

ISSN 1149 - 0039

Les Cahiers de Rhéologie



Volume XI, Numéro 1

février 1993

Edités par :

Le Groupe Français de Rhéologie

ISSN 1149 - 0039

Les Cahiers de Rhéologie



GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Président : JM. PIAU

Trésorier : R. BLANC

Secrétaire : R. GAUDU

ENSCPB

351 cours de la Libération

33405 TALENCE CEDEX

Tél. 56 84 66 88

Fax. 56 84 66 68

SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS

Les Cahiers paraissent deux à trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement.

Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant
au Secrétariat du Groupe moyennant une participation au frais.

CONSIGNES AUX AUTEURS

1. Généralités

En vue de publication dans les Cahiers de Rhéologie le Comité de rédaction souhaite recevoir des articles dans tous les domaines de la rhéologie théorique et expérimentale des solides et des fluides. Des résultats de recherche dans ces domaines ou dans des domaines voisins mais faisant appel à la rhéologie seront pris en considération de même que les contributions d'auteurs pourtant sur l'"état de l'art" dans l'un ou l'autre des domaines de la rhéologie.

La langue officielle du Journal *Les cahiers de rhéologie* est le français mais des articles en anglais pourront être acceptés de la part d'auteurs non francophones. Les auteurs francophones des articles doivent s'assurer qu'ils n'ont pas été publiés par ailleurs ou soumis à un autre journal. Les articles sont soumis à l'approbation d'un Comité de Lecture. Il peut être demandé à un auteur de réviser son article en fonction des remarques des rapporteurs. La décision finale de publication appartient au Comité de Rédaction.

2 - Soumission des articles

Les articles étant reproduits directement à partir de l'original envoyé par les auteurs il est nécessaire que le plus grand soin soit apporté à la présentation de ces articles et que les auteurs respectent scrupuleusement les instructions ci-dessous.

Le manuscrit original et copies de chaque article doivent être envoyés à l'adresse suivante :

*Prof. R. Gaudu
ENSCPB
351 cours de la Libération
33405 TALENCE Cedex*

La frappe doit être faite, si possible en caractère ELITE 12, avec un double interligne. Une machine équipée d'un ruban carbone est recommandée. Les textes réalisés en traitement de texte sont acceptés sous réserve que la frappe soit effectuée avec une imprimante de très bonne qualité : qualité courrier, imprimante laser. Une marge de 25 mm doit être laissée autour de la feuille.

Le manuscrit doit comprendre :

- Le titre en majuscules centré en haut de page à 35 mm du bord supérieur de la feuille,
- Deux lignes en dessous, centrés, le nom du ou des auteurs, suivis, à la ligne suivante de leur appartenance,
- Cinq lignes en dessous, un résumé en français suivi d'un résumé en anglais, chacun de 5 lignes au maximum. L'ordre sera inversé pour un article anglais.
- L'introduction de l'article suivie du texte,
- Les conclusions,
- Si nécessaire, la liste des notations et symboles,
- Une liste de références bibliographiques complètes.

Une liste de 5 **Mots Clé** devra figurer sur la dernière page, après l'article et avant les figures si celles-ci ne sont pas incluses dans le texte. La longueur normale du texte ne devrait pas dépasser 5 pages du format A4, y compris les résumés, les formules et les illustrations et la bibliographie. Certains articles plus longs pourront être acceptés si le sujet le justifie et sous réserve de l'accord préalable du Comité de Rédaction. Des articles plus courts, éventuellement sous forme de "notes" seront également les bienvenus. Les figures doivent être fixées de préférence en place dans le texte ou éventuellement en fin d'article. Les photos doivent être évitées dans la mesure du possible.

Les Cahiers de Rhéologie

SOMMAIRE DU VOLUME XI, n° 1

FEVRIER 1993

ARTICLES

- Rhéologie des émulsions concentrées d'huile de silicone dans l'eaup. 9

I - Détermination de la loi rhéologique d'une émulsion concentrée (65 % en poids) après correction des effets de glissement.

A. OUCHENE, D. QUEMADA, P. PERROT

Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico-Chimique,
Université Paris VII, 2 place Jussieu - 75005 PARIS

- Etablissement d'un régime thermique dans un tube. Cas d'un fluide pseudoplastique thermodépendantp. 31

V-T. NGUYEN, A. EL OUARDIGUI, M. LÉBOUCHE

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Appliquée.
CNRS - URA 875 - Université Nancy I

- Frottement sec et similitude dans l'écoulement des milieux granulairesp. 41

J-D. WEBER, J-C. ROTH

ISGMP, LPMM, Université de Metz, Ile du Saulcy - 57045 METZ Cedex 1

RHEOLOGIE DES EMULSIONS CONCENTREES D'HUILE DE SILICONE DANS L'EAU.

I. Détermination de la loi rhéologique d'une émulsion concentrée (65% en poids) après correction des effets de glissement .

A. OUCHENE, D. QUEMADA, P. PERROT

Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamique Physico-Chimique,
Université Paris VII, 2 place Jussieu 75005 Paris.

RESUME

Cette étude a porté sur la caractérisation des propriétés rhéologiques d'une émulsion concentrée d'huile de silicone dans l'eau en utilisant deux viscosimètres différents, un viscosimètre de Couette et un viscosimètre capillaire. En prenant en compte les effets de glissement, mis en évidence dans ces deux appareils, nous avons pu vérifier l'unicité de la loi rhéologique de l'émulsion pour les deux systèmes de mesure. Cette loi a été modélisée par des modèles à deux ou quatre paramètres d'une manière tout à fait acceptable.

ABSTRACT

The present work concerns the rheological characterization of a concentrated emulsion of silicon oil in water, from using of Couette and capillary rheometry. We have checked the unicity of the emulsion rheological law, taking into account wall slip effects observed in both apparatus. Good modelling from either an Oswald law or a 4 parameters relation $\eta(\dot{\gamma})$ has been obtained.

I INTRODUCTION

Les écoulements viscosimétriques de dispersions concentrées (suspensions, émulsions...) montrent souvent des effets de parois dus à l'interaction entre les particules et les limites solides des conduits. Si la concentration est suffisamment élevée, ces effets de parois conduisent à des distributions inhomogènes des particules, perpendiculairement à ces parois (/ 1 /, / 2 /, / 3 /) inhomogénéités qui peuvent être approximativement représentées par des couches pariétales, apauvries en particules, donc moins visqueuses, jouant un rôle lubrifiant. L'analyse des mesures rhéologiques ne prenant pas en compte ces interactions fluide-paroi conduira alors à des résultats erronés. Pour caractériser la loi rhéologique de nos émulsions, nous avons dû corriger nos mesures de ces effets de parois que classiquement, Mooney a décrit comme des effets de glissement / 4 /. Cet auteur a montré qu'il était possible de déterminer la loi rhéologique, à priori inconnue, à partir de la relation entre le couple et la vitesse de rotation en viscosimétrie de Couette, ou de la relation entre le gradient de pression et le débit volumique dans un viscosimètre capillaire, en utilisant certaines procédures expérimentales et analyses mathématiques qui seront reprises dans cet article.

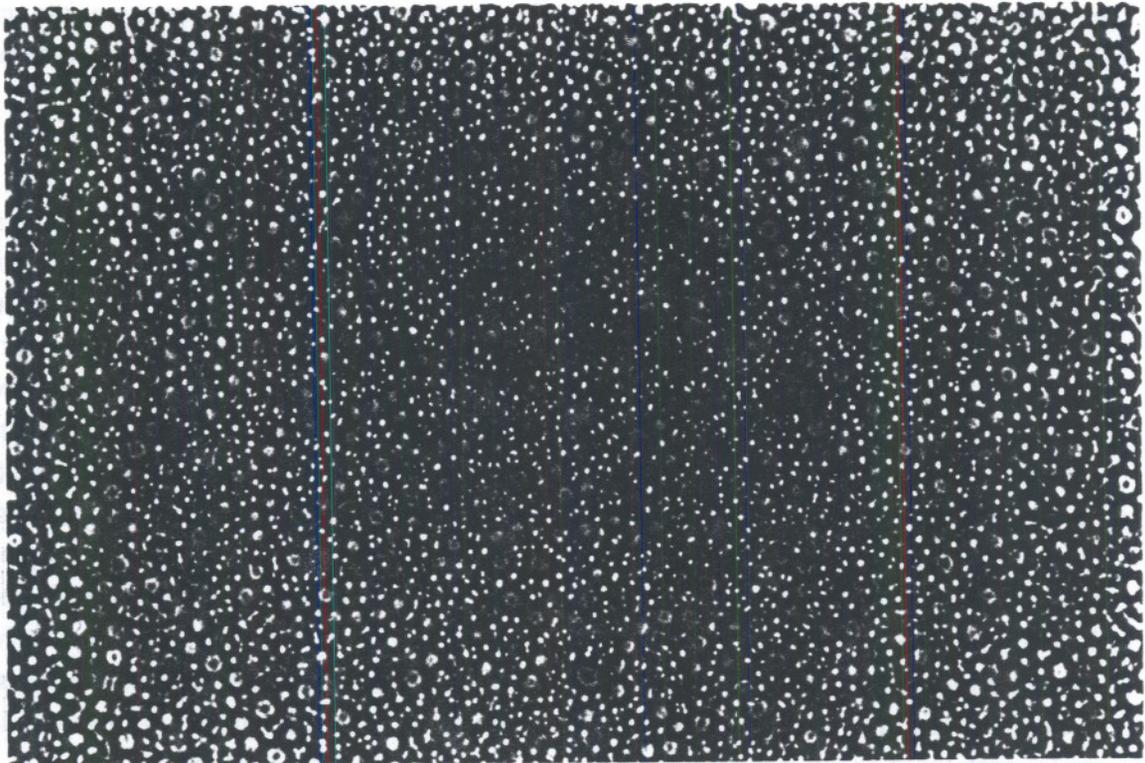
II. MATERIELS ET METHODES

II. 1: PREPARATION DES EMULSIONS:

Les émulsions étudiées sont des émulsions directes, huile de silicone dans l'eau, obtenues en ajoutant une huile de silicone de 100 cSt (47V100, Rhone Poulenc) à une solution d'eau distillée et de tensioactif (Tergitol) dont la densité est de 1,02, la viscosité de 120 cSt et ayant un HLB (l'équilibre hydrophile-lypophile) de 14,5, caractéristique d'une émulsion huile dans l'eau. Le mélange obtenu est agité pendant 5 minutes à l'aide d'un mélangeur Ultra Turrax (Tc 50, Prolabo) dont la vitesse de rotation est variable. Après la préparation, les émulsions sont recouvertes pour empêcher l'évaporation de la phase continue. Dans cet article, nous nous limiterons à l'étude d'une telle émulsion, à une concentration (massique) d'huile $\phi_w = 65\%$, que nous désignerons par E100 T 65.

II. 2: GRANULOMETRIE DES EMULSIONS:

La microphotographie a été utilisée pour analyser les caractéristiques granulométriques des émulsions. Une couche mince d'émulsion est disposée sur une plaque en verre et placée sous microscope. En utilisant un grossissement donné on filme l'émulsion à l'aide d'une caméra vidéo. Le diamètre des gouttes d'huile est mesuré en exploitant la bande magnétique sur un écran de télévision. Ces émulsions sont très polydispersées comme le montre la photographie 1 et le diamètre moyen est trouvé égal à $10 \mu\text{m}$. Nous avons pu observer ainsi une très bonne stabilité de l'émulsion sur des temps de l'ordre de plusieurs jours.



Photographie 1: Emulsion E100 T 65 agitée à 10000tr/min.

II. 3: APPAREILS DE MESURES:

Les caractéristiques rhéologiques des émulsions ont été mesurées au moyen d'un viscosimètre à cylindres coaxiaux (Carrimed CS100) et d'un viscosimètre capillaire mis au point au laboratoire.

II. 3. 1: Viscosimètre de Couette (Carrimed CS100):

Ce viscosimètre a été utilisé dans la gamme des contraintes variant de 0,2 à 30Pa, avec différents entrefers de dimensions 1,17; 2,34 et 3,52 mm.

II. 3. 2: Le viscosimètre capillaire:

Dans l'appareillage utilisé, le fluide est placé à l'intérieur d'un réservoir et la pression est imposée à la surface du fluide grâce à de l'air comprimé. Ce dernier est détendu de 10^4 à 10^3 Pa par incréments de 1000Pa et la pression est mesurée par un capteur différentiel. Le réservoir se vide dans le capillaire (dont l'axe est vertical) sous l'influence de la différence de pression et de la pesanteur, puis le fluide est recueilli dans un bécher pendant un temps donné. Les diamètres des différents capillaires utilisés dans cette expérience sont tels que les domaines de contraintes et de taux de cisaillement correspondent à ceux obtenus dans la viscosimétrie de Couette, de manière à être en mesure d'observer les effets non-newtoniens.

III: MESURES RHEOLOGIQUES EFFECTUEES AU VISCOSIMETRE DE COUETTE:

Lors d'essais préliminaires effectués sur l'émulsion à 65% d'huile, en utilisant différents entrefers du Carrimed CS100, nous avons mesuré, à taux de cisaillement donné, des viscosités différentes suivant l'entrefers utilisé. Etant donnée que la loi rhéologique doit être indépendante du système de mesure, ces résultats semblaient donc indiquer soit un défaut d'étalonnage de l'appareil, soit la présence d'effets de glissement aux parois. La première hypothèse a été éliminée par comparaison de mesures effectuées avec une huile étalon. Nous avons donc été amenés à supposer la présence d'effets d'entrefers et une étude a été menée pour corriger ces effets et accéder à la loi rhéologique réelle de notre émulsion.

III. 1: EFFET DE L'ENTREFER SUR L'EMULSION E100 T 65:

La figure (1) représente les géométries utilisées constituées de deux cylindres de rayons extérieurs R_b et R_c et de deux cylindres de rayons intérieurs R_a et R_b . Nous appellerons systèmes I, II et III, les dispositifs formés avec les rayons (R_b, R_c) , (R_a, R_c) et (R_a, R_b) , respectivement.

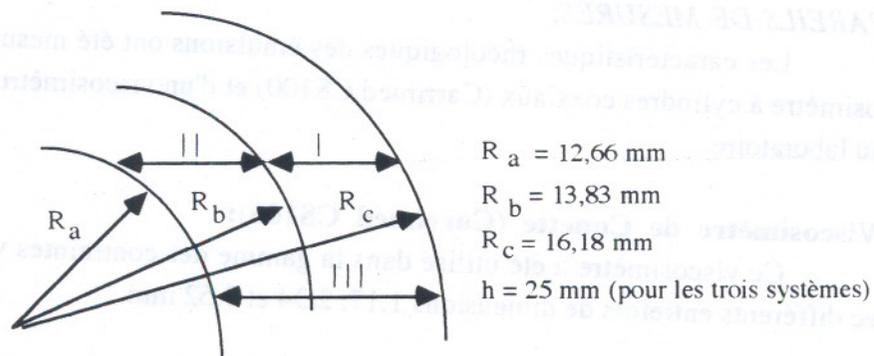


Figure 1: Géométrie des systèmes de Couette I, II et III.

Les courbes expérimentales figures (2) et (3) donnent la variation de la contrainte τ et de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}_a$ (apparent) pour les différents entrefers, respectivement reliés au couple M appliqué et à la vitesse de rotation angulaire ω_0 par les relations:.

$$\tau = M / 2\pi r h^2 \quad (1)$$

et

$$\dot{\gamma}_a = \omega_0 R_2^2 / (R_2^2 - R_1^2) \quad (2)$$

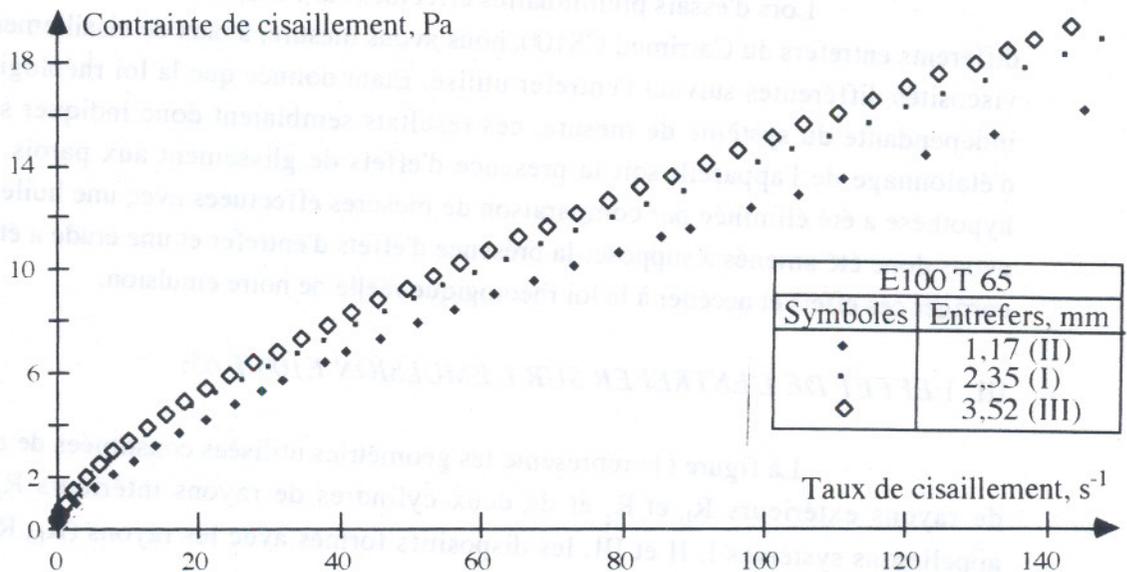


Figure 2: Effet de l'entrefers sur la variation de la contrainte en fonction du taux de cisaillement.

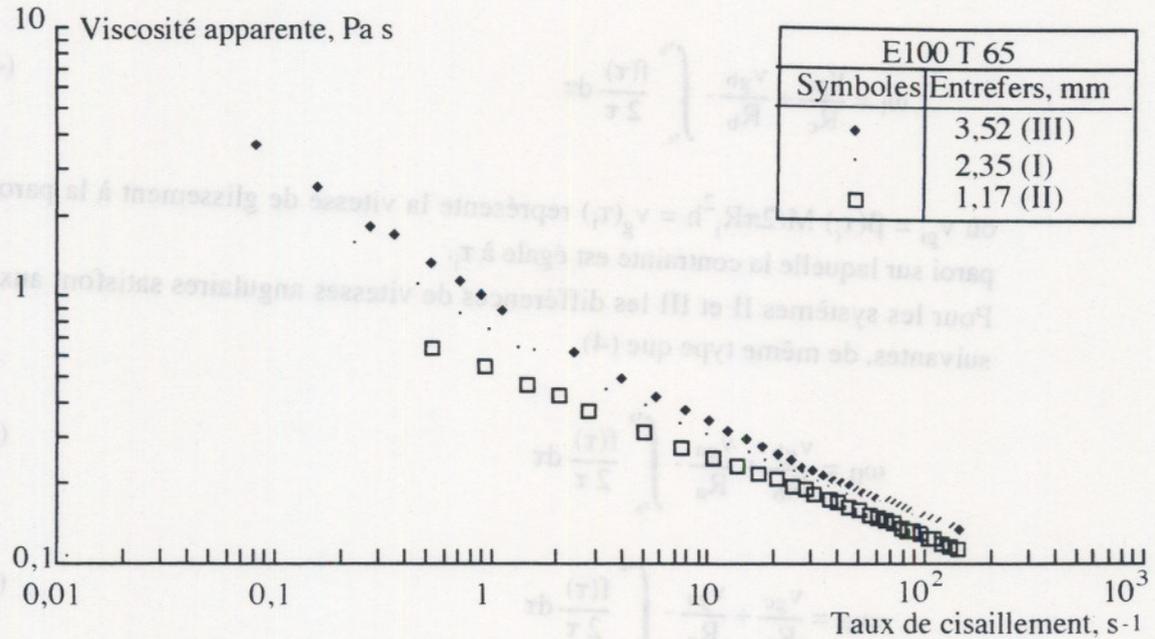


Figure 3: Effet de l'entrefer sur la variation de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement.

Ces courbes expérimentales montrent donc des effets d'entrefer très marqués, que nous allons maintenant corriger en utilisant la méthode de Mooney qui exige trois séries d'expériences successives avec les systèmes I, II et III décrits ci-dessus.

III. 2: CORRECTION DES EFFETS DE GLISSEMENT:

D'après Mooney / 4 /, lorsqu'il y a glissement à la paroi, la différence de vitesse angulaire ω entre les cylindres intérieur et extérieur d'un système de Couette comporte trois termes: d'une part la différence de vitesse angulaire à l'intérieur de l'écoulement proprement dit (pour laquelle la relation de Couette est valable) et les sauts de vitesse angulaire près des deux parois, dûs au glissement.

Pour le système I, nous obtenons pour la vitesse angulaire ω_1 du cylindre intérieur,

$$\omega_1 = \frac{\beta(\tau_c)M}{2\pi R_c^3 h} + \frac{\beta(\tau_b)M}{2\pi R_b^3 h} + \int_{R_c}^{R_b} \frac{M\varphi}{2\pi r^3 h} dr \quad (3)$$

où τ_c et τ_b représentent les contraintes de cisaillement près des cylindres intérieurs et extérieurs respectivement,

$\beta(\tau)$ est un coefficient de glissement à la paroi, supposé fonction de la contrainte locale.,

M est le couple appliqué,

$\varphi = 1/\eta$ est la fluidité, reliée à la loi rhéologique "vraie", $\gamma = f(\tau)$ par la relation $\varphi = f(\tau)/\tau$.

En changeant la variable r en τ , d'après (1), l'équation (3) peut donc s'écrire, pour le système I

$$\omega_I = \frac{v_{gc}}{R_c} + \frac{v_{gb}}{R_b} - \int_{\tau_c}^{\tau_b} \frac{f(\tau)}{2\tau} d\tau \quad (4)$$

où $v_{gi} = \beta(\tau_i) M/2\pi R_i^2 h = v_g(\tau_i)$ représente la vitesse de glissement à la paroi $R = R_i$, paroi sur laquelle la contrainte est égale à τ_i .

Pour les systèmes II et III les différences de vitesses angulaires satisfont aux relations suivantes, de même type que (4),

$$\omega_{II} = \frac{v_{gb}}{R_b} + \frac{v_{ga}}{R_a} - \int_{\tau_b}^{\tau_a} \frac{f(\tau)}{2\tau} d\tau \quad (5)$$

$$\omega_{III} = \frac{v_{gc}}{R_c} + \frac{v_{ga}}{R_a} - \int_{\tau_c}^{\tau_a} \frac{f(\tau)}{2\tau} d\tau \quad (6)$$

Nous pouvons éliminer les intégrales des relations précédentes en soustrayant (6) de la somme de (4) et de (5). Nous obtenons ainsi la vitesse de glissement correspondant à la contrainte s'exerçant sur la surface de rayon R_b :

$$v_{gb} = R_b/2 (\omega_I + \omega_{II} - \omega_{III}) = v_g(\tau_b) \quad (7)$$

$$\text{où} \quad \tau_b = M/2\pi R_b^2 h \quad (8)$$

A l'aide des équations (7) et (8) nous déterminons la vitesse de glissement à partir des courbes expérimentales $\omega_I(M)$, $\omega_{II}(M)$ et $\omega_{III}(M)$ (figure (4)).

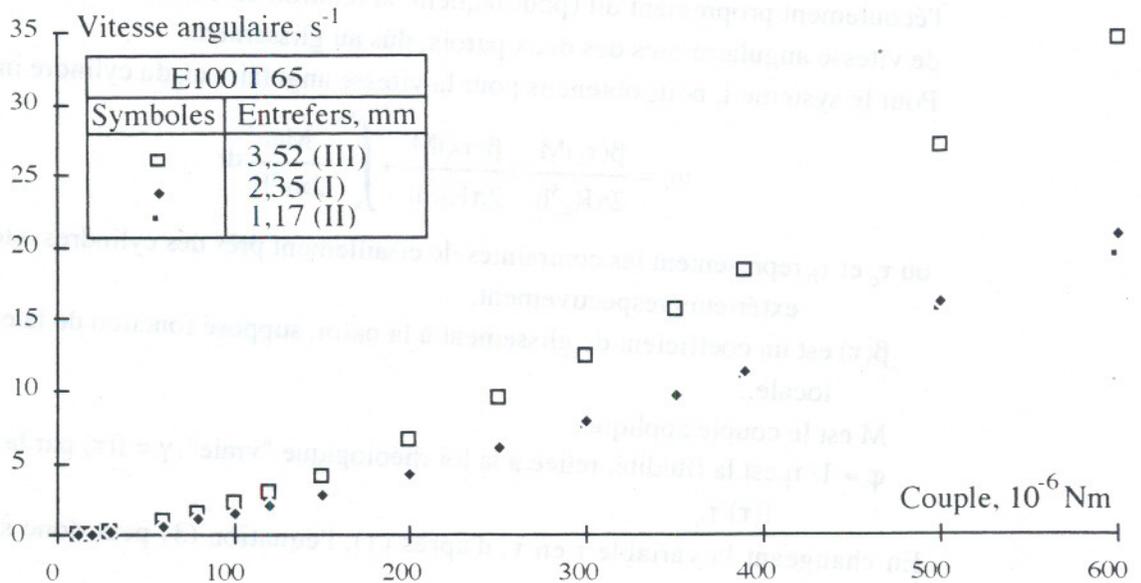


Figure 4: Variation de la vitesse angulaire en fonction du couple.

La variation de la vitesse de glissement à la paroi, équation (7), en fonction de la contrainte pariétale, équation (8), est représentée sur la figure (5).

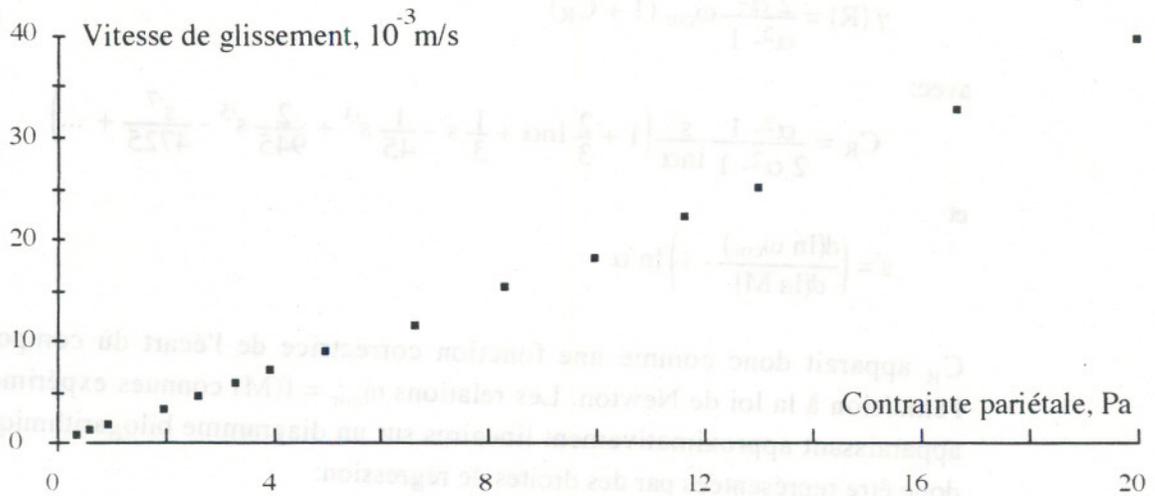


Figure 5: Variation de la vitesse de glissement en fonction de la contrainte pariétale.

Nous obtenons la vitesse angulaire "vraie" en corrigeant les données brutes des effets deglissement. Nous avons alors pour les trois systèmes

$$\omega_{\text{corI}} = \omega_{\text{I}} - \frac{v_{\text{gc}}}{R_c} - \frac{v_{\text{gb}}}{R_b} = \int_{\tau_c}^{\tau_b} \frac{f(\tau)}{2\tau} d\tau \quad (9)$$

$$\omega_{\text{corII}} = \omega_{\text{II}} - \frac{v_{\text{gb}}}{R_b} - \frac{v_{\text{ga}}}{R_a} = \int_{\tau_b}^{\tau_a} \frac{f(\tau)}{2\tau} d\tau \quad (10)$$

$$\omega_{\text{corIII}} = \omega_{\text{III}} - \frac{v_{\text{gc}}}{R_c} - \frac{v_{\text{ga}}}{R_a} = \int_{\tau_c}^{\tau_a} \frac{f(\tau)}{2\tau} d\tau \quad (11)$$

Connaissant la vitesse angulaire réelle, nous allons dans ce qui suit déterminer la loi rhéologique de l'émulsion, en utilisant une méthode basée sur le développement en série du taux de cisaillement.

III. 3: DETERMINATION DE LA LOI RHEOLOGIQUE DE L'EMULSION (RHEOMETRIE DE COUETTE):

Pour extraire loi rhéologique $\gamma = f(\tau)$ des équations (9) à (11) nous utiliserons une méthode d'analyse basée sur un développement en série de la quantité $f(\tau)/\tau$. Pour les entrefers relativement étroits, des développements à convergence rapide ont été testés (/ 4 /, / 5 / / 6 /). Nous retiendrons la technique proposée par Krieger et Maron / 7 / qui s'appuie sur un développement du taux de cisaillement en une série infinie. Cette technique a été reprise par Calderbank et Moo-Young / 8 / qui ont limité la série aux

termes qui permettaient d'avoir une précision de 1% environ, dans le cas de rapports $\alpha =$ (rayon extérieur / rayon intérieur) < 1,75.

Le taux de cisaillement sur le cylindre extérieur (de rayon R) est mis sous la forme:

$$\dot{\gamma}(R) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \omega_{\text{cor}} (1 + C_R) \quad (12)$$

avec:

$$C_R = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1} \frac{s'}{\ln \alpha} \left(1 + \frac{2}{3} \ln \alpha + \frac{1}{3} s' - \frac{1}{45} s'^3 + \frac{2}{945} s'^5 - \frac{s'^7}{4725} + \dots \right) \quad (13)$$

et

$$s' = \left(\frac{d(\ln \omega_{\text{cor}})}{d(\ln M)} - 1 \right) \ln \alpha \quad (14)$$

C_R apparait donc comme une fonction correctrice de l'écart du comportement de l'émulsion à la loi de Newton. Les relations $\omega_{\text{cor}} = f(M)$ connues expérimentalement, apparaissant approximativement linéaires sur un diagramme bilogarithmique, peuvent donc être représentées par des droites de régression:

$$\ln \omega_{\text{Icor}} = -8,312 + 1,756 \ln M, \quad \alpha_{\text{I}} = 1,17 \quad (15)$$

$$\ln \omega_{\text{IIcor}} = -9,277 + 1,874 \ln M, \quad \alpha_{\text{II}} = 1,092 \quad (16)$$

$$\ln \omega_{\text{IIIcor}} = -8,026 + 1,804 \ln M, \quad \alpha_{\text{III}} = 1,278 \quad (17)$$

Nous déterminons donc les valeurs s' à partir des pentes de ces droites. Avec les valeurs α associées, les relations (12) et (13) permettent finalement de tracer la courbe d'écoulement. Aux erreurs "expérimentales" près (qui résultent des mesures et traitement des données), nous devons retrouver une courbe d'écoulement unique indépendante de la géométrie utilisée. L'ensemble des points obtenus représente donc la loi $\dot{\gamma} = f(\tau)$ cherchée. Dans un diagramme bilogarithmique, la totalité des points expérimentaux se placent au voisinage de la droite de régression $\log \tau = 18,535 + 0,552 \log \dot{\gamma}$. La loi rhéologique de l'émulsion peut donc être approchée par la loi d'Ostwald,

$$\tau = 1,268 \dot{\gamma}^{0,552} \quad (18)$$

Les figures (6) et (7) représentent respectivement la variation de la contrainte appliquée sur le cylindre intérieur et de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement.

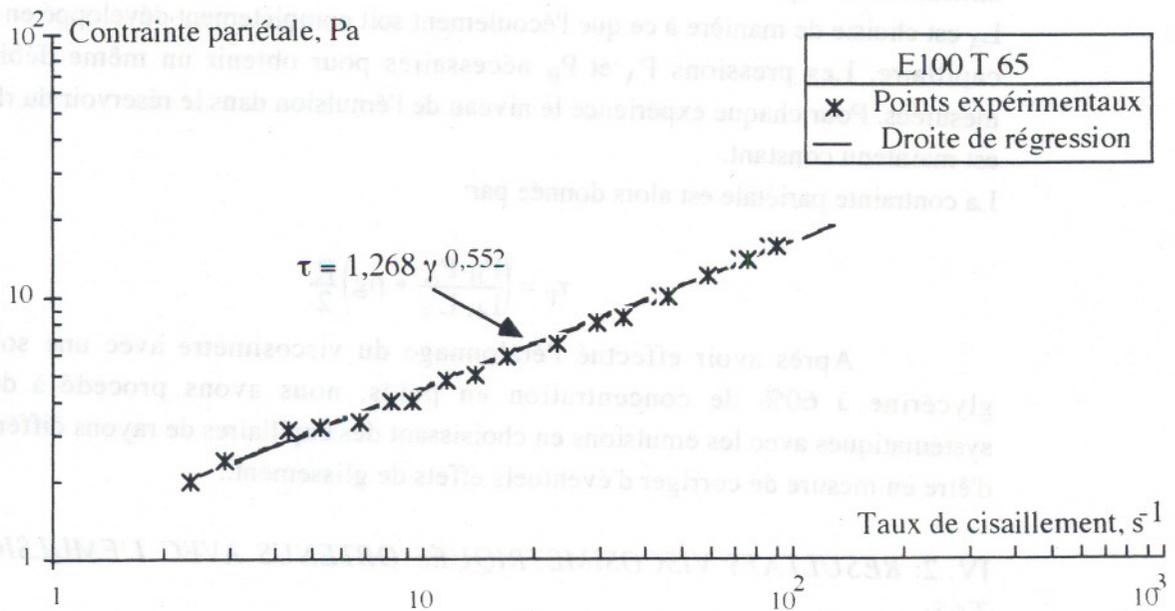


Figure 6: Variation de la contrainte en fonction du taux de cisaillement après correction des effets de glissement.

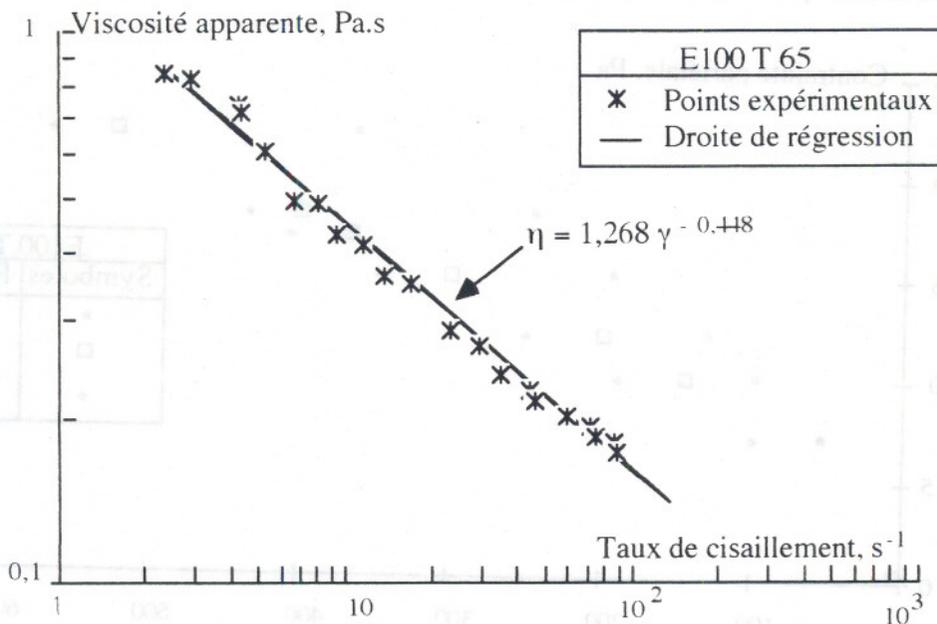


Figure 7: Variation de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement.

IV: MESURES RHEOLOGIQUES EFFECTUEES AU VISCOSIMETRE CAPILLAIRE:

Afin de vérifier les résultats précédents, nous avons essayé de retrouver la loi rhéologique par la rhéométrie capillaire.

IV. 1: ETALONNAGE DE L'INSTALLATION:

La contrainte pariétale est obtenue à partir de mesures de pression, corrigées des effets d'entrée (et de sortie). Ces corrections sont effectuées à partir des mesures

utilisant deux capillaires de même rayon R , mais de longueurs L_A et $L_B > L_A$. La longueur L_A est choisie de manière à ce que l'écoulement soit complètement développé en sortie du capillaire. Les pressions P_A et P_B nécessaires pour obtenir un même débit Q sont mesurées. Pour chaque expérience le niveau de l'émulsion dans le réservoir du rhéomètre est maintenu constant.

La contrainte pariétale est alors donnée par:

$$\tau_p = \left(\frac{P_B - P_A}{L_B - L_A} + \rho g \right) \frac{R}{2}$$

Après avoir effectué l'étalonnage du viscosimètre avec une solution de glycérine à 60% de concentration en poids, nous avons procédé à des essais systématiques avec les émulsions en choisissant des capillaires de rayons différents, afin d'être en mesure de corriger d'éventuels effets de glissement..

IV. 2: RESULTATS VISCOSIMETRIQUES OBTENUS AVEC L'EMULSION E100 T65:

La figure (8) représente pour les trois rayons utilisés, la variation de la contrainte pariétale en fonction d'un taux de cisaillement apparent, défini par $4Q/\pi R^3$.

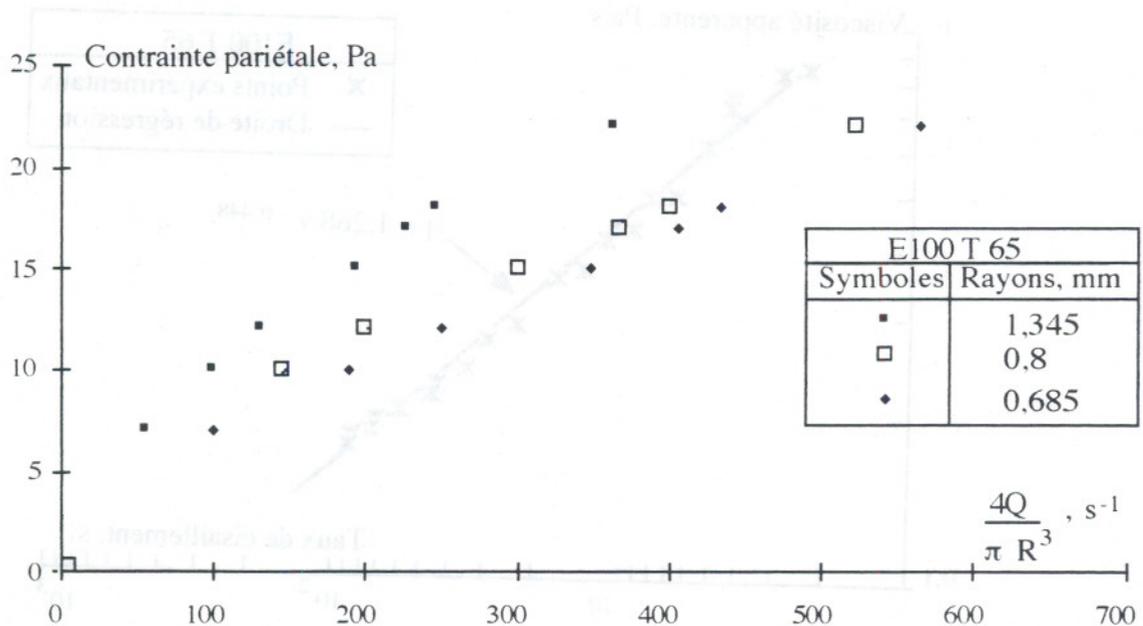


Figure 8: Effet du rayon du capillaire sur la variation de la contrainte pariétale en fonction du taux de cisaillement apparent.

Nous remarquons sur cette figure que cette relation $\tau_p = f(4Q/\pi R^3)$ dépend du rayon du capillaire. Ce qui confirme l'existence d'un effet de glissement déjà mis en évidence en viscosimétrie de Couette.

IV. 3: CORRECTION DES EFFETS DE GLISSEMENT EN RHEOMETRIE CAPILLAIRE:

En présence de glissement à la paroi, le débit Q qui traverse le capillaire s'exprime par

$$Q = \int_0^R v(r) 2 \pi r dr \quad (19)$$

où $v(r)$ est la vitesse en r .

Après une intégration par parties compte-tenu de la relation rhéologique $\gamma = -dv/dr = f(\tau)$, et en changeant la variable r en $\tau = (\tau_p r/R)$, nous obtenons la relation:

$$Q = \pi R^2 v_g + \frac{\pi R^3}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \gamma \tau^2 d\tau \quad (20)$$

où v_g est la vitesse de glissement à la paroi, et qui après division par $\pi R^3/4$, donne:

$$\frac{4Q}{\pi R^3} = \frac{4v_g}{R} + \frac{4}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \gamma \tau^2 d\tau \quad (21)$$

D'après (21), $4Q/\pi R^3$ est une fonction linéaire de $1/R$. Il est donc possible d'évaluer la vitesse de glissement à partir des mesures donnant $4Q/\pi R^3 = f(\tau_p)$ pour des tubes de différents diamètres. Pour une valeur fixée de la contrainte pariétale, nous traçons $4Q/\pi R^3$ en fonction de $1/R$. Nous obtenons alors une droite de pente égale à quatre fois la vitesse de glissement et qui admet pour ordonnée à l'origine la partie intégrale de l'équation (21). En répétant la procédure pour différentes valeurs de τ_p , nous obtenons la vitesse de glissement ainsi que la partie intégrale de l'équation (21) en fonction de la contrainte pariétale.

Les erreurs expérimentales maximales commises sur la détermination des débits (de 3% à 5% aux faibles et forts rayons des capillaires respectivement) sont à l'origine des données bruitées montrées sur la figure (8). Afin d'obtenir une représentation exploitable de la relation $\tau_p = \tau_p (4Q/\pi R^3)$ pour les différents capillaires, nous avons lissé les courbes expérimentales de la figure (8) sous forme de lois de puissance, $\tau_p = K (4Q/\pi R^3)^m$. En coordonnées bilogarithmiques, les régressions linéaires sont montrées sur la figure (9).

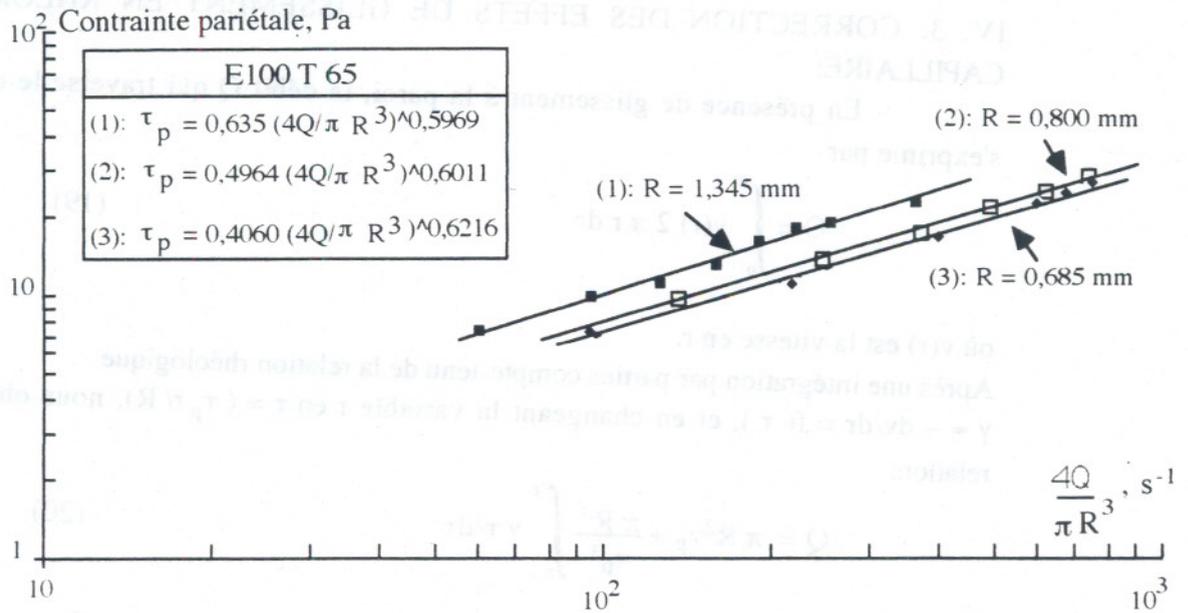


Figure 9: Variation de la contrainte pariétale en fonction du taux de cisaillement apparent.

A partir de ces relations $\tau_p = f(4Q/\pi R^3)$, nous déterminons, à contrainte pariétale constante, les valeurs du taux de cisaillement apparent dans chaque capillaire, valeurs que nous reportons sur la figure (10) en fonction de $1/R$

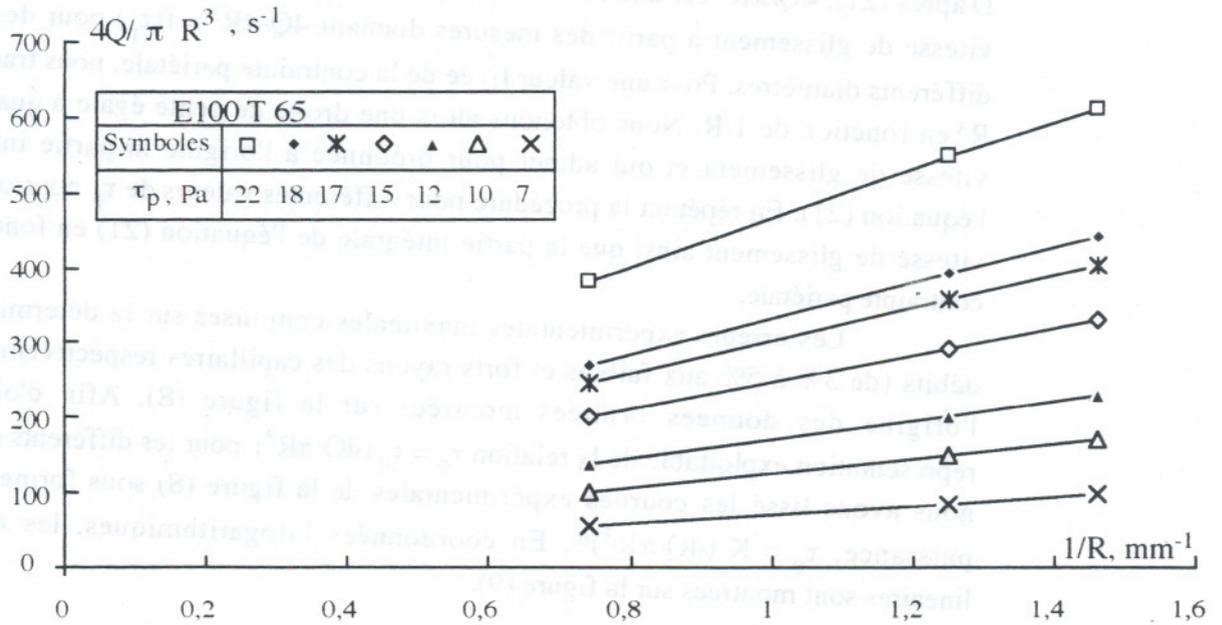


Figure 10: Variation du taux de cisaillement apparent en fonction de $1/R$.

Les regressions linéaires (tableau 1) nous donnent la vitesse de glissement en fonction de la contrainte pariétale (figure (11)) ainsi que les taux de cisaillement corrigés,

$$\frac{4Q_c}{\pi R^3} = \frac{4Q}{\pi R^3} - \frac{4v_g}{R} = \frac{4}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \gamma \tau^2 d\tau \quad (22)$$

auxquels nous appliquerons le traitement de Mooney Rabinovitch.

Tableau 1: Coefficients des droites représentant $4Q/\pi R^3 = f(1/R)$.

τ_p , Pa	7	10	12	15	17	18	22
v_g , mm s^{-1}	13,82	23,68	31,18	43,66	52,74	57,49	77,82
$\frac{4Q_c}{\pi R^3}$, s^{-1}	17,76	32,73	45,19	70,30	86,09	95,00	134,57

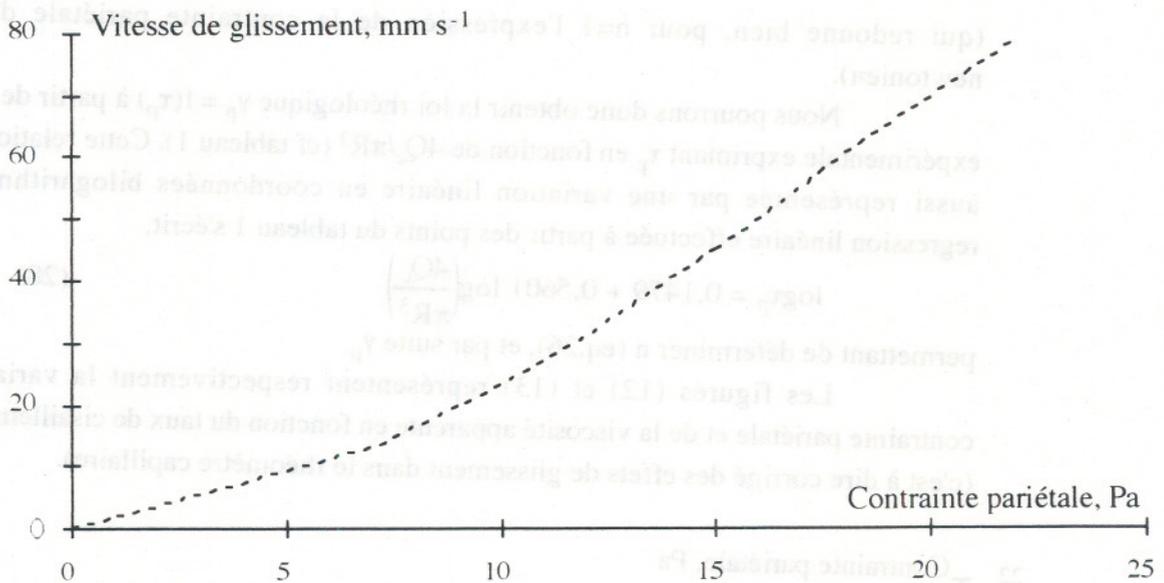


Figure 11: Variation de la vitesse de glissement en fonction de la contrainte pariétale.

IV. 4: SECONDE DETERMINATION DE LA LOI RHEOLOGIQUE DE L'EMULSION (TRAITEMENT DE MOONEY RABINOVITCH):

En différentiant par rapport à τ_p la relation,

$$\frac{4Q_c}{\pi R^3} = \frac{4}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \gamma \tau^2 d\tau \quad (23)$$

nous obtenons,

$$\frac{d}{d\tau_p} \left(\frac{4Q_c}{\pi R^3} \frac{\tau_p^3}{4} \right) = \frac{d}{d\tau_p} \int_0^{\tau_p} \gamma \tau^2 d\tau = \gamma(\tau_p) \tau_p^2 \quad (24)$$

qui permet d'exprimer la vitesse de cisaillement à la paroi sous la forme:

$$\gamma(\tau_p) = \gamma_p = \frac{4Q_c}{\pi R^3} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d\left(\log\left(\frac{4Q_c}{\pi R^3}\right)\right)}{d(\log\tau_p)} \right) \quad (25)$$

Posons:

$$n = \frac{d(\log\tau_p)}{d\left(\log\frac{4Q_c}{\pi R^3}\right)} \quad (26)$$

Nous obtenons finalement:

$$\gamma_p = \frac{4Q_c}{\pi R^3} \left(\frac{3n+1}{4n} \right) \quad (27)$$

(qui redonne bien, pour $n=1$ l'expression de la contrainte pariétale d'un fluide newtonien).

Nous pourrions donc obtenir la loi rhéologique $\gamma_p = f(\tau_p)$ à partir de la relation expérimentale exprimant τ_p en fonction de $4Q_c/\pi R^3$ (cf tableau 1). Cette relation peut être aussi représentée par une variation linéaire en coordonnées bilogarithmiques. La regression linéaire effectuée à partir des points du tableau 1 s'écrit,

$$\log\tau_p = 0,1479 + 0,5601 \log\left(\frac{4Q_c}{\pi R^3}\right) \quad (28)$$

permettant de déterminer n (eq.26), et par suite γ_p .

Les figures (12) et (13) représentent respectivement la variation de la contrainte pariétale et de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement pariétal (c'est à dire corrigé des effets de glissement dans le rhéomètre capillaire).

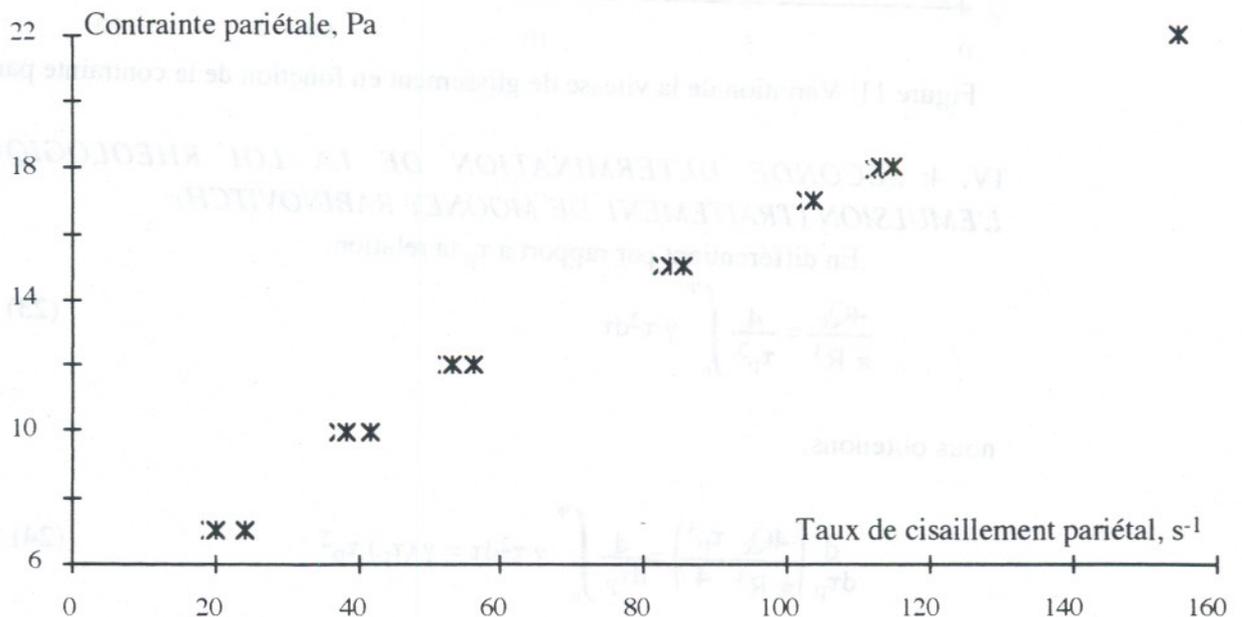


Figure 12: Variation de la contrainte en fonction du taux de cisaillement pariétal.

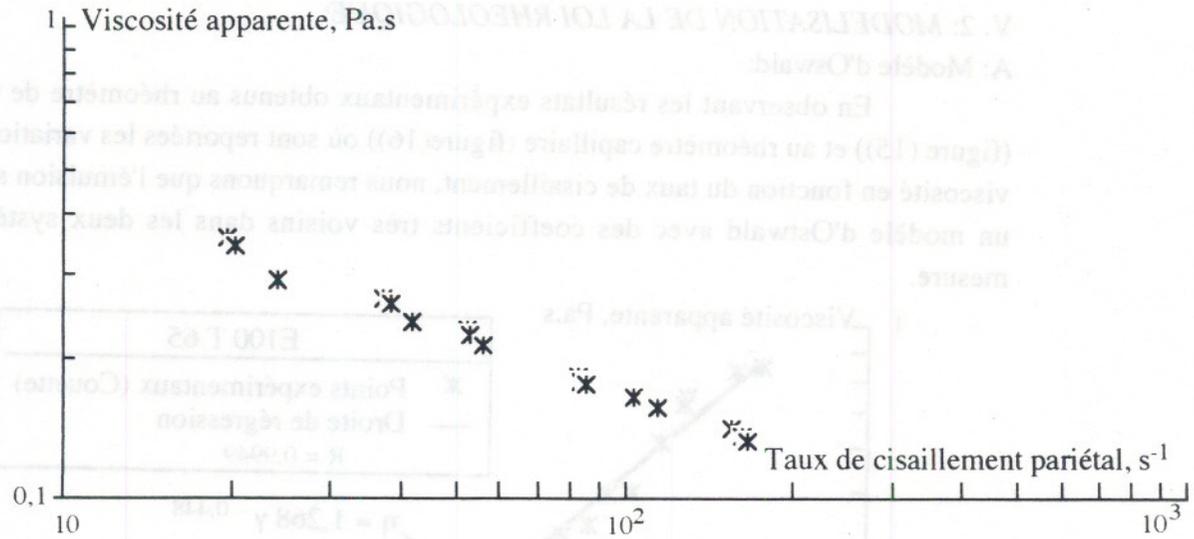


Figure 13: Variation de la viscosité apparente en fonction du taux de cisaillement.

V: LOI RHEOLOGIQUE DE L'EMULSION E100 T 65 ET MODELISATION DE CETTE LOI:

V. 1: COMPARAISON ENTRE LES DEUX LOIS RHEOLOGIQUES OBTENUES DANS LES DEUX SYSTEMES DE MESURES:

Nous vérifions bien que les deux lois rhéologiques (corrigées des effets de parois), obtenues séparément avec les deux dispositifs (Couette et capillaire) sont identiques, aux erreurs expérimentales près, c'est à dire que, comme il se doit, nous obtenons une courbe unique, figure (14), représentant la loi rhéologique de l'émulsion, indépendante du système de mesure utilisé.

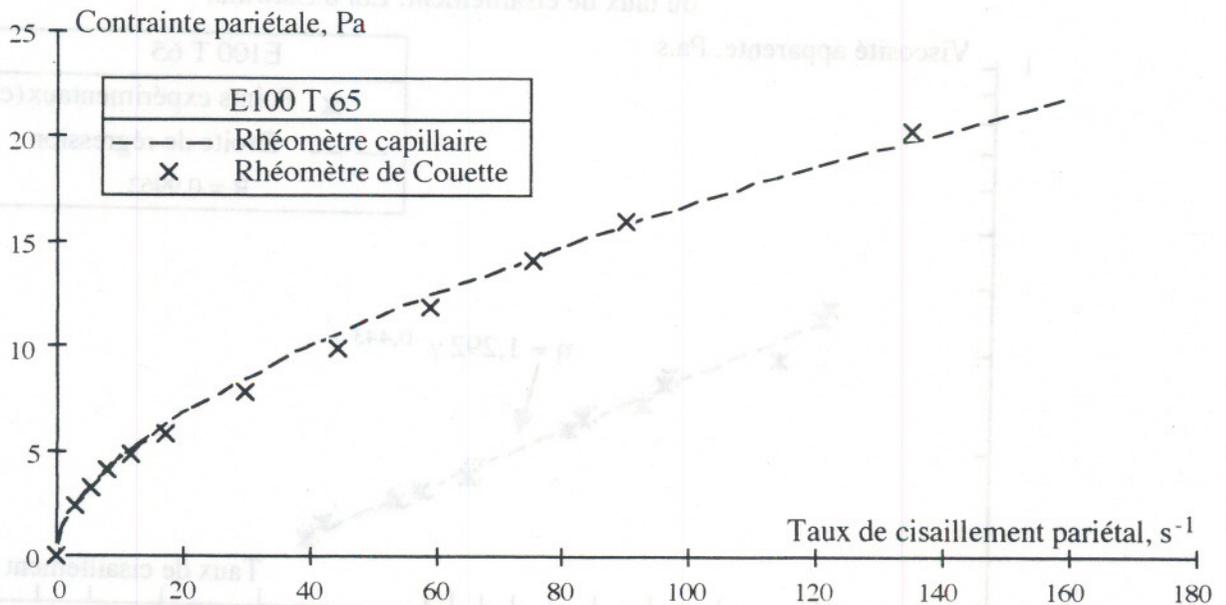


Figure 14: Variation de la contrainte en fonction du taux de cisaillement dans les deux systèmes de mesure.

V. 2: MODELISATION DE LA LOI RHEOLOGIQUE:

A: Modèle d'Oswald:

En observant les résultats expérimentaux obtenus au rhéomètre de Couette (figure (15)) et au rhéomètre capillaire (figure(16)) où sont reportées les variations de la viscosité en fonction du taux de cisaillement, nous remarquons que l'émulsion suit bien un modèle d'Oswald avec des coefficients très voisins dans les deux systèmes de mesure.

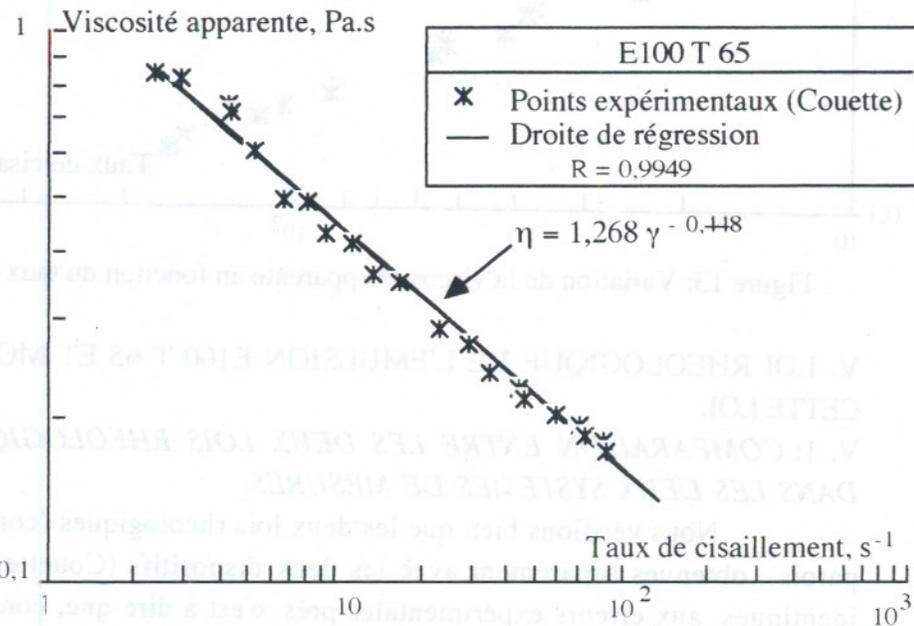


Figure 15: Modélisation de la variation de la viscosité (rhéométrie de Couette) en fonction du taux de cisaillement. Loi d'Oswald.

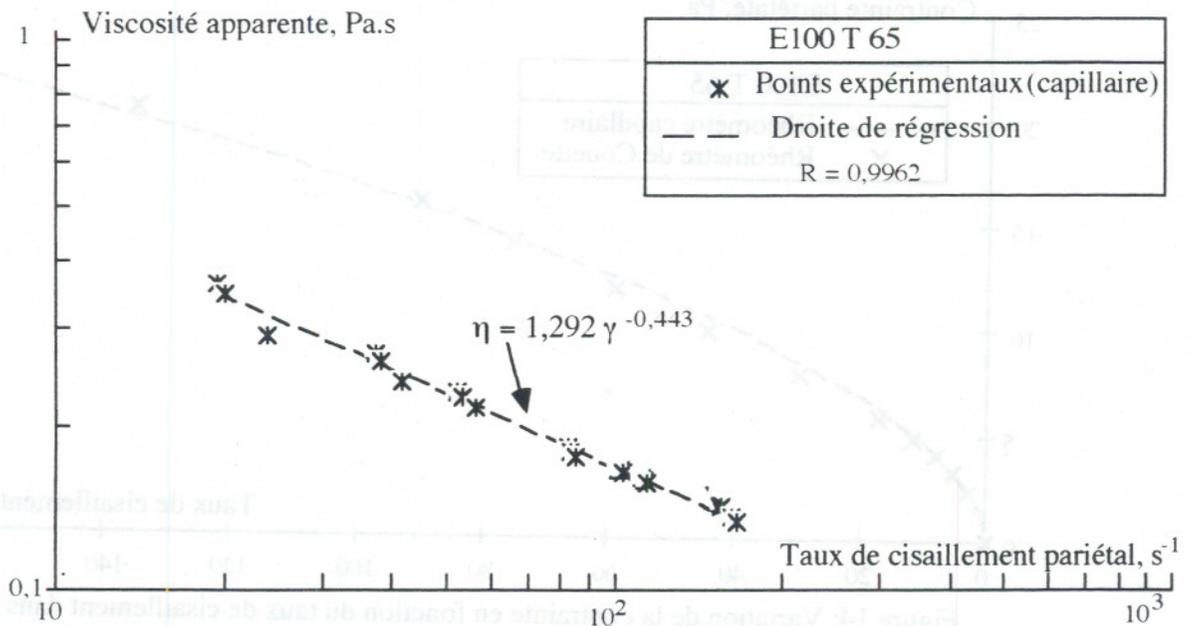


Figure 16: Modélisation de la variation de la viscosité (rhéométrie capillaire) en fonction du taux de cisaillement. Loi d'Oswald.

Sur la figure (17) est reportée la modélisation en loi de puissance obtenue à partir de l'ensemble des points expérimentaux (rhéomètres de Couette et capillaire). Les coefficients de la loi de régression sont tout à fait comparables à ceux obtenus en traitant les données expérimentales séparément.

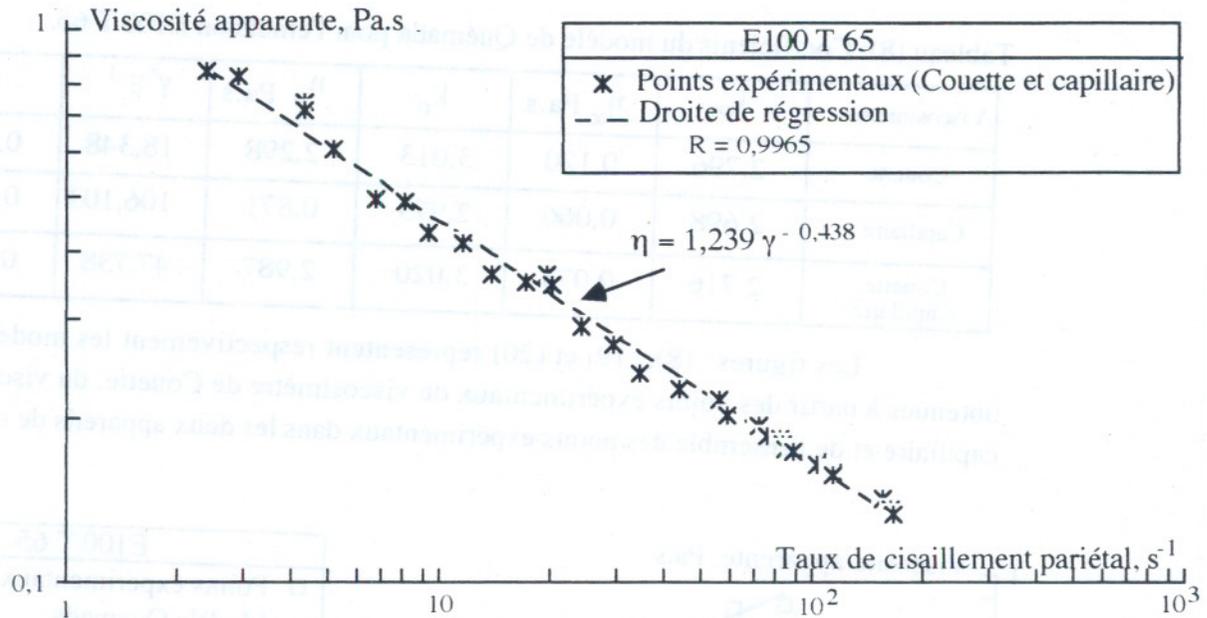


Figure 17: Modélisation de la variation de la viscosité (rhéométries Couette et capillaire) en fonction du taux de cisaillement. Loi d'Ostwald.

B: Modèle de Quemada:

D'une manière générale, la loi rhéologique doit être décrite à l'aide d'au moins quatre paramètres: une viscosité apparente newtonienne aux faibles taux de cisaillement, η_0 , une viscosité apparente newtonienne aux forts taux de cisaillement, η_∞ , un taux de cisaillement critique, γ^* et un indice de puissance, p . Parmi les nombreuses lois phénoménologiques $\eta = \eta(\gamma)$ qui ont été proposées, nous avons utilisé la loi (Quemada / 9 /),

$$\eta_r = \left(1 - \frac{1}{2} k(\gamma) \phi \right)^{-2} \quad (29)$$

pour modéliser la variation de la viscosité apparente de l'émulsion E100 T 65. Dans (29), le facteur k (qui dans la limite des concentrations très faibles, représente une viscosité intrinsèque) dépend des conditions d'écoulement et peut donc être considéré comme une variable rendant compte de l'état structural induit par l'écoulement. En supposant une cinétique de structure de type relaxation, la dépendance $k(\gamma)$ est obtenue telle que:

$$k = k(\gamma) = k_\infty + \frac{k_0 - k_\infty}{1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma^*}\right)^p} \quad (30)$$

Une régression par la méthode des moindres carrés (/ 10 /) permet d'aboutir, en

Une régression par la méthode des moindres carrés (/ 10 /) permet d'aboutir, en maximisant le coefficient de corrélation, à un choix correct des paramètres k_0 , k_∞ , γ^* et p . Pour l'émulsion E100 T 65 les valeurs de ces paramètres sont données dans le tableau (8).

Tableau (8): Coefficients du modèle de Quémada pour l'émulsion E100 T 65.

Viscosimètres	k_∞	η_∞ Pa.s	k_0	η_0 Pa.s	$\gamma^* \text{s}^{-1}$	p
Couette	2,796	0,120	3,013	2,298	18,348	0,742
Capillaire	2,698	0,066	2,973	0,871	106,103	0,742
Couette, Capillaire	2,716	0,073	3,020	2,987	47,738	0,557

Les figures (18), (19) et (20) représentent respectivement les modélisations obtenues à partir des points expérimentaux du viscosimètre de Couette, du viscosimètre capillaire et de l'ensemble des points expérimentaux dans les deux appareils de mesures.

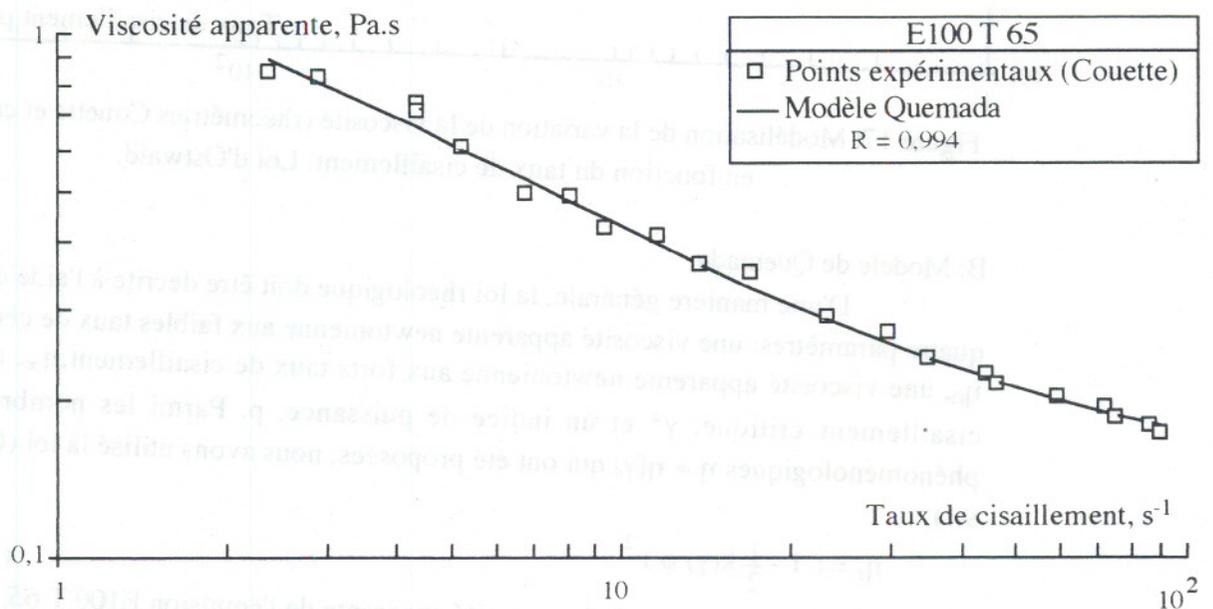


Figure 18: Modélisation de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement.

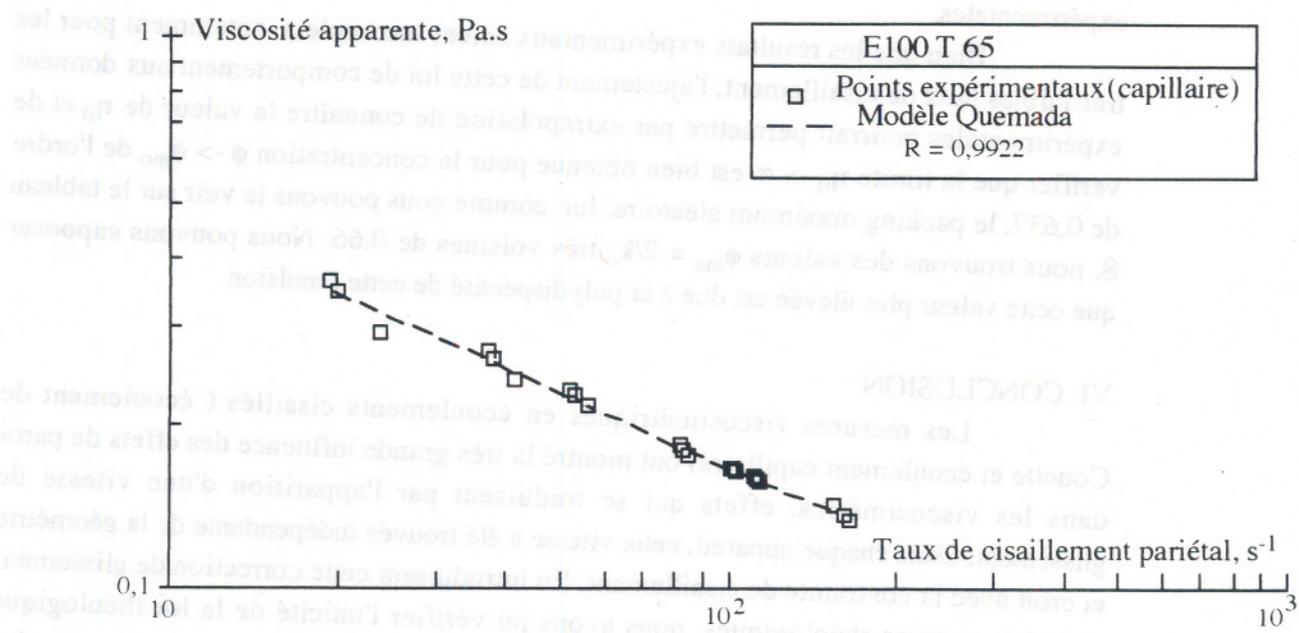


Figure 19: Modélisation de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement.

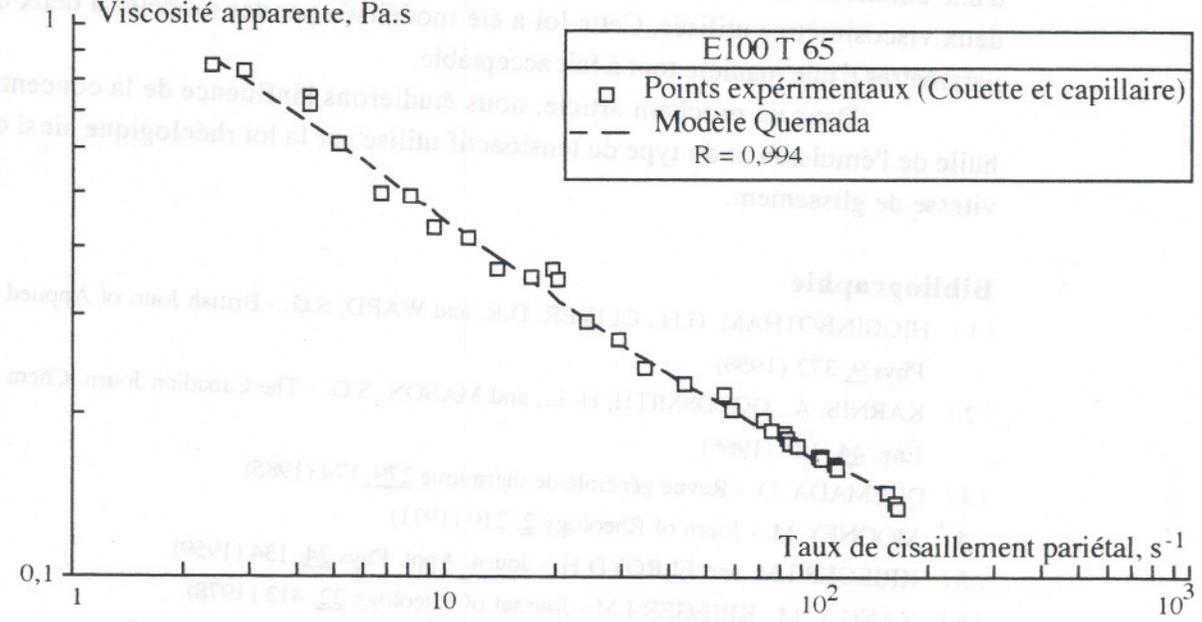


Figure 20: Modélisation de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement.

Comme nous pouvions nous y attendre, la comparaison entre les coefficients du modèle (tableau 8) appliqué à la totalité des points expérimentaux, ceux du viscosimètre de Couette seul, et ceux du viscosimètre capillaire seul, nous montre que:

la viscosité intrinsèque aux faibles taux de cisaillement k_0 obtenue en rhéométrie de Couette est proche de celle de la modélisation de l'ensemble des résultats (Couette et capillaire),

la viscosité intrinsèque aux forts taux de cisaillement k_∞ obtenue en rhéométrie capillaire est proche de celle de la modélisation de l'ensemble des résultats (Couette et capillaire).

Ces remarques permettent de souligner l'importance d'un traitement global des données expérimentales.

Bien que les résultats expérimentaux soient incomplets, notamment pour les très faibles taux de cisaillement, l'ajustement de cette loi de comportement aux données expérimentales pourrait permettre par extrapolation de connaître la valeur de η_0 et de vérifier que la limite $\eta_0 \rightarrow \infty$ est bien obtenue pour la concentration $\phi \rightarrow \phi_{mo}$ de l'ordre de 0,637, le packing maximum aléatoire. Ici, comme nous pouvons le voir sur le tableau 8, nous trouvons des valeurs $\phi_{mo} = 2/k_0$ très voisines de 0,66. Nous pouvons supposer que cette valeur plus élevée est due à la polydispersité de cette émulsion.

VI: CONCLUSION

Les mesures viscosimétriques en écoulements cisailés (écoulement de Couette et écoulement capillaire) ont montré la très grande influence des effets de paroi dans les viscosimètres, effets qui se traduisent par l'apparition d'une vitesse de glissement. Dans chaque appareil, cette vitesse a été trouvée indépendante de la géométrie et croît avec la contrainte de cisaillement. En introduisant cette correction de glissement dans les mesures rhéologiques, nous avons pu vérifier l'unicité de la loi rhéologique d'une émulsion (huile de silicone dans l'eau) de 65% de concentration en poids, pour les deux viscosimètres utilisés. Cette loi a été modélisée par des modèles à deux ou quatre paramètres d'une manière tout à fait acceptable.

Dans un prochain article, nous étudierons l'influence de la concentration en huile de l'émulsion et du type de tensioactif utilisé sur la loi rhéologique ainsi que sur la vitesse de glissement.

Bibliographie

- / 1 / HIGGINBOTHAM, G.H., OLIVER, D.R. and WARD, S.G. - British Jour. of Applied Phys. 9, 372 (1958)
- / 2 / KARNIS, A., GOLDSMITH, H. L., and MASON, S.G. - The Canadian Journ. Chem. Eng. 44, 181 (1966)
- / 3 / QUEMADA, D. - Revue générale de thermique 279, 174 (1985)
- / 4 / MOONEY M. - Journ of Rheology 2, 210 (1931)
- / 5 / KRIEGER I.M. and ELROYD H. - Journ. Appl. Phys. 24, 134 (1959)
- / 6 / YANG T. M., KRIEGER I.M - Journal of Rheology 22, 413 (1978)
- / 7 / KRIEGER I. M. and MARON S. H. - Journ. Appl. Phys. 25, 72-75 (1954)
- / 8 / CALDERBANK P. H. and MOO-YOUNG M. B. - Trans. Inst. Chem. Engrs. (London) 37, 26 (1959)
- / 9 / QUEMADA.D.- Rheol. Acta. 17, 643 (1978)
- / 10 / MAKRIA, A. - Thèse de troisième cycle Université Paris VI (1984)

ETABLISSEMENT DU REGIME THERMIQUE DANS UN TUBE. CAS D'UN FLUIDE PSEUDOPLASTIQUE THERMODEPENDANT

V.T. NGUYEN, A. EL OUARDIGUI, M. LÉBOUCHE

LABORATOIRE D'ENERGETIQUE ET DE MECANIQUE
THEORIQUE ET APPLIQUEE.
C.N.R.S. - U.R.A. 875 - UNIVERSITE NANCY I

SOMMAIRE

On considère le problème du transfert de chaleur en écoulement laminaire, lors d'un chauffage à température de paroi imposée pour un fluide pseudoplastique thermodépendant, en conduite cylindrique. Un code de calcul basé sur les différences finies est développé pour l'étude de l'influence de la thermodépendance sur les profils de vitesse, de température et sur l'évolution des pertes de charge et du coefficient local de transfert de chaleur par convection.

INTRODUCTION

Dans de nombreux secteurs industriels, notamment dans les industries agroalimentaires et chimiques, on rencontre souvent des fluides non-newtoniens dont la viscosité apparente varie avec la température. Le présent travail étudie l'écoulement d'un fluide pseudoplastique fortement visqueux et thermodépendant, par simulation numérique. Les équations gouvernant ce problème sont intégrées par un algorithme explicite aux différences finies basé sur la technique de Dufort-Frankel [1][2]. Dans cette étude, en considérant le cas du chauffage à température de paroi constante, on s'intéresse au développement simultané des champs thermique et dynamique, ainsi qu'à l'évolution des pertes de charge et du nombre de Nusselt local. Les résultats présentés concernent une solution de carboxyméthylcellulose (C.M.C.) à 3% en poids, fluide considéré comme modèle de beaucoup de ceux rencontrés actuellement dans l'industrie agroalimentaire. L'étude rhéologique de ce fluide montre qu'en cisaillement simple, la loi de comportement peut être approchée par une loi puissance d'Ostwald-Van de Waele :

$$\tau = - K(T) \left(- \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \quad (1)$$

sur une large gamme de valeurs du gradient de vitesse $\frac{\partial u}{\partial r}$.

L'étude des rhéogrammes à différentes températures montre que ce fluide est fortement thermodépendant et qu'une loi de type Arrhénius représente bien ce caractère :

$$K(T) = a e^{-bT} \quad (2)$$

EQUATIONS DE BASE

Dans notre modélisation mathématique, nous adoptons les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est laminaire et axisymétrique.
- La conduction de chaleur axiale est négligeable.
- La chaleur spécifique C_p , la conductivité thermique λ , la masse volumique ρ sont indépendantes de la température.
- Le fluide est incompressible.
- Le régime dynamique est établi et la température est uniforme à l'entrée de la zone chauffée.
- L'indice de consistance $K=K(T)$ ne dépend que de la température et l'indice de structure n est considéré comme constant.
- La pression p ne dépend que de la coordonnée axiale z .

Avec les hypothèses précédentes, les équations du mouvement s'écrivent :

Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (3)$$

Equation du mouvement :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) \quad (4)$$

Equation de l'énergie :

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial r} \quad (5)$$

Débit global :

$$\int_0^R 2\pi r \rho u dr = \dot{m} = cte \quad (6)$$

On associe à ce système les conditions aux limites :

$$u(z,R) = v(z,R) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z,0) = \frac{\partial T}{\partial r}(z,0) = 0 \quad (8)$$

$$T(0,r) = T_e \quad (9)$$

$$U(0,r) = U_0 \left(\frac{3n+1}{n+1} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (10)$$

$$T(z,R) = T_p \quad (11)$$

La figure 1 donne l'algorithme de résolution de ce système d'équations.

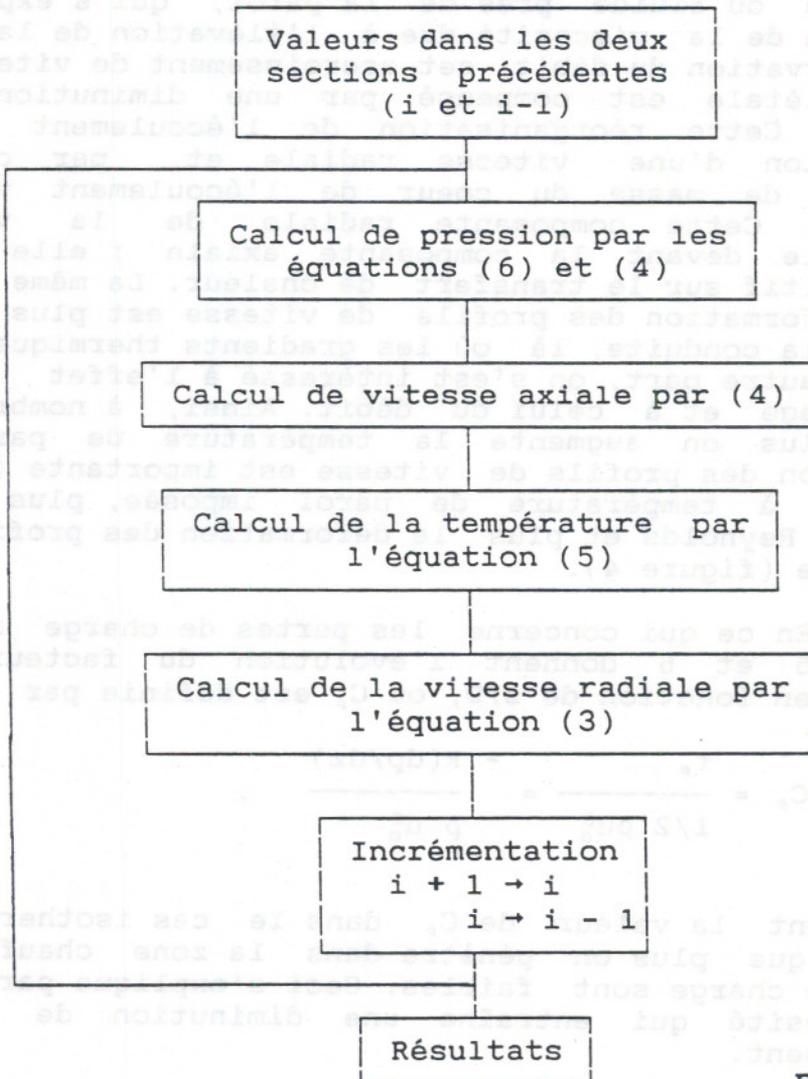


FIGURE 1

On note que ce code de calcul a d'abord été mis en oeuvre pour étudier le cas du chauffage à densité de flux constant. Les résultats numériques sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus dans notre laboratoire [3].

RESULTATS ET DISCUSSION

Dans cette étude, nous supposons que le chauffage ne débute que lorsque le régime dynamique est établi. Ainsi, lors de l'établissement de la couche limite thermique, le profil de vitesse d'un fluide non thermodépendant restera inchangé, car il n'y a pas d'interaction entre le champ dynamique et le champ thermique. Il n'est pas de même pour les fluides thermodépendants, car une augmentation de la température entraîne une diminution de la viscosité qui, à son tour entraîne une modification du profil des vitesses. La figure 2 illustre bien ce phénomène. Elle donne l'évolution d'un profil de vitesse axiale en différentes sections de la zone chauffée. On note que plus on pénètre dans cette zone, plus les profils de vitesse sont déformés. Cette déformation se manifeste par un accroissement de la vitesse du fluide près de la paroi, qui s'explique par une diminution de la viscosité due à l'élévation de la température. Par conservation du débit, cet accroissement de vitesse près de la zone pariétale est compensé par une diminution dans la zone centrale. Cette réorganisation de l'écoulement se traduit par l'apparition d'une vitesse radiale et, par conséquent, un transfert de masse du coeur de l'écoulement vers la surface d'échange. Cette composante radiale de la vitesse reste négligeable devant la composante axiale ; elle a néanmoins un effet positif sur le transfert de chaleur. La même figure montre que la déformation des profils de vitesse est plus importante en amont de la conduite, là où les gradients thermiques sont importants. D'autre part, on s'est intéressé à l'effet de l'intensité du chauffage et à celui du débit. Ainsi, à nombre de Reynolds donné, plus on augmente la température de paroi et plus la déformation des profils de vitesse est importante (figure 3). En revanche, à température de paroi imposée, plus on augmente le nombre de Reynolds et plus la déformation des profils de vitesse est faible (figure 4).

En ce qui concerne les pertes de charge régulières, les figures 5 et 6 donnent l'évolution du facteur de frottement $C_f/C_{f_{i s 0}}$ en fonction de z/D , où C_f est définie par :

$$C_f = \frac{\tau_p}{1/2 \rho u_0^2} = \frac{R(dp/dz)}{\rho u_0^2}$$

$C_{f_{i s 0}}$ étant la valeur de C_f dans le cas isotherme. Ces figures montrent que plus on pénètre dans la zone chauffée et plus les pertes de charge sont faibles. Ceci s'explique par la diminution de viscosité qui entraîne une diminution de la résistance à l'écoulement.

Pour les mêmes raisons que dans le cas des profils de vitesse, la variation du coefficient de frottement est plus importante en amont de la conduite. La figure 5 montre que les pertes de charge diminuent plus vite pour les températures de paroi élevées ; en revanche, la figure 6 montre qu'elles diminuent moins vite pour les grands nombres de Reynolds.

La figure 7 donne l'évolution du profil des températures en différentes sections de la conduite. On observe bien le développement de la couche limite thermique. Bien que les gradients thermiques restent localisés au voisinage de la paroi, ils entraînent une déformation du champ des vitesses dans toute la section.

Loi de transfert de chaleur : En raison des fortes valeurs du nombre de Prandtl rencontrées, le régime thermique n'est pas établi. On définit alors le transfert thermique par des grandeurs locales :

$$\text{Nombre de Nusselt local} \quad \text{Nu} = - \frac{D(\partial T/\partial r)_p}{(T_p - T_m)}$$

Position axiale adimensionnelle, définie par le nombre de Cameron

$$X^* = \frac{z/D}{\text{RePr}}$$

La figure 8 montre clairement l'influence du chauffage sur le transfert de chaleur. Pour tenir compte de cet aspect on introduit le terme correctif (K_m/K_p) adopté par Mizushima (1967). Les résultats se regroupent alors de manière satisfaisante (figure 9) et nous proposons la corrélation :

$$\text{Nu} = 1,85(K_m/K_p)^{0,17} (X^*)^{-0,263}$$

CONCLUSION

Le problème de l'écoulement et du transfert de chaleur pour un fluide pseudoplastique dans un tube cylindrique chauffé à température constante a été étudié numériquement. Les résultats obtenus montrent bien l'importance des effets de la thermodépendance sur les profils de température et de vitesse. Une corrélation exprimant le nombre de Nusselt en fonction des quantités du rapport des consistances K_m/K_p et du nombre de Cameron X^* est proposée ; elle peut être très utile pour les concepteurs des échangeurs de chaleur.

REFERENCES

- [1] F. POPOVSKA, W.L. WILKINSON, Chem. Engin. Science, 32, 1155 (1977).
- [2] S.D. JOSHI, A.E. BERGLES, J. Heat Transfer, 3, 51 (1982)
- [3] A. EL OUARTIGHI, V.T. NGUYEN, M. LÉBOUCHE, 2ème Colloque Rhéol. Transf. Polym. Mat. Agro-alimentaires, 305, (1987).

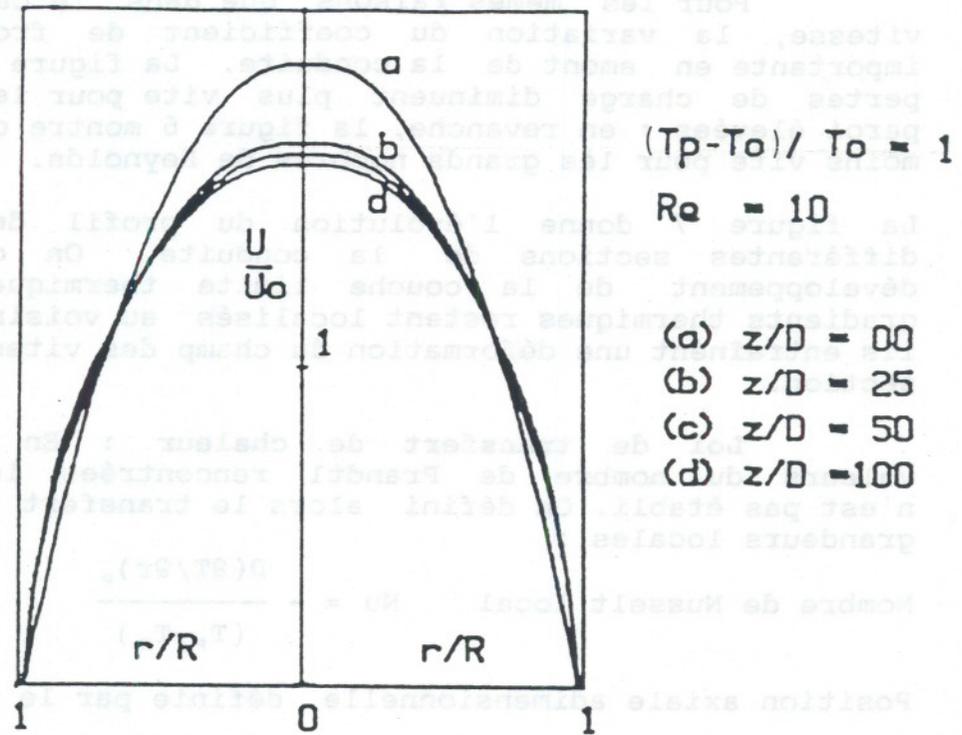


Figure 2 : Evolution du profil de vitesse axiale en fonction de z/D .

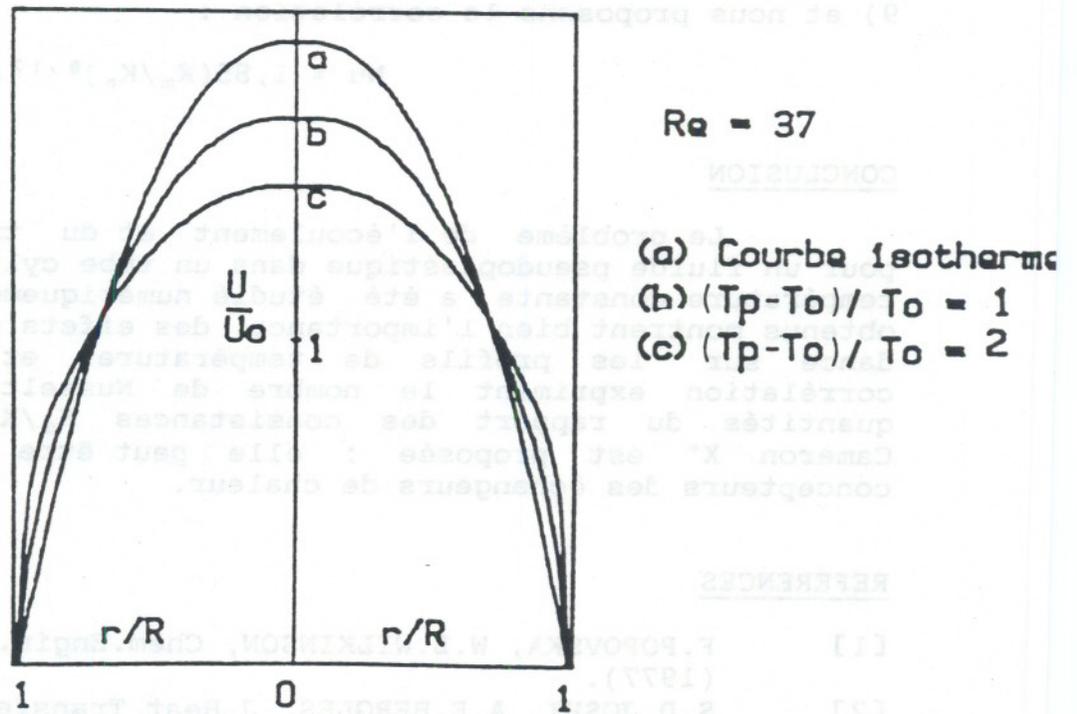


Figure 3 : Profile reduites de vitesse a $z/D = 75$ influence de la temperature de paroi

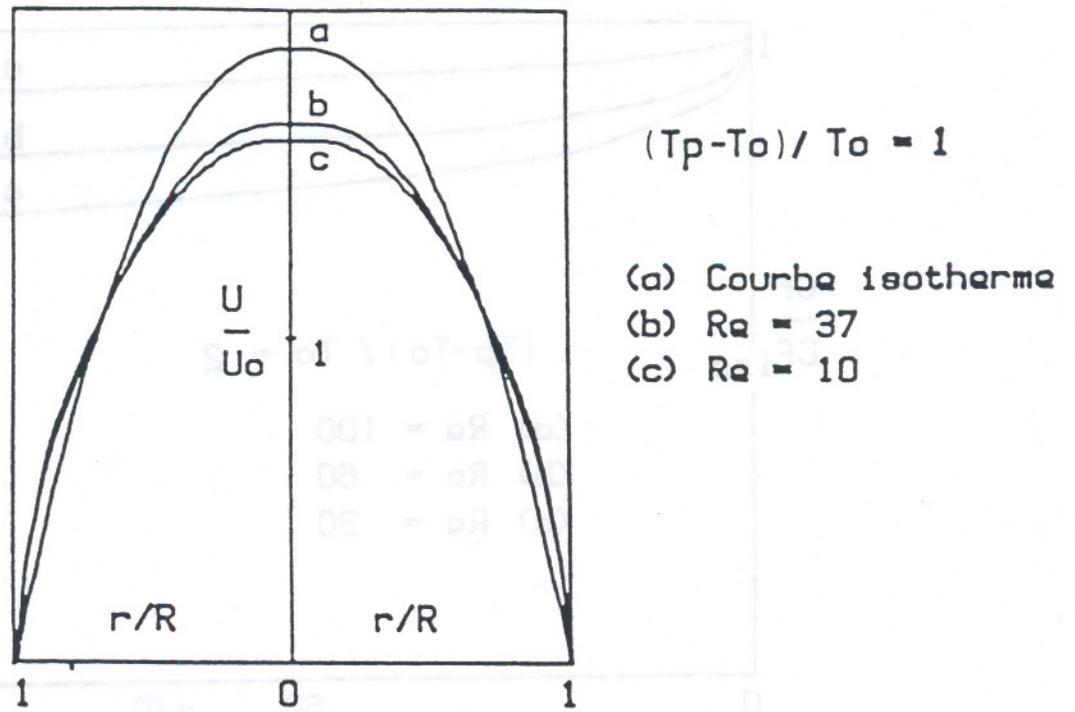


Figure 4 : Profils reduits de vitesse a $z/D = 75$ influence du Nombre de Reynolds .

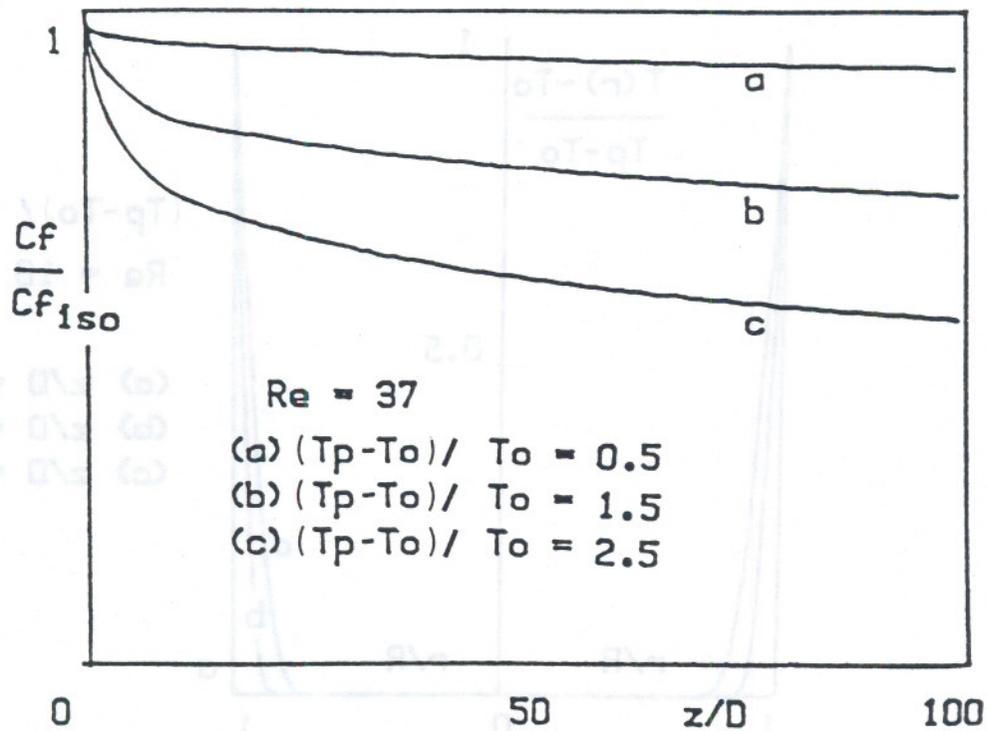


Figure 5 : Coefficient de frottement en fonction de z/D influence de la temperature de paroi.

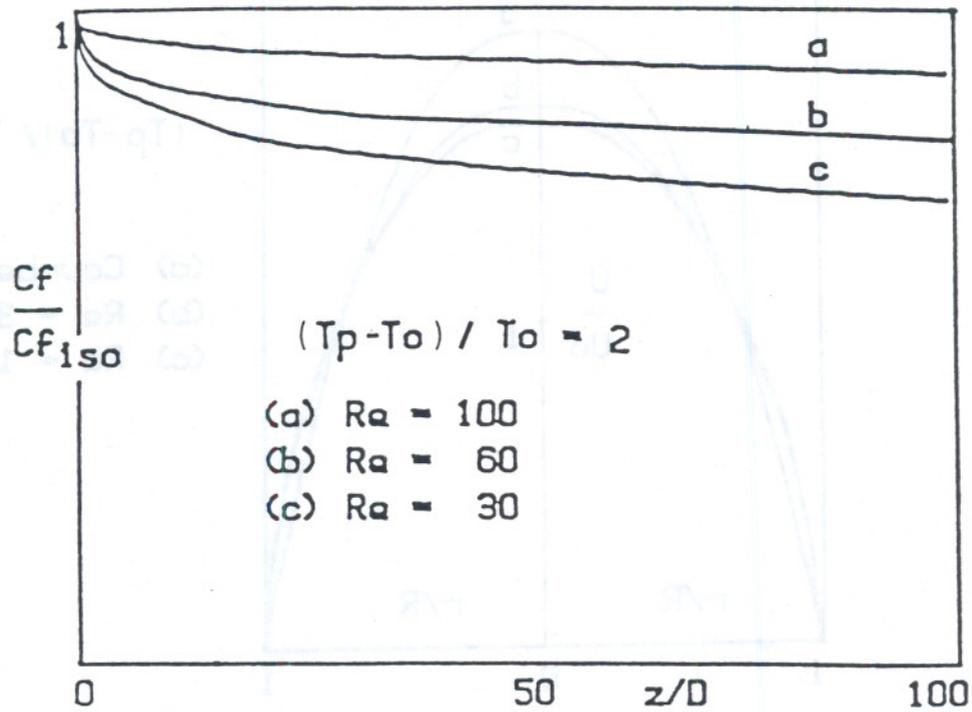


Figure 6 : Coefficient de frottement en fonction de z/D influence du nombre de Reynolds .

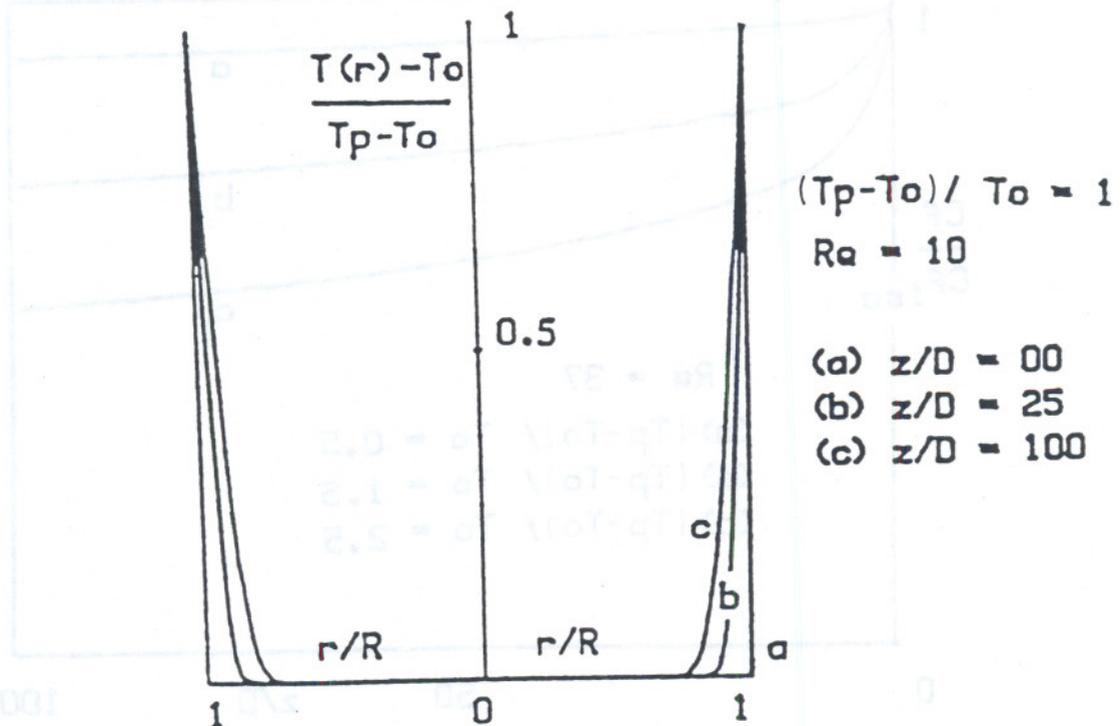


Figure 7 : Evolution du profil de temperature reduite en fonction de z/D .

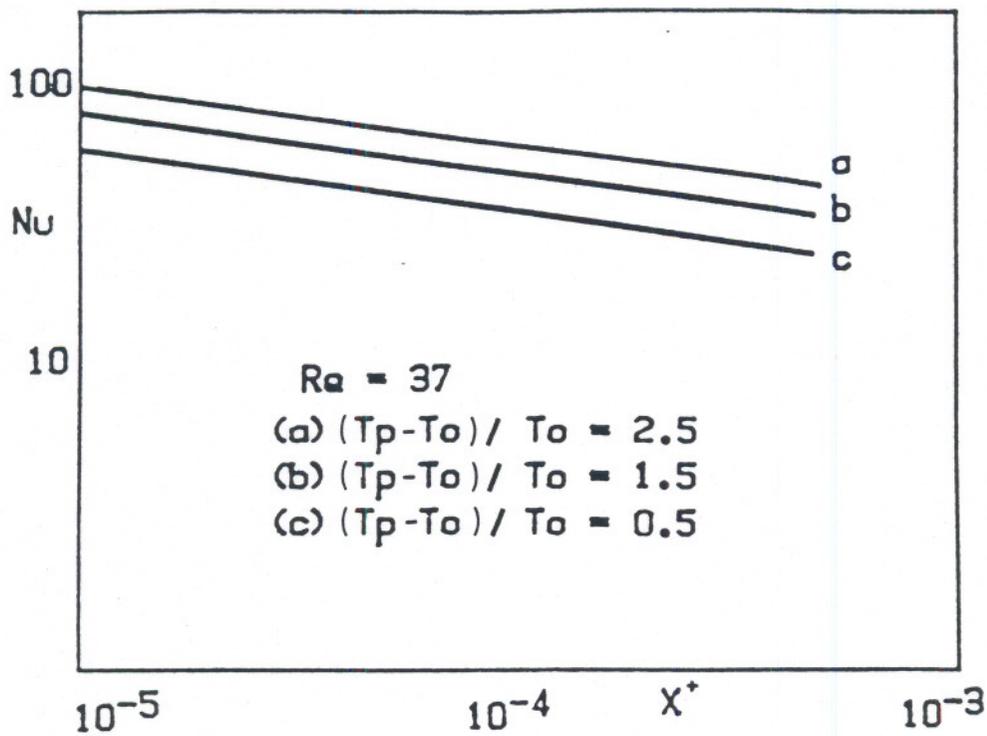


Figure 8 : Nombre de Nusselt en fonction du Nombre de Cameron X^*
Influence de la temperature de paroi .

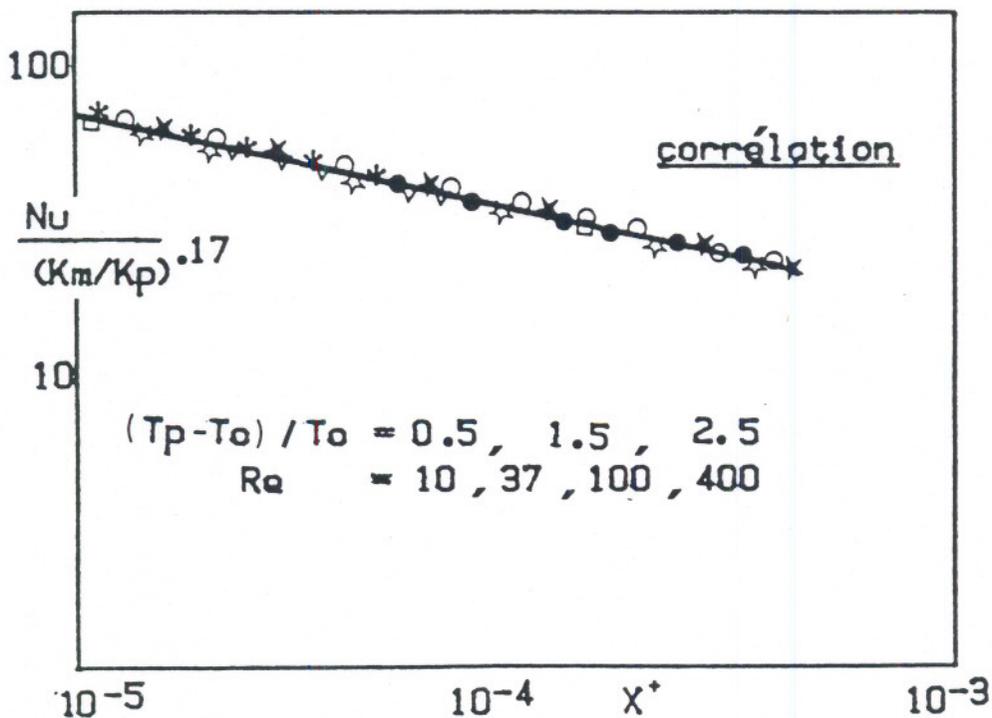


Figure 9: Nombre de Nusselt corrigé en fonction du Nombre Cameron X^*

FROTTEMENT SEC ET SIMILITUDE DANS L'ECOULEMENT DES MILIEUX GRANULAIRES

J. D. WEBER - J.C. ROTH

ISGMP, LPMM, UNIVERSITE DE METZ
Ile du Saulcy 57045 METZ CEDEX 1

Deux trémies A et A' géométriquement semblables dans le rapport $\frac{1}{\lambda}$ sont munies d'orifices de diamètre respectifs ϕ dans A, et $\phi' = \frac{\phi}{\lambda}$ dans A' (A peut être appelé prototype, A' modèle réduit).

Des grains G de formes quelconques sont disposés en empilement dans A, tandis que des grains G' rigoureusement semblables à ceux de G, dans le rapport $\frac{1}{\lambda}$, sont disposés en un empilement semblable dans A'.

On admet que le coefficient de frottement des grains sur la paroi P de A est f_0 , et que le coefficient de frottement des grains G entre eux est f.

De même, on admet que le coefficient de frottement des grains G' sur la paroi P' de A' est f_0 , et que le frottement des grains G' entre eux est f.

Soit T le temps de vidange de A, T' le temps de vidange de A'.

On se propose de montrer que

$$T = \frac{T'}{\sqrt{\lambda}}$$

C'est la similitude de Froude

On peut dire aussi que

$$\frac{V^2}{gD} = \frac{V'^2}{gD'}$$

V étant une vitesse caractéristique de l'écoulement A (par exemple $V = \frac{Q}{S}$, Q débit volumique initial, $S = \pi \phi^2/4$), D étant une longueur caractéristique de A (par exemple $D = \phi$) ; V' et D' sont les quantités correspondantes pour A'.

Le raisonnement est très simple dans le cas d'un grain unique en forme de parallélépipède glissant avec frottement sur un plan incliné représentant une portion de P.

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit

$$mg \sin \alpha - f_0 mg \cos \alpha = m\ddot{x}$$

Si $\dot{x} = 0$ pour $t = 0$

$$x = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f_0 \cos \alpha) t^2$$

et de même pour un modèle réduit à l'échelle $\frac{1}{\lambda}$ de cette expérience

$$x' = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f_0 \cos \alpha) t'^2$$

Puisque $L' = \frac{L}{\lambda}$

on a bien $T' = \frac{T}{\sqrt{\lambda}}$

Le résultat s'étend aux empilements de grains considérés ci-dessus.

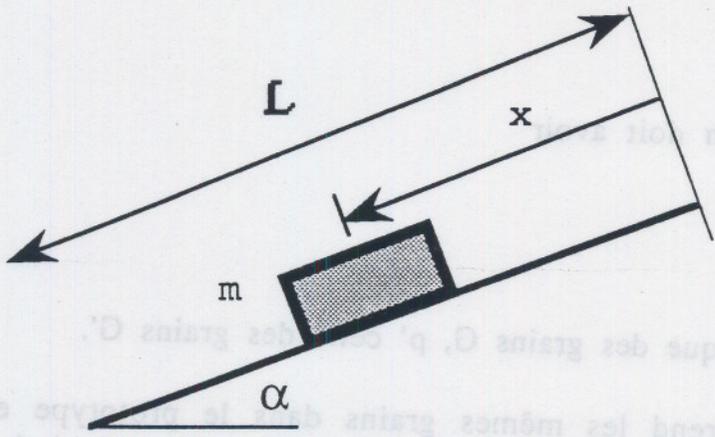
Les réactions intergranulaires ne sont déterminées que si l'on tient compte de l'élasticité des grains.

En toute rigueur, on doit avoir

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho'}{\rho}$$

où ρ est la masse volumique des grains G , ρ' celle des grains G' .

Pratiquement on prend les mêmes grains dans le prototype et le modèle ; la similitude reste approximativement correcte si les grains sont petits par rapport à ϕ' .



En toute rigueur, on

$$\frac{E}{E} = \frac{1}{\lambda} \frac{p}{p}$$
 où p est la masse volumique des grains G , λ est le rapport des grains G .
 Pratiquement on prend les mêmes grains de la même taille et
 le mobile ; la similitude reste approximativement correcte si les
 grains sont petits par rapport à ϕ .