme-billes de verre.

3-3.- INFLUENCE DE LA FORME DES GRANULATS

En comparant les résultats obtenus avec les granulats de calcite d'une part et les granulats sphériques d'autre part, on s'aperçoit que le paramètre de forme est d'une grande influence, Fig.14.

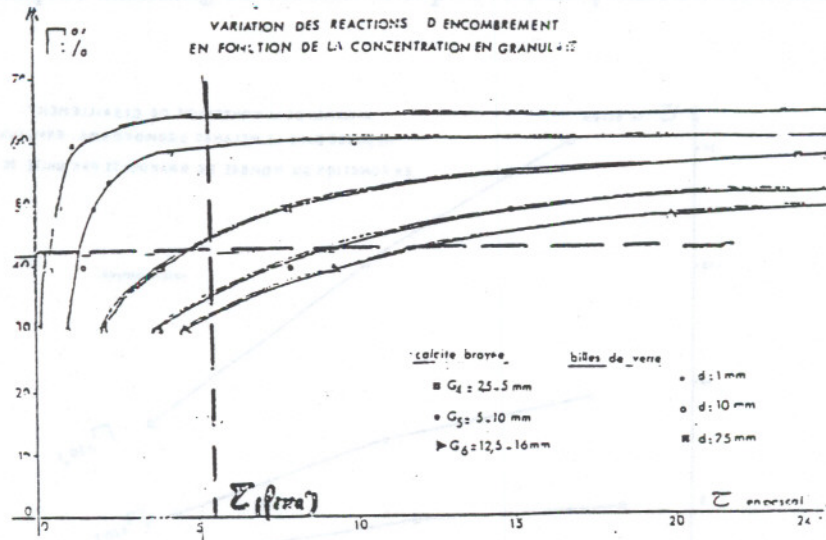


Fig. 14 Variation des réactions d'encombrement en fonction de la concentration en granulats de formes anguleuse et sphérique.

On constate:

- que pour une même concentration en granulats, la contrainte de cisaillement relative aux granulats anguleux est toujours supérieure à celle relative aux granulats sphériques.
- de même, que pour une contrainte de cisaillement donnée, la concentration en granulats sphériques est toujours supérieure à la concentration en granulats anguleux.
- de plus que l'augmentation de la contrainte de cisaillement est beaucoup plus rapide, dans les mélanges à granulats anguleux.

En première analyse l'explication est la suivante:

a) Pour des concentrations faibles ce résultat s'explique par la plus grande probabilité de rencontre que présentent les granulats anguleux par rapport aux granulats sphériques lors du cisaillement.

b) Par contre pour des concentrations élevées en granulats, ce résultat est attribué à la grandeur du coefficient d'interaction granulaire:

- au repos, les grains en nombre élevé, sont déjà en contact; ce dernier se traduit par des imbrications dont le nombre est fonction de la configuration extérieure des granulats. La structure de calcite présentant un nombre d'enchevêtrement plus élevé, se trouve plus enchevêtrée que celle des granulats sphériques. Elle nécessite donc des forces de désenchevêtrement plus importantes.

3-4.- INFLUENCE DE LA GRANULARITÉ

Le paramètre granulométrie n'est pas du tout négligeable.

3-4-1. Comparaison entre les granulométries relativement serrées:

A concentration égale, la contrainte de cisaillement est d'autant plus faible que la granulométrie serrée est composée de grains de petits diamètres, Fig. 15.

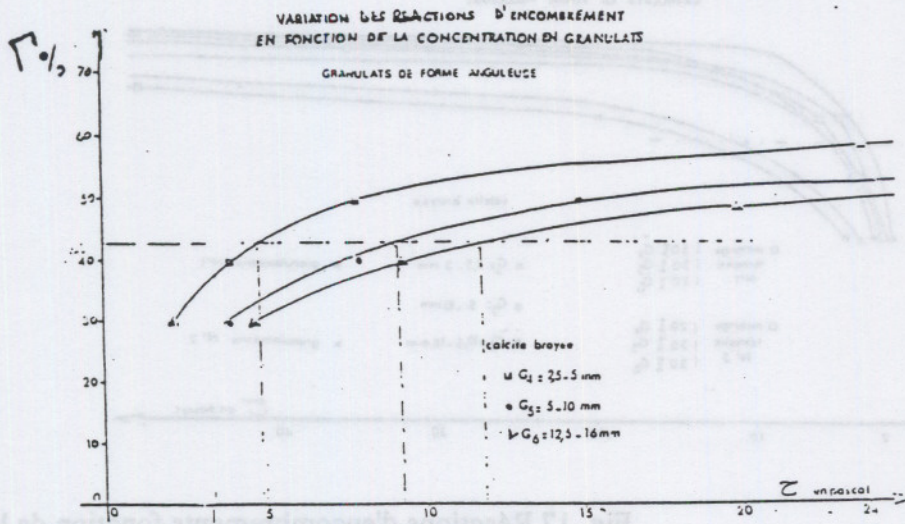


Fig. 15 Réactions d'encombrements : granulats de forme anguleuse : calcite broyée

3-4-2. Comparaison entre les granulométrie serrées et les granulométries étalées:

Pour une même concentration, la contrainte de cisaillement est d'autant plus faible que la granulométrie est plus étalée que serrée, Fig. 16. Cela paraît évident, du fait que les grains fins ont toujours tendance à favoriser les déplacements des grains les plus gros en structure compacte.

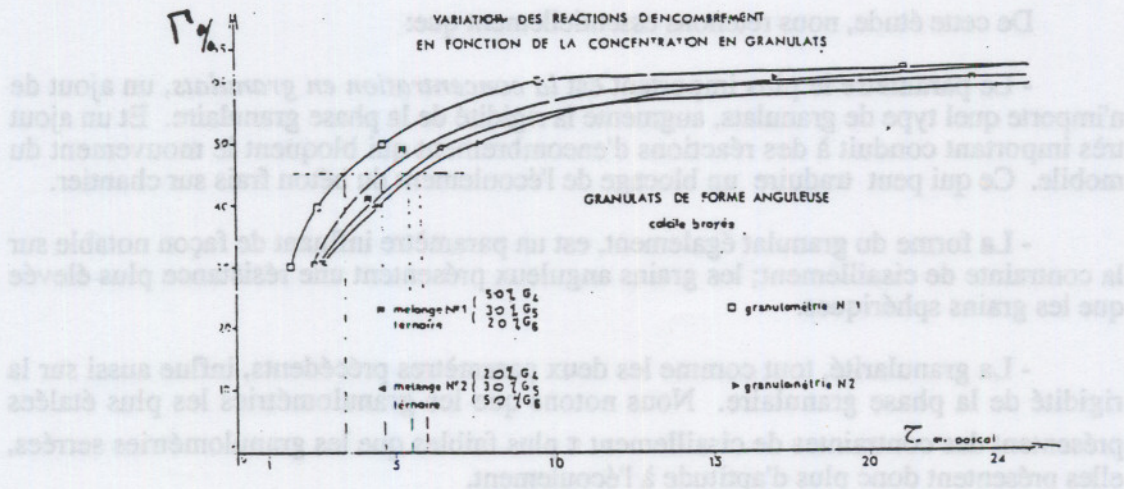


Fig. 16 Réactions d'encombrements fonction de la granulométrie.

3-4-3. Comparaison entre les granulométries étalées:

Pour une même concentration, la contrainte de cisaillement est d'autant plus grande que la granulométrie étalée est composée de gros granulats, Fig.17.

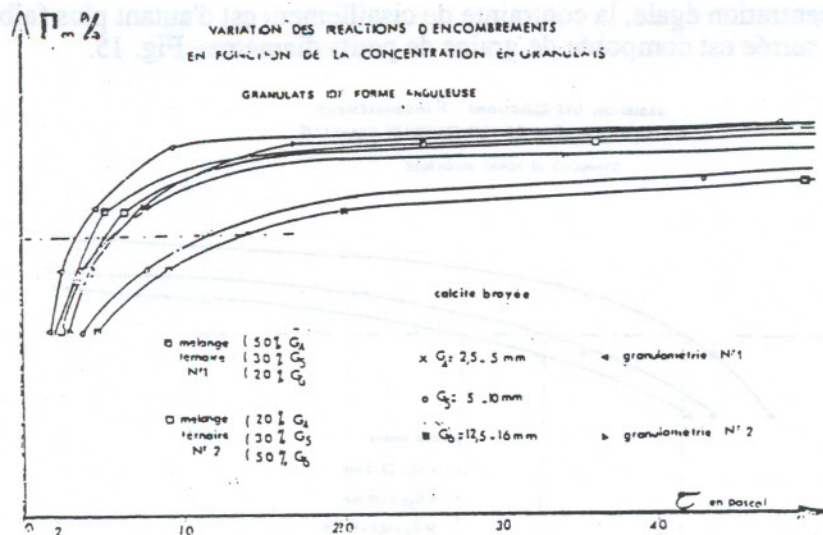


Fig. 17 Réactions d'encombrements fonction de la concentration: calcite broyée.

4.- CONCLUSION

De cette étude, nous retenons essentiellement que:

- Le paramètre le plus important est la *concentration en granulats*, un ajout de n'importe quel type de granulats, augmente la rigidité de la phase granulaire. Et un ajout très important conduit à des réactions d'encombrement qui bloquent le mouvement du mobile. Ce qui peut traduire un blocage de l'écoulement du béton frais sur chantier.

- La forme du granulat également, est un paramètre influant de façon notable sur la contrainte de cisaillement; les grains anguleux présentent une résistance plus élevée que les grains sphériques.

- La granularité, tout comme les deux paramètres précédents, influe aussi sur la rigidité de la phase granulaire. Nous notons que les granulométries les plus étalées présentent des contraintes de cisaillement τ plus faibles que les granulométries serrées, elles présentent donc plus d'aptitude à l'écoulement.

- Quant au diamètre, contrairement à ce que l'on pensait auparavant, son influence sur la contrainte de cisaillement n'est pas négligeable; elle est d'autant plus grande que le diamètre des granulats est élevé.

5.-RECOMMANDATIONS :

Pour obtenir des bétons de meilleur ouvrabilité, il est conseillé d':

- éviter les concentrations trop élevées en granulats.
- éviter l'emploi de gros granulats, surtout en grande quantité.
- opter pour des granulométries les plus étalées.
- opter pour des granulats de forme sphériques.

6.-REMARQUES :

A partir de ces résultats, nous pouvons expliquer certains problèmes pratiques rencontrés actuellement sur chantier:

Premier problème:

Les granulométries comportant exclusivement (ou en majeure partie) de gros granulats diminue l'ouvrabilité, l'introduction de gros granulats dans une composition granulométrique, au détriment des granulats de diamètre inférieur, conduit à un changement de courbes granulométriques.

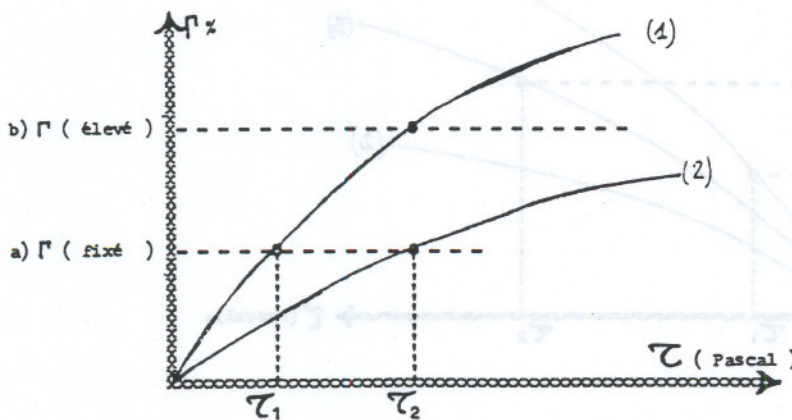


Schéma 1

Ainsi:

a) Pour une concentration donnée en granulats (Γ fixé), le passage d'une courbe granulométrique (1) à une autre comprenant de gros granulats (2) se traduit par une augmentation de la contrainte de cisaillement.

i-e $\Gamma_{\text{fixé}}$: $\Phi_2 > \Phi_1 \implies \tau_2 > \tau_1$

b) Pour une concentration élevée ($\Gamma_{\text{élevé}}$).

La valeur de τ devient très importante ; il est donc normal que le béton trouve des difficultés à s'écouler .

i-e $\Gamma_{\text{élevé}}$: $\Phi_2 > \Phi_1 \implies \tau_2 > \tau_1$
 avec $\tau_2 \gg \tau_1 \implies$ blocage de l'écoulement .

Deuxième problème:

- Un ajout de gros granulats en supplément à une granulométrie de base (Courbe N° 1)

a conduit à une mauvaise maniabilité du béton sur chantier. Dans ce cas, nous enregistrons à la fois:

- Une augmentation de la contrainte de cisaillement τ .

- Une augmentation de concentration Γ . Ce cas est plus préjudiciable pour l'écoulement du béton, le blocage du mobile se produit plus rapidement.

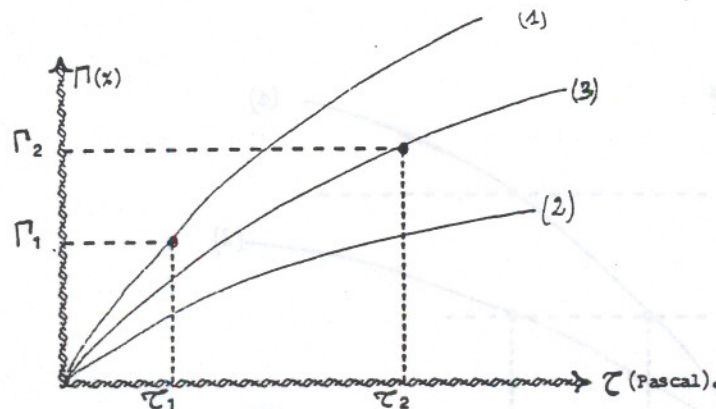


Schéma 2

- (1) Courbe relative à une granulométrie de base, bonne ouvrabilité .
- (2) Courbe relative à une granulométrie de plus gros granulats .
- (3) Courbe relative à une granulométrie définie en (1), plus un ajout en supplément de gros granulats

Ainsi:

$\Gamma_2 > \Gamma_1$ \Longrightarrow $\tau_2 \gg \tau_1$
dû à l'ajout de gros granulats \Longrightarrow blocage du mobile .

7.-PERSPECTIVES:

De manière à pouvoir dégager des solutions pratiques aux problèmes d'ouvrabilité de bétons composés de gros granulats, il serait profitable d'orienter les recherches vers des voies de modélisation.

8.-BIBLIOGRAPHIE

- 1- BARRIOULET M., " *Contribution à l'étude du rôle joué par les granulats dans le comportement mécanique du béton la prise du liant* ", Thèse doctorat Toulouse I.
9 Mars 1984
- 2- BARON J., " *Les principes de composition du béton à porosité minimale* ", Béton Hydraulique, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1982.
- 3- CHARONNAT J., " *Fabrication et la mise en oeuvre, les contrôles* ", Béton Hydraulique, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1982.
- 4- BARON J., " *Nécessité d'une démarche pragmatique, idée de maniabilité et mise en place* ", Béton Hydraulique, Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1982.
- 5- BARRIOULET M., " *Contribution à l'étude des rôles respectifs joués par la pâte interstitielle et par les granulats dans le comportement mécanique du béton avant la prise du liant* ", Thèse Doctorat, Toulouse, 1977.
- 6- LEGRAND C., " *Contribution à l'étude de la rhéologie du béton frais* ", Matériaux de Construction, RILEM, Volume 5 N° 29 et 30, 1972.
- 7- BOMBLED J. P., " *Rhéologie du béton frais* ", Publication technique, N° 161, CERILH, Paris, 1964.