

Les Cahiers de Rhéologie



Volume X, Numéro 2

septembre 1992

Edités par :

Le Groupe Français de Rhéologie



COMITE DE REDACTION

Rédacteur :
R. GAUDU

COMITE DE LECTURE

G. Antonini
D. Bourgoin
P. Habib
C. Huet
T.E.R. Jones
I. Krieger
J.-L. Lataillade
B. Launay
M. Lebouche
J. Lemaitre
D. Lhuillier
M. Lucius
P. Papon
J.-M. Pierrard
D. Quemada
K. Walters
J.-D. Weber
C. Wolff
S. Zahorski
J. Zarka

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Président : JM. PIAU

Trésorier : R. BLANC

Secrétaire : R. GAUDU

ENSCP
351 cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX
Tél. 56 84 66 88
Fax. 56 84 66 68

SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS

Les Cahiers paraissent deux à trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement. Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant au Secrétariat du Groupe moyennant une participation au frais.

Les Cahiers de Rhéologie

SOMMAIRE DU VOLUME X, n° 2

SEPTEMBRE 1992

ARTICLES

- Etude de la représentativité des paramètres mesurés par un analyseur de texture informatisé : application au cas de gels de polymères et d'émulsions.....p. 33

P. MICHAUD, Laboratoire de Pharmacie Galénique, Faculté des Sciences Pharmaceutiques, 35 chemin des Maraîchers 31062 Toulouse.

F. RODRIGUEZ, Laboratoire de Pharmacie Galénique, Faculté des Sciences Pharmaceutiques, 35 chemin des Maraîchers 31062 Toulouse.

M. SENDELIN, Institut de Mécanique des Fluides, Avenue du Professeur Camille Soula 31400 Toulouse.

- Détermination de lois de comportement de certains milieux hétérogènes par des techniques d'homogénéisation..... p.48

G. MAURICE et R. KOUITAT, Laboratoire de Science et Génie des Surfaces. Ecole des Mines de Nancy, Parc de Saurupt, 54042 Nancy cedex (France)



COMITE DE REDACTION

Rédacteur :
R. GAUDU

COMITE DE LECTURE

G. Antonini
D. Bourgoïn
P. Habib
C. Huet
T.E.R. Jones
I. Krieger
J-L. Lataillade
B. Launay
M. Lebouche
J. Lemaître
D. Lhuillier
M. Lucius
P. Papon
J-M. Pierrard
D. Quemada
K. Walters
J-D. Weber
C. Wolff
S. Zahorski
J. Zarka

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Président : JM. PIAU

Trésorier : R. BLANC

Secrétaire : R. GAUDU

ENSCP
351 cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX
Tél. 56 84 66 88
Fax. 56 84 66 68

SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS

Les Cahiers paraissent deux à trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement. Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant au Secrétariat du Groupe moyennant une participation au frais.

ETUDE DE LA REPRESENTATIVITE DES PARAMETRES MESURES PAR UN ANALYSEUR DE TEXTURE INFORMATISE: APPLICATION AU CAS DE GELS DE POLYMERES ETD'EMULSIONS

P.MICHAUD* , F.RODRIGUEZ* , M.SENGLIN**

* Laboratoire de Pharmacie Galénique, Faculté des Sciences Pharmaceutiques, 35 chemin des Maraîchers 31062 Toulouse.

** Institut de Mécanique des Fluides, Avenue du Professeur Camille Soula 31400 Toulouse.

RESUME

Une étude rhéologique de formes pharmaceutiques pâteuses est effectuée au moyen d'un analyseur de texture informatisé. L'influence de la géométrie du testeur sur les paramètres physiques mesurés est analysée. Des cycles de pénétration, des essais de fluage et de relaxation sont réalisés sur des gels et des émulsions afin de définir les paramètres physiques les plus significatifs.

ABSTRACT

A rheological study of pasty pharmaceutical products is made by use of a computerized texture analyser. The effects of the geometry of the testing device on the measured parameters are analysed. Penetration cycles, creep and relaxation tests are performed on gels and emulsions in order to define the most significant parameters.

INTRODUCTION

Le contrôle des formes pharmaceutiques nécessite un nombre plus ou moins important de mesures ou d'essais.

Pour une forme solide, ces essais sont nombreux et assez clairement définis alors que pour une forme pâteuse ils sont moins bien précisés.

En effet, ce n'est que depuis janvier 1991 qu'un essai de pénétrométrie est demandé et encore, les informations fournies sont minimales: seule la valeur moyenne de trois mesures obtenues après l'enfoncement d'un testeur dans la préparation est exigée sans même tenir compte de l'écart type.

Ce type de mesure est donc tout à fait insuffisant pour caractériser les propriétés d'une pommade et l'utilisation d'un analyseur de texture a déjà été préconisée dans l'étude des formes pâteuses <1>, <2>.

Ce n'est que depuis un ou deux ans que l'on voit se développer la commercialisation de différents pénétromètres ou analyseurs qui grâce à des jauges de contraintes permettent l'enregistrement des forces exercées sur le testeur lorsque celui-ci se déplace dans une préparation à une vitesse déterminée à l'avance (cycle), lorsqu'il exerce une déformation constante dans la préparation (relaxation) ou lorsqu'il se déplace à force constante (fluage).

Le travail présenté ici effectué à l'aide d'un analyseur de texture de Stevens informatisé traite de l'intérêt de ces mesures, de la qualité des informations fournies et de l'influence des conditions opératoires sur les résultats obtenus.

Il concerne:

- l'influence de la forme géométrique du testeur sur la forme des cycles obtenus et sur la reproductibilité des mesures.
- le mûrissement d'une forme gel
- l'influence de la concentration de la phase grasse sur la texture d'une crème
- la recherche de modèles mathématiques corrélés aux cinétiques obtenues.

RESULTATS

1) Choix et influence du testeur.

Les testeurs utilisés au cours de cette étude sont ceux qui sont habituellement employés pour l'étude des formes pâteuses. Ils sont de forme cylindrique, sphérique ou cônica.

L'étude de l'influence de la forme du testeur sur les résultats obtenus pour l'analyseur de texture a porté sur:

- deux gels aqueux à base de :
 - dérivé non ionique de guar de concentration 3% (Jaguar HP8)
 - gélatine de concentration 3%
- trois excipients gras :
 - vaseline
 - lanoline
 - base pour émulsion E/H (Déhymuls K)

Les cycles de pénétration ont été réalisés aux vitesses de 4 et 0.4 mm/s. Les différents paramètres caractéristiques analysés sont ceux décrits dans une étude précédente <1>. Ce sont essentiellement les force maximale exercée F_M , la force minimale F_m , la surface de descente S_1 , la surface de remontée supérieure S_2 et la surface de remontée inférieure S_3 . Pour juger de la bonne représentativité de ces paramètres nous avons représentés ces résultats sous la forme d'une analyse en composantes principales (A.C.P.).

La représentation graphique de ces résultats montre que:

- l'on a une bonne représentation des variables choisies puisque sur les deux axes principaux F_1 , F_2 on a 93.7% de l'information dont 69.3% sur l'axe F_1 (figure 1).
- les différentes préparations choisies sont, excepté une, bien individualisées dans le plan (figure 2).
- la comparaison des résultats obtenus avec les différents testeurs indique que le cylindre et la sphère donnent les résultats les plus voisins pour toutes les préparations étudiées. Par contre les résultats fournis par l'utilisation du cône sont moins discriminants.
- pour une même préparation, c'est principalement par rapport à l'axe F_2 que l'on différencie les mesures effectuées avec le cône, la sphère ou le cylindre.

L'influence de la forme du testeur est plus ou moins importante selon la nature de l'excipient: la gomme de guar, la vaseline et la gélatine sont peu sensibles.

En comparant la forme des cycles obtenus, (figure 3), on constate que le cylindre et la sphère ont des comportements proches, en effet au cours d'une mesure, la surface de contact testeur - pommade croît rapidement par contre, avec le cône, il faut que celui-ci ait parcouru quelques mm dans la préparation avant que la surface de contact soit suffisamment importante pour obtenir une mesure significative. En outre ceci modifie également la distance d'enfoncement initiale (figures 4a et 4b). Le point 0 est donc difficile à déterminer.

Un défaut d'utilisation possible de la sphère est que lors d'un enfoncement important effectué à vitesse lente, elle peut être recouverte par le produit si celui-ci est relativement "fluide". La forme du cycle obtenu est alors modifiée, notamment lors de la remontée.

En pratique comme on trouve des testeurs cylindriques de diamètres compris entre 3mm et 36mm, on peut étudier des pommades qui présentent des variations de texture importantes. En

effet avec l'analyseur de texture Stevens, on peut utiliser des cylindres qui ont pour diamètres 3,6, 12, 25, 4 ou 36 mm alors que le diamètre des testeurs sphériques est de 6 ou 12 mm et que l'angle au sommet des cônes est limité à 30 ou 60 degrés.

2) Type de contrôles réalisables avec cet appareillage.

Une fois le modèle du testeur choisi, on peut effectuer les différents types de mesures cycles, relaxation ou fluage.

L'intérêt des cycles est de pouvoir visualiser les forces qui sont exercées sur un testeur pour qu'il s'enfonce dans la préparation à la vitesse programmée.

Au moyen de ces cycles, il est possible de comparer l'influence d'excipients ou d'un principe actif dans une préparation et également de suivre l'évolution de la formule dans le temps.

Avant d'effectuer de telles études, il nous a paru nécessaire de contrôler la reproductibilité des mesures.

2.1 Reproductibilité des mesures.

a) Etude des paramètres caractéristiques d'un cycle.

Dans le cas d'un gel de gomme guar nous avons déterminé la force maximale, la force minimale et la valeur de la surface sous la courbe correspondant à la période d'enfoncement lorsqu'un testeur cylindrique de 12 mm de diamètre est employé. Nous avons calculé les valeurs moyennes, les écarts types et les pourcentages d'erreur de sept mesures consécutives.

Les résultats sont portés sur le tableau 1.

Nous remarquons que pour les trois mesures, les pourcentages d'erreurs sont faibles puisque inférieurs à 12,5% ce qui dans le cas de contrôles de formes pâteuses doit être admissible, la norme pharmacopée ne précisant aucune limite.

b) Reproductibilité des mesures effectuées au moyen des 3 testeurs.

Cette étude de reproductibilité a été réalisée pour les 3 formes de testeur à partir de 7 cycles effectués sur une émulsion à base de Tésal (mono di palmito stéarate de propylène glycol associé à un savon d'amine).

Nous avons étudié ici l'homogénéité dans la mesure des forces, des surfaces et des angles. Cette homogénéité est caractérisée par le pourcentage d'erreur calculé pour les différentes séries de mesure dont les valeurs sont reportées dans le tableau 2

Nous remarquons que c'est le cylindre qui donne généralement les meilleurs résultats au niveau de la mesure des forces et des surfaces. Pour les angles les résultats sont plus discutables et plus difficilement interprétables. La surface de contact testeur - préparation est immédiatement importante aussi de faibles imperfections de surface, invalident la mesure.

Lorsque l'on étudie la reproductibilité des valeurs des angles obtenus avec la sphère ou le cône, les résultats sont meilleurs bien qu'ils présentent des taux de variation encore élevés.

2.2) Etude du mûrissement d'un gel.

L'étude du mûrissement d'un gel a porté sur une période de 27 jours. La préparation analysée est un gel composé de 3% de gomme guar (Jaguar HP8) et de 0,5% de conservateur (Méthoxyde sodé) en solution dans 100 ml d'eau purifiée.

Les conditions opératoires et le type de cycle obtenu sont représentés sur la figure 5.

On note que dans ce cas, le testeur ne pénètre pas dans la préparation car la surface extérieure de l'échantillon ne se déchire pas.

Les résultats présentés sur les figures 6 a, b et c, représentent les valeurs moyennes des grandeurs caractéristiques concernant cinq cycles consécutifs

Ils montrent l'évolution des paramètres étudiés en fonction de la durée de mûrissement. On note que seule la surface S3 montre une discontinuité importante et donc n'évolue pas dans le temps de façon identique aux autres variables analysées. A partir de ces résultats, on peut déduire que:

- un gel de Jaguar étudié pendant une période de 27 jours présente une légère diminution de consistance qui se traduit par des forces maximales F_{max} et des surfaces sous la courbe d'enfoncement S_1 plus faibles.

- les propriétés de surface du gel se modifient. En effet, celui-ci adhère plus fortement au testeur ce qui se manifeste par des forces minimales F_{min} et des surfaces négatives S_3 du cycle en augmentation.

2.3) Etude de la concentration d'un composant de la phase grasse sur les caractéristiques d'une crème.

Cette étude d'une forme pommade a été réalisée à partir de cycles et complétée au moyen de courbes de relaxation puis de fluage qui peuvent être modélisées au moyen de différentes relations mathématiques.

Nous avons retenu comme exemple de formulation la préparation suivante:

TESAL Xg, Huile de Paraffine (6g) Labrafil M2130 CS 3g, PHBM sodé 0,15 g et Eau distillée Q.S.P 100g

Les quantités X g de Tesal varient entre 5 et 25 g.

Des mesures réalisées 48 H après leur fabrication ont donné les résultats portés sur le tableau 3.

Ces valeurs ont été obtenues en effectuant :

-des cycles aux vitesses de 4 et de 0.4 mm/s

-des courbes de relaxation et de fluage après une pénétration du testeur de 7,5 mm dans la préparation.

Les différents paramètres relatifs aux cycles et portés sur la figure 7a montrent que dans le cas d'une augmentation de concentration de base grasse, la consistance de la préparation croît de façon exponentielle.

Ainsi pour le domaine de concentration considéré, l'évolution des forces F_{max} mesurées peut être modélisée par les relations:

$F = 11,4 \text{ EXP}(0,146.X)$ lorsque la mesure est effectuée à la vitesse de 4mm/s

$F = 5,26 \text{ EXP}(0,155.X)$ lorsque la mesure est effectuée à la vitesse de 0,4mm/s.

Une étude des courbes de relaxation montre que la variation de force spécifique après 90 secondes ($F_0 - F_{90}/F_0$) exprimée en pourcentage est très voisine pour les différents échantillons, en effet il varie entre 82,8 et 87,7 alors que les forces maximales se répartissent entre 16 et 443 g.

On peut en conclure dans ce cas que les courbes de relaxation (figure 7b) sont caractéristiques du type de préparation et indépendantes des forces mises en jeu lors de l'expérimentation.

Ce résultat est confirmé par l'étude du fluage (figure 7b) puisqu'à l'exception de la préparation à 5% la variation du déplacement spécifique ($D_{10} - D_0/D_0$) également exprimé en pourcentage ne varie également que fort peu puisqu'il évolue entre 62.3 et 69.1 %.

Pour la préparation dosée à 5 % ,ce pourcentage est de 51.9%..

Que ce soit pour les essais de relaxation ou de fluage, on ne note pas de relation mathématique spécifique entre l'évolution des paramètres calculés et la concentration en TESAL dans la préparation.

2.4) PROTOCOLE D'ETUDE D'UN GEL ET D'UNE CREME.

Quel que soit le type de préparation étudiée, le protocole suivant doit permettre une approche expérimentale correcte:

- 2 cycles, l'un à vitesse d'enfoncement lente (0.4 mm/s) et le second à une vitesse dix fois plus grande (4 mm/s)
- un essai de fluage
- un essai de relaxation.

A titre d'exemple nous avons effectué une telle étude sur une forme gel (Jaguar à 5%) et une forme crème (Tésal à 18%) et ce 48 heures après préparation.

2.4.1) Cycles

Les résultats-obtenus dans le cas des cycles sont représentés par les figures 8a et 8b et les principales valeurs de paramètres que l'on peut en déduire sont portées sur le bulletin d'analyse tableau 4.

Pour l'étude du gel, les cycles obtenus aux 2 vitesses sont semblables et présentent pour l'enfoncement et le retour du testeur des surfaces positives proches de la symétrie et une absence de cycles négatifs. Les formes maximales trouvées après un enfoncement de 10 mm sont de 144g et 118g donc relativement voisines. Par contre, l'étude de la crème à base de Tesal aux deux vitesses montre une dissymétrie du cycle positif et du cycle négatif importante. Les forces maximales obtenues aux deux vitesses de pénétration-sont très différentes et chutent de 37 g à 20 g lorsque l'on diminue la vitesse.

Cette différence de comportement se retrouve lorsqu'on compare les différentes surfaces définies par les cycles obtenus sur ces deux préparations aux deux vitesses.

2.4.2) Courbes de fluage.

Pour cet essai l'enfoncement initial du testeur dans la préparation est de 10 mm, l'on maintient la force utile constante puis on enregistre l'évolution de la pénétration du testeur en fonction du temps sous l'effet de cette charge constante.

L'étude de l'enfoncement obtenu à 15 secondes et représenté par la figure (9) montre des cinétiques très différentes selon que l'on considère le gel ou la crème.

Dans le cas du gel les variations sont faibles ce qui se traduit par des pourcentages de déplacements spécifiques de 30% alors que pour la crème, elles sont importantes puisqu'elles atteignent 182%.

Pour ces essais nous avons fait la recherche d'un modèle mathématique représentatif. L'analyse classique pour ce type d'expérimentation dérive de la méthode d'Inokuchi et l'équation représentative est de la forme:

$$D(t) = D_0 + D_1 \cdot (1 - \text{EXP}(-V_1 \cdot t / D_1)) + V_0 \cdot t$$

où:

D_0 est l'enfoncement initial, D_1 est un enfoncement retardé, V_0 est la pente de l'asymptote à la courbe qui a la dimension d'une vitesse et V_1 une vitesse retardée.

Les corrélations sont alors très bonnes et l'on peut définir en termes de déplacement et de vitesses la fonction obtenue.

GEL:	$D_G(t) = 10 + 1.8505 \cdot (1 - \text{EXP}(-0.239 \cdot t)) + 0.075 \cdot t$
CREME:	$D_C(t) = 10 + 9.0110 \cdot (1 - \text{EXP}(-0.177 \cdot t)) + 0.629 \cdot t$

D'autres modèles mathématiques peuvent toutefois être utilisés bien qu'il soit alors difficile de définir la signification des différentes constantes. On peut ainsi utiliser les différents modèles du tableau 5 qui donnent de bonnes corrélations.

Lors de l'étude des courbes de fluage, seule la fonction de WEIBULL ne donne pas de très bons résultats puisque dans le cas du gel et de la crème les coefficients de corrélation sont faibles.

2.4.3) Courbes de relaxation.

Pour compléter notre expérimentation, nous avons réalisé sur chaque préparation une étude de relaxation. L'enfoncement du testeur est de 10 mm et la déformation est maintenue 100 secondes pendant lesquelles on enregistre l'évolution de la force exercée en fonction du temps. Les pourcentages de perte de force calculés sont différents: 54.6% pour le gel et 74.5% pour la crème.

La droite asymptote obtenue en fin de relaxation permet d'indiquer si le produit se rapproche d'un comportement solide ou s'il s'apparente à un liquide. En effet plus les valeurs de la pente de cette droite sont faibles plus on peut parler d'un comportement solide.

Dans notre étude les valeurs sont $-0,2$ g/mm pour le gel de Jaguar et $-0,01$ g/mm pour la crème ce qui permet de considérer que la crème à un comportement assez proche d'un solide.

Une étude des courbes obtenues au moyen des modèles mathématiques utilisés précédemment (tableau 6) donne des résultats différents puisqu'ici, seule l'application de la fonction de WEIBULL fournit de bonnes corrélations. (figure 10)

Pour conclure cette étude des deux préparations, gel et crème, on peut indiquer qu'au moyen d'un analyseur de texture informatisé il est possible:

- de paramétrer les différentes cinétiques obtenues au moyen de mesures de forces et de surfaces dans le cas d'un cycle .
- d'utiliser des modèles mathématiques pour étudier les courbes de fluage et de relaxation.

CONCLUSION

Lors de cette étude nous avons voulu montrer l'apport important que l'on peut attendre de l'utilisation d'un pénétromètre ou d'un analyseur de texture informatisé, une fois que les conditions expérimentales ont été fixées que ce soit pour l'étude et la mise au point d'une préparation, pour contrôler sa fabrication ou suivre son mûrissement. Les paramètres physiques mesurables grâce à ces appareils sont nombreux ce qui permet d'en retenir les plus significatifs pour caractériser les différents produits étudiés.

Mots clés: Rhéologie - Analyseur de texture - Gels - Emulsions - Cycles - Relaxation - Fluage.

BIBLIOGRAPHIE

- <1> P. MICHAUD
Approche au moyen d'un pénétromètre des différents modèles rhéologiques.
Application aux corps pâteux
LES ENTRETIENS DU CARLA, Tome VIII, Décembre 1987.
- <2> F. LAURENCON-COURTEILLE, M. SEILLER, P. PROGNON, D. PRADEAU, J.L. GROSSIORD
Recherche et comparaison d'analyses rhéologiques de formes liquides et semi solides.
PREFORMULATION DU MÉDICAMENT ET DEVELOPPEMENT GALENIQUE,
3 ème journée scientifique, Faculté de Pharmacie de Dijon, Septembre 1991.

	Valeurs	Moyenne	Ecart Type	Pourcentage d'erreur
F max (gr.)	24 24 24 24 23 23 22	23,4	0,78	6,7
F min (gr.)	-12 -12 -12 -13 -12 -12 -11	-12	0,57	9,62
Surface (gr.mm)	174 182 182 182 180 180 152	176	10,9	12,4

Tableau 1: Reproductibilité des mesures

Pourcentage d'erreur	F Max	F Min	S1	S2	Angle D	Angle P	Rapport S1/S2
Cylindre (Ø = 12 mm)	3,35	8,63	8,4	22,0	62	49	24,0
Sphère (Ø = 12 mm)	11,60	17,50	12,1	20,0	21	20	10,9
Cône 60°	14,00	35,70	13,6	22,6	13	71	23,2

Tableau 2: Influence de la forme du testeur

Concentration (%)	Fmax (gr.)		Fmin (gr.)		Relaxation F0-F90/F0 (%)	Fluage D10-D0/D0 (%)
	4mm/s	0,4mm/s	4mm/s	0,4mm/s		
5	16	13	-3	-3	83,3	51,9
7,5	38	19	-18	-8	87,7	67,5
10	56	31	-27	-16	82,8	64,6
15	90	52	-50	-31	81,1	62,3
20	223	114	-130	-62	85,9	67,4
25	443	257	-239	-134	84,3	69,1

Tableau 3: Effet de la concentration de la phase grasse

BULLETIN D'ANALYSE	TESAL		JAGUAR	
CYCLE NORMAL V (mm/s)	4mm/s	0,4mm/s	4mm/s	0,4mm/s
Force maximale (gr)	37,0	20,0	144,0	118,0
Force minimale (gr)	-18,0	-13,0	-9,0	-13,0
Surface descente (gr.mm)	290,0	166,0	790,0	644,0
Surface remontée sup. (gr.mm)	20,0	6,0	571,0	392,0
Surface remontée min. (gr.mm)	320,0	231,0	52,0	52,0
Pente début (gr/mm)	12,6	10,7	15,3	16,4
Pente fin (gr/mm)	2,4	1,6	14,2	13,5
Force résiduelle à zéro (gr)	-16,6	-12,7	5,8	-9,7
Force inverse à "course" (gr)	1,5	-1,0	1,5	1,0
CYCLE INVERSE V (mm/s)				
Surface (gr.mm)	590,0	391,0	271,0	304,0
Rapport (sup./inf.)	0,84	0,70	4,25	4,81

Tableau 4: Comparaison d'un gel et d'une crème

Modèle	Préparation	a	b	c	Corrélations	Ecart-types
Exponentiel	Gel	10,669	0,0148		0,92	0,257
	Crème	12,968	0,0055		0,95	1,307
Gompertz	Gel	13,342	0,0400	0,148	0,99	0,077
	Crème	34,000	0,1395	0,119	0,99	0,259
Logistique	Gel	13,280	0,3070	0,165	0,99	0,082
	Crème	31,280	1,9020	0,181	0,99	0,363
Monomoléculaire	Gel	13,420	3,2840	0,131	0,99	0,071
	Crème	41,673	31,417	0,056	0,99	0,142
Weibull	Gel	21,790	0,7730	0,026	0,57	0,623
	Crème	96,550	0,1150	0,392	0,78	2,832

Tableau 5: Approche mathématique des essais de Fluage

Modèle	Préparation	a	b	c	Corrélations	Ecart-types
Exponentiel	Gel	88,54	-0,0095		0,87	6,059
	Crème	13,47	-0,137		0,34	3,930
Gompertz	Gel	580,4	-0,008	-0,0042	0,85	6,790
	Crème	279,4	-0,011	-0,0037	0,33	4,105
Logistique	Gel	11154	125	-0,0095	0,87	6,253
	Crème	19945	1481	-0,0137	0,34	4,045
Monomoléculaire	Gel	561,1	474,2	-0,0010	0,82	7,560
	Crème	239,6	226,6	-0,0004	0,29	4,200
Weibull	Gel	99,032	2,513	-0,2980	0,99	1,667
	Crème	27,821	0,628	-0,2030	0,99	0,369

Tableau 6: Approche mathématique des essais de Relaxation

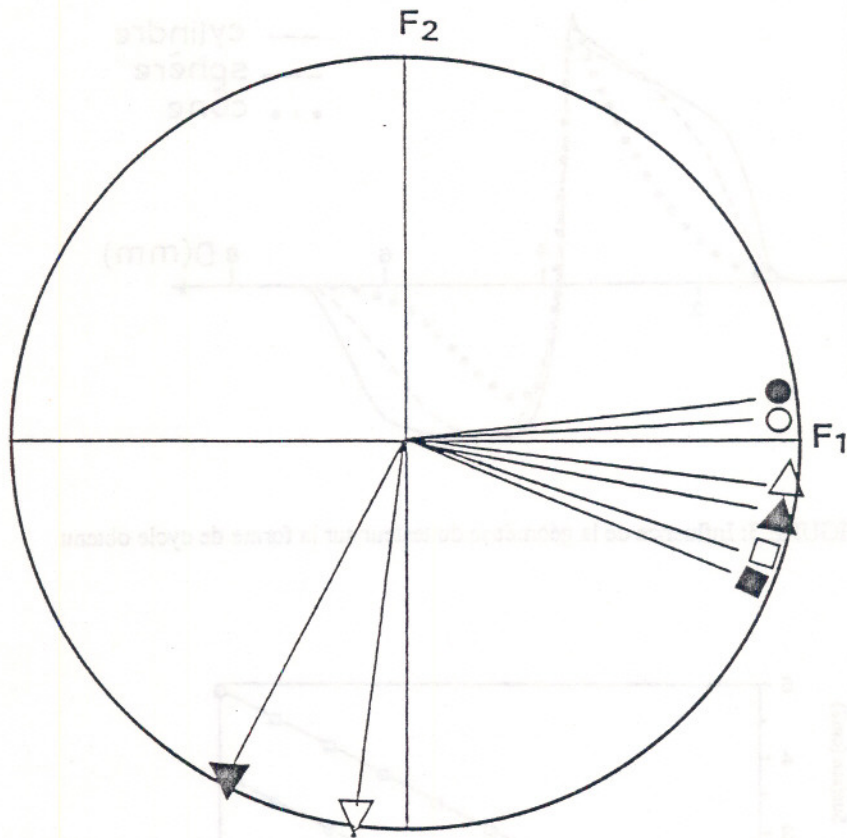


FIGURE 1

Légende	Force	S1	S2	S3
V = 4 mm/s	□	△	▽	○
V = 0,4 mm/s	■	▲	▼	●

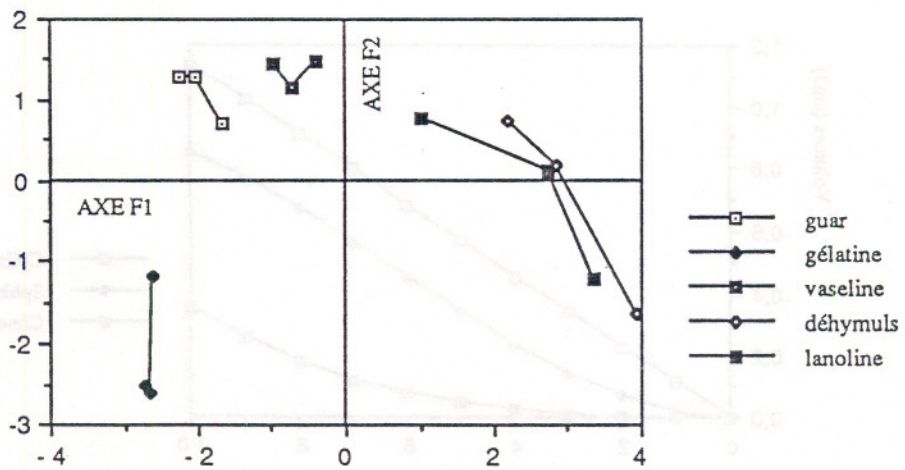


Figure 2: Analyse en Composantes Principales

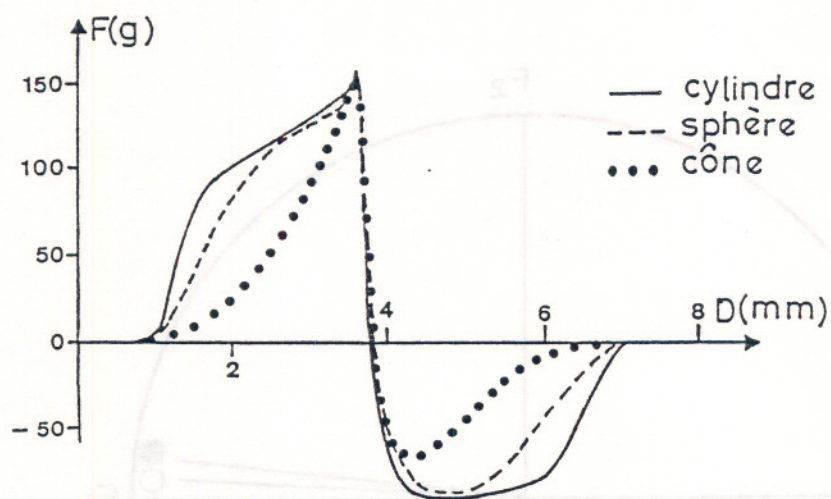


FIGURE 3: Influence de la géométrie du testeur sur la forme de cycle obtenu

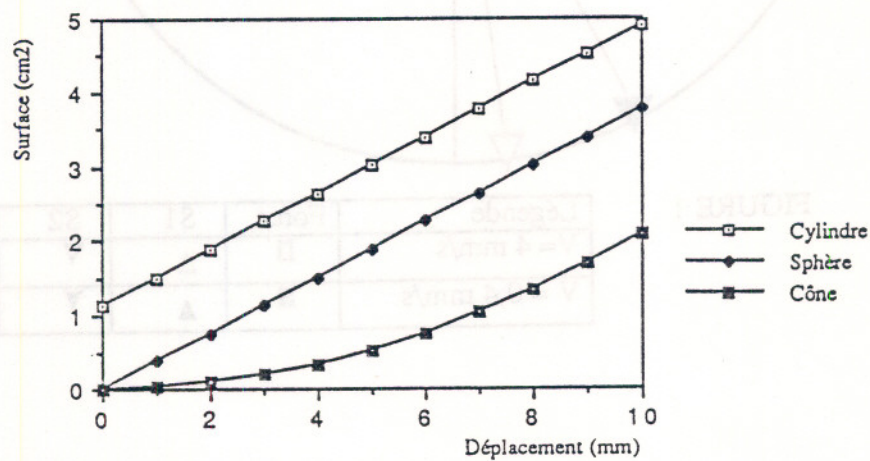


Figure 4a: Surface de contact des testeurs en fonction de l'enfoncement

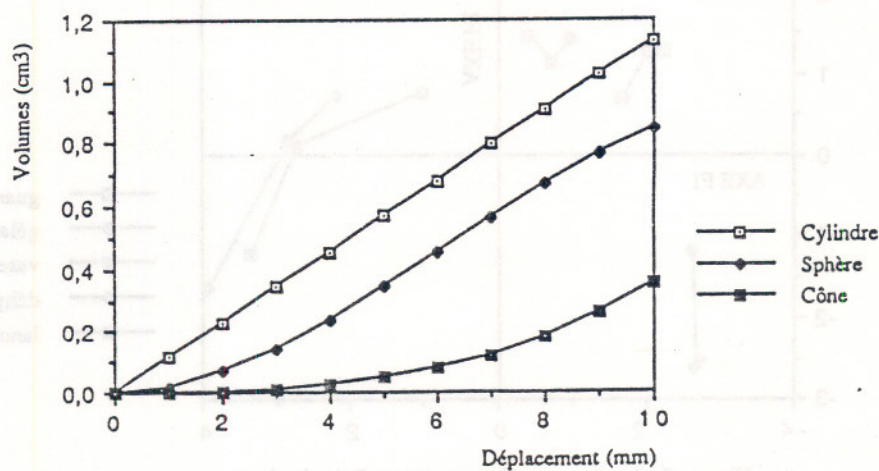


Figure 4b: Variation des volumes de contact des différents testeurs

CYCLE NORMAL	
CONDITIONS OPERATOIRES	RESULTATS
Vitesse de descente (mm/s) : 4.0	Force maximale (g) : 51.0
Vitesse de montée (mm/s) : 4.0	Force minimale (g) : -7.0
Course (mm) : 10.0	Surface descente (g x mm) : 295.0
Forme plongeur : cylindrique	Surface remontée sup (g x mm) : 165.0
Diamètre plongeur : 12.0	Surface remontée inf (g x mm) : 48.0
	Pente début (g/mm) : 6.2
	Pente fin (g/mm) : 5.1
	Force résiduelle à zéro (g) : 6.3
	Force résiduelle à "course" (g) : 3.9

CYCLE INVERSE	
RESULTATS	
Surface (g x mm) :	178.0
Rapport (sup/inf) :	2.70

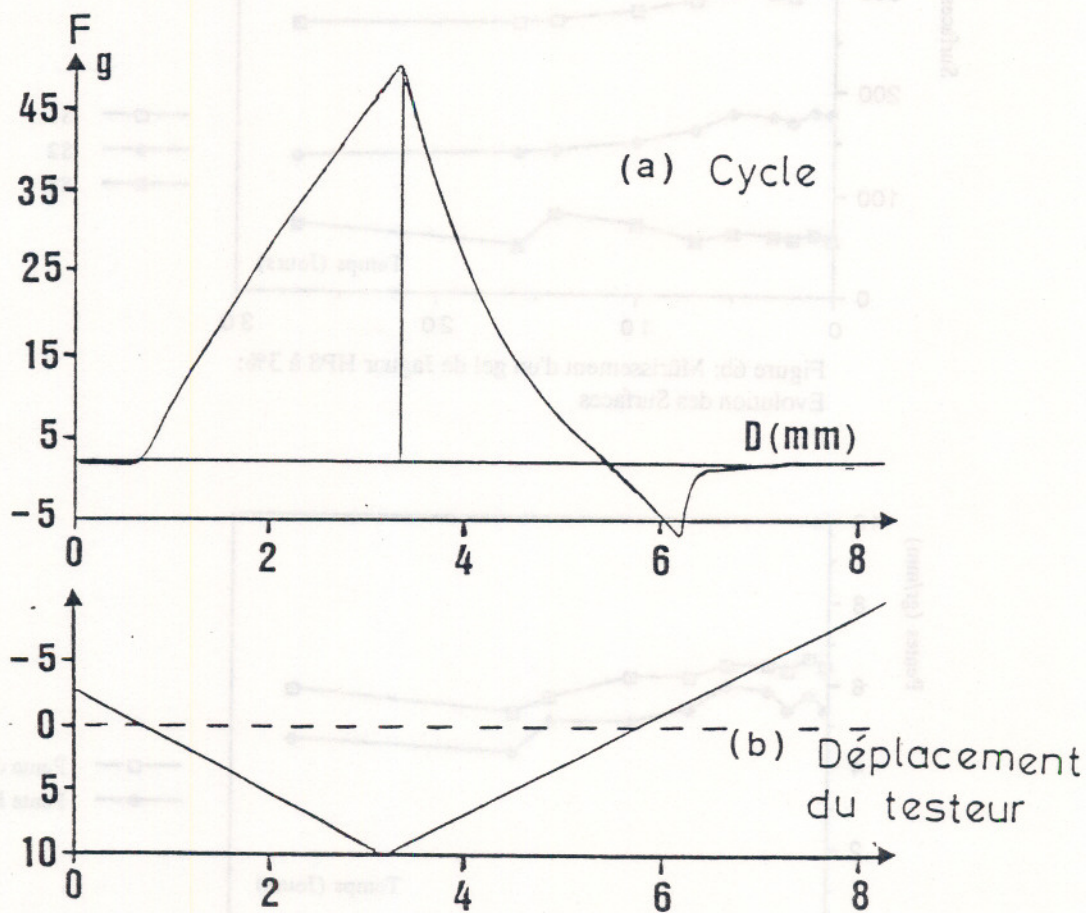


FIGURE 5: Etude du mûrissement d'un gel
 Bulletin d'Analyse et forme de cycle obtenu

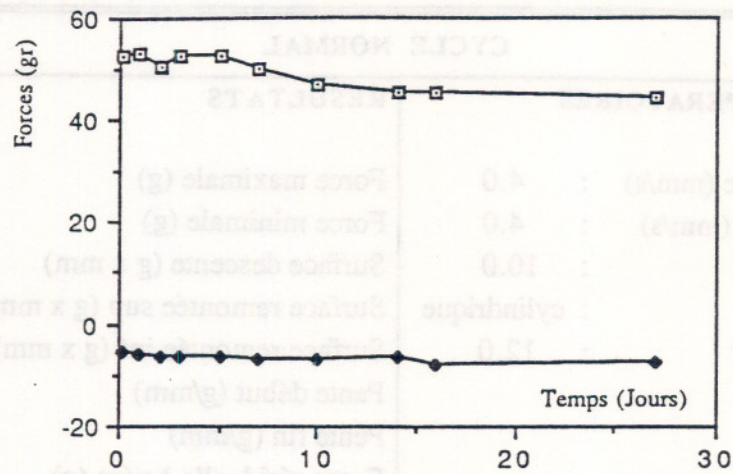


Figure 6a: Mûrissement d'un gel de Jaguar HP8 à 3%:
Evolution des Forces

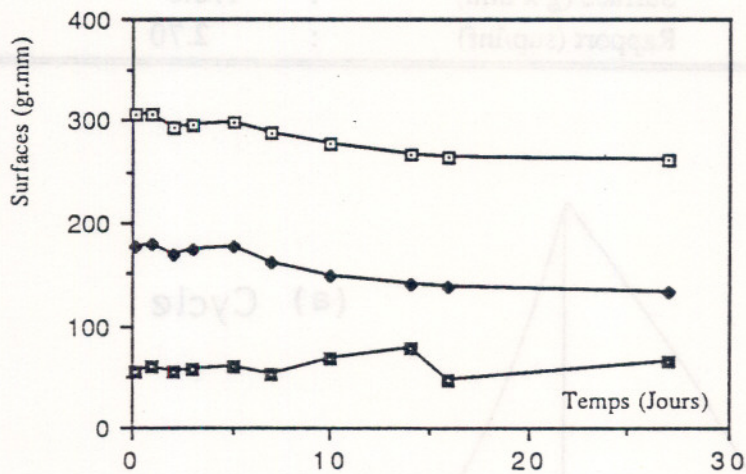


Figure 6b: Mûrissement d'un gel de Jaguar HP8 à 3%:
Evolution des Surfaces

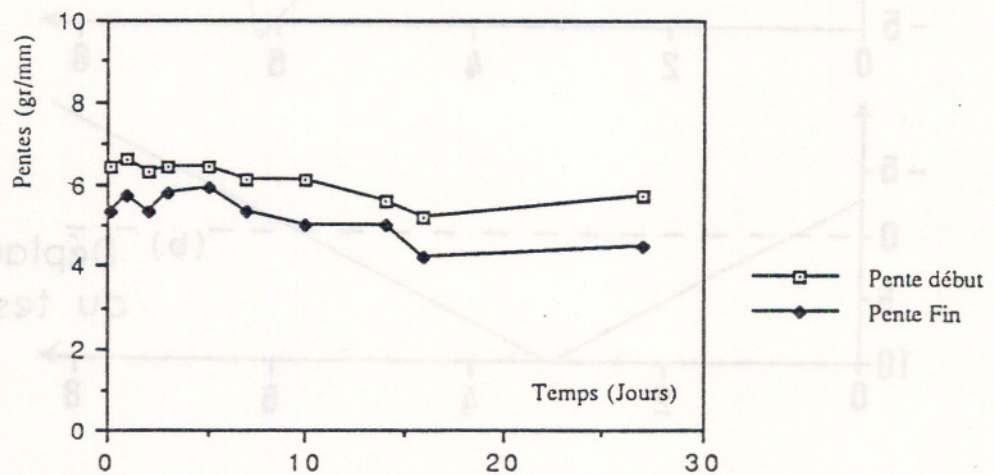


Figure 6c: Mûrissement d'un gel de Jaguar HP8 à 3%:
Evolution des Pentes

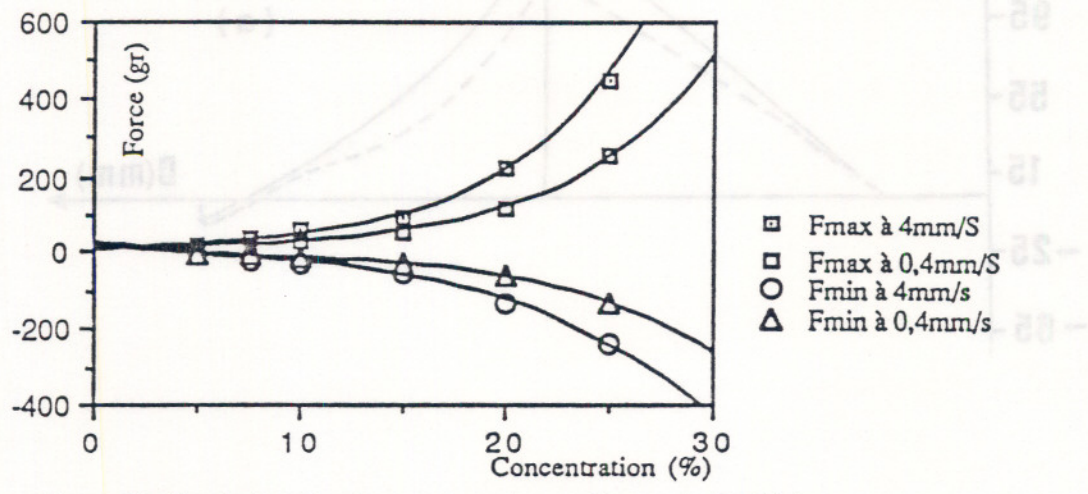


Figure 7a: Evolution des forces pour des cycles sur le TESAI

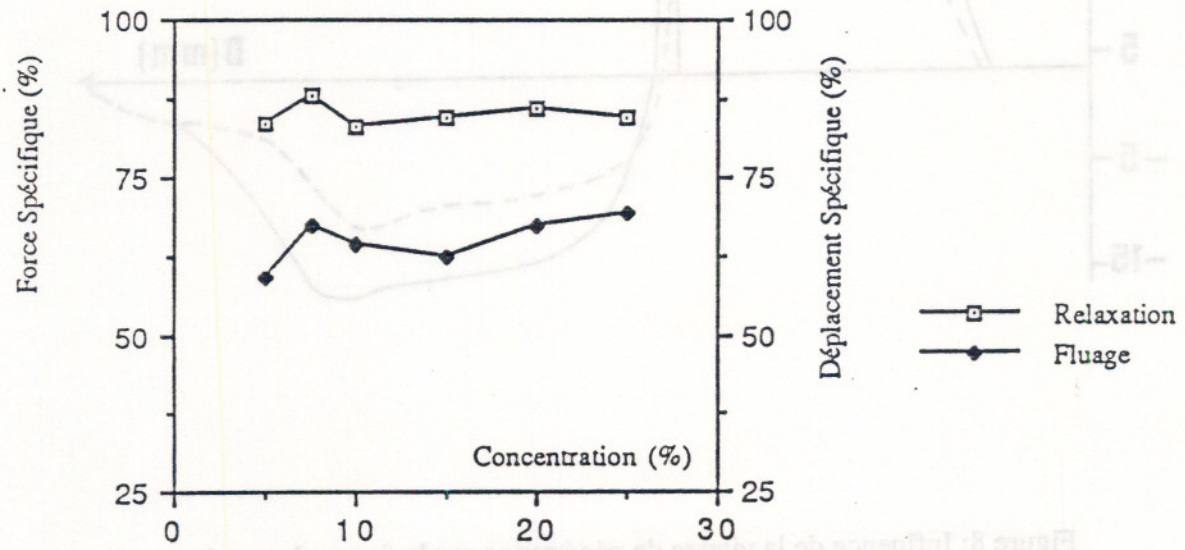


Figure 7b: Courbes de Relaxation et de Fluage pour le TESAL

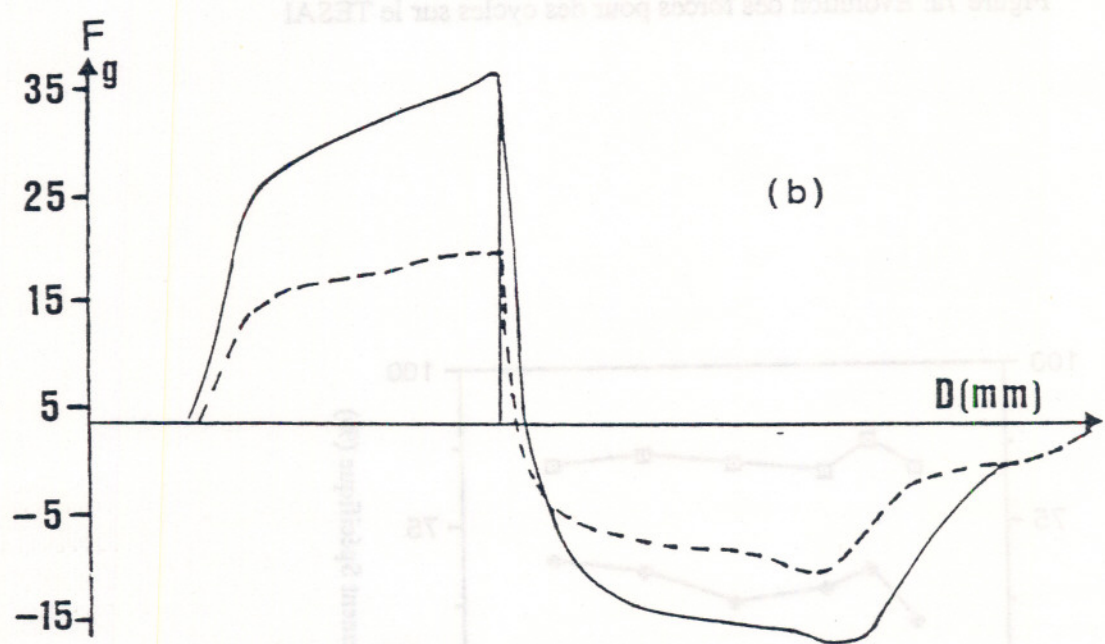
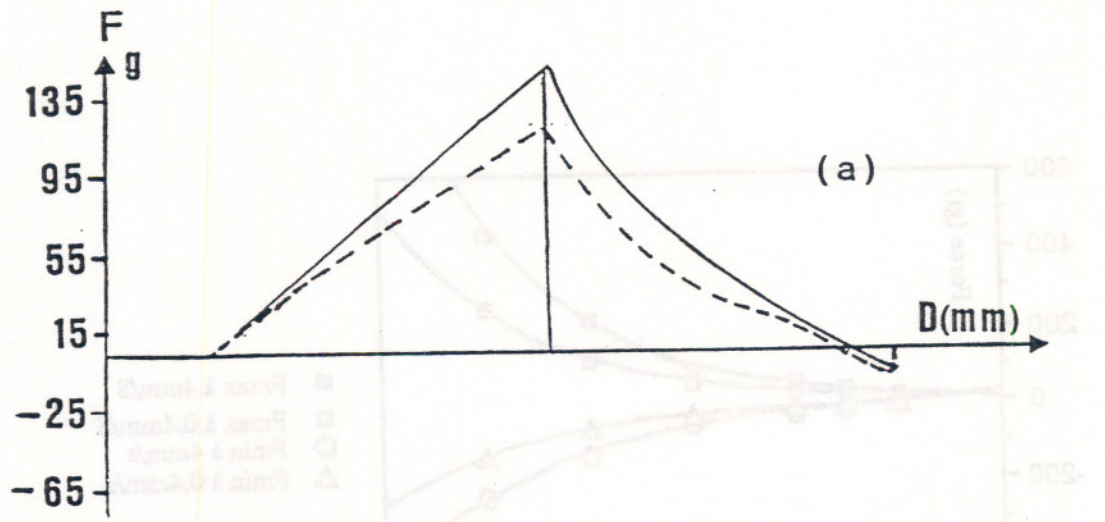


Figure 8: Influence de la vitesse de pénétration sur la forme des cycles
 a) gel b) crème ----- 4 mm/s ----- 0,4 mm/s

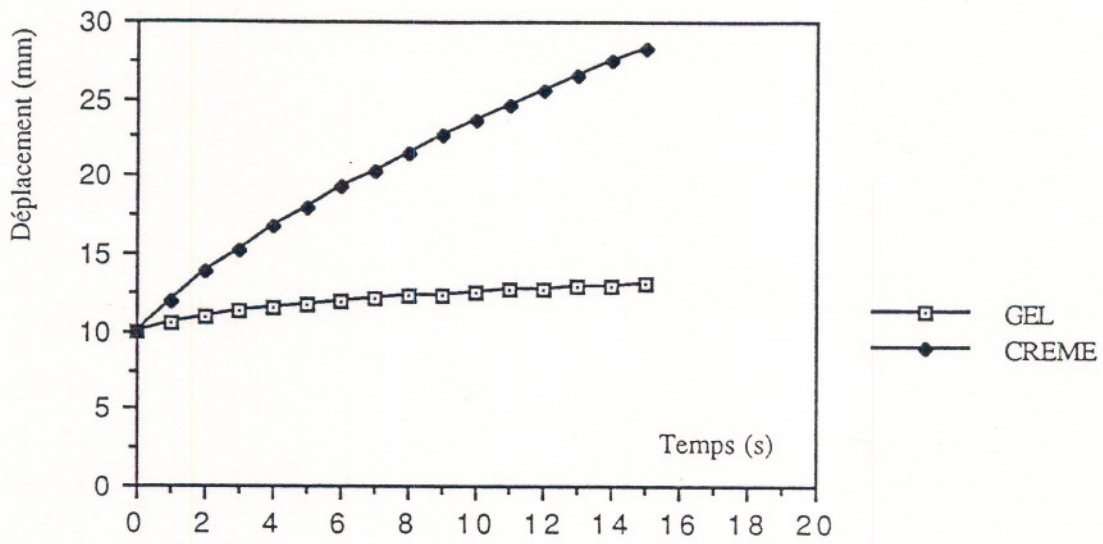


Figure 9- Fluage: Evolution du Déplacement en fonction du Temps

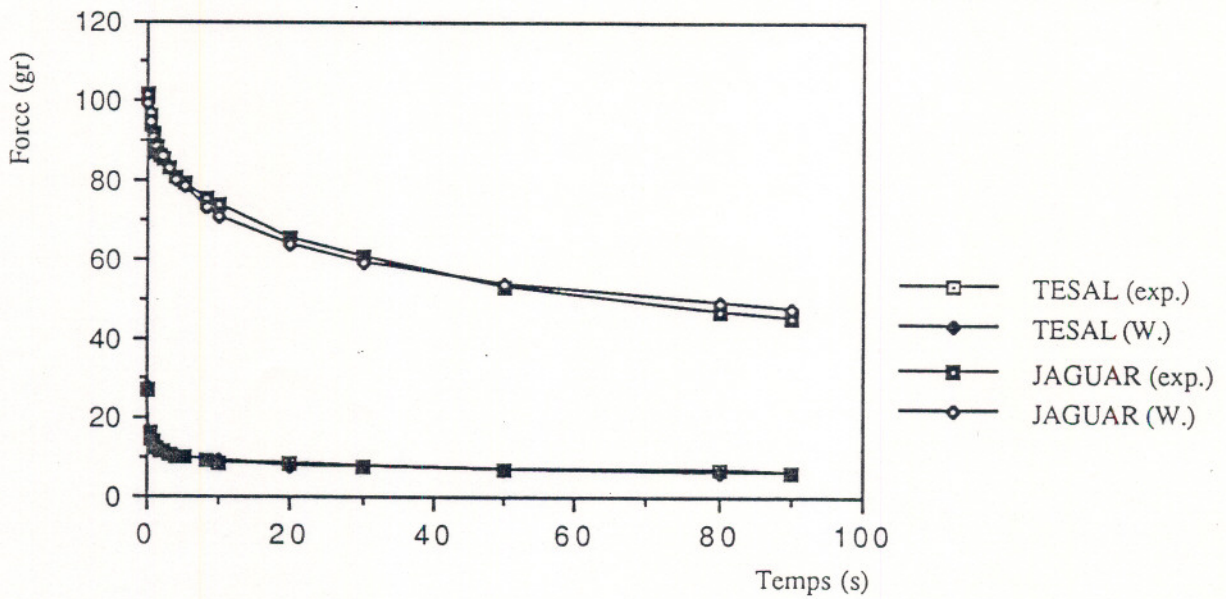


Figure 10- Relaxation: Evolution de la Force en fonction du Temps

DETERMINATION DE LOIS DE COMPORTEMENT DE CERTAINS MILIEUX HETEROGENES PAR DES TECHNIQUES D'HOMOGENEISATION

G. Maurice et R. Kouitat

Laboratoire de Science et Génie des Surfaces

Ecole des Mines de Nancy, Parc de Saurupt, 54042 Nancy cedex (France)

Résumé: On met en évidence la nature différente de divers problèmes d'homogénéisation de structures périodiques avec ou sans trous, selon le type de conditions aux interfaces. Quelques exemples en dimension 1 mettent en évidence les techniques de résolution. Nous examinons ensuite les problèmes en dimension 2 et 3. Les méthodes numériques associées sont présentées avec quelques exemples numériques de résolution.

Summary: We place in a prominent position the different nature of homogenization problems for periodic medias with or without holes, according to the interface conditions. Some examples in dimension 1 suggest and show the technics of resolution. Then we examine the problems in dimension 2 or 3. The associated numerical methods are presented with some numerical examples of resolution.

I INTRODUCTION

Lorsqu'un matériau hétérogène est constitué d'une juxtaposition "harmonieuse" de plusieurs matériaux, le mélange étant si intime qu'on ne peut distinguer les constituants entre eux à l'échelle d'observation choisie, on peut parler de matériau homogène équivalent. Diverses méthodes permettent de déterminer ce comportement équivalent à partir de celui de chacun des composants et des conditions interfaciales; ce sont les méthodes d'homogénéisation.

Les méthodes d'homogénéisation des milieux hétérogènes présentées dans cet article fournissent la forme générale limite des équations d'équilibre dans laquelle on identifie la loi de comportement du milieu homogène équivalent. La détermination de la liaison contrainte déformation dépendant de la connaissance de la répartition des constituants, des conditions interfaciales et parfois des conditions aux limites imposées à l'échantillon, n'est donc accessible que par l'intermédiaire des solutions d'équations

aux dérivées partielles. Des méthodes numériques sont donc nécessaires pour estimer la loi de comportement du milieu homogénéisé.

Parmi les méthodes d'homogénéisation classiques, on peut citer les méthodes de prise de moyenne développées par P.M.Suquet [1], J.L. Lions et E. Sanchez-Falencia [2],

Ces approches nécessitent la détermination d'un volume élémentaire représentatif sur lequel on effectue la moyenne de certaines grandeurs caractéristiques du problème. Elles ne nécessitent a priori pas d'hypothèses sur la répartition des diverses phases. Cependant pour avoir accès à une stratégie de reconnaissance de la loi de comportement homogénéisée certaines d'entre elles nécessitent l'hypothèse de répartition périodique des constituants, une période correspondant à un volume élémentaire représentatif. Parmi ces méthodes seules les méthodes directes de l'énergie de J.L. Lions et L. Tartar permettent d'aborder les problèmes non linéaires de manière systématique.

Une autre démarche consiste à considérer la répartition des divers constituants du milieu comme aléatoire ou tout au moins sans hypothèse a priori. Ces méthodes ont été développées par É.Kroner[3], M. Berveiler et A. Zaoui [4], (méthodes self consistantes) et F. Gilbert [5], Marle[6], (changement d'échelle par convolution spatiale). Divers auteurs ont utilisés ces méthodes pour rendre compte du comportement de matériaux multiphasés, en particulier pour les sols et les roches. On peut citer J.L. Auriault, M. Berveiler, M.A. Biot [7], , D. Caillerie [8], , F. Gilbert, R. Hill [9], etc.

Toutes les méthodes utilisant les prises de moyenne conduisent plus ou moins directement à une équation d'équilibre du milieu équivalent à partir de laquelle on peut identifier plus ou moins directement la loi de comportement équivalente par des méthodes numériques. Cette loi dépend du type de volume de référence choisi et de la manière d'effectuer la moyenne, elle représente donc plus ou moins bien le comportement équivalent. La méthode de J.L. Lions et L.Tartar et la méthode de développement asymptotique (échelles multiples) donnent le comportement équivalent lorsque la taille des divers composants tend vers 0, c'est à dire lorsqu'on a un milieu dans lequel les diverses phases sont indiscernables.

En général, le milieu étudié n'apparaît pas, à l'échelle où l'on l'observe, comme un mélange intime de divers constituants indiscernables. Son comportement diffère alors du comportement homogénéisé limite et on est conduit à faire appel à des correcteurs, qui ajoutés à la solution permettent d'ajuster le modèle limite sur le comportement réel. En particulier la méthode des échelles multiples fournit la solution sous forme de développement asymptotique dont le premier terme correspond au milieu homogénéisé limite, les termes suivants étant des correcteurs.

Il est à noter que les méthodes d'homogénéisation n'ont d'intérêt que pour les matériaux finement composés. Le comportement de ces matériaux ne peut être appréhendé directement par les méthodes numériques car les très rapides variations spatiales des constituants conduisent à des variations de gradients spatiaux si élevés que des calculs directs sur ordinateur deviennent impossibles. Un passage à la limite (homogénéisation) conduit alors à une équation constitutive ne présentant plus ces oscillations rapides et pouvant donc être traitée sur ordinateur.

Les matériaux grossièrement composés à l'échelle d'observation peuvent être par contre modélisés directement par la mécanique des milieux continus [10]. Entre ces deux extrêmes les correcteurs permettent d'ajuster plus ou moins parfaitement le comportement réel à partir du comportement équivalent. On mesure ici l'importance de la notion d'échelle. De grosses inclusions peuvent très bien être considérées comme petites à l'échelle d'observation choisie si le milieu n'est pas trop chaotique, par contre de très petites inclusions doivent parfois être considérées comme grandes à l'échelle retenue si le milieu considéré est si désordonné qu'on est obligé de descendre à une très petite échelle pour pouvoir appréhender l'essence de la structure. A ce sujet on pourra consulter C. Huet[11].

II POSITION DU PROBLEME ET PLAN DE L'ARTICLE

L'objet de ce travail est d'apporter une réponse pratique à la question de la détermination de la loi de comportement de milieux constitués de plusieurs composants "intimement liés", l'un des composants pouvant être des trous. Plus précisément nous nous proposons de répondre à des questions du type :

- Comment se comporte un milieu formé de divers composants connaissant séparément la loi de comportement de chacun d'entre eux.
- Comment se comporte un milieu troué constitué d'un matériau donné.

Comme on l'a fait remarquer au paragraphe précédent, la réponse dépend du degré d'intimité du mélange et de la nature des liaisons entre les divers composants, de la forme de chacune des phases du mélange. Pour un mélange très intime, la méthode d'homogénéisation conduit au modèle homogène équivalent rendant compte de manière très fine du comportement réel. Pour un mélange un peu moins intime des correcteurs permettront de corriger ce modèle homogène équivalent afin de mieux l'adapter au comportement réel. Pour un mélange très grossier on ne peut plus parler de milieu homogène équivalent, le comportement réel doit alors être étudié directement par la mécanique des milieux continus.

Nous nous intéressons plus particulièrement dans cet article aux techniques d'homogénéisation pour les **structures périodiques** reposant sur une théorie mathématique **constructive** très efficace. Les résultats obtenus par ces méthodes sont d'excellente qualité et

différent en général peu des résultats obtenus par d'autres méthodes plus empiriques donc moins constructives s'appliquant éventuellement aussi à des structures plus désordonnées. D'une manière systématique le comportement homogène équivalent sera obtenu comme le résultat de quatre étapes distinctes:

- On décrit le comportement de la structure sous la forme d'équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites traduisant la conservation de certaines quantités [12] dépendant d'un ou plusieurs petits paramètres rendant compte de la répartition plus ou moins intime des divers constituants du milieu .
- On détermine la limite de ces équations lorsque ces petits paramètres tendent vers 0.
- On caractérise (en général par un nouveau problème aux dérivées partielles) la loi de comportement du milieu homogène équivalent à partir de ces équations limites.
- On résout numériquement le problème de caractérisation du milieu homogène équivalent.

Dans cet article nous étudions d'abord des problèmes d'homogénéisation pouvant décrire quelques situations physiques unidimensionnelles. Bien que le cas de la dimension 1 ne permette pas de mettre en évidence toutes les facettes contenues dans la méthode d'homogénéisation, il permet d'en comprendre les grandes lignes et le déroulement général transposable au cas multidimensionnel. Il présente de plus le grand avantage de pouvoir accéder à des solutions analytiques, situation impossible pour les dimensions supérieures.

Nous présentons ensuite la caractérisation des problèmes d'homogénéisation multidimensionnels associée à des lois de comportement linéaires ou non linéaires pour des matériaux pouvant éventuellement présenter des trous.

Dans la partie suivante nous présentons les méthodes numériques permettant de résoudre l'équation aux dérivées partielles caractérisant le comportement homogénéisé.

Nous donnons enfin quelques exemples traités à l'aide des méthodes numériques précitées avant de présenter en annexe quelques résultats mathématiques d'homogénéisation liés aux développements de l'article.

1 II QUELQUES PROBLEMES D'HOMOGENEISATION A UNE DIMENSION.

A) Un problème unidirectionnel. Une fausse évidence dans les problèmes d'homogénéisation

On considère le problème mathématique suivant qui peut, par exemple, décrire la répartition de température dans une barre métallique infiniment mince ($n=1$) constituée de plusieurs matériaux répartis très finement périodiquement, la période de répartition étant ε . Pour fixer les idées nous supposons que la barre est constituée de deux matériaux de conductivités a_1 et a_2 constantes.



Figure représentant la barre

La répartition de température stationnaire u_ε dans la barre supposée infiniment mince de longueur l soumise à une densité de température linéique $f(x)$ et aux extrémités de laquelle on impose une température nulle vérifie:

$$\operatorname{div} A_\varepsilon u_\varepsilon = f \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(l) = 0$$

$$A_\varepsilon = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

$$a_{ij} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) = a_1 \quad \text{si } x \in [(2k+1)\varepsilon, (2k+2)\varepsilon] \quad \text{et} \quad a_2 \quad \text{si } x \in [(2k)\varepsilon, (2k+1)\varepsilon]$$

On peut montrer que si $f \in L^2[0, l]$, il existe une constante C , indépendante de ε telle que

$$\| u_\varepsilon \|_{H^1_0(\Omega)} \leq C$$

On peut alors extraire une sous suite, qu'on notera aussi u_ε par facilité, telle que u_ε converge faiblement dans $H^1_0[0, l]$ vers une limite u .

Sachant que $a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$ tend faiblement vers la moyenne de $a(y)$ sur une période, soit $\frac{a_1 + a_2}{2}$

lorsque ε tend vers 0 , on serait tenté de dire (par un passage hâtif à la limite) que l'équation constitutive du matériau homogène équivalent serait donnée par:

$$- \frac{a_1 + a_2}{2} Du = f \quad \text{et} \quad u(0) = u(l) = 0$$

Or nous allons voir qu'il n'en est rien. On montre un peu plus loin que l'équation constitutive du matériau homogène équivalent est donnée par

$$-aDu = f \quad \text{et} \quad u(0) = u(l) = 0$$

où la conductivité équivalente a vérifie $a = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2}$ ce qui est l'inverse de

la moyenne des inverses, quantité complètement différente de $\frac{a_1 + a_2}{2}$ puisque leur différence vaut $\frac{(a_1 - a_2)^2}{2 a_1 a_2}$. Cette "particularité", contraire à la première intuition, est due au fait que le produit

de deux limites faibles n'est pas la limite du produit.

La démonstration de ce résultat est assez simple. En effet la solution vérifie

$$\frac{d}{dx} u_\epsilon(x) = \frac{1}{a \left(\frac{x}{\epsilon} \right)} \int_0^x f(t) dt$$

Puisque $\int_0^x f(t) dt$ ne dépend pas de ϵ la limite faible de $\frac{d}{dx} u_\epsilon(x)$ est égale au produit de

la moyenne de $\frac{1}{a(y)}$ sur une période par $\int_0^x f(t) dt$ soit $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \int_0^x f(t) dt$

La limite faible u (au sens des distributions) de u_ϵ vérifie donc $-aDu = f$ et $u(0) = u(1) = 0$

où $a = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} = \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2}$ ce qui est exactement le résultat annoncé.

B) Un exemple unidimensionnel avec continuité de l'inconnue et de la contrainte aux interfaces (loi linéaire)

On considère un milieu continu bidimensionnel stratifié constitué de deux matériaux comme l'indique la figure ci dessous. Pour fixer les idées nous avons représenté un nombre relativement faible de strates qui pour certaines applications peut être beaucoup plus élevé.

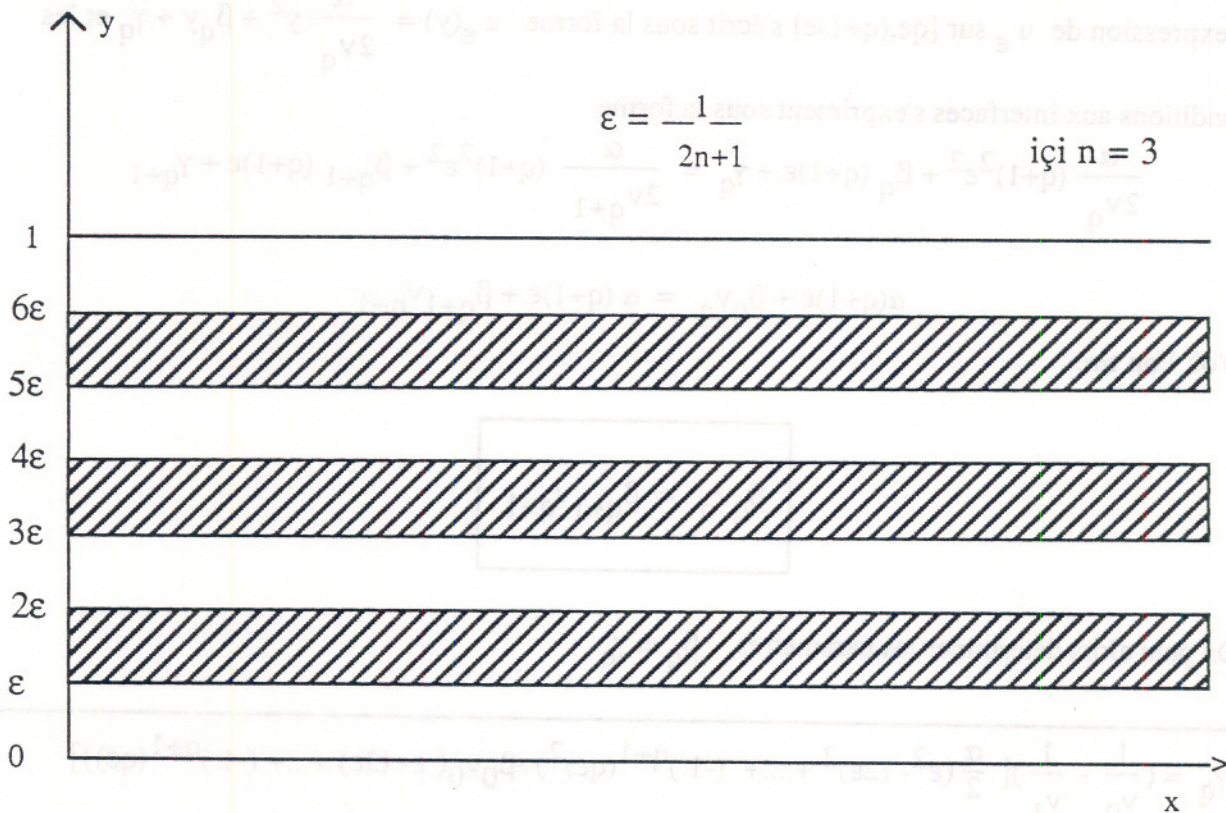


Figure 1

Considérons dans ce milieu l'équation différentielle (aux dérivées partielles dans le cas général)

$$\frac{d}{dy} \left(v_q \frac{d}{dy} u_\varepsilon(y) \right) = \alpha \quad y \in [q\varepsilon, (q+1)\varepsilon], \quad q=0, \dots, 2n$$

$$u_\varepsilon(0) = u_A \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(1) = u_B$$

$$u_\varepsilon \text{ continue en } q\varepsilon, \quad q=1, \dots, 2n$$

$$v_q \frac{d}{dy} u_\varepsilon \text{ continue en } q\varepsilon, \quad q=1, \dots, 2n$$

Ces équations peuvent modéliser par exemple l'écoulement laminaire stationnaire de couches de fluides visqueux incompressibles non miscibles de viscosité $\nu \left(\frac{y}{\varepsilon} \right)$ soumises à un gradient

de pression a , où n est une fonction périodique de période ε prenant des valeurs constantes égale à ν_1 ou ν_2 sur chaque phase. Elle peuvent aussi modéliser la déformation d'un solide élastique incompressible ou éventuellement la distribution de chaleur dans des conditions expérimentales évidentes.

L'expression de u_ε sur $[q\varepsilon, (q+1)\varepsilon]$ s'écrit sous la forme $u_\varepsilon(y) = \frac{\alpha}{2v_q} y^2 + \beta_q y + \gamma_q$ et les

conditions aux interfaces s'expriment sous la forme

$$\frac{\alpha}{2v_q} (q+1)^2 \varepsilon^2 + \beta_q (q+1)\varepsilon + \gamma_q = \frac{\alpha}{2v_{q+1}} (q+1)^2 \varepsilon^2 + \beta_{q+1} (q+1)\varepsilon + \gamma_{q+1}$$

$$\alpha(q+1)\varepsilon + \beta_q v_q = \alpha(q+1)\varepsilon + \beta_{q+1} v_{q+1}$$

D'où l'on tire

$$\beta_q v_q = \beta_{q+1} v_{q+1}$$

On peut alors déterminer les paramètres β_q et γ_q

$$\begin{aligned} \gamma_q &= \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right) \left[\frac{\alpha}{2} (\varepsilon^2 - (2\varepsilon)^2 + \dots + (-1)^{q+1} (q\varepsilon)^2) + \beta_0 v_0 (\varepsilon - (2\varepsilon) + \dots + (-1)^{q+1} (q\varepsilon)) \right] \\ &= \frac{(-1)^{q+1}}{2} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} \right) \left[\frac{\alpha}{2} \varepsilon^2 q(q+1) + \beta_0 v_0 \varepsilon \left(q + \frac{(-1)^{q+1} + 1}{2} \right) \right] + \gamma_0 \end{aligned}$$

$$\beta_q = \frac{v_0}{v_q} \beta_0$$

On peut maintenant déterminer β_0

$$\beta_0 = \frac{\alpha}{2v_0} + \frac{\alpha\varepsilon}{4} \frac{\left(1 - \frac{v_0}{v_1}\right)}{1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_0}{v_1}\right)(1 - \varepsilon)} - u_A + u_B$$

et si on considère la limite (qui a lieu fortement) lorsque ε tend vers 0

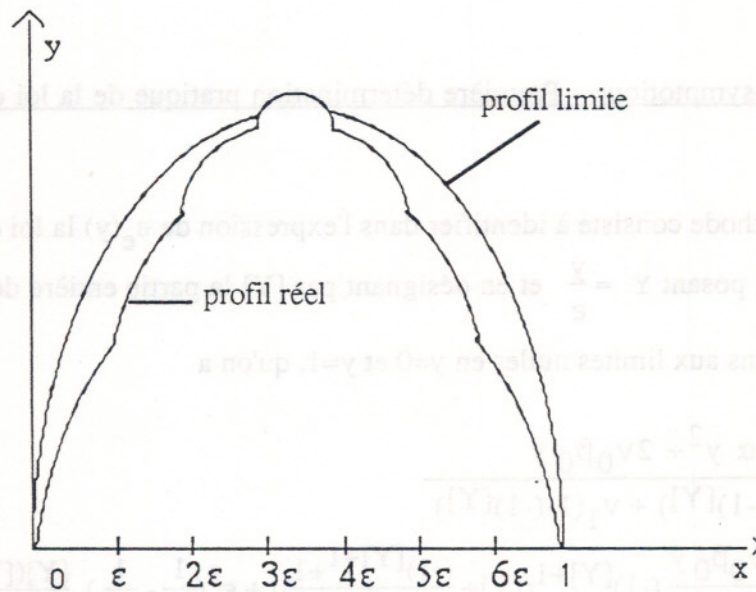
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_0 = -\frac{\alpha}{2v_0} - u_A + u_B$$

La convergence de u_ε n'a lieu que faiblement, et on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_q = A \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_q = -\frac{\alpha}{2} \text{moyenne} \left(\frac{1}{v} \right) - (u_A - u_B)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(y) = \frac{\alpha}{2} \text{moyenne} \left(\frac{1}{v} \right) (y^2 - y) - (u_A - u_B) y + u_A$$

La figure ci dessous représente l'allure du profil d'écoulement réel et le profil limite pour $A=B=0$.



L'expression du profil d'écoulement limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(y) = \frac{\alpha}{2} \text{moyenne} \left(\frac{1}{v} \right) (y^2 - y) - (u_A - u_B) y + u_A$$

permet de reconnaître celui d'un fluide Newtonien de viscosité $\frac{1}{M(\frac{1}{v})}$ s'écoulant entre deux

plans parallèles $y=0$ et $y=1$ soumis à des vitesses respectives de A et B .

La loi de comportement homogénéisée $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$ reliant contraintes et déformations sera donc donnée par:

$$\lim [v_q \frac{d}{dy} u_\varepsilon(y)] = \sigma = \Phi(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{E}}{M(\frac{1}{v})} \quad \text{où} \quad \frac{1}{M(\frac{1}{v})} = \frac{2}{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}}$$

Ce type de résultat, obtenu ici directement à partir de l'expression du champ de vitesse n'est naturellement pas toujours aussi facilement accessible pour les problèmes en dimension supérieure à 1. Dans ce cas, les méthodes analytiques sont, en général, inefficaces et la forte variation des valeurs de ce champ, due à la rapide variation des paramètres mécaniques du mélange avec la variable ε , ne permet pas non plus de calcul numérique direct sur ordinateur. Il faut donc avoir recours à des méthodes de recherche de comportement équivalent. Nous présentons sur cet exemple en dimension 1 la manière dont deux d'entre elles peuvent être conduites: le développement asymptotique et la méthode de l'énergie. Naturellement nous avons cherché à dégager la stratégie générale même si sur un exemple de dimension 1 comme celui-ci, les calculs peuvent être explicités contrairement au cas de la dimension supérieure.

Développement asymptotique - Première détermination pratique de la loi de comportement homogénéisée

Une première méthode consiste à identifier dans l'expression de $u_\varepsilon(y)$ la loi de comportement homogénéisée. En posant $Y = \frac{y}{\varepsilon}$ et en désignant par $[Y]$ la partie entière de Y , on remarque pour des conditions aux limites nulles en $y=0$ et $y=1$, qu'on a

$$u_\varepsilon(y) = \frac{\alpha y^2 + 2v_0\beta_0 y}{v_0(1+(-1)^{[Y]}) + v_1(1-(-1)^{[Y]})} + \varepsilon\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\right) \left(\frac{v_0\beta_0 y}{2} (-1)^{[Y]+1} \left([Y] + \frac{(-1)^{[Y]+1} + 1}{2}\right)\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\right) \frac{[Y]([Y]+1)(-1)^{[Y]+1}}{2}$$

Dans ce développement on reconnaît la forme

$$u_\varepsilon(y) = \xi_0(y, [Y]) + \varepsilon\xi_1(y, [Y]) + \varepsilon^2\xi_2(y, [Y])$$

où

$$\xi_0(y, Y) = \frac{\alpha y^2 + 2v_0\beta_0 y}{v_0(1+(-1)^{[Y]}) + v_1(1-(-1)^{[Y]})}$$

$$\xi_1(y, Y) = \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\right) \left(\frac{v_0\beta_0 y}{2} (-1)^{[Y]+1} \left([Y] + \frac{(-1)^{[Y]+1} + 1}{2}\right)\right)$$

$$\xi_2(y, Y) = \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1}\right) \frac{[Y]([Y]+1)(-1)^{[Y]+1}}{2}$$

La limite de cette expression a lieu faiblement vers $\frac{1}{2} \int_0^2 \xi_0(y, Y) dY$.

On remarque que $\xi_0(y, Y) = \frac{\frac{\alpha}{2} y^2 + v_0 \beta_0 y}{v_0}$ ou bien $\frac{\frac{\alpha}{2} y^2 + v_0 \beta_0 y}{v_1}$ selon la

position de y , quantité qui n'est pas une fonction continue à l'interface. Bien que la limite de u_ϵ soit dans $H^1(0,1)$ la convergence ne peut pas avoir lieu dans $H^1(0,1)$ puisque u_ϵ n'est jamais dans cet espace. On remarque aussi que $\xi_0(y, \frac{y}{\epsilon})$ ne vérifie pas les conditions aux limites (interfaces) contrairement à u_ϵ .

Le processus que nous venons de décrire nécessite la connaissance de la solution de l'équation aux dérivées partielles. Pour palier à cet inconvénient on utilise une autre méthode plus systématique en recherchant directement au travers de l'équation aux dérivées partielles

$$u_\epsilon(y) = u_0(y, [Y]) + \epsilon u_1(y, [Y]) + \epsilon^2 u_2(y, [Y]) + \dots$$

On peut écrire l'opérateur

$$\frac{d}{dy} \left(v_q \frac{d}{dy} u_\epsilon(y) \right)$$

sous la forme

$$\frac{d}{dy} \left(v(Y) \frac{d}{dy} u_\epsilon(y) \right)$$

où $Y = \frac{y}{\epsilon}$, v est une fonction périodique valant v_0 pour $y \in [2q\epsilon, (2q+1)\epsilon]$ et v_1 pour $y \in [(2q-1)\epsilon, 2q\epsilon]$.

On peut donc développer l'opérateur selon les puissances de ϵ . Les dérivées par rapport à y et Y sont liées par:

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y}$$

Comme on peut écrire $u_\epsilon(y)$ encore

$$u_\epsilon(y) = u_0(y, Y) + \epsilon u_1(y, Y) + \epsilon^2 u_2(y, Y) + \dots$$

on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(v(Y) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \right) (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) \right) = \alpha$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2} A_0 + \frac{1}{\epsilon} A_1 + A_2 \right) (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) = \alpha$$

où $A_0 = \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \right)$, $A_1 = \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial y} \right) + v(Y) \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y}$, $A_2 = v(Y) \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$

En identifiant les termes selon les puissances de ε ; on obtient

$$\text{termes en } \frac{1}{\varepsilon^2} \quad A_0(u_0) = 0$$

$$\text{termes en } \frac{1}{\varepsilon^1} \quad A_0(u_1) + A_1(u_0) = 0$$

$$\text{termes en } \frac{1}{\varepsilon^0} \quad A_0(u_2) + A_1(u_1) + A_2(u_0) = \alpha$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_0(y, Y) \right) = 0, \quad u_0(y, Y) \text{ p\'eriodiquable de p\'eriodes 2 par rapport \`a } Y$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_1(y, Y) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial y} u_0(y, Y) \right) = 0$$

$u_0(y, Y)$ et $u_1(y, Y)$ p\'eriodiquables de p\'eriodes 2 par rapport \`a Y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_2(y, Y) \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial y} u_1(y, Y) \right) \\ & + v(Y) \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_1(y, Y) + v(Y) \frac{\partial^2}{\partial^2 y} u_0(y, Y) = \alpha \end{aligned}$$

$u_1(y, Y)$, $u_1(y, Y)$ et $u_2(y, Y)$ p\'eriodiquables de p\'eriodes 1 par rapport \`a Y

La r\'esolution du premier probl\eme entra\ene que $u_0(y, Y)$ p\'eriodiquable ne d\'epend pas de Y

$$u_0(y, Y) = u_0(y)$$

La seconde \xe9quation donne

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_1(y, Y) \right) = - \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \right) \frac{\partial}{\partial y} u_0(y)$$

On peut la r\'esoudre en consid\'erant d'abord χ solution p\'eriodique de:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y) \right) = - \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \right)$$

la solution de l'\xe9quation compl\ete \xe9tant alors

$$u_1(y, Y) = \chi(Y) \frac{\partial}{\partial y} u_0(y) + \omega(y)$$

o\`u $\omega(y)$ est une fonction \`a priori quelconque \`a cette \xe9tape du calcul.

La derni\ere \xe9quation donne

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_2(y, Y) \right) \\ & = - \frac{\partial}{\partial Y} \left(v(Y) \frac{\partial}{\partial y} u_1(y, Y) \right) - v(Y) \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_1(y, Y) - v(Y) \frac{\partial^2}{\partial^2 y} u_0(y) + \alpha \end{aligned}$$

Or on sait qu'un problème du type

$$\frac{\partial}{\partial Y} (v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_2(y, Y)) = F(Y)$$

n'admet de solution périodique que si l'intégrale de la variable Y sur une période

$$\int_0^2 F(Y) dY = 0$$

En ce qui concerne notre problème cette condition s'exprime sous la forme suivante

$$\int_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial Y} (v(Y) \frac{\partial}{\partial y} u_1(y, Y)) + v(Y) \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_1(y, Y) + v(Y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0(y) \right] dY = \int_0^2 \alpha dY$$

ce qui compte tenu de la relation $u_1(y, Y) = \chi(Y) \frac{\partial}{\partial Y} u_0(y) + \omega(y)$ donne

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0(y) \int_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial Y} (v(Y) \chi(Y)) + \frac{\partial}{\partial Y} v(Y) \omega(y) + v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y) + v(Y) \right] dY = \int_0^2 \alpha dY$$

Mais, à cause de la périodicité, $\int_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial Y} (v(Y) \chi(Y)) \right] dY = \int_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial Y} (v(Y)) \right] dY = 0,$

$$\text{soit } \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0(y) \int_0^2 \left[v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y) + v(Y) \right] dY = \int_0^2 \alpha dY = 2\alpha$$

Le nouveau matériau réagit donc comme un matériau pour lequel

$$v = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y) + v(Y) \right] dY$$

On est ainsi amené à résoudre sur $[0, 2]$

$$\frac{\partial}{\partial Y} (v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y)) = - \frac{\partial}{\partial Y} (v(Y))$$

La fonction $v(Y)$ étant discontinue sur $[0, 2]$, on doit considérer cette équation successivement sur les intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$. On obtient $v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y) = v(Y) + C_i, i = 1, 2$. Le saut de discontinuité de $v(Y)$ en $Y = 1$ est égal à $v_1 - v_0$, il doit en être de même pour $v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y)$.

On a donc $-v_1 + C_1 - (-v_0 + C_0) = -(-v_1 + v_0)$ soit $C_1 = C_0$. On a aussi $\chi(Y) = -1 + \frac{C_i}{v(Y)} Y + D_i$. Puisque $\chi(Y)$ est défini à une constante près, on peut imposer $D_0 = 0$; ce

qui conduit en écrivant la périodicité sur $[0, 2]$ et la continuité en 1 à:

$$C_1 = C_0 = \frac{2}{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}}$$

Il s'en suit que $v(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \chi(Y) + v(Y) = C_0 = \frac{2}{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}}$ et, u_0 vérifie l'équation homogénéisée

suivante $\frac{2}{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0(y) = \alpha$ dans laquelle on reconnaît $M\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{2}{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1}}$

Méthode de l'énergie - Seconde détermination pratique de la loi de comportement homogénéisée

La nouvelle loi de comportement est

- indépendante des conditions aux limites A et B ainsi que du second membre α
- déterminée par la liaison entre $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dy} (v v_\varepsilon(y))$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dy} v_\varepsilon(y)$

On peut donc choisir des profils d'écoulements particuliers de sorte que les limites soient facilement calculables. On sait que si a est une fonction bornée et de période 1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \text{moyenne}(a) \text{ sur une période, faiblement.}$$

Vu la simplicité de l'expression de la limite, on aura intérêt à se placer dans des conditions expérimentales les plus simples compatibles ($\alpha=0$, conditions aux limites périodiques) pour déterminer la nouvelle loi de comportement.

Pour ce faire, considérons une fonction w de période ε et posons $\frac{d}{dy} h_\varepsilon(y) = \lambda + \frac{d}{dy} w\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, ce

qui correspond à $h_\varepsilon(y) = \lambda y + \varepsilon w\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = H\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$ où $H(Y) = \lambda Y + w(Y)$

On a naturellement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dy} h_\varepsilon(y) = \text{moyenne}\left(\frac{d}{dY} H(Y)\right) = \lambda$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(v \frac{d}{dy} h_\varepsilon(y)\right) = \text{moyenne}\left(v \frac{d}{dY} H(Y)\right)$$

Mais puisque h_ε doit vérifier l'équation différentielle

$$0 = \frac{d}{dy} \left(v \frac{d}{dy} h_\varepsilon(y)\right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{dY} \left(v \frac{d}{dY} H(Y)\right)$$

$$H(Y) = \lambda Y + W(Y), W \text{ périodique}$$

la solution de ce problème étant définie à une constante près, on peut imposer $\text{moyenne}(W) = 0$ pour avoir une solution unique.

La loi de comportement du matériau homogène équivalent peut donc être obtenue en résolvant le problème suivant dit de **localisation** de déformation (équivalent à la condition de Hill) :

- 1) On résout

$$\frac{d}{dY} \left(v \frac{d}{dY} H(Y) \right) = 0$$

$$H(Y) = \lambda Y + W(Y), \quad W \text{ et grad } W \text{ périodiques}$$

$$\text{moyenne} (W) = 0$$

-2) On détermine la loi de comportement du matériau homogène équivalent:
 contraintes = $F(\text{taux de déformation ou taux de vitesse de déformation})$
 est donnée par:

$$F(\lambda) = \text{moyenne} \left(v \frac{d}{dY} H(Y) \right)$$

Cette règle pour déterminer la loi de comportement homogénéisée correspond à une prise de moyenne pour un chargement périodique sur la cellule de base. Cette situation correspond à la situation réelle que l'on rencontre loin des bords du domaine tout entier, c'est à dire lorsque la non périodicité des conditions aux limites ne se fait plus sentir et que seule la périodicité du domaine prévaut.

C) Un exemple unidimensionnel avec trous et conditions de DIRICHLET aux interfaces - (Ecoulements en milieux poreux)

L'exemple que nous allons traiter maintenant concerne l'écoulement bidimensionnel d'un fluide Newtonien dans un milieu poreux constitué de fins canaux parallèles à une direction donnée. Le milieu peut être représenté de la même manière que dans l'exemple précédent. Les intervalles $(2p\epsilon, (2p+1)\epsilon)$ sont les seuls occupés par le fluide (figure 1) .

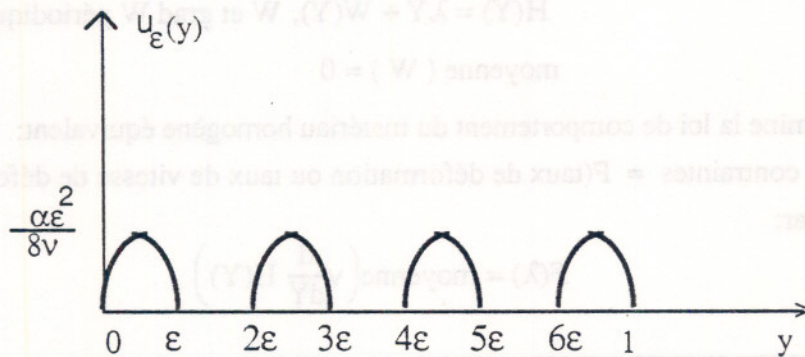
La vitesse de l'écoulement dans les zones non hachurées vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{d}{dy} \left(v \frac{d}{dy} u_{\epsilon}(y) \right) = \alpha \quad y \in [2q\epsilon, (2q+1)\epsilon], \quad q=0, \dots, n$$

$$u_\varepsilon(2q\varepsilon) = u_\varepsilon((2q+1)\varepsilon) = 0, \quad q=0, \dots, n$$

L'expression de u_ε sur $[2q\varepsilon, (2q+1)\varepsilon]$ s'écrivant sous la forme $u_\varepsilon(y) = \frac{\alpha}{2\nu} y^2 + \beta_{2q} y + \gamma_{2q}$, les conditions aux limites donnent

$$u_\varepsilon(y) = \frac{\alpha}{2\nu} (y - 2q\varepsilon)(y - (2q+1)\varepsilon) \quad \text{et} \quad u'_\varepsilon(y) = \frac{\alpha}{\nu} (y - (2q+1/2)\varepsilon)$$



On obtient donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_\varepsilon(y)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u'_\varepsilon(y) = 0$$

Contrairement au cas précédent, les conditions de Dirichlet imposées au bord des trous entraînent $\lim u_\varepsilon = 0$ et $\lim[\nu \, du_\varepsilon/dy] = 0$. Dans ces conditions, on ne peut plus définir d'opérateur limite à l'ordre 0. Il y a dégénérescence de l'opérateur initial vers un opérateur d'un type éventuellement différent. La nouvelle loi de comportement n'a, en principe, aucune raison d'être du même type que les lois initiales.

Mais

$$\frac{u_\varepsilon(y)}{\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2\nu} \left(\frac{y}{\varepsilon} - 2q \right) \left(\frac{y}{\varepsilon} - (2q+1) \right)$$

Si on pose $H(Y) = \frac{\alpha}{2\nu} Y(Y-1)$, on a $u_\varepsilon(y) = \varepsilon^2 H(\frac{y}{\varepsilon})$ sur $[0, \varepsilon]$, les valeurs sur les autres

intervalles étant déduites par périodicité.

On montre que dans $L^\infty(\mathbb{R})$ faible

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_\varepsilon(y)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 H(Y) dY = \frac{\alpha}{24\nu}$$

La dépendance de cette limite en α ne dépend que des données du problème et non pas de la solution. Si on note $A_\varepsilon u_\varepsilon = \alpha$ le problème de départ, on peut aussi l'écrire: $[\varepsilon^2 A_\varepsilon][u_\varepsilon/\varepsilon^2] = \alpha$, la dégénérescence de A_ε est compensée par le terme ε^2 de sorte que $\varepsilon^2 A_\varepsilon$ ne dégénère plus mais "converge" vers l'opérateur B tel que

$$B(-\alpha/24\nu) = \alpha$$

Comme pour l'exemple précédent, on peut mettre en évidence une stratégie qui pourra être reprise en dimension supérieure à 1, pour déterminer la nouvelle loi de comportement.

- On calcule H(Y), puis sa moyenne

Le calcul de H s'effectue ainsi: on remarque d'abord que $u_\varepsilon(y) = \varepsilon^2 H(\frac{y}{\varepsilon})$ et $\frac{d}{dy} = \frac{d}{\varepsilon dY}$

On résout pour $y \in [0, \alpha]$ ou $Y \in [0, 1]$

$$\frac{d}{dy} \left(\nu \frac{d}{dy} u_\varepsilon(y) \right) = \frac{d}{dY} \left(\nu \frac{d}{dY} H(Y) \right) = \alpha$$

$$H(0) = H(1) = 0$$

La nouvelle loi de comportement s'écrit

$$\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow u \text{ (vitesse de filtration)}$$

$$u = K \alpha = M \quad H = -\frac{\alpha}{24\nu}$$

On met en évidence un coefficient $\frac{1}{24\nu}$ de perméabilité du milieu. La partie solide peut être considérée comme un écoulement de viscosité infinie soumis à la même différence de pression. Pour pouvoir parler d'un écoulement de viscosité infinie il faut que $u(y) = 0$ dans la partie solide.

Développement asymptotique - Première détermination pratique de la loi de comportement homogénéisée

La première approche consiste, comme pour l'exemple précédent, à reconnaître dans l'expression de u_ε un développement du type $u_\varepsilon(y, Y) = u_0(y, Y) + \varepsilon u_1(y, Y) + \varepsilon^2 u_2(y, Y)$.

On obtient:

$$u_0(y, Y) = 0, u_1(y, Y) = 0 \text{ et } u_2(y, Y) = \frac{\alpha}{2\nu} (Y - 2[Y]) (Y - 2[Y] - 1) \left(-\frac{1 + (-1)^{[Y]}}{2\nu} \right)$$

On a la convergence faible de $\frac{u_\varepsilon}{\varepsilon^2}$ et donc celle de $u_2(Y)$ dans L^2 vers $-\frac{\alpha}{24\nu}$

Il est important de remarquer que contrairement au cas des mélanges de fluides non miscibles le premier terme non nul du développement asymptotique ne vérifie pas les conditions interfaciales dans le cas des milieux poreux. On peut donc attirer l'attention sur le fait que dans la méthode des développements limités le premier terme non nul

- ne vérifie pas nécessairement les conditions aux limites (bord et interfaces)
- permet cependant d'obtenir l'écoulement limite qui lui vérifie les conditions au

bord

Le processus que nous venons de décrire nécessite la connaissance de la solution de l'équation aux dérivées partielles. Pour pallier à cet inconvénient on utilise une autre méthode plus systématique en recherchant directement au travers de l'équation aux dérivées partielles

$$u_\varepsilon(y) = u_0(y, [Y]) + \varepsilon u_1(y, [Y]) + \varepsilon^2 u_2(y, [Y]) + \dots$$

Cette fois ci u_ε dépend de ε non pas du fait que ν est une fonction périodique de période ε , mais parce que le domaine d'écoulement dépend de ε . L'opérateur initial ne sera donc défini que par

$$\frac{d}{dy} \left(\nu \frac{d}{dy} u_\varepsilon(y) \right); \quad y \in [2q\varepsilon, (2q+1)\varepsilon], \quad q=0, \dots, n$$

On peut donc le développer aussi et de la même manière selon les puissances de ε . On obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \left(\nu(Y) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y} \right) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) \right) = \alpha$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2} A_0 + \frac{1}{\varepsilon} A_1 + A_2 \right) (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots) = \alpha$$

$$\text{où } A_0 = \nu \frac{\partial^2}{\partial^2 Y}, \quad A_1 = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y}, \quad A_2 = \nu \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$$

En identifiant selon les puissances de ε ; on obtient formellement le même type de systèmes différentiels que précédemment.

termes en $\frac{1}{\varepsilon^2}$

$$A_0(u_0) = 0$$

termes en $\frac{1}{\varepsilon^1}$

$$A_0(u_1) + A_1(u_0) = 0$$

termes en $\frac{1}{\varepsilon^0}$

$$A_0(u_2) + A_1(u_1) + A_2(u_0) = \alpha$$

Mais cette fois ci, d'une part, la variable y varie seulement dans $[2q\varepsilon, (2q+1)\varepsilon]$, $q=0, \dots, n$ et la variable Y varie seulement dans $[2q, (2q+1)]$, $q=0, \dots, n$ et d'autre part les conditions de passage précédentes d'un milieu à l'autre sont remplacées par la nullité de l'inconnue à l'interface. Les équations aux dérivées partielles à résoudre ne sont donc pas les mêmes. On a

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 Y} u_0(y, Y) = 0, u_0(y, Y) \text{ périodiquable de période 2 par rapport à } Y, u_0(y, 2q) = 0,$$

$$q=0, \dots, n$$

$\frac{\partial^2}{\partial^2 Y} u_1(y, Y) + 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_0(y, Y) = 0, u_0(y, Y)$ et $u_1(y, Y)$ périodiquables de période 2 par rapport à $Y, u_0(y, 2q) = u_1(y, 2q) = 0$ $q=0, \dots, n$

$v \frac{\partial^2}{\partial^2 Y} u_2(y, Y) + 2v \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_1(y, Y) + v \frac{\partial^2}{\partial^2 y} u_0(y, Y) = \alpha, u_1(y, Y)$ et $u_2(y, Y)$ périodiquables de période 2 par rapport à $Y, u_0(y, 2q) = u_1(y, 2q) = u_2(y, 2q) = 0,$ $q=0, \dots, n$

La résolution du premier problème entraîne que $u_0(y, Y)$ périodiquable ne dépend pas de Y

$$u_0(y, Y) = u_0(y)$$

et puisque $u_0(y, 2q) = 0, u_0(y, Y) = u_0(y) = 0.$

La seconde équation donne

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 Y} u_1(y, Y) = -2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_0(y, Y) = 0$$

Et pour les mêmes raisons que précédemment $u_1(y, Y) = 0.$

La dernière équation donne

$$v \frac{\partial^2}{\partial^2 Y} u_2(y, Y) = -2v \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} u_1(y, Y) - v \frac{\partial^2}{\partial^2 y} u_0(y) + \alpha$$

ce qui compte tenu du fait que $u_0 = u_1 = 0$

$$v \frac{\partial^2}{\partial^2 Y} u_2(y, Y) = \alpha$$

Cette équation admet une solution périodique unique, nulle pour $Y = 0$ de la forme

$$u_2(y, Y) = u_2(Y) = \frac{\alpha}{2v} Y(Y - 1) \text{ pour } Y \in [0, 1]$$

La fonction u_2 ainsi obtenue dépend de ε par l'intermédiaire de Y , elle n'est donc pas, comme dans l'exemple précédent, l'inconnue homogénéisée. Ici, il y a donc lieu de déterminer la limite de u_2 lorsque ε tend vers 0. On a donc à la limite

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u_2(Y) dY = \frac{\alpha}{4v} \int_0^1 Y(Y - 1) dY = -\frac{\alpha}{24v}$$

La nouvelle loi de comportement du matériau homogénéisé associée au gradient de pression la

vitesse de filtration $\frac{1}{2} \int_0^1 u_2(Y) dY$, c'est la loi de Darcy.

Méthode de l'énergie - Seconde détermination pratique de la loi de comportement homogénéisée

La nouvelle loi de comportement est

- indépendante des conditions aux limites A et B
- déterminée par la liaison entre la vitesse de filtration et α (Elle ne s'exprime

plus à partir de $\text{grad } u$ qui est toujours nul)

On peut donc choisir des profils d'écoulements particuliers de sorte que les limites soient facilement calculables. On sait que si a est une fonction bornée et de période 1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \text{moyenne}(a) \text{ sur une période, faiblement.}$$

Vu la simplicité de l'expression de la limite, on aura intérêt à considérer des régimes à dérivées périodiques générés pour $\alpha=0$ et naturellement des conditions aux limites périodiques, pour déterminer la nouvelle loi de comportement.

Pour ce faire considérons une fonction w de période ε et posons $h_\varepsilon(y) = \varepsilon^2 w\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$

Mais puisque h_ε doit vérifier l'équation différentielle

$$\alpha = \frac{d}{dy} \left(v \frac{d}{dy} h_\varepsilon(y) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d}{dY} \left(v \frac{d}{dY} H(Y) \right) = \frac{d}{dY} \left(v \frac{d}{dY} w(Y) \right)$$

compte tenu des conditions aux limites et des conditions nulles aux interfaces, la solution de ce problème est unique.

La loi de comportement du matériau homogène équivalent peut donc être obtenue de la manière suivante:

- 1) On résout

$$\alpha = \frac{d}{dY} \left(v \frac{d}{dY} w(Y) \right)$$

-2) La "loi de comportement" du matériau homogène équivalent est donnée par:

$$h(y) = [\lim h_\varepsilon(y) / \varepsilon^2] = \text{moyenne}(w(Y)) \alpha$$

(La moyenne étant prise après remplacement de w par 0 dans la phase solide)

D) Remarques

Les exemples physiques que nous pouvons envisager dans le cadre de la dimension 1 sont très limités. En particulier des situations tout à fait réalistes en dimension 2 ou 3 tels que des problèmes avec trous et conditions de Neumann aux interfaces (Comportement mécanique de milieux perforés) ou conditions mixtes aux interfaces - (Electrostatique) n'ont aucun sens en dimension 1.

E) Problèmes à trous limites de problèmes continus

On examine dans ce paragraphe les conditions sur la loi de comportement de l'une des phases pour que les conditions aux interfaces soient du type contraintes nulles ou bien inconnue nulle (milieu poreux).

Pour que les conditions interfaciales soient du type contraintes nulles, il faut que $\alpha = 0$, ce qui entraîne que $\beta_0 v_0 = v_0(-A + B)$, soit $v_0 = 0$. Réciproquement si $\alpha = 0$ et $v_0 = 0$, on a une solution constante donc une contrainte nulle.

Le problème à trous de type contraintes nulles à l'interface est donc la limite du problème continu lorsqu'on fait tendre v vers 0.

Pour que les conditions interfaciales soient du type inconnues nulles, il faut que v_q soit égal à l'infini. Mais la relation $\beta_q/\beta_{q+1} = v_{q+1}/v_q$, entraîne que la limite de $b_q = 0$. Ainsi $u_\varepsilon(y) = \gamma_q$ et à cause des conditions aux limites $u_\varepsilon(y) = 0$. Réciproquement si $u_\varepsilon(y) = 0$ cela correspond à v_q égal à l'infini.

Le problème à trous de type inconnue nulle à l'interface est donc la limite du problème continu lorsqu'on fait tendre v vers l'infini.

F) Conservation ou dégénérescence de l'équation de conservation. Conditions de Neuman et conditions de Dirichlet.

Les problèmes étudiés jusqu'ici obéissent à une équation d'équilibre du type $\text{div } \sigma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) = f_\varepsilon$ valable sur tout un domaine Ω constitué de plusieurs matériaux (l'un d'entre eux pouvant être le vide). Généralement $\sigma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) = F[a(x/\varepsilon)\nabla u_\varepsilon]$ où $a(x/\varepsilon)$ prend des valeurs différentes sur chaque matériau distinct du vide. Selon les problèmes physiques étudiés des conditions différentes existent aux interfaces et plusieurs cas sont possibles

- Mélange de matériaux avec continuité de l'inconnue et de $\sigma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \cdot n$ aux interfaces. Dans ce cas l'opérateur $\sigma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)$ est défini sur tout Ω et les limites de u_ε et ∇u_ε varient avec les sollicitations extérieures en général. On peut donc mesurer la dépendance de $\lim \sigma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)$ avec $\lim \nabla u_\varepsilon$; ce qui constitue la loi de comportement homogénéisé

- Milieu perforé avec **conditions de NEUMAN** au bord des trous (on peut se ramener à des conditions nulles par changement de variable). On peut en général associer au problème physique étudié un problème physique de même nature défini dans les trous assurant la continuité des conditions de Neumann. Ces problèmes généralement de même nature correspondent souvent à des valeurs des constantes physiques très différentes. Dans ce cas on se retrouve dans la même situation précédemment.

- Milieu perforé avec **conditions de DIRICHLET** au bord des trous (on peut se ramener à des conditions nulles par changement de variable). Dans ce cas l'opérateur varie avec ε et il dégénère toujours puisqu'on peut montrer que u_ε et $u_\varepsilon/\varepsilon$ tendent vers 0 ($u_\varepsilon/\varepsilon^2$ ne tendant pas vers 0) lorsque ε tend vers 0 quelles que soient les conditions aux limites imposées au bord du domaine Ω . Dans ce cas le comportement homogénéisé ne lie plus la limite de ∇u_ε avec un tenseur, les grandeurs décrivant le système changent de nature.

Avant de déterminer une technique permettant le calcul de l'opérateur homogénéisé (nouvelle loi de comportement), il est donc nécessaire de

- connaître sa structure mathématique
- de choisir des situations expérimentales simples conduisant à des formes particulières simples de u_ε compatibles avec la nature du phénomène physique étudié.

D'une manière générale, on peut résumer l'ensemble de ces situations en deux grandes catégories.

Lorsque u_ε ne tend pas vers 0 quelles que soient les conditions au bord de Ω .

On sait que l'opérateur homogénéisé est celui qui associe

$$\lim \nabla u_\varepsilon = \lim \sigma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)$$

Puisqu'on sait qu'il est indépendant des conditions aux limites, on peut considérer la situation expérimentale suivante:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \lambda x + \varepsilon w(x/\varepsilon), \quad w \text{ périodique} \\ f_\varepsilon(x) &= 0 \text{ (sollicitations extérieures nulles)} \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $X = x/\varepsilon$, on a alors $\partial/\partial x = 1/\varepsilon \partial/\partial X$, d'où si $F = \text{Identité}$ (pour fixer les idées) et on est amené à résoudre sur la cellule de base

$$\operatorname{div}_X(a(X) \nabla u(X)) = 0$$

$$u(X) = \lambda X + w(X); \quad w \text{ périodique}, \quad M(w) = 0$$

La nouvelle loi de comportement homogénéisée est: $\lambda \longrightarrow M(a(X) \nabla u(X))$

Lorsque u_ε tend vers 0 et $u_\varepsilon/\varepsilon^2$ tend vers 0 quelles que soient les conditions au bord de Ω .

C'est ce qui se produit lorsqu'on a des conditions de DIRICHLET, l'inconnue tend vers 0 avec la taille des pores. La formule de l'opérateur homogénéisé est alors contenue dans la nouvelle équation d'équilibre.

$$\lim u_\varepsilon/\varepsilon^2 = K \lim f_\varepsilon$$

Pour que $u_\varepsilon/\varepsilon^2$ ne tende pas vers 0 il suffit de prendre

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon(\lambda x + \varepsilon w(x/\varepsilon)), \quad w \text{ périodique}$$

Mais dans ce cas, ce n'est pas ∇u_ε qui nous intéresse mais $u_\varepsilon/\varepsilon^2$; on peut donc fort bien se limiter à:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \varepsilon^2 w(x/\varepsilon), \quad w \text{ périodique} \\ f_\varepsilon &= 1 \text{ (périodique)} \end{aligned}$$

On est obligé de prendre $f_\varepsilon \neq 0$ car la loi homogénéisée dépend des sollicitations de volume. En posant $X = x/\varepsilon$

$$\operatorname{div}_X(a(X) \nabla u_\varepsilon/\varepsilon^2) = 1, \quad u_\varepsilon/\varepsilon^2 \text{ tend vers moyenne}(w)$$

On peut résoudre

$$\operatorname{div}_X(a(X) \nabla v(X)) = 1$$

v périodique

La nouvelle équation constitutive s'écrit:

$$\text{moyenne}(v) = K \lim f_\varepsilon$$

IV PROBLEMES EN DEUX ET TROIS DIMENSIONS

La première partie de cet article a décrit les processus permettant de déterminer la loi de comportement du matériau équivalent en présence ou non de trous. Bien que ce processus soit lié à la dimension 1, nous allons montrer qu'il s'applique en fait général à bon nombre de problèmes multidimensionnels linéaires ou non linéaires. Les matériaux que nous considérons ici sont ceux pour lesquels la loi de comportement ne dépend pas explicitement du temps.

A partir d'une répartition périodique des matériaux comme, par exemple sur la figure 7 ci-dessous, on peut isoler une cellule de base (figure 8) qui servira, comme c'est le cas en dimension 1, de domaine de référence pour décrire un processus permettant de déterminer la loi de comportement homogénéisée.

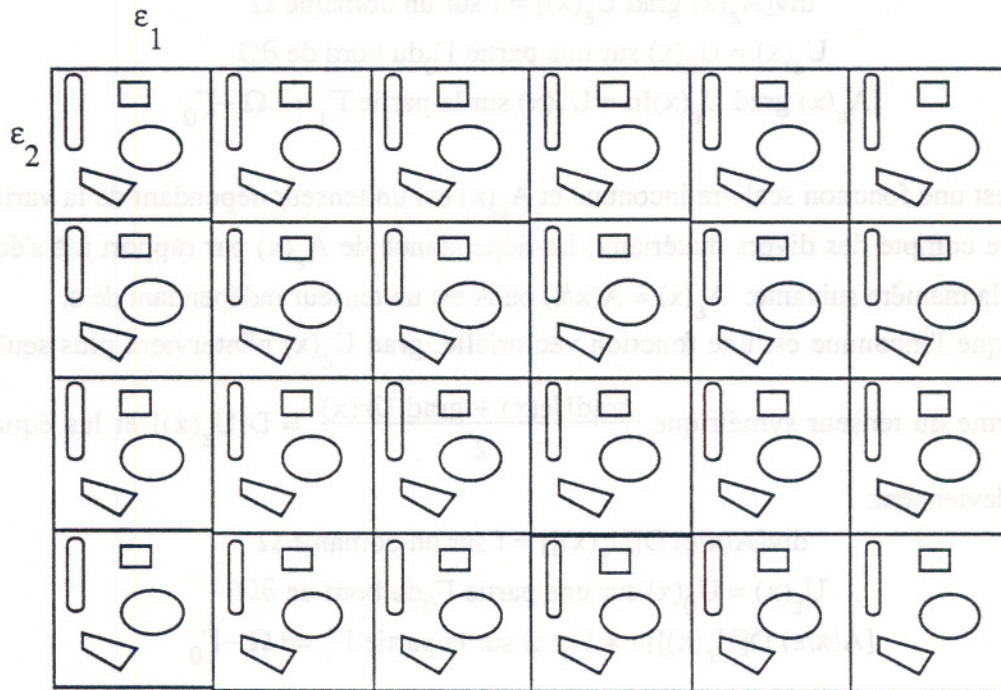


Figure 7: Domaine Ω constitué de cellules de taille ε

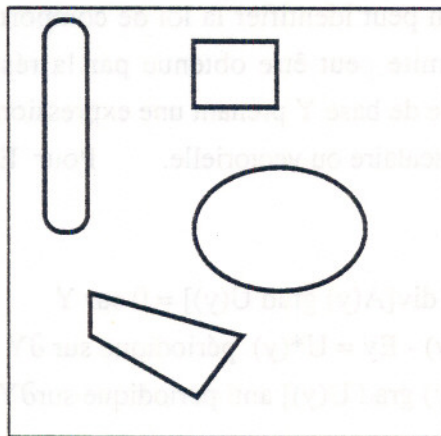


Figure 8: Cellule élémentaire Y

Mélange de matériaux sans trous

Le cas linéaire

Dans un premier temps, nous considérerons les équations d'équilibre d'un milieu Ω , situé dans le plan ou dans l'espace et constitué de plusieurs matériaux de comportement linéaire dont la répartition dépend d'un petit paramètre ε , sous la forme

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A_\varepsilon(x) \operatorname{grad} U_\varepsilon(x)] &= f \text{ sur un domaine } \Omega \\ U_\varepsilon(x) &= U_0(x) \text{ sur une partie } \Gamma_0 \text{ du bord de } \partial\Omega \\ [A_\varepsilon(x) \operatorname{grad} U_\varepsilon(x)]n &= U_1(x) \text{ sur la partie } \Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0 \end{aligned}$$

où $U_\varepsilon(x)$ est une fonction scalaire inconnue et $A_\varepsilon(x)$ est un tenseur dépendant de la variable x pour rendre compte des divers matériaux. La dépendance de $A_\varepsilon(x)$ par rapport à ε s'écrit en général de la manière suivante: $A_\varepsilon(x) = A(x/\varepsilon)$ où A est un tenseur indépendant de ε .

Lorsque l'inconnue est une fonction vectorielle, $\operatorname{grad} U_\varepsilon(x)$ n'intervient plus seul mais sous la forme du tenseur symétrique $\frac{\operatorname{grad} U_\varepsilon(x) + \operatorname{grad}^t U_\varepsilon(x)}{2} = D[U_\varepsilon(x)]$ et les équations générales deviennent:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A(x/\varepsilon) D[U_\varepsilon(x)]] &= f \text{ sur un domaine } \Omega \\ U_\varepsilon(x) &= U_0(x) \text{ sur une partie } \Gamma_0 \text{ du bord de } \partial\Omega \\ [A(x/\varepsilon) D[U_\varepsilon(x)]]n &= U_1(x) \text{ sur la partie } \Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0 \end{aligned}$$

La répartition des divers composants est supposée périodique et dépend du petit multiparamètre ε . On montre que lorsque ε tend vers 0, l'équation ci dessus tend vers une équation limite dans laquelle on peut identifier la loi de comportement du milieu homogène équivalent. En fait cette loi limite peut être obtenue par la résolution d'une équation aux dérivées partielles sur une cellule de base Y prenant une expression légèrement différente selon que l'inconnue est une fonction scalaire ou vectorielle. Pour E vecteur donné du même ordre, on résout

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A(y) \operatorname{grad} U(y)] &= 0 \text{ sur } Y \\ U(y) - Ey &= U^*(y) \text{ périodique sur } \partial Y \\ [A(y) \operatorname{grad} U(y)] &\text{ anti périodique sur } \partial Y \end{aligned}$$

Pour E tenseur symétrique d'ordre 2 donné, on résout

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A(y) D[U(y)]] &= f \text{ sur } Y \\ U(y) - Ey &= U^*(y) \text{ périodique sur } \partial Y \\ [A(y) D[U(y)]] &\text{ anti-périodique sur } \partial Y \end{aligned}$$

Ces problèmes admettent en général une solution unique à une constante près qui peut être obtenue par la méthode des éléments finis à partir de l'une des formulations variationnelles suivantes:

$$\int_Y A(y) \operatorname{grad} U^*(y) \operatorname{grad} w \, dY = - \int_Y E \operatorname{grad} w \, dY, \text{ quelque soit } w \text{ périodique sur } Y$$

ou bien

$$\int_Y A(y) D[U^*(y)] D[W(y)] \, dY = - \int_Y E D[W(y)] \, dY, \text{ quelque soit } w \text{ périodique sur } Y$$

La loi de comportement homogénéisée est alors donnée par:

$$E \text{ -----} \rightarrow M[A(y) \operatorname{grad} U(y)]$$

Cette situation recouvre des problèmes très différents de la physique:

- problèmes de thermique, de diffusion, d'électrostatique pour lesquels $\operatorname{grad} U(y)$ est un vecteur de n composantes, n =dimension de l'espace dans lequel on travaille et $A(y)$ est une matrice carrée d'ordre n .

- problèmes d'élasticité, d'électromagnétisme pour lesquels $\operatorname{grad} U(y)$ est un tenseur d'ordre 2 de $n \times n$ composantes, n =dimension de l'espace dans lequel on travaille et $A(y)$ est un tenseur d'ordre 2 (une matrice carrée d'ordre n)

La détermination de la loi de comportement homogénéisée dépend non seulement du comportement de chaque matériau, mais encore de la forme et de la répartition de chacun d'entre eux. En particulier, le milieu homogénéisé équivalent à deux milieux homogènes isotropes n'est pas forcément homogène isotrope. La loi de comportement homogénéisée est complètement déterminée par la connaissance de $[n \cdot (n+1)/2]^2$ paramètres qui peuvent être déterminés par $n \cdot (n+1)/2$ essais numériques correspondant aux $n \cdot (n+1)/2$ matrices symétriques E formant la base canonique des matrices carrées symétriques d'ordre n .

Le cas non-linéaire

Les non linéarités de comportement des matériaux peuvent être multiples, mais d'une manière générale les équations d'équilibre établies dans le cas linéaire restent formellement valables.

$$\operatorname{div}[F_\varepsilon(x, D[U_\varepsilon(x)]) D[U_\varepsilon(x)]] = f \text{ sur un domaine } \Omega$$

$$U_\varepsilon(x) = U_0(x) \text{ sur une partie } \Gamma_0 \text{ du bord de } \partial\Omega$$

$$[F_\varepsilon(x, D[U_\varepsilon(x)]) D[U_\varepsilon(x)]] n = U_1(x) \text{ sur la partie } \Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0$$

L'opérateur F_ε est l'identité dans le cas linéaire et dans le cas général il doit vérifier certaines conditions de régularité pour que les résultats obtenus pour le cas linéaire se transportent sur le

cas non linéaire. Pratiquement quelque soit x dans Ω et quelque soit les tenseurs D et D' dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on doit avoir

$$\begin{aligned} \|F_\varepsilon(x,D)\| &< a(x) + b \|D\| \quad ; \quad a \text{ appartenant à } L^2(\Omega) \text{ indépendant de } \varepsilon, \text{ de } D \text{ et } D' \\ \|F_\varepsilon(x,D) - F_\varepsilon(x,D')\| &< \beta \|D-D'\| \quad ; \quad \beta \text{ indépendant de } \varepsilon, \text{ de } x, \text{ de } D \text{ et de } D' \\ \langle F_\varepsilon(x,D) - F_\varepsilon(x,D'), D-D' \rangle &\geq \alpha \|D-D'\|^2 \quad ; \quad \alpha \text{ indépendant de } \varepsilon, \text{ de } x, \text{ de } D \text{ et de } D' \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|z - u\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme associée dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

De la même manière que pour le cas linéaire, $F_\varepsilon(x,D)$ admet une expression de la forme $F_\varepsilon(x,D) = F(x/\varepsilon, D)$, où F est une fonction indépendante de ε . Par l'intermédiaire d'une formulation variationnelle, on obtient la loi de comportement homogénéisée de la même manière que pour le cas linéaire en utilisant des techniques de moyenne sur une cellule élémentaire Y :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[F(y, D[U(y)])] &= 0 \text{ sur } Y \\ U(y) - Ey &= U^*(y) \text{ périodique sur } \partial Y \\ [F(y, D[U(y)])]_n &\text{ anti-périodique sur } \partial Y \end{aligned}$$

Ce problème admet en général une solution unique à une constante près qui peut être obtenue par la méthode des éléments finis en utilisant la formulation variationnelle suivante:

$$\int_Y F(y, E+D[U^*(y)]) D[W(y)] \, dy = 0, \quad \text{quelque soit } w \text{ périodique sur } Y$$

Le problème étant non linéaire, on devra utiliser des procédures itératives pour obtenir la solution. Lorsque la loi de comportement est différentiable des procédures du type Newton Raphson sont efficaces. Lorsqu'elle ne l'est pas, on doit utiliser des méthodes duales du type Lagrangien, éventuellement associées à des méthodes de pénalisation [18].

Dans ces conditions, la loi de comportement homogénéisée est celle qui fait correspondre à E la moyenne intégrale sur Y : $M[F(y, E+D[U^*(y)])]$

Lorsque les matériaux sont non-linéaires la détermination de la loi de comportement ne peut plus se faire à partir de $n^*(n+1)/2$ essais numériques. Il est alors nécessaire d'effectuer un certain nombre d'essais numériques qui, en faisant varier E , fournissent un certain nombre de valeurs de la fonction de $\mathbb{R}^{n^*(n+1)/2}$ dans $\mathbb{R}^{n^*(n+1)/2}$ qui à E associe $M[F(y, E+D[U^*(y)])]$. A partir de ces valeurs, un lissage par fonctions splines donne une expression mathématique de cette fonction. L'utilisation pratique de cette loi de comportement pour des valeurs particulières

dans un programme peut s'effectuer de deux manières. Soit on utilise la fonction obtenue par lissage splines (stockée dans un fichier) et on obtient directement sa valeur au point considéré, soit on appelle une procédure permettant le calcul direct de la loi de comportement au point considéré en utilisant la procédure d'homogénéisation décrite.

Remarque:

En général pour les problèmes linéaires l'expression du problème homogénéisé mentionné dans la littérature diffère légèrement de celui que nous venons de présenter. Il est plutôt présenté sous la forme équivalente suivante^[19], où les dérivées sont à considérer au sens des distributions. On détermine d'abord χ comme solution à une constante près de:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A(y) D[\chi(y)]] &= -\operatorname{div}[A(y)] \text{ sur } Y \\ \chi(y) &\text{ périodique sur } \partial Y \\ [A(y) D[\chi(y)]]_n &\text{ antipériodique sur } \partial Y \end{aligned}$$

La loi de comportement homogénéisée est alors de la forme:

$$D[U] \text{ -----} \rightarrow (M[A(y)] - M[A(y)D[\chi(y)]]) D[U]$$

Comme nous l'avons fait remarquer dans le cas $n=1$, le terme $M[A(y)]$ n'est pas le seul présent dans la loi de comportement homogénéisé . Le terme $M[A(y)D[\chi(y)]]$ apparaît comme un correcteur d'une loi empirique de type mélange.

Ce type de formulation suppose un comportement linéaire des matériaux. Dans le cas de lois de comportement non linéaires cette forme n'est plus possible.

Mélange de matériaux avec trous

En ce qui concerne les structures trouées, les principes mis en évidence pour la dimension 1 prévalent encore ici, mais nous pourrions envisager des situations qui restaient irréalistes en dimension 1. Bien que les problèmes physiques sont par nature tridimensionnels et étudiés sur des domaines en général connexes, il peut arriver que leur étude se ramène à une étude plan sur lequel la répartition du matériau n'est plus connexe. Mais la nature des problèmes dépend essentiellement du type de conditions aux limites qui sont imposées aux bords des trous. Il y a lieu de distinguer entre les conditions naturelles du type Neumann, forcées du type Dirichlet ou mixtes du type Dirichlet inconnu + flux moyen.

Conditions de type Neumann sur les trous

Dans cette catégorie entrent l'ensemble des problèmes de mécanique des milieux perforés pour lesquels les trous sont libres de tout effort, les problèmes de thermique pour lesquels aucun flux de chaleur ne traverse les trous, etc

Pour simplifier nous considérerons un milieu de loi de comportement linéaire vérifiant les équations d'équilibre du type précédent et des conditions nulles au bord des trous (on peut toujours s'y ramener par changement de variable):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A_\varepsilon(x) D[U_\varepsilon(x)]] &= f \text{ sur un domaine } \Omega - \text{trous} \\ U_\varepsilon(x) &= U_0(x) \text{ sur une partie } \Gamma_0 \text{ du bord } \partial\Omega \text{ de } \Omega \\ [A_\varepsilon(x) D[U_\varepsilon(x)]]n &= U_1(y) \text{ sur la partie } \Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0 \\ [A_\varepsilon(x) D[U_\varepsilon(x)]]n &= 0 \text{ sur le bord des trous} \end{aligned}$$

On montre que la loi de comportement du modèle homogénéisée est encore obtenue par la même stratégie que pour les modèles sans trous, c'est à dire qu'on peut l'obtenir par une procédure de moyenne sur une cellule élémentaire Y:

Pour E tenseur symétrique d'ordre 2 donné, on résout

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A(y) D[U(y)]] &= 0 \text{ sur } Y \\ U(y) - Ey &= U^*(y) \text{ périodique sur } \partial Y \\ [A(y) D[U(y)]] &\text{ anti-périodique sur } \partial Y \\ [A(y) D[U(y)]]n &= 0 \text{ sur le bord des trous} \end{aligned}$$

La loi de comportement homogénéisée est alors donnée par:

$$E \text{ -----} \rightarrow M[A(y) \operatorname{grad} U(y)]$$

où l'on a prolongé $A(y) \operatorname{grad} U(y)$ par 0 dans les trous.

Conditions de Dirichlet sur les trous

Dans cette catégorie entre l'ensemble des problèmes de mécanique des milieux perforés pour lesquels la valeur de l'inconnue est forcée à une certaine valeur sur le bord des trous, les problèmes d'écoulement en milieu poreux, de thermique pour lesquels la température est imposée au bord des trous, etc

Pour simplifier nous considérerons un milieu de loi de comportement linéaire vérifiant les équations d'équilibre du type précédent et des conditions nulles au bord des trous (on peut toujours s'y ramener par changement de variable):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A_\varepsilon(x) D[U_\varepsilon(x)]] &= f \text{ sur un domaine } \Omega - \text{trous} \\ U_\varepsilon(x) &= U_0(x) \text{ sur une partie } \Gamma_0 \text{ du bord de } \partial\Omega \\ [A_\varepsilon(x) D[U_\varepsilon(x)]]n &= U_1(y) \text{ sur la partie } \Gamma_1 = \partial\Omega - \Gamma_0 \\ U_\varepsilon(x) &= 0 \text{ sur le bord des trous} \end{aligned}$$

Le fait d'imposer des conditions de Dirichlet nulles sur le bord des trous entraîne une conséquence importante sur l'équation aux dérivées partielles. Notons \hat{U}_ε le prolongement de U_ε dans les trous par 0 et h_ε la fonction qui vaut 0 dans les trous et 1 dans le reste du domaine, on a $h_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon$. On montre [13] que

* les fonctions h_ε et \hat{U}_ε tendent **fortement** dans l'espace des fonctions de carré intégrables sur Ω , la première vers le nombre $R =$ rapport des volumes de la matière sur celui du domaine entier (donc un nombre strictement inférieur à 1) et la seconde vers une fonction U (dans un espace fonctionnel convenable) .

* la limite de $h_\varepsilon \hat{U}_\varepsilon = \hat{U}_\varepsilon$ dans cet espace conduit à: $(1 - R) \hat{U} = 0$, c'est à dire $\hat{U} = 0$.
En fait, quelque soit le prolongement $P_\varepsilon(U_\varepsilon)$ "suffisamment régulier" de U_ε choisi, $h_\varepsilon P_\varepsilon(U_\varepsilon) = \hat{U}_\varepsilon$ et $P_\varepsilon(U_\varepsilon)$ tend donc toujours vers 0 lorsque ε tend vers 0.

Dans ces conditions parler de la limite de l'équation aux dérivées partielles d'équilibre n'a alors plus aucun sens car la variation de l'inconnue est impossible puisque réduite à 0, l'équation aux dérivées partielles dégénère donc lorsque ε tend vers 0. Il y a donc lieu de rechercher un développement asymptotique [19] de U_ε en fonction de ε afin de déterminer la manière dont l'équation aux dérivées partielles dégénère. On montre que $U_\varepsilon/\varepsilon$ tend aussi vers 0, mais que $U_\varepsilon/\varepsilon^2$ admet une limite non nulle qui constitue le premier terme non nul du développement asymptotique de U_ε . Puisque les termes d'ordre 0 et 1 ne peuvent permettre d'identifier un comportement limite, on considère les termes d'ordre 2 dans l'équation d'équilibre. On obtient ainsi une nouvelle équation d'équilibre à l'ordre 2 qui contient le comportement limite. Dans le cas de l'écoulement en milieu poreux ce comportement porte le nom de loi de DARCY. Il fait intervenir, non pas comme ce fut le cas dans les exemples précédents, la limite de l'inconnue mais une nouvelle variable W qui porte le nom de vitesse de filtration.

Ainsi, la limite de $U_\varepsilon/\varepsilon^2$ est directement reliée à f par l'intermédiaire d'un tenseur et constitue la loi de comportement du modèle homogénéisé. Cette relation est obtenue par un calcul sur la cellule élémentaire:

Dans le cas où U_ε est une fonction scalaire, on résout:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[A(y) \operatorname{grad}[W(y)]] &= 1 \text{ sur } Y \\ W(y) &\text{ périodique sur } \partial Y \\ [A(y) \operatorname{grad}[W(y)]] &\text{ anti périodique sur } \partial Y \\ W(y) &= 0 \text{ sur le bord des trous} \end{aligned}$$

Le modèle limite est donné par:

$$\lim U_\varepsilon / \varepsilon^2 = M[W(y)]f$$

Dans le cas où U_ε est une fonction vectorielle, comme c'est le cas de l'écoulement en milieu poreux, le modèle limite relie la vitesse de filtration w au gradient de pression par l'intermédiaire d'un tenseur symétrique K :

$$w = \lim U_\varepsilon / \varepsilon^2 = K(f - \operatorname{grad} q)$$

où K est déterminé de la manière suivante. Pour A vecteur donné de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , on cherche $V(y)$ vérifiant

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[A(y) D[V(y)]] &= A - \operatorname{grad} p \text{ et } \operatorname{div} V = 0 \text{ sur } Y \\ V(y) &\text{ périodique sur } \partial Y \\ [A(y) D[V(y)]] &\text{ anti-périodique sur } \partial Y \\ V(y) &= 0 \text{ sur le bord des trous} \end{aligned}$$

Le tenseur K est celui qui lie A à $M[V(Y)]$, soit: $KA = M[V(Y)]$. La pression q est solution de:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[K \operatorname{grad} q + f] &= 0 \text{ sur } \Omega \\ [K(f - \operatorname{grad} q)]n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Quelques remarques sur les prolongements

Considérons un milieu matériel périodique Ω_ε organisé en cellules constituées de matière et de trous de taille ε , de loi de comportement $\operatorname{grad}(u_\varepsilon) \rightarrow \sigma_\varepsilon[\operatorname{grad}(u_\varepsilon)]$ (dépendant éventuellement de ε) où l'inconnue est désignée par u_ε (pouvant être vectorielle

). On suppose qu'il est le siège d'un phénomène physique obéissant à une équation aux dérivées partielles

$$-\operatorname{div} \sigma_{\varepsilon}[\operatorname{grad}(u_{\varepsilon})] = f$$

et des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet ou Neumann

$$\sigma_{\varepsilon}[\operatorname{grad}(u_{\varepsilon})]n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \text{ (condition de Neuman)}$$

$$u_{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \text{ (condition de Dirichlet)}$$

avec sur le bord des trous des conditions de Neumann ou de Dirichlet

$$\sigma_{\varepsilon}[\operatorname{grad}(u_{\varepsilon})]n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \text{ (condition de Neuman)}$$

$$u_{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \text{ (condition de Dirichlet)}$$

Naturellement la présence de trous dans le matériau ne signifie pas que ceux-ci sont occupés par du vide. En réalité ils sont généralement occupés par le milieu ambiant qui présente des propriétés rhéologiques très différentes de celles du milieu étudié, de sorte qu'il ne perturbe pas de manière significative le milieu étudié.

Dans ces conditions, l'interface peut être considéré comme quasiment fixe et les conditions prévalant dans le cas de frontières fixes peuvent s'appliquer; à savoir:

$$\sigma_{\varepsilon}[\operatorname{grad}(u_{\varepsilon})]n = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \text{ (condition de Neuman)}$$

$$u_{\varepsilon} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \text{ (condition de Dirichlet)}$$

Des milieux ambiants très différents peuvent avoir des effets semblables sur le milieu étudié pourvu que leur action sur les interfaces restent les mêmes. Ainsi les équations d'équilibre et les conditions aux limites homogènes associées au milieu troué peuvent être prolongées de différentes manière dans les trous tout en assurant la continuité de l'inconnue (Dirichlet) ou de la contrainte (Neumann).

Comme on s'y attendait un peu, la rhéologie du milieu ambiant n'a en fait aucun effet sur la rhéologie du milieu homogénéisé pourvu qu'on respecte les conditions homogènes aux interfaces. Ce type de résultat a été démontré dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation des milieux perforés, la loi homogénéisée ne dépend pas de la nature du prolongement choisi pour les équations pourvu qu'il satisfasse à certaines propriétés de régularité qui sont en rapport avec les prolongements de nature physique.

V METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION DES SYSTEMES PERIODIQUES

La plupart des problèmes numériques d'homogénéisation consistent à résoudre un problème d'équation aux dérivées partielles du type $\text{div } \sigma(u) = 0$, $u = E y + u^*$, u^* périodique. Un tel problème peut être résolu numériquement directement par des méthodes directes de différences finies ou éléments finis. Il est également équivalent à un problème de minimisation sous contraintes (périodicité). D'une manière générale les solutions périodiques sur une cellule élémentaire sont obtenus par méthodes itératives préservant la structure bande de la matrice de "rigidité" ou directes mais détruisant cette structure [14]. Il est nécessaire d'utiliser un maillage pour lequel les noeuds frontaliers ainsi que les voisins de ces noeuds se correspondent symétriquement sur des faces opposées. L'inconvénient de la destruction de la structure bande peut être évité en utilisant une procédure de stockage optimale de la matrice de rigidité de type "Morse" [15].

L'utilisation d'une formulation variationnelle associée à la méthode des éléments finis pour résoudre le problème $\text{div } \sigma(u) = 0$, $u = E y + u^*$, u^* périodique et $\sigma(u^*) \cdot n$ (ou bien $\sigma(u) \cdot n$) antipériodique.

$$0 = \int_{\Omega} \text{div } \sigma(u) w \, dX = - \int_{\Omega} \sigma(u) \nabla w \, dX + \int_{\partial\Omega} \sigma(u) \cdot n w \, d\gamma = - \int_{\Omega} \sigma(u) \nabla w \, dX$$

ce qui s'écrit aussi

$\int_{\Omega} \sigma(u^*) \nabla w \, dX = - \int_{\Omega} \sigma(Ey) \nabla w \, dX, \text{ quelque soit } w$ <p style="text-align: center;">périodique</p>

offre l'avantage de contenir implicitement l'information $\sigma \cdot n$ antipériodique qui n'a donc pas à être prise en compte explicitement lors d'un traitement numérique. Une méthode de différences finies devrait tenir compte de la condition d'antipériodicité explicite lors du traitement numérique.

Le problème variationnel admet une infinité de solutions u^* définies à une constante près, $\text{grad } u^*$ est donc unique, sa moyenne étant nulle (et celle de $\text{grad } u$ valant E). Pour avoir une solution u^* unique, il suffit de fixer sa valeur en un point, ce qui n'altère pas les résultats sur les lois de comportement homogénéisées qui sont des relations entre gradients.

Méthode itérative utilisant la résolution de problèmes de Dirichlet.

1) Au départ, on résout le problème de Dirichlet associé à une condition aux limite périodique. C'est à dire qu'on impose une valeur de $w - Ey$ égale sur deux faces opposées, ce qui se traduit du point de vue de la méthode des éléments finis par des valeurs imposées égales aux degrés de liberté correspondants sur deux faces opposées. L'ensemble de ces valeurs forme le tableau des valeurs inconnues à ajuster de sorte que les contraintes $\sigma[w -$

Ey]n soient opposées sur les faces opposées. Il est à noter qu'imposer la périodicité de $w - Ey$ sur le bord entraîne que la moyenne de w sur tout le domaine égale E [16]

2) On divise le périmètre en deux demi-périmètres de sorte que les faces opposées se trouvent dans deux demi-périmètres différents. A l'itéré n , désignons par X_n le tableau des conditions limites associées à un demi-périmètre. On calcule par une méthode d'éléments finis ou différences finies les vecteurs $Y_n(X_n)$ des contraintes normales associées au premier demi-périmètre et $Z_n(X_n)$ des contraintes normales associées à l'autre demi-périmètre. On cherche à déterminer X_n de sorte que

$$Q_n(X_n) = Y_n(X_n) + Z_n(X_n) = 0$$

La détermination de X_n s'effectue soit par une méthode de Newton (ordre 2)

$$\text{grad}[Q_n(X_n)] X_{n+1} = \text{grad}[Q_n(X_n)] X_n - Q_n(X_n)$$

où $\text{grad}[Q_n(X_n)]$ désigne le tenseur gradient de $Q_n(X_n)$ par rapport à X_n

ou soit par une méthode du point fixe (ordre 1)

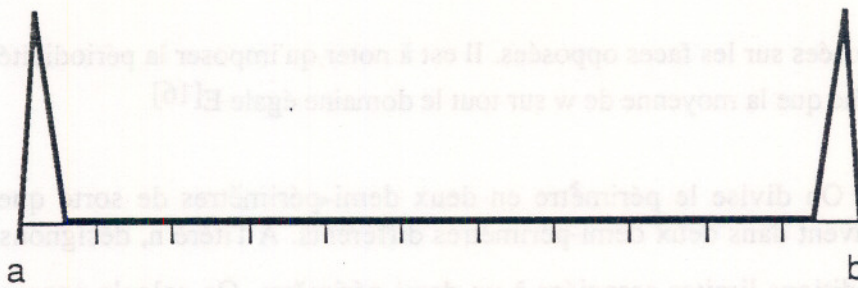
$$X_{n+1} = X_n + Q_n(X_n)$$

Méthode itérative utilisant les multiplicateurs de Lagrange

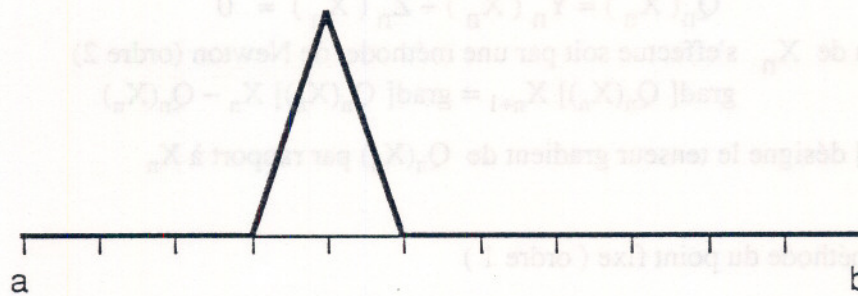
Partant de la formulation variationnelle prenant en compte directement l'antipériodicité de la contrainte, les conditions de périodicité de l'inconnue sont traitées comme une contrainte. La formulation variationnelle équivaut à un problème de minimisation, qui, une fois discrétisé conduit à un problème de minimisation à n variables sous p contraintes égalités ($p \leq n$). On introduit donc p nombres multiplicateurs de Lagrange qui définissent le Lagrangien du problème. La solution du problème étant un point selle du Lagrangien, on la détermine par l'algorithme d'Uzawa [17]. Cette méthode associée à l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution des systèmes linéaires est une des meilleures méthodes pour le traitement numérique des problèmes d'homogénéisation, elle est largement détaillée dans [20].

Méthode directe utilisant des fonctions de base périodiques ainsi que ses dérivées

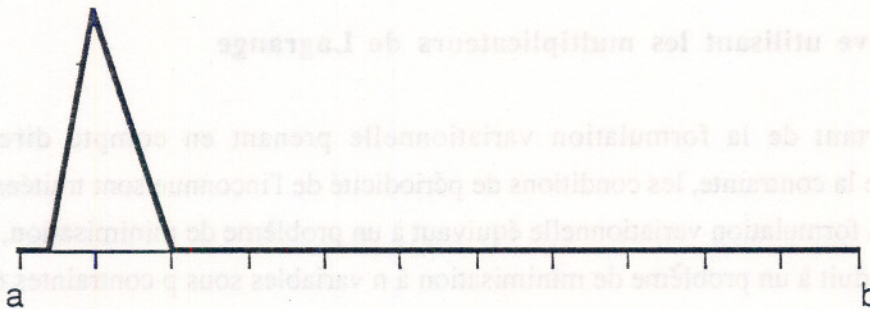
La méthode directe utilise une méthode d'éléments finis associée à des fonctions de base périodiques. Elle prend donc directement en compte les conditions d'antipériodicité. Pour illustrer ces fonctions de base représentons les trois types possibles en dimension 1.



Fonction périodique avec gradient périodique associée aux extrémités



Fonction périodique (avec gradient périodique) associée à un point intérieur qui n'est pas voisin d'un point frontalier



Fonction périodique avec gradient périodique associée à un point intérieur voisin d'un point frontalier

Méthode directe de substitution

Cette méthode utilise les fonctions de base usuelles, non nécessairement périodiques. Les p conditions de périodicité sont prises en compte en utilisant une méthode classique en optimisation. Par l'intermédiaire des p contraintes, on exprime p inconnues en fonction des $n - p$ autres et on reporte dans le problème d'optimisation (substitution). Le problème d'optimisation ainsi obtenu est un problème sans contraintes, mettant en oeuvre un nombre limité de variables: $n - p$. Cette méthode est également largement détaillée dans [20].

VI PRESENTATION DE QUELQUES RESULTATS NUMERIQUES

Pour illustrer cet article, nous présentons trois exemples bidimensionnels de mécanique des solides.

La méthode numérique utilisée est celle des éléments finis associée d'une part à l'algorithme d'Uzawa et d'autre part à la méthode du gradient conjugué.

La formulation variationnelle du problème est équivalente à minimiser une fonctionnelle d'énergie sur un ensemble de fonctions périodiques, ou autrement dit sur l'espace total des fonctions admissibles soumis à une **contrainte** de périodicité. Après avoir maillé le domaine d'étude, la méthode des éléments finis nous conduit à minimiser la forme discrète de cette énergie sur les vecteurs de R^n avec la condition de périodicité entre les bords opposés de la cellule.

Pratiquement on est ramené au problème numérique suivant:

$$\begin{aligned} \text{Min } [1/2 {}^tV K V - {}^tV F] \\ PV=0 \end{aligned}$$

où V désigne le vecteur inconnu, F le second membre de l'équation aux dérivées partielles discrétisé et P une matrice permettant de décrire la relation linéaire de périodicité par $PV = 0$. En terme de lagrangien ce problème est équivalent à rechercher le point selle du lagrangien $L(V,m)=1/2 {}^tV K V - {}^tV F + {}^tV {}^tPm$, où m est le multiplicateur de Lagrange; c'est à dire le couple (U,l) vérifiant $L(U,m) \leq L(U,l) \leq L(V,l)$. L'algorithme d'Uzawa, procédure numérique recherchant le minimum de $L(V,m)$ par rapport à V et le maximum par rapport à m , est utilisé pour déterminer ce point selle. En utilisant la méthode du gradient conjugué pour rechercher ce minimum l'algorithme se simplifie pour donner la procédure itérative suivante:

1) Premier pas

- On se donne l_0 et on calcule U_0, D_0 et N_0 par:

$$K U_0 = F, \quad D_0 = -P U_0 = DD_0 \quad D_0 \text{ et } N_0 = \|D_0\|^2$$

puis U_1 solution de

$$K U_1 = F - \frac{\|P U_0\| D_0}{{}^tD_0 K^{-1} D_0}$$

1) Itérations

- Connaissant DD_{n-1} et U_n , on calcule DD_n et U_{n+1} par:

$$D_n = -P U_n \quad N_n = \|D_n\|^2 \quad a_n = \frac{N_n}{N_{n-1}}$$

$$DD_n = D_n + a_n DD_{n-1} \quad K Z_n = {}^t P DD_n$$

$$r_n = \frac{N_n}{{}^t D_n P Z_n} \quad U_{n+1} = U_n + r_n Z_n$$

3) Arrêt

L'algorithme converge en un nombre d'itérations inférieur à l'ordre de la matrice de rigidité K.

Présentons maintenant les exemples d'homogénéisation de structures périodiques en mécanique des solides résolus par cette méthode. Ils ont tous été réalisés sur micro-ordinateur Macintosh en utilisant les mailleurs automatiques et les codes de calcul que nous avons développés au sein de notre groupe de recherche.

Pour le premier exemple la structure est constituée de cellules identiques à celle représentée sur figure suivante. Il s'agit d'un polygone régulier à six côtés, maillée en triangles 6 noeuds. La structure est formée de deux matériaux homogènes obéissant à deux lois de Hooke différentes.

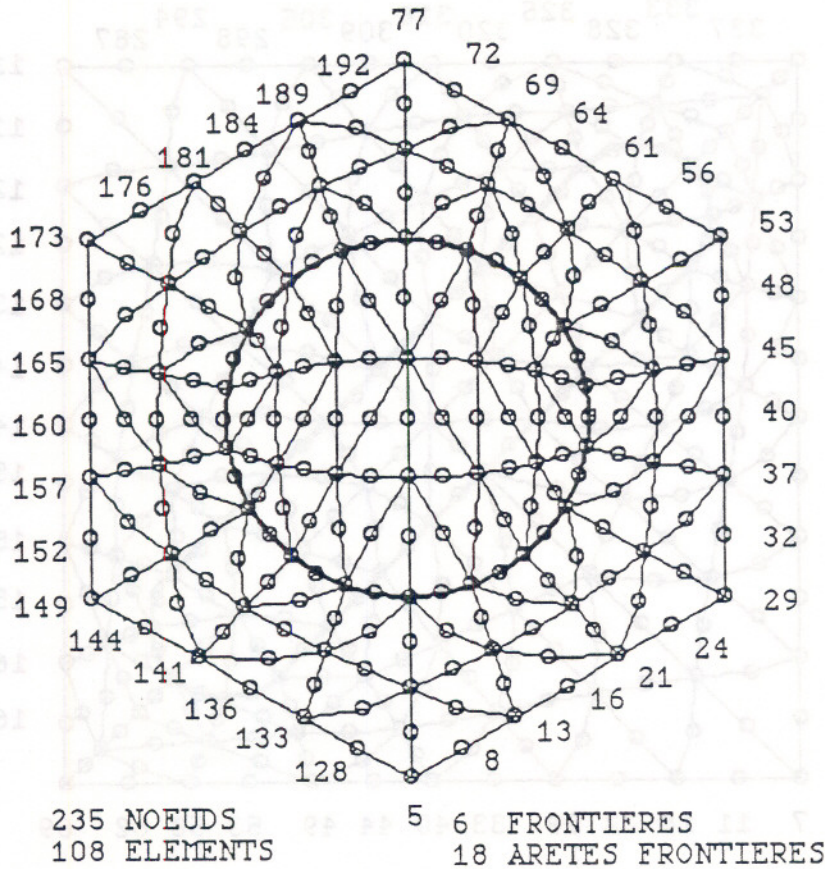
Le matériau 1 occupant le disque central possède les caractéristiques mécaniques suivantes:

$$E = 120\,000 \text{ Mpa et } \nu = 0.3$$

Le matériau 2 occupant le reste du polygone possède les caractéristiques mécaniques suivantes:

$$E = 210\,000 \text{ Mpa et } \nu = 0.3$$

La proportion en volume des matériaux 1 et 2 est respectivement de 29,70% et de 70,3%.



La méthode des éléments finis associée à l'algorithme d'Uzawa et la méthode du gradient conjugué conduit à un matériau homogénéisé équivalent obéissant également à une loi de Hooke (Symétrie des données) caractérisée par:

$$E = 174\,465 \text{ Mpa et } \nu = 0,3$$

Les résultats obtenus avec un maillage 3 noeuds différent de ceux ci de seulement 1%.

Dans le cas où les données ne sont plus symétriques il n'y a aucune raison d'obtenir un matériau homogénéisé isotrope.

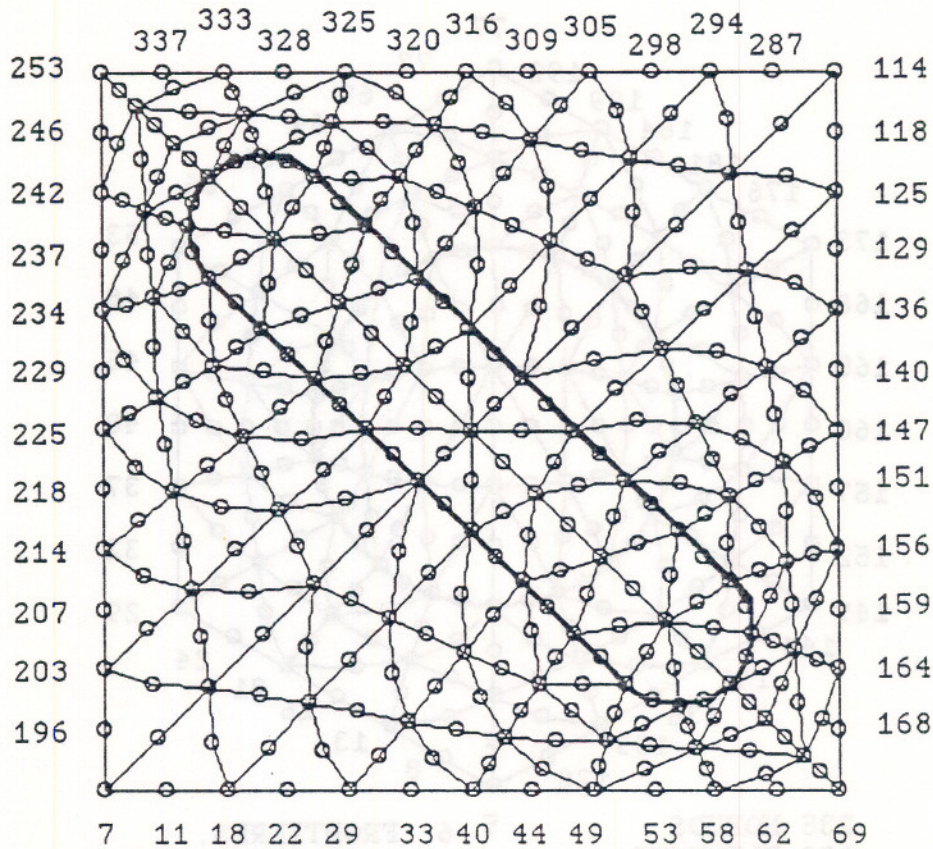
La figure suivante présente une cellule élémentaire carrée, maillée en triangles 6 noeuds. La structure est formée de deux matériaux homogènes obéissant à la loi de Hooke. Le matériau 1 occupant la partie cylindrique symétrique par rapport à la seconde bissectrice possède les caractéristiques mécaniques suivantes:

$$E = 120\,000 \text{ Mpa et } \nu = 0.3$$

Le matériau 2 occupant le reste du polygone possède les caractéristiques mécaniques suivantes:

$$E = 210\,000 \text{ Mpa et } \nu = 0.3$$

La proportion en volume des matériaux 1 et 2 est respectivement de 19,00% et de 81,00%.



360 NOEUDS 8 FRONTIERES
 164 ELEMENTS 24 ARETES FRONTIERES

La méthode des éléments finis associée à l'algorithme d'Uzawa et la méthode du gradient conjugué conduit à un matériau homogénéisé anisotrope linéaire possédant les caractéristiques mécaniques suivantes:

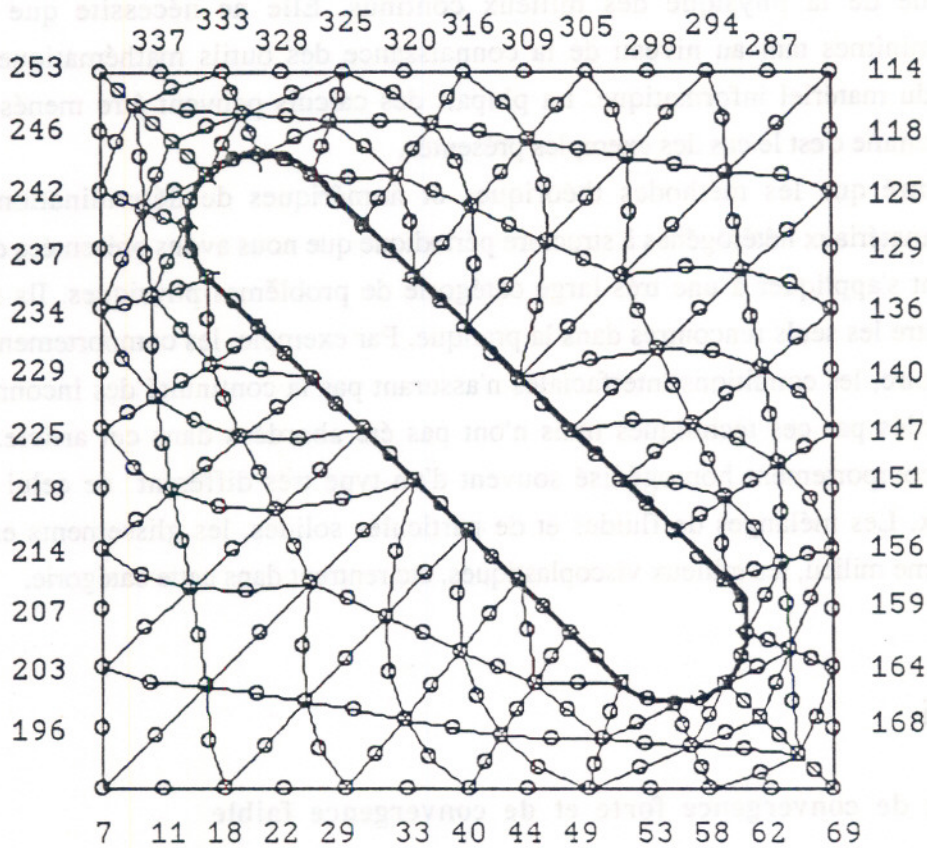
$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{xx} = 194\,259 & \sigma_{xy} = 55601 & \sigma_{xz} = -4461 \\
 \sigma_{yx} = 55601 & \sigma_{yy} = 194\,619 & \sigma_{yz} = -4666 \\
 \sigma_{zx} = -4461 & \sigma_{zy} = -4666 & \sigma_{zz} = 694\,96
 \end{array}$$

Dans le repère constitué des deux bissectrices, le tenseur des contraintes met en évidence la forte anisotropie portée par ces deux directions

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_{XX} = 203\,643 & \sigma_{XY} = 555\,24 & \sigma_{XZ} = -193 \\
 \sigma_{YX} = 555\,24 & \sigma_{YY} = 185\,389 & \sigma_{YZ} = 13 \\
 \sigma_{ZX} = -193 & \sigma_{ZY} = 13 & \sigma_{ZZ} = 694\,19
 \end{array}$$

ce qui correspond à $\nu_{12} = 0,2995$ et aux modules $E_1 = 187\,014$ Mpa, $E_2 = 170\,250$ Mpa, $G_{12} = 69419$ Mpa

Dans le cas d'un matériau troué dont la figure de la cellule de base est représentée çï dessous



on obtient pour un matériau de caractéristiques mécaniques $\nu = 0.3$ et $E = 120\,000$ Mpa:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{xx} = 56\,194 & \sigma_{xy} = 168\,12 & \sigma_{xz} = -170\,34 \\ \sigma_{yx} = 168\,12 & \sigma_{yy} = 56\,194 & \sigma_{yz} = -170\,34 \\ \sigma_{zx} = -170\,34 & \sigma_{zy} = -170\,34 & \sigma_{zz} = 252\,44 \end{array}$$

Dans le repère constitué des deux bissectrices, le tenseur des contraintes met en évidence la forte anisotropie portée par ces deux directions

$$\begin{array}{lll} \sigma_{XX} = 958\,16 & \sigma_{XY} = 112\,60 & \sigma_{XZ} = 0 \\ \sigma_{YX} = 112\,60 & \sigma_{YY} = 276\,80 & \sigma_{YZ} = 0 \\ \sigma_{ZX} = 0 & \sigma_{ZY} = 0 & \sigma_{ZZ} = 196\,91 \end{array}$$

ce qui correspond à $\nu_{12} = 0,41$ et aux modules $E_1 = 91\,235$ Mpa, $E_2 = 263\,57$ Mpa, $G_{12} = 196\,91$ Mpa

VII CONCLUSION

La méthode présentée est relativement simple d'emploi tout en donnant des résultats très riches d'un point de vue de la physique des milieux continus. Elle ne nécessite que des investissements minimes tant au niveau de la connaissance des outils mathématiques et numériques que du matériel informatique. La plupart des calculs peuvent être menés sur microordinateur comme c'est le cas des exemples présentés.

Nous avons montré que les méthodes théoriques et numériques de détermination de comportement de matériaux hétérogènes à structure périodique que nous avons présentées dans cet article peuvent s'appliquer à une très large catégorie de problèmes physiques. Ils sont cependant loin d'être les seuls rencontrés dans la pratique. Par exemple, les comportements de matériaux à mémoire, les conditions interfaciales n'assurant pas la continuité des inconnues peuvent être abordés par ces techniques mais n'ont pas été abordées dans cet article. Ils conduisent à un comportement homogénéisé souvent d'un type très différent de celui des matériaux initiaux. Les mélanges de fluides et de particules solides, les glissements entre domaines d'un même milieu, les milieux viscoplastiques, etc rentrent dans cette catégorie.

VII ANNEXES

1) Notion de convergence forte et de convergence faible

Les notions d'espaces de Hilbert et plus particulièrement celle des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ sont résumés dans ²¹.

On dit qu'une suite u_n d'éléments d'un espace de Hilbert H , muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de sa norme naturelle $\|\cdot\|$,

- **converge fortement** vers l'élément u de H lorsque n tend vers $+\infty$ si la limite de $\|u_n - u\|$ égale 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

- **converge faiblement** vers l'élément u de H lorsque n tend vers $+\infty$ si pour chaque élément $f \in H$, $(f, u_n - u)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

En particulier on dit qu'une suite u_n d'éléments de $L^2(\Omega)$, **converge faiblement** vers un élément u de $L^2(\Omega)$ lorsque n tend vers $+\infty$, si quelque soit la fonction f appartenant à $L^2(\Omega)$

$$\text{limite de } \int_{\Omega} [(u_n - u)(x) f(x)] dx \text{ égale 0 lorsque } n \text{ tend vers } +\infty$$

L'inégalité de SCHWARTZ

$$\left(\int_{\Omega} [(u_n - u)(x) f(x)] dx \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} [(u_n - u)^2(x) dx \right) \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)$$

prove qu'une suite convergeant fortement dans $L^2(\Omega)$ converge aussi faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers la même limite. La réciproque est évidemment fausse comme on peut le voir sur la suite $u_n(x) = \sin nx$. Pour

chaque f de $L^2(\Omega)$, $\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$ est un coefficient du développement de f en série de

Fourier, il tend donc vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. La suite u_n converge donc faiblement vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Elle ne converge évidemment pas fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$ car:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \pi.$$

Il est à noter que contrairement à l'image que l'on se fait généralement de la convergence, une suite u_n convergeant faiblement vers u_0 , n'a pas nécessairement ses valeurs qui se rapprochent de celles de u_0 lorsque n tend vers l'infini. On doit de plus se méfier, ce n'est pas parcequ'une suite converge fortement vers sa limite que la suite des dérivées va converger fortement vers la dérivée de la limite. La conséquence immédiate: ce n'est pas parcequ'il y a proximité des valeurs des termes d'une suite et de sa limite qu'il y a proximité des valeurs de la dérivée des termes de la suite et de la dérivée de sa limite. L'exemple $u_n(x) = u(x) + 1/n \sin(nx)$ illustre parfaitement cette situation, u_n tend fortement vers u dans $L^2[\mathbb{R}]$, $du_n(x)/dx = du(x)/dx + \cos(nx)$ ne converge pas fortement vers 0 dans $L^2[\mathbb{R}]$ lorsque n tend vers l'infini, ses valeurs oscillant entre +1 et -1 (on n'a seulement la convergence faible).

On peut parfois transformer la convergence faible en la convergence forte plus intéressante d'un point de vue pratique, en ajoutant un terme correcteur appelé parfois couche limite par analogie avec les phénomènes de mécanique des fluides et tendant vers 0. par exemple $u_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ tend faiblement vers 0 dans $L^2[0,1]$, cependant $v_n(x) = u_n(x) - e^{-n/x}$ converge fortement vers 0 dans $L^2[0,1]$.

De même une suite u_n d'éléments de $H^1(\Omega)$, converge faiblement vers un élément u de $H^1(\Omega)$ lorsque n tend vers $+\infty$ si quelque soit la fonction f appartenant à $H^1(\Omega)$:

$$\limite \text{ de } \int_{\Omega} [\nabla (u_n - u)(x) \nabla f(x)] dx + \int_{\Omega} [(u_n - u)(x) f(x)] dx \text{ égale } 0$$

lorsque n tend vers $+\infty$

L'inégalité de SCHWARTZ qui donne

$$\left(\int_{\Omega} [\nabla(u_n - u)(x) \cdot \nabla f(x)] dx \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} [(\nabla(u_n - u))^2(x) dx] \right) \left(\int_{\Omega} (\nabla f(x))^2 dx \right)$$

$$\left(\int_{\Omega} [(u_n - u)(x) f(x)] dx \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} [(u_n - u)^2(x) dx] \right) \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)$$

prouve qu'une suite convergeant fortement dans $H^1(\Omega)$ converge aussi faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers la même limite.

2) Théorème de Hill

La méthode d'homogénéisation est sous tendue par le principe d'égalité des énergies microscopique et macroscopique, il est connu sous le nom de **condition de Hill**. Grossièrement il consiste à décrire les grandeurs intervenant dans le milieu hétérogène réel en fonction de deux variables d'espaces y et Y . La première représente la position, la seconde, décrivant les très fortes variations dues à l'hétérogénéité du milieu, est la fluctuation. Dans le cas de structures périodiques, la dépendance en Y est périodique et la période est la cellule élémentaire.

Pour une sollicitation conduisant à un champ périodique, le principe mécanique de la conservation de l'énergie traduit l'équation d'équilibre sur chaque cellule. La situation la plus simple pour rechercher une loi de comportement est alors de ne pas envisager de sollicitation de volume.

Théorème de Hill

Soit un domaine D polygonal régulier comprenant des trous ou non, de bord ∂D et de normale extérieure n . Soit σ et ε des tenseurs symétriques quelconques d'ordre 2 dépendant de la variable Y . Soit $u \in P$ et $v \in Q$, deux fonctions admissibles c'est à dire appartenant à :

$$P = \{u / \varepsilon(u) = \langle \varepsilon(u) \rangle + \varepsilon(u^*), u^* \text{ périodique}^{(1)}\}$$

$$Q = \{v / \sigma(v) \cdot n \text{ antipériodique}\}$$

Pour chaque v fixé appartenant à Q , sont équivalents

$$i) \langle \sigma(v) : \varepsilon(u) \rangle = \langle \sigma(v) \rangle \langle \varepsilon(u) \rangle, \quad \text{quelque soit } u \in P$$

Condition de Hill)

¹ On dit qu'une fonction est périodique (respectivement antiupériodique) sur D si elle prend des valeurs égales (respectivement opposées) sur deux faces opposées de D et on note $\langle \rangle$ la moyenne sur D

ii) $\text{div } \sigma(v) = 0$ (Equilibre sans sollicitations volumiques)

On doit d'abord remarquer que ii) entraîne la condition de Hill

ii) \rightarrow i)

$$\langle \sigma(v) : \varepsilon(u) \rangle = \langle \sigma(v) : \langle \varepsilon(u) \rangle + \varepsilon(u^*) \rangle = \langle \sigma(v) \rangle \langle \varepsilon(u) \rangle + \langle \sigma(v) : \varepsilon(u^*) \rangle$$

Mais en utilisant la formule de Green et en tenant compte du fait que $\text{div } \sigma(v) = 0$, on a

$$\langle \sigma(v) : \varepsilon(u^*) \rangle = \frac{1}{D} \int_{\partial D} (\sigma(v).n) u^* d\gamma - \frac{1}{D} \int_D \text{div } \sigma(v) u^* dY = \frac{1}{D} \int_{\partial D} (\sigma(v).n) u^* d\gamma$$

et puisque $\sigma(v).n$ prend des valeurs opposées sur deux faces de D opposées et u^* est périodique, cette quantité est nulle. On a donc la condition de Hill: $\langle \sigma(v) : \varepsilon(u) \rangle = \langle \sigma(v) \rangle \langle \varepsilon(u) \rangle$

i) \rightarrow ii) En utilisant les égalités ci dessus, on a

$$\langle \sigma(v) : \varepsilon(u) \rangle = \langle \sigma(v) \rangle \langle \varepsilon(u) \rangle - \frac{1}{Y} \int_D \text{div } \sigma(v) u^* dY$$

L'égalité de Hill entraîne donc que $\frac{1}{D} \int_D \text{div } \sigma u^* dY = 0$ quelque soit u^* périodique, c'est à dire $\text{div } \sigma = 0$

Le théorème de Hill admet une version mathématique dans le théorème de compacité par compensation de F. Murat et L. Tartar [13].

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^3 et deux suites $u_n \in [L^p(\Omega)]^3$ et $v_n \in [L^q(\Omega)]^3$ ($1/p+1/q=1$) telles qu'il existe une constante M (indépendante de n)

$$\int_{\Omega} |u_n(X)|^p dX + \int_{\Omega} |\text{rot } u_n(X)|^p dX < M$$

$$\int_{\Omega} |v_n(X)|^q dX + \int_{\Omega} |\text{div } v_n(X)|^q dX < M$$

On suppose de plus que u_n converge faiblement dans $[L^p(\Omega)]^3$ vers u et que v_n converge faiblement dans $[L^q(\Omega)]^3$ vers v , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(X) v_n(X) dX = \int_{\Omega} u(X) v(X) dX \quad \text{dans l'ensemble des distributions}$$

Le théorème de compacité est en général faux sans les hypothèses sur $\text{rot } u_n$ et $\text{div } u_n$. Il s'utilise en particulier de la manière suivante. Considérons l'équation d'équilibre classique rencontrée dans de nombreux domaines de la physique

$$\text{div } \sigma_\varepsilon(u_\varepsilon) = f \quad \text{valable sur un domaine } \Omega \text{ (} f \text{ assez régulière)}$$

où $\sigma_\varepsilon(u_\varepsilon)$ représente le tenseur des contraintes dépendant d'un paramètre de structure ε associé à l'inconnue u_ε qui peut être un déplacement (pour fixer les idées).

Si on suppose que la valeur de u_ε en un point y donné est le résultat des actions d'une part du milieu continu équivalent et d'autre part de fluctuations périodiques de période ε dues aux hétérogénéités, on peut donc considérer que u_ε dépend des deux variables y et $Y=y/\varepsilon$ de sorte qu'on peut écrire

- $u_\varepsilon(y)=u(y, Y)$, la dépendance de u en Y étant périodique de période 1
- $\text{div}_y \sigma[u_\varepsilon(y)]=f$

Dans ces conditions , on obtient

$$\int_{\Omega} \sigma \left[v \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right] D \left[v \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right] dy = \left[\frac{1}{\text{mes} \left(\frac{\Omega}{\varepsilon} \right)} \int_{\frac{\Omega}{\varepsilon}} \sigma [v(Y)] dY \right] \left[\frac{1}{\text{mes} \left(\frac{\Omega}{\varepsilon} \right)} \int_{\frac{\Omega}{\varepsilon}} D [v(Y)] dY \right]$$

Dans ce cas la moyenne du produit égale le produit des moyennes. Cette relation constitue la forme mathématique de la condition de Hill.

On rappelle également un résultat dû à L.Tartar ¹⁴ que nous serons amenés à utiliser dans cet article.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , pour $y \in \mathbb{R}^3$ et $Y \in \mathbb{R}^3$, on considère une fonction $a(y, Y)$ vérifiant:

- périodique en Y , de période $Z = (\alpha, \beta, \chi)$,
- $\lim_{y \rightarrow y_0} \sup_Y |a(y, Y) - a(y_0, Y)| = 0$

On pose $a_\varepsilon(y)=a(y, y/\varepsilon)$ alors a_ε converge faiblement dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ vers sa moyenne sur une période soit $\frac{1}{\alpha\beta\chi} \int_Y a(y, Y) dY$

D'autre part, on a vu que la limite d'un produit égale le produit des limites lorsque l'une des deux limites a lieu fortement. Cependant il n'est pas nécessairement égal au produit des limites lorsque les deux convergences ont lieu seulement faiblement. Pourtant en imposant un peu plus

que la convergence faible sur les deux facteurs il est possible d'obtenir la convergence vers le produit des limites.

2 Opérateurs de localisation

1) Dans le cas de l'élasticité linéaire (par exemple) la relation de Hill signifie qu'il y a égalité entre le travail macroscopique et le travail microscopique pour un champ de déplacement périodique.

La relation ii) nous conduit à considérer le problème suivant

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(u) &= 0, \\ \varepsilon(u) &= E + \varepsilon(u^*) \text{ et } \sigma(u) \cdot n \text{ antipériodique et } u^* \text{ périodique} \end{aligned}$$

Lorsqu'on impose de plus $\langle \varepsilon(u) \rangle = E$, le problème est appelé problème de **localisation de déformation**. Ce problème admet une solution unique u à une constante près (vérifiant la relation de Hill). On peut donc étudier la relation "localisant" $\varepsilon(u)$ à partir de E . Le tenseur de localisation D est défini par

$$\varepsilon(u) = D : E$$

Ce tenseur est très important car son utilisation permet d'exprimer facilement la loi de comportement homogénéisée. Par exemple si les matériaux initiaux obéissent à des lois de comportement linéaire notées $\sigma = A : \varepsilon$, la loi de comportement homogénéisée reliant la moyenne en espace du tenseur des contraintes à la moyenne du tenseur des déformations

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \langle A : \varepsilon \rangle = \langle A : D : E \rangle = \langle A : D \rangle : E, \text{ d'où } \Sigma = a : E \text{ avec } a = \langle A : D \rangle$$

On tire quelques propriétés de

$$E = \langle \varepsilon \rangle = \langle D : E \rangle = \langle D \rangle : E, \text{ d'où } \langle D \rangle = I = \langle D^t \rangle \text{ (Symétrie de } \varepsilon \text{ et } E \text{)}$$

D'autre part on peut montrer que $\Sigma = \langle D^t : \sigma \rangle$. En effet, la condition de Hill donne:

$$\langle \sigma \rangle \langle \varepsilon \rangle = \langle \sigma \varepsilon \rangle = \langle \sigma D E \rangle = \langle \sigma D \rangle E, \text{ d'où } \langle \sigma \rangle = \langle \sigma D \rangle$$

Ainsi $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma^t \rangle = \langle \sigma^t D \rangle = \langle (D^t \sigma)^t \rangle = \langle D^t \sigma \rangle$. D'où $\Sigma = \langle D^t \sigma \rangle$, on peut donc obtenir autre expression de a

$$a = \langle D^t : A : D \rangle$$

On peut de même considérer le tenseur de **localisation de contraintes** C défini par

$$\operatorname{div} \sigma(v) = 0 \quad \langle \sigma(v) \rangle = \Sigma \quad \sigma = C \Sigma$$

Noter que $E = \langle \varepsilon(u) \rangle = \langle A : \sigma \rangle = \langle A : C \rangle : \Sigma$, ce qui entraîne si la loi homogénéisée est la relation qui relie $E = \langle \varepsilon(u) \rangle$ à $\langle \sigma \rangle = \Sigma$, on a $\langle \varepsilon(u) \rangle = a \langle \sigma \rangle$ où $a = \langle A : C \rangle$

On montre qu'on a aussi

$$\langle D \rangle = \langle C^t \rangle = I \text{ et } E = \langle C^t : \sigma \rangle = \langle C^t : A : \varepsilon \rangle = \langle C^t : A : C \rangle : E$$

donc $a = \langle C^t : A : C \rangle$

Le problème de localisation de contraintes admet une solution unique $\sigma(u) = C \Sigma$, ce qui donne pour $\Sigma = I$ (identité)

$$\text{div } C = 0$$

$C.n$ antipériodique

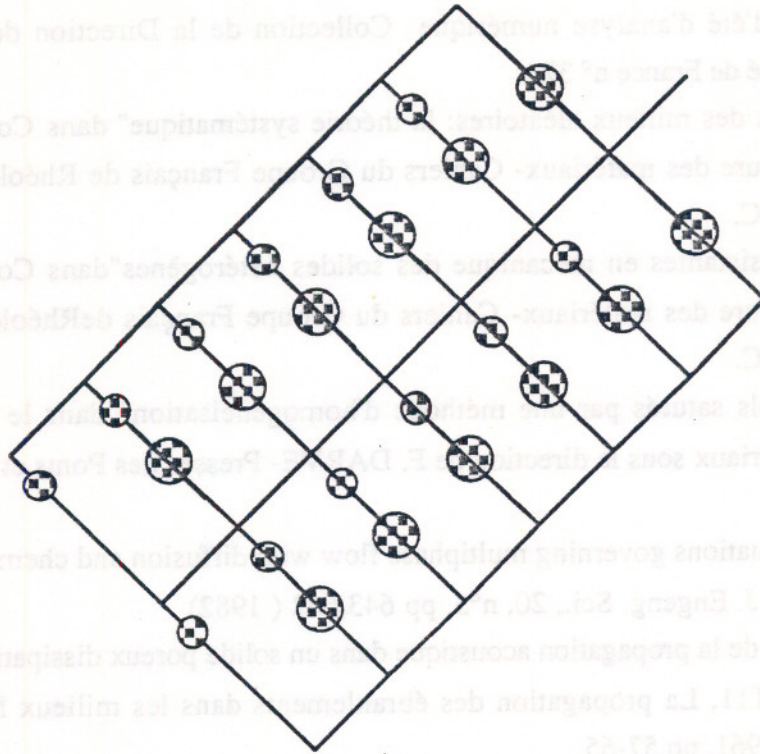
Ainsi pour toute fonction u est admissible (u^* périodique et $\sigma(u).n$ antipériodique), le théorème de Hill donne:

$$\langle C \varepsilon(u) \rangle = \langle C \rangle \langle \varepsilon(u) \rangle = I \langle \varepsilon(u) \rangle = \langle \varepsilon(u) \rangle = E$$

3 Périodicité

Notion de fonction "périodiquable"

On peut définir la notion de fonction périodique dans l'espace à 2 dimensions, constitué d'un recouvrement de cellules identiques déduites d'une cellule élémentaire par périodicité, par exemple à partir d'un polygone régulier ayant 3,4,6 côtés. Mais on peut aussi imaginer des situations très variées beaucoup plus compliquées et également la même chose dans l'espace à 3 dimensions.



Exemple d'une structure périodique

Les fonctions périodiques, par exemple, sur la cellule élémentaire, ont des valeurs égales sur chacune des deux faces opposées du polygone. Si elles sont dérivables seulement sur cette cellule, elles n'admettent pas forcément des gradients égaux sur les faces opposées. Cependant les fonctions périodiques qui sont la restriction d'une fonction de $H^1[\text{espace}]$ à une cellule élémentaire ont des gradients égaux sur les faces opposées. Une fonction périodique sur une cellule Ω est, par définition, une fonction périodique sur Ω prolongeable à une fonction de $H^1[\text{espace}]$ (admettant donc des gradients égaux sur deux faces opposées) .

VIII BIBLIOGRAPHIE

- 1 "Méthodes d'homogénéisation en mécanique des solides " dans Comportement rhéologiques et structure des matériaux- Cahiers du Groupe Français de Rhéologie (1980). Editions Anciens ENPC.
- 2 "Asymptotic Analysis for periodic Structures". North Holland, Amsterdam 1978 et "Non-homogeneous Media and Vibration Theory", Lecture notes in physics n° 127, Springer Verlag (1980) et en collaboration "Les méthodes de l'homogénéisation: théorie et applications

en physique" Ecole d'été d'analyse numérique Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France n° 37

3 "Propriétés linéaires des milieux aléatoires: la théorie systématique" dans Comportement rhéologiques et structure des matériaux- Cahiers du Groupe Français de Rhéologie (1980). Editions Anciens ENPC.

4 "Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes" dans Comportement rhéologiques et structure des matériaux- Cahiers du Groupe Français de Rhéologie (1980). Editions Anciens ENPC.

5 "Description des sols saturés par une méthode d'homogénéisation" dans le Manuel de rhéologie des géomatériaux sous la direction de F. DARVE- Presses des Ponts et Chaussées;(1987)

6 "On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reaction in porous media"- Int. J. Engeng. Sci., 20, n°5, pp 643,662 (1982)

7 "Théorie généralisée de la propagation acoustique dans un solide poreux dissipatif - Colloque Int. du C.N.R.S. n° 111, La propagation des ébranlements dans les milieux hétérogènes, Marseille, septembre 1961, pp 57-65

8 "Homogénéisation des milieux périodiques" dans le Manuel de rhéologie des géomatériaux sous la direction de F. DARVE- Presses des Ponts et Chaussées;(1987)

9 "The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals" J. Mech. Phys. Solids, vol 15, 1967, pp 79-95

10 On pourra consulter "Introduction à la mécanique des milieux continus" de P. GERMAIN et F. MULLER chez MASSON

11 "Remarques sur la procédure d'assimilation d'un matériau hétérogène à un milieu continu équivalent dans Comportement rhéologique et structure des matériaux- Cahiers du Groupe Français de rhéologie (1980). Editions Anciens ENPC.

12 On pourra consulter: "Les inéquations en mécanique et en physique" par G.DUVAUT et J.L.LIONS Editions Dunod (1972)

13 L.Tartar "Cours Peccot" - Collège de France

14 F. Devries et F. Léné: Homogenization at set macroscopic stress: numerical implementation and application. Rech. Aérosp. 1987, n° 1, pp 33- 51

15 Modulef: Procédures de maillage automatique

16 M. Fortin et R. Glowinski: Méthodes de lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique de problèmes aux limites. Méthodes mathématiques de l'informatique n° 9. Dunod. 1982

17 K-J Bathe: Finite element procedures in engineering analysis. Prince Hall 1982 ou bien G. DHATT et G. TOUZOT: Une présentation de la méthode des éléments finis. Collection Université de Compiègne. Maloine etc

18 J. J. Lions: Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal. Les Presses Universitaires de Montréal. 1976.

19 C.François: Les développements asymptotiques en mécanique et en physique. Publications ENSTA. 1981

20 O. Debordes et All. Note Technique n° 85-3 - Charges limites de milieux fortement hétérogènes - Rapport de fin de contrat MIR n° 83 S 0780.

21 M. Sibony: Analyse numérique III. Itérations et approximations. Hermann, Editeurs (1988)

Mots clés: homogénéisation, hétérogène, milieux perforés, éléments finis