

COMPTES-RENDUS DU

20ème Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie

Centre National de la Recherche Scientifique

Paris, 27, 28 et 29 novembre 1985

20 ANS DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE  
PROGRES RECENTS

20 YEARS OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY  
RECENT PROGRESS

Textes réunis par

Daniel BOURGOIN  
Directeur de Recherche au C.N.R.S.  
Laboratoire de Biophysique, U.A. 593  
Faculté de Médecine Cochin Port-Royal  
Paris 14ème

et

Didier GEIGER  
Maître de Conférence à l'Université Paris Val-de-Marne  
Créteil

**COMITE D'HONNEUR**

**HONORARY COMMITTEE**

Maurice JOLY  
Bernard PERSOZ  
Pierre HABIB  
Robert COURTEL  
Christian HUET

Anciens Présidents du Groupe

---

**COMITE D'ORGANISATION**

Président : Daniel BOURGOIN, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris

Secrétaire : Didier GERGER, Université Paris Val-de-Marne, Créteil

Trésorier : Jean-Paul BOMBLÉD, Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, Paris

avec la participation des Elèves de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Edition :

Groupe Français de Rhéologie  
12, rue Brancion  
F - 75015 PARIS

Laboratoire de Mécanique Physique  
Université Paris 12  
F - 94010 CRETEIL

SOMMAIRE  
CONTENTS

	Pages
<b>PREMIERE JOURNEE</b> FIRST DAY	
<b>ALLOCATION D'OUVERTURE</b> OPENING SPEECH J. D. WEBER	9
<b>CONFERENCE DU 20ème ANNIVERSAIRE DU GROUPE</b> LECTURE ON THE 20th ANNIVERSARY OF THE GROUP "HISTORIQUE DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE" HISTORICAL ACCOUNT OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY B. PERSOZ.	12
<b>PREMIERE SESSION</b> FIRST SESSION	
<b>THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DES VITESSES EN DEFORMATION QUASI-STATIQUE D'UN MILIEU VISCOELASTIQUE STANDARD</b> THEOREM OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF VELOCITIES IN QUASI-STATIC DEFORMATION OF VISCOELASTIC STANDARD MEDIA M. BASSOUT-LELLICH	30
<b>RESULTATS RECENTS RELATIFS A LA CONJECTURE L'ERICKSEN</b> NEW RESULTS ON THE ERICKSEN'S CONJECTURE G. MAYNE	40
<b>SCHEMAS THERMOMECHANIQUES DE L'HYSTERESIS ET RESULTATS RECENTS EN GRANDES DEFORMATIONS ELASTO-PLASTIQUES</b> THERMOMECHANICAL SCHEMES OF HYSTERESIS AND NEW RESULTS IN THE FIELD OF FINITE STRAIN PLASTICITY D. FAVIER, P. GUELIN et P. PEGON.	53
<b>LOCALISATION DES DEFORMATIONS DANS LES MILIEUX RADOU- CISSANTS</b> STRAIN LOCALISATION IN SOFTENING MEDIA P. HABIB.	70
<b>DEUXIEME SESSION</b> SECOND SESSION	
<b>COMPORTEMENT ET MODELISATION D'UNE ROCHE POREUSE (CRAIE) JUSQU'A DES PRESSIONS DE CONFINEMENT DE 50 MPa</b> BEHAVIOUR AND MODELISATION OF A POROUS ROCK (CHALK) UNDER CONFINING PRESSURE UP TO 50 MPa J. F. SHAO et J. P. HENRY	83

- COMPORTEMENT MECANIQUE DE SOLS ARGILLEUX  
NATURELS EN RELATIONS AVEC LEUR STRUCTURE ; CAS DES  
ARGILES SENSIBLES DU CANADA  
RELATIONSHIP BETWEEN MICROSTRUCTURE AND MECHANICAL  
BEHAVIOUR OF SOME NATURAL DELAYED SOILS : THE EASTERN  
CANADA SENSITIVE CLAYS.  
P. DELAGE 95
- LE RADOUCCISSEMENT DU BETON EST-IL UN PHENOMENE RHEO-  
LOGIQUE  
IS SOFTENING OF CONCRETE A RHEOLOGICAL PHENOMENON ?  
J.P. TORRENTI. 108
- LOIS D'ECOULEMENT ET ENDOMMAGEMENT DES ACIERS DANS  
LE DOMAINE DES TEMPERATURES MOYENNES  
FLOW LAWS AND DAMAGE OF STEEL IN THE RANGE OF  
WARM CONDITIONS  
J.C. GELIN. 117
- ENDOMMAGEMENT DE PLASTICITE  
DUCTILE DAMAGE  
T. GUENNOUNI 131
- DETERMINATION EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT ELASTIQUE  
TANGENT A L'ORIGINE : APPLICATIONS AUX METAUX  
EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE ELASTIC BEHAVIOUR  
TANGENTIAL AT THE ORIGIN : APPLICATIONS TO METALS  
S. HAN et B. WACK. 145
- DEUXIEME JOURNEE  
SECOND DAY  
TROISIEME SESSION  
THIRD SESSION  
ETUDE DU MELANGE SIMPLE DANS LES ECOULEMENTS DE TYPE  
NEWTONIEN  
EXTENSIVE MIXING IN SOME NEWTONIAN FLOWS  
A. POITOU, Y. DEMAY et J.F. AGASSANT 161
- ETUDE DU COMPORTEMENT DE L'AMIDON EN PHASE FONDUE  
A L'AIDE D'UN RHEOMETRE A PRE-CISAILLEMENT : LE  
RHEOPLAST  
STUDY OF THE BEHAVIOUR OF MOLTEN STARCH USING  
A RHEOMETER WITH PRE-SHEARING : THE RHEOPLAST  
B. VERGNES, J.P. VILLEMAIRE, P. COLONNA et J. TAYEB 174
- RHEOLOGIE ET STRUCTURE DES SUSPENSIONS CONCENTREES  
DE SPHERES DURES  
THE RHEOLOGY AND STRUCTURE OF CONCENTRATED SUSPENSIONS  
OF HARD SPHERES  
P. MILLS ET P. SNABRE 186
- UNE NOUVELLE APPROCHE DE THERMODYNAMIQUE MACROSCOPIQUE  
POUR LA RHEOLOGIE DES MATERIAUX A REPONSE DIFFEREE :  
LE FORMALISME PAR VARIABLES NATURELLES  
A NEW APPROACH OF MACROSCOPIC THERMODYNAMICS FOR THE  
RHEOLOGY OF TIME DELAYED MATERIALS: THE FORMALISM  
BY NATURAL VARIABLES  
C. HUET 197
- QUATRIEME SESSION  
FOURTH SESSION  
MODELES DE COMPORTEMENT MECANIQUE DU VENTRICULE GAUCHE  
ET RHEOLOGIE DU MYOCARDE  
MODELS FOR THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF THE LEFT VEN-  
TRICLE AND THE RHEOLOGY OF MYOCARDIUM  
M. MOUTTAHAR et C. ODDOU 213
- RHEOLOGIE DES LIGAMENTS : VERS UN CAHIER DES CHARGES  
POUR LA REALISATION DES PROTHESES  
THE RHEOLOGY OF LIGAMENTS : TOWARD A SPECIFICA-  
TIONS SHEET TO BUILD ARTIFICIAL IMPLANTS  
A. BABA AHMED, J. FRISMAND et D. GEIGER 223
- RHEOMETRE APPLICABLE A L'ETUDE DE SUBSTANCES ELASTO-  
THIXOTROPIQUES  
A RHEOMETER FOR STUDYING ELASTO-THIXOTROPIC FLUIDS  
M. KRATZ, J.M. ZAHM, J.P. ARNOULD, J. DIDELOU, 231  
D. QUEMADA et C. DUVIVIER.
- VISCOSIMETRE A FERROLUIDE, APPLICATION A L'HEMORHEOLOGIE  
A FERROFLUID VISCOMETER, APPLICATION TO HAEMORHEOLOGY  
J.P. BRANCHER et M. LUCIUS 235
- APPROCHE DE L'AGREGATION ERYTHROCYTAIRE PAR ANALYSE  
D'IMAGES  
APPROACH TO RED BLOOD CELL AGGREGATION BY IMAGE  
ANALYSIS  
F. PAULUS, P. DIXNEUF et J.F. STOLZ 242
- TROISIEME JOURNEE  
THIRD DAY  
CINQUIEME SESSION  
FIFTH SESSION  
COMPORTEMENT DE BITUMES ET DE BITUME-POLYMERES EN  
ECOULEMENT DE CISAILLEMENT ET D'ELONGATION  
BEHAVIOUR OF ASPHALTS AND ASPHALT-POLYMERS IN SHEAR  
AND ELONGATIONAL FLOW  
P. ATTANE, A. SOUCEMARIANADIN et J.P. PRUD'HOMME 252

FISSURE DANS UN MILIEU INHOMOGENE FINI, CALCUL NUMERIQUE  
DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE  
CRACKS IN AN INHOMOGENEOUS FINITE MEDIUM, NUMERICAL  
CALCULUS OF THE STRAIN INTENSITY FACTORS

266

R. EL ABDI et G. VALENTIN

APPLICATION DE L'INTEGRALE DE CAUCHY A LA METHODE  
DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT  
APPLICATION OF THE CAUCHY INTEGRAL TO THE DISPLACE-  
MENT DISCONTINUITY METHOD

284

A. BOUHADDANE, E. MOREL, J.P. HENRY, D. KONDO et  
D. FEDRIGO

RESISTANCE A LA FISSURATION DU MATERIAU PAPIER  
FRACTURE RESISTANCE OF PAPER

295

J. POUYET, X. VOLOZINSKIS, J. SILVY et J. DUGROCA

SIXIEME SESSION  
SIXTH SESSION

ETUDE DE LA MICROFISSURATION D'ASSEMBLAGES DE TUBES  
METALLIQUES MINCES, COLLES PAR L'INTERMEDIAIRE D'UNE  
RESINE EPOXYDE  
A STUDY OF MICROCRACKS IN THIN METALLIC TUBES BONDED  
WITH AN EPOXY RESIN

319

Y. DELMAS et C. COLLOT

ETUDE EXPERIMENTALE ET THEORIQUE DU COLLAGE DES  
TUBES ET DES BRANCHIMENTS CYLINDRIQUES  
EXPERIMENTAL AND THEORETIC ANALYSIS OF A METALLIC  
TUBULAR ADHESIVE-JOINT

332

Y. GILIBERT et A. RIGOLOTT

FIN DU COLLOQUE  
CLOSE OF CONFERENCE

LES COLLOQUES ANNUELS DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE  
(1965-1986)  
THE ANNUAL COLLOQUIA OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY  
(1965-1986)

347

LE GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE  
THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY

348

ALLOCATION D'OUVERTURE DU 20ème COLLOQUE DU GROUPE FRANCAIS DE  
RHEOLOGIE

OPENING SPEECH OF THE 20th COLLOQUIUM OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY

Jean Daniel WEBER, Président du Groupe

Mes chers collègues,

J'ai le grand plaisir d'ouvrir le 20<sup>e</sup> colloque annuel du Groupe Français  
de Rhéologie.

Notre groupe a été fondé il y a vingt ans : les colloques annuels qu'il a  
organisés ont porté sur des thèmes tels que la rhéologie des systèmes à  
deux phases, la rhéologie en relation avec la structure, ou encore la  
viscoplasticité, la thermodynamique des comportements rhéologiques, les  
applications de la rhéologie aux problèmes de fabrication industrielle.  
Nous avons eu plus récemment des colloques sur les comportements rhéolo-  
giques sous des sollicitations rapides et dynamiques, les méthodes et appa-  
reils de mesure en rhéologie, ainsi que sur l'anisotropie en rhéologie.

Ces thèmes montrent toute la diversité et tout l'intérêt théorique et  
pratique de notre discipline, que nous retrouverons certainement dans le  
présent colloque.

Peut-être convient-il de rappeler ici les termes dans lesquels Jean MANDEL  
évoquait cette diversité, dans son introduction au dictionnaire de rhéologie :  
"Oh, certes, la nature est complexe et quoiqu'il ne s'agisse que de Physique,  
le comportement des corps du point de vue de leurs déformations n'est pas  
beaucoup plus simple que le comportement psychologique des individus. Les  
cadres que notre esprit élabore s'adaptent plus ou moins bien à ce comporte-  
ment ...".

Notre colloque est consacré aux progrès récents de la rhéologie. Il sera,  
j'en suis sûr, l'occasion d'échanges fructueux et un plein succès. Les commu-  
nications porteront sur les métaux, les polymères, le béton, les sols, les  
roches, les suspensions, la biorhéologie.

Je tiens à remercier Messieurs DANIEL BOURGOIN, DIDIER GELGER, JEAN-PAUL BOMBED, qui ont organisé ce colloque avec l'aide des élèves de l'E.N.P.C.

Je tiens à remercier également la direction générale du C.N.R.S. qui a mis à notre disposition, comme l'an passé, cette magnifique salle de conférences.

Je vous souhaite à tous de passer trois journées enrichissantes, et donne la parole à Monsieur Bernard PERSOZ qui nous présentera une conférence sur l'histoire du Groupe Français de Rhéologie.

CONFERENCE DU 20ème ANNIVERSAIRE DU GROUPE  
LECTURE ON THE 20th ANNIVERSARY OF THE GROUP

par  
by

Bernard PERSOZ

Ancien Président du Groupe

## HISTORIQUE DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

HISTORY OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY

B. PERSOZ

68, Boulevard Saint-Michel  
75006 PARIS

### RESUME

Le Groupe Français de Rhéologie fonctionne depuis 1954. C'était à l'origine une émanation de la Commission Nationale de Rhéologie, formée au C.N.R.S. sous l'impulsion de Henri Weiss. Depuis 1964, le groupe, devenu autonome avec Jean Mandel comme premier président, finance lui-même ses Cahiers. Les différentes activités du groupe sont examinées ici : bulletin, conférences, colloques annuels, congrès international de 1972, terminologie, documentation, enseignement, rédaction de livres et travaux interlaboratoires.

### ABSTRACT

The French Group of Rheology has functioned since 1954. At the beginning it emanated from the National Commission of Rheology initiated by Henri Weiss. Since 1964 this group, which became autonomous under Jean Mandel, its first president, has financed itself its "Cahiers". The Group's various activities are reviewed : a bulletin, conferences, annual colloquia, the International Congress of 1972, terminology, documentation, teaching, editing of books and interlaboratory exchanges.

Conférence inaugurale du 20ème Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie prononcée le 27 novembre 1985.

A l'occasion du 20e colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie, le bureau m'a demandé de résumer l'histoire de notre association. C'est ce que je vais m'efforcer de faire en vous invitant d'abord à une brève incursion dans un passé plus lointain.

### LE MOT "RHEOLOGIE"

C'est en 1928 que Bingham a proposé d'employer le mot Rheology pour désigner la science dont nous nous occupons. C'est également en 1928 que fut créée aux Etats-Unis, sous l'impulsion de Bingham et avec l'aide de Reiner, la Société de Rhéologie, ainsi que le Journal de Rhéologie. Divers cours de rhéologie furent donnés au Collège La Fayette à Easton, puis à l'université de Princeton et à celle de Jérusalem par Reiner.

En Angleterre le mot rhéologie s'est trouvé assez rapidement d'un usage courant, puisque, dès 1938, Scott Blair publia son Introduction à la rhéologie industrielle. En 1940 fut fondé un club anglais des Rhéologues, le Rheologist's Club, qui s'est transformé plus tard en Société Britannique de Rhéologie.

Mais, comme cela arrive parfois, on ne faisait pas grand-chose en France dans ce sens. Et pourtant nombre de Français s'étaient illustrés comme précurseurs : Palissy, Amontons, Désagulier, Coulomb... et surtout, au XIXe siècle : Poiseuille, Tresca, Lamé, Saint-Venant, Vicat, Navier, Cauchy, Poisson, Couette et bien d'autres... Je dois néanmoins signaler que l'idée de fonder un groupe de rhéologie avait été évoquée après la guerre dans divers laboratoires français, notamment à Bellevue en 1946, mais chacun était surchargé de travail, de sorte que ces vœux pieux et disparates ne furent suivis d'aucune réalisation.

### LE CONGRES D'OXFORD,

Notre histoire a commencé - on peut le dire - au 2e congrès international, qui s'est tenu à Oxford en juillet 1953. Quelques Français assistaient à cette manifestation, dont plusieurs firent des communications : Mme Dobry-Duclaux, Pierre Habib, Henri Weiss, Maurice Joly et Pierre Thirion.

C'est au cours de ce congrès qu'il a été décidé de former un Comité International de Rhéologie, dans lequel chaque pays aurait un représentant. Le rôle dévolu à ce comité était :

- 1.d'organiser les futurs congrès internationaux.
- 2.d'encourager la création de sociétés de rhéologie dans divers pays,
- 3.d'intervenir comme coordonnateur dans d'autres aspects de coopération internationale, toujours dans le domaine de la rhéologie.

La France était représentée au sein de ce comité par Henri Weiss, ancien directeur de l'Ecole du Pétrole. Pendant les discussions, Scott Blair insista beaucoup auprès de lui pour qu'un groupe fût créé dans notre pays.

A cette époque, en effet, il existait une société de rhéologie aux Etats-Unis, en Angleterre, en Suède, en Allemagne et aux Pays-Bas. Au Japon il existait une société d'essai des matériaux qui comportait une section rhéologie, mais il n'y avait encore rien dans les pays catholiques : Italie, Espagne, Belgique et France, ni a fortiori en Amérique latine.

Après les vacances de 1953, donc, Weiss prit son bâton de pèlerin et rendit visite à diverses personnalités et notamment

à Georges Champetier, directeur adjoint du CNRS, auquel il suggéra la formation d'une Commission Nationale de Rhéologie.

#### LA COMMISSION NATIONALE DE RHEOLOGIE

C'est assez rapidement que cette impulsion fut suivie d'effet, puisque la réunion constitutive de cette commission se déroula dès le 4 décembre 1953. Joseph Pérès en était le président, le général Nicolau et Marcel Mathieu les vice-présidents, tandis que Weiss préféra garder le rôle effacé mais efficace de Délégué Général, avec Georges Vallet comme adjoint. Les autres membres étaient : Chedin, Chevenard, Crussard, Mme Dobry-Duclaux, Dubois, Duriez, Hénin, Letort, L'Hermite, Long, Malavard, Mayer, Mocquet, Orsel, Sadron, Stahl et Vellingier. D'autres personnes assistaient parfois aux réunions : Champetier puis Coulomb, en tant que responsables du CNRS, Mandel, Nicolas, Luc Gauthier, Joly, Lafuma, Thirion, Vironnaud, Rivière, puis, plus tard, Buvet et Persoz. Quelques nouveaux membres furent nommés : Gibrat, Thiry, Pomey, Vallet, Paul Germain.

Cette commission CNRS n'était pas distributrice de crédits. Son rôle se bornait à donner des directives et des avis. Dès sa première séance, elle nomma une commission restreinte formée de Mme Dobry-Duclaux, Mathieu et Weiss pour étudier la constitution d'un groupe de rhéologie.

#### LE PREMIER GROUPE DE RHEOLOGIE

Ces trois personnes se réunirent le 16 décembre 1953, s'accordèrent sur la dénomination de Groupe Français d'Etudes de Rhéologie et décidèrent que ce ne serait ni une société, ni une association, mais un organisme destiné à faciliter les échanges d'idées entre ses membres. Les buts premiers qui lui étaient assignés étaient les suivants :

- 1. Bien définir la rhéologie, ses limites, ses problèmes, son langage.
- 2. Expliquer l'effort de synthèse qui a été fait par les développements théoriques et expérimentaux dans le domaine élastico-visqueux.
- 3. Opérer un brassage de personnalités très variées avec articulation par la Commission Nationale de Rhéologie.

Le programme de travail du groupe devait être annuellement indiqué par la Commission Nationale.

La première réunion du groupe eut lieu le 26 février 1954 au 233 boulevard Raspail, dans une salle de l'Institut Supérieur des Matériaux, prêtée par le général Nicolau. Actuellement cet institut est installé à St-Ouen et le bâtiment du boulevard Raspail est entièrement occupé par un lycée technique. Cette première manifestation réunit 65 participants assez enthousiastes. La première conférence fut faite par Marcel Mathieu sur les principaux comportements rhéologiques.

Il y eut encore deux séries de conférences le 28 mai et le 17 décembre de la même année, puis l'activité continua au rythme d'une réunion trimestrielle. Aucune cotisation n'était demandée aux membres.

#### LES CAHIERS (CNRS)

Le CNRS qui, déjà, expédiait les convocations, accepta d'éditer à ses frais, en offset, le Cahier du Groupe Français d'Etudes de Rhéologie, dont le premier numéro parut le 15 novembre

1955 et les trois suivants dans le courant de 1956. Ces quatre numéros formèrent le tome I. Par la suite il y eut quatre numéros par an. C'est de cette époque que provient la fameuse couverture bleue, conservée depuis. La rédaction était assurée par Pierre Thirion. La substance principale de ces Cahiers était constituée par les textes des conférences prononcées aux réunions, mais il y avait aussi une intéressante revue bibliographique assurée en quasi-totalité par la Société Péchiney, ainsi que des informations sur la vie du Groupe, qui, actuellement, figurent dans un bulletin séparé.

Le dernier tome de quatre numéros, le tome VI, daté de 1961, fut édité en réalité vers 1962.

Pour recevoir les Cahiers, il fallait s'abonner au service d'éditions du CNRS, au prix de 1600 francs (anciens) par an.

Malheureusement il y eut assez peu d'abonnés, car aucune publicité n'était faite pour en recruter. Vers 1961, on n'en comptait que 108. L'opération fut déficitaire pour le CNRS. Vers les années 1960, 61, divers mathématiciens de l'Institut Henri Poincaré souhaitèrent éditer, avec l'aide du CNRS, un Journal de Mécanique d'assez haut niveau. Les crédits qui étaient utilisés à l'édition des Cahiers et à l'expédition des convocations, furent affectés à ce nouveau journal.

Ce problème des Cahiers était crucial. Nous ne pouvions pas fonctionner sans les Cahiers. C'est pourquoi l'histoire du Groupe est intimement liée à celle des Cahiers. Il fallut envisager une nouvelle solution.

#### LA NOUVELLE COMMISSION NATIONALE DE RHEOLOGIE

La Commission Nationale de Rhéologie, après s'être réunie sept fois, était restée en sommeil depuis le 19 décembre 1959. Le président Pérès, en effet, ne désirait plus continuer à s'en occuper. Il désigna lui-même son successeur, Robert Mazet, qui mourut au début de 1962.

Le 14 avril 1962, Coulomb, directeur du CNRS, prit un arrêté nommant pour trois ans une nouvelle commission avec comme président, donc, Robert Mazet. Il y avait trois vice-présidents : le général Nicolau, Marcel Mathieu et Jean Mandel. Henri Weiss était toujours délégué général. Les autres membres étaient : Chaudron, Crussard, Dubois, Hénin, Joly, Jacquesson, Kravtchenko, Lafuma, Letort, L'Hermite, Peltier, Pechès, Pomey, Sadron, Thiry, Vodar, Vogel, et en outre, il y avait cinq membres adjoints : Buvet, Habib, Persoz, Thirion et Vallet.

Robert Mazet avait instauré ce que nous appelions le "Tour d'horizon". A chaque réunion, chaque membre de la Commission résumait les travaux de rhéologie effectués dans son laboratoire et les résultats obtenus. Ces résumés étaient annexés aux procès-verbaux des réunions et souvent reproduits dans le bulletin du groupe. Nous diffusions également la liste des tirés à part reçus par la commission entre deux réunions.

Cette nouvelle commission s'est réunie 10 fois : 2 fois en 62, 63, 64, 65 et une seule fois en 66 et 67. Il y eut donc au total 17 réunions.

A la dernière séance, le 20 juin 1967, Mazet ayant manifesté le désir de quitter la présidence, Mandel et Vogel posèrent la question de savoir si la commission présentait encore quelque utilité, puisqu'elle avait atteint son objectif principal qui était la fondation d'un groupe capable de voler de ses propres ailes, dont je vais parler ensuite. La discussion qui suivit conduisit à la conclusion qu'il fallait maintenir la commission

avec Jean Mandel comme président et Mazet, Vogel et Weiss comme vice-présidents.  
Néanmoins cette troisième commission ne s'est jamais réunie.

#### LA CREATION DU NOUVEAU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

A la première réunion de la commission présidée par Robert Mazet, le 11 mai 1962, il ne fut pas encore question de fonder un nouveau groupe. En revanche nous agîmes le problème de la publication des travaux. Les uns voulaient publier les textes des conférences en un volume annuel, édité soit par nous, soit par Rheologica Acta, les autres pensaient que ces textes pourraient paraître en partie dans le Journal de Mécanique, en partie dans la Revue Française de Mécanique, comme le faisait déjà le GAMAC.

A la deuxième réunion, le 12 octobre 1962, nous avons davantage discuté du remplacement des Cahiers, sans toutefois prendre de décision. Maurice Joly signala l'apparition d'un Journal International de Biorhéologie. Mais cette nouvelle revue, à cause de sa spécialisation, ne résolvait pas notre problème.

Ce n'est qu'au cours de la quatrième réunion, le 25 octobre 1963, que la commission chargea Weiss, Buvet, Persoz et Thirion d'établir un plan de transformation du Groupe de Rhéologie, avec des propositions pour la périodicité des conférences et leur publication. Ultimeurement, Mandel et Joly acceptèrent de se joindre à cette équipe de travail, qui se réunit le 7 février 1964 dans le bureau d'Henri Weiss à l'Office des Universités. C'est ce jour-là qu'il fut décidé de former une association sans but lucratif, conforme à la loi du 1er juillet 1901.

Le nouveau groupe percevait des cotisations parmi ses membres et pourrait donc prendre lui-même en mains l'expédition des convocations et l'édition des cahiers. Pierre Thirion se chargea de rédiger les statuts et s'inspirant de ceux de la Société de Chimie Physique et il les présenta à la Commission Nationale lors de sa réunion du 24 avril 1964. Les divers articles de ces statuts furent discutés et partiellement modifiés par la commission. A la suite d'une remarque de ma part, il fut décidé, dans un souci de simplification, de supprimer le mot "Etudes" dans la dénomination officielle du groupe. Comme bureau provisoire, Weiss ayant annoncé son désir de se retirer, Mazet proposa les cinq autres personnes ayant participé à la réunion du 7 février 1964.

Ultimeurement, le 26 juin 1964, lorsque nous fûmes tous les cinq réunis à l'Ecole Polytechnique, nous décidâmes unanimement que Mandel serait le président, Joly le vice-président, Thirion le trésorier, moi-même le secrétaire général et Buvet le secrétaire adjoint.

En ce qui concerne le siège légal du nouveau groupe, il fut envisagé l'Ecole Polytechnique, puis l'Ecole de Physique et Chimie, mais le conseil préféra le CNRS, considéré comme plus neutre. Cependant l'administration du CNRS, consultée, refusa par principe. C'est alors que Robert Mazet accepta d'héberger le siège du groupe à Orsay, dans son laboratoire de mécanique des solides. Encore une fois, notre ami Pierre Thirion se dévoua, se rendit à la préfecture de Palaiseau pour y déclarer la naissance du groupe et y déposer les statuts. Cette naissance fut annoncée au Journal Officiel du 30 juillet 1964 (dernière page). Quand Mazet prit sa retraite, le siège du groupe fut transféré à Paris, rue Brancion, au CEBRP (Centre

d'Etudes du Bâtiment et des Travaux Publics. Le 19 novembre 1964 et entérina la nomination du bureau provisoire, ainsi que l'élection de quatre conseillers : Habib, Lafuma, Peltier et Weiss.

Il importe peut-être de préciser que, dans l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre la dernière réunion de la commission Pérés en décembre 1959 et la naissance du nouveau groupe en 1964, l'ancien groupe, bien que n'ayant aucune forme juridique, a néanmoins continué sans interruption d'organiser des conférences, qui se déroulaient non plus boulevard Raspail, mais à l'Ecole de Physique et Chimie, dont les portes nous étaient aimablement ouvertes par Champetier, qui en était le directeur.

C'est le 17 mai 1966 que le Conseil décida d'ajouter aux conférences le thème des rhéologues, qui permet aux auditeurs de se rencontrer et d'échanger des idées et des informations.

#### LES CAHIERS EDITES PAR LE SEDOCAR

La question de la publication des exposés se posait toujours. Weiss s'était mis en rapport avec Meskat, qui était le responsable scientifique de Rheologica Acta. Meskat acceptait de publier en français tous les manuscrits qu'on lui enverrait, pourvu qu'ils fussent sélectionnés par un comité de lecture français. La Revue Française de Mécanique acceptait également les publications du groupe, mais avec participation financière. A la réunion de la Commission Nationale du 24 avril 1964, la question resta en suspens. Il fut seulement décidé de polycopier un bulletin qui fasse part des principales activités du groupe, donne les résumés des conférences et indique les publications de ses membres. Ce bulletin parait toujours, comme vous le savez, puisqu'on en est maintenant au numéro 84.

Jean Mandel, en tant que président du groupe, semblait tenir à ce que nous conservions notre propre revue. Il chercha activement une solution à nos problèmes et finit par conclure un accord avec le SEDOCAR, Service de Documentation de l'Armée, qui avait une imprimerie au Ministère de l'Air. Les conditions étaient tout-à-fait avantageuses pour nous. Le SEDOCAR devait éditer les Cahiers à ses frais, nous en vendre une partie, puis vendre le surplus à son profit au public. Inutile de dire que le surplus en question restait en stock, puisque personne n'était au courant. Il était détruit au pilon et l'imprimerie remboursée par l'armée comme si les exemplaires avaient été vendus. Lorsque, timidement, je demandai aux responsables si, au lieu de détruire ces exemplaires des Cahiers, ils ne pourraient pas nous les donner, ils me répondirent que, dans ce cas, ils ne seraient pas remboursés et que cela entraînerait un déficit pour l'imprimerie. Conséquence : ces Cahiers sont épuisés maintenant et, lorsqu'un correspondant nous demande un article ancien, nous sommes obligés d'en tirer une photocopie.

Le premier numéro de cette deuxième série est daté de septembre 1965. Il porte le numéro 1 du tome I. L'édition était faite en typographie d'une façon parfaite. Les relations que j'ai eues avec les imprimeurs, pour les corrections d'épreuves et autres, ont toujours été très cordiales. C'est à cette occasion que j'ai constaté avec étonnement que le système métrique n'était pas encore en usage dans l'imprimerie. Dans cette corporation, en effet, on compte encore les distances en points et en lignes. Lorsqu'un numéro des Cahiers était prêt, je me rendais au Ministère de l'Air avec ma voiture et j'y chargeais les

exemplaires nous revenant. Après cela, il fallait les mettre sous enveloppes, les timbrer et les expédier.

Nous ne sortions que deux numéros par an. En tout, nous avons édité sept de cette manière. Ce système fonctionna bien jusqu'aux événements de 68. Après la secousse de 68, le SEDOCAR nous avisa que, sa structure ayant été modifiée et les crédits de l'armée restreints, il nous faudrait dorénavant payer la totalité des frais d'imprimerie. Cela nous était manifestement impossible.

#### LES CAHIERS DE L'INDUSTRIE MINERALE

Mandel se mit alors à la recherche d'une solution de rechange et conclut un accord avec la Revue de l'Industrie Minière. Les Cahiers furent considérés comme des numéros spéciaux de cette revue et cela nous permit de bénéficier de tarifs tout-à-fait intéressants pour le papier, les frais postaux etc... L'impression était en typographie et assez luxueuse. Une photo ou un dessin agrémentait la couverture.

Nous pûmes publier ainsi dix-sept numéros (le dernier en Juin 1978) auxquels s'ajoutèrent deux numéros spéciaux, l'un sur les composites avec le GAMI, l'autre avec la Société Hydrotechnique de France, édité par cette société.

Depuis 1964, nous avions réussi, tout en payant l'impression des Cahiers, à équilibrer notre budget et même à réaliser quelques économies, qui furent placées à la Caisse d'Épargne. Malheureusement les frais d'impression devinrent peu à peu prohibitifs, nos modestes réserves fondirent et nous fûmes obligés de mettre fin à notre accord avec l'Industrie Minière de Saint-Etienne. Il fallut, encore une fois, rechercher une autre solution.

#### LES CAHIERS DE L'UNIVERSITE - CLUB

La coopérative de l'Université - Club, en raison de ses statuts, peut éditer des brochures à des prix imbattables. Mais il n'est plus question de typo, ni même d'offset. Il faut fournir les manuscrits sous leur forme définitive, correctement tapés et, en raison du faible tirage (500), ce sont les pages de ces manuscrits qui sont directement passées à la photocopieuse. Toute photo est donc exclue. Avec ce système, nous devions préalablement nous-mêmes établir la pagination, le sommaire, dessiner la couverture et les pages de garde, et veiller à ce que les dessins soient convenablement disposés dans le texte.

Après tirage, la coopérative reliait chaque exemplaire à la colle, ce qui, sans doute, laissait à désirer en ce qui concerne la solidité. Nous nous chargeons, après cela, de l'enlèvement et de l'expédition, qui était faite soit par Absi, soit par moi-même. Il était notamment indispensable de ne pas oublier les quatre exemplaires destinés à la Bibliothèque Nationale.

Nous avons pu ainsi éditer six numéros, de novembre 1978 à février 1982, auxquels il faut ajouter maintenant cinq numéros petit format, relatifs aux derniers colloques, l'un publié en typo par les Sciences et Techniques de l'Armement et contenant les exposés du colloque de 1977, les quatre autres tirés en offset ou en photocopie par des imprimeurs privés et contenant les travaux des colloques de 1980, 81, 82 et 83.

#### LE COURRIER

En résumé l'histoire du groupe s'est trouvée intimement liée au problème des Cahiers. De 1954 à 1964, le Groupe Français d'Etudes de Rhéologie, sans existence légale, a été pris en charge par le CNRS. Il n'y avait pas de président, mais un délégué général : Henri Weiss. Aucune cotisation n'était perçue. Seul coûtait l'abonnement aux Cahiers.

De 1964 à aujourd'hui, le Groupe Français de Rhéologie, déclaré comme association sans but lucratif, a financé lui-même l'édition des Cahiers. Jean Mandel en a été le premier président, suivi par Joly, Persoz, Habib, Courtel, Huet et Weber. Les trésoriers successifs ont été Thirion, Habib, Marchal et Bombléd. Moi-même, j'ai tenu le poste de secrétaire général de 1964 à 1968, suivi par Robinet et Absi.

En fait, c'est de mon laboratoire qu'ont été expédiés, de 1964 à 1971, les convocations, le bulletin, le cahier, ainsi qu'un assez volumineux courrier. Pour les membres du groupe, les adresses étaient photocopiées à la Ronéo par une dame indiquée par Robinet. Nous les découpons et les collions à l'avance sur des enveloppes de différents formats, qui étaient ensuite stockées dans des casiers à raison d'une case par adhérent.

Le Bulletin était rédigé par Buvet, puis par Robinet, tiré à la Ronéo par cette même dame et expédié par mon laboratoire. Plusieurs fois, j'exprimai à Mathieu, directeur scientifique à l'ONERA mon désir d'abandonner ces tâches matérielles qui, finalement, me prenaient beaucoup de temps. Mais Mathieu me répondait qu'il fallait persévérer, car selon lui, il était important de soutenir le groupe.

Comme à l'ONERA il n'était pas possible de recevoir de courrier, j'indiquais à mes correspondants mon adresse personnelle et ceux-ci s'imaginaient que c'était le siège du groupe. Il est arrivé plusieurs fois que des étrangers, de passage à Paris, vinssent chez moi pour régler diverses questions.

Vers janvier 1971, Absi accepta de faire prendre en charge ces tâches matérielles par son laboratoire, avec des moyens plus modernes. C'est maintenant un ordinateur qui imprime les adresses sur des étiquettes autocollantes. Le bulletin, rédigé par Bourgoïn, est édité chez Absi et expédié par ses soins.

Indépendamment de ces problèmes d'édition, il convient maintenant de dresser un inventaire schématique de l'activité et des travaux du groupe.

#### COLLOQUE DE 1960

Dès 1957 il fut question de réunir un colloque CNRS ayant pour thème : Phénomènes de relaxation et de fluage en rhéologie non linéaire. En mars 1958, Vallet fut chargé de l'organiser. En mars 1959, le professeur Thiry en accepta la présidence et Pérès la présidence d'honneur. Finalement il eut lieu du 27 juin au 2 juillet 1960 au Centre Universitaire International, 173 boulevard Saint-Germain et à la nouvelle faculté de médecine, rue des Saints-Pères. Les rhéologues étrangers invités à ce colloque furent : Benbow, Brown, Brunt, Colonnetti, Eirich, Gent, Graham, Howells, Lodge, Oldroyd, Prager, Reiner, Rivlin, Schwarzl, Scott Blair, Willborn et Yamamoto.

Quant à la participation française, elle était constituée par Buvet, Crussard, Dantu, Kovacs, Mandel, Matschinski, Persoz, Thirion, Tochon, Vallet, de Vries, Weiss.

Pour l'organisation matérielle, le principal animateur

fut Buvet, aidé de Robinet et de Guiroy et l'on me chargea du rôle de trésorier. A ce titre, je payai à tous les participants étrangers leurs frais de voyage et d'hôtel, je réglai le banquet, les diverses collations et tous les frais accessoires. Le colloque terminé, je passai quai Anatole France pour rendre au CNRS la somme assez importante qui me restait et l'employée me dit alors "Comment ? Il vous reste de l'argent ? C'est bien la première fois qu'on nous en rend à la fin d'un colloque ! D'habitude on vient toujours nous en redemander !"

C'est à ce colloque que Prager, le grand spécialiste de la plasticité, nous expliqua qu'il avait été chargé par la municipalité d'une grande ville des Etats-Unis, d'étudier mathématiquement la circulation des voitures, comme s'il s'agissait de l'écoulement d'un fluide. Je ne sais pas à quels lois il était parvenu.

#### COLLOQUES ANNUELS

Un autre colloque de trois jours (21-23 mai 1964) sur le thème : Les essais mécaniques et physiques des matériaux viscoélastiques, fut organisé avenue Hoche, à l'initiative de Vinh, avec le GAMI (Groupeement pour l'Avancement de la Mécanique Industrielle), le CESMI (Cycle d'Etudes Supérieures de Mécanique Industrielle), et le CEMP (Centre d'Etudes des Matières Plastiques).

Et c'est le 22 septembre 1964 que le conseil du nouveau groupe décida d'organiser chaque année un colloque sur un thème particulier. Le premier de ces colloques eut lieu le 20 mai 1965 sur La rhéologie des systèmes à deux phases et il y en eut ensuite un chaque année, sauf en 1972 à cause du congrès. En voici le tableau.

- 1 - 1965. Rhéologie des systèmes à deux phases (1).
- 2 - 1966. Aspects énergétiques en rhéologie (2).
- 3 - 1967. Progrès récents des effets du second ordre (3).
- 4 - 1968. Rhéologie en relation avec la structure (4).
- 5 - 1969. Comportement mécanique des matériaux composites (5).
- 6 - 1970. Influence de la température et de la pression sur les comportements rhéologiques.
- 6bis-1970. Rhéologie et hydrotechnique (6).
- 7 - 1971. Viscoplasticité.
- 8 - 1973. Rhéologie des bétons.
- 9 - 1974. Phénomènes de surface.
- 10 - 1975. Influence de la température sur les phénomènes rhéologiques.
- 11 - 1976. Rhéologie des corps mous.
- 12 - 1977. Thermodynamique des comportements rhéologiques.
- 13 - 1978. Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture.

- 14 - 1979. Rhéologie des couches minces.
- 15 - 1980. Comportements rhéologiques et structure des matériaux.
- 16 - 1981. Applications de la rhéologie aux problèmes de fabrication industrielle.
- 17 - 1982. Comportements rhéologiques sous sollicitations rapides ou dynamiques.
- 18 - 1983. Méthodes et appareils de mesures rhéologiques (7)
- 19 - 1984. Rhéologie des matériaux anisotropes.
- 20 - 1985. Résultats nouveaux obtenus dans le domaine de la rhéologie ces dernières années.

Notés : (1). Les conférences eurent lieu à l'Institut Français du Caoutchouc et le colloque fut agrémenté d'une visite de l'Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique à StOuen (transport en cars).

(2). Les conférences eurent lieu dans la salle du Laboratoire National d'Essais, rue Gaston-Boissier et, parallèlement au colloque, une exposition de viscosimètres et autres appareils de mesures rhéologiques eut lieu au Laboratoire Central des Ponts & Chaussées, tout proche.

(3). Les conférences se déroulèrent au Laboratoire National d'Essais et furent coupées par la visite du Centre d'Etudes des Matières Plastiques, sous la direction de Dubois.

(4). Le colloque de 1968 était initialement prévu pour le 12 juin, mais les événements nous forcèrent à le reporter au 30 octobre. Il eut lieu à l'Institut Textile de France avec visite des laboratoires de cet établissement.

(5). Salle Hoche, en commun avec le GAMI, l'ISM et le CEMP.

(6). Ce colloque supplémentaire fut organisé en commun avec la Société Hydrotechnique de France.

(7). Les conférences eurent lieu à l'Ecole des Ponts et Chaussées et une exposition d'appareils de mesures fut installée dans le hall même de l'école.

Ces colloques annuels ont remporté beaucoup de succès, de sorte qu'ils sont devenus une tradition. A la liste précédente il faudrait ajouter divers colloques de rhéologie organisés en France par des laboratoires, des sociétés privées ou des universités, sur des thèmes particuliers, dont il m'a été impossible de dresser la liste.

#### LE CONGRES INTERNATIONAL DE 1972

Le IIIe congrès international eut lieu en 1958 à Bad Oeynhausen, en Allemagne. La participation française y fut assez importante, grâce à Pères qui y avait poussé. Au Comité International où Maurice Joly nous représentait, divers étrangers souhaitaient que le congrès de 1963 se réunît en France. Pères était également de cet avis, mais d'autres Français, moins audacieux, estimaient que nous n'étions pas assez structurés, pas assez solides, financièrement parlant, pour lancer cette invitation. De sorte que le IVe congrès eut lieu, comme vous le savez, à Providence, aux Etats-Unis en 1963. Et cette fois, la France rejeta encore la suggestion des étrangers d'organiser en France le Ve, lequel se réunît au Japon en 1968. Ce fut peut-être une bonne chose que le congrès de 1968 n'eût pas lieu chez nous, car nous aurions certainement été gênés par les grèves imprévues qui éclatèrent cette année-là au printemps.

Enfin, la France se déclara invitante pour le VIe congrès, celui de 1972. La question de la ville à choisir se

posa. Paris était d'emblée exclu à cause des encombrements considérables qui pouvaient créer les congressistes en montant dans les ca.s ou en descendant. Orsay devait aussi être éliminé par manque de structure hôtelière. Or, en septembre 1967, Mandel, Radenkovic, Pierrard et moi, nous avions participé à une action de formation à l'INSA de Lyon et nous nous étions rendus compte de l'espace dont on disposait là-bas, à Villeurbanne, à l'Université ou à l'INSA. Les chambres d'étudiants, inoccupées pendant les vacances, étaient sur place. C'est pourquoi nous avons décidé d'organiser le Vie congrès à Lyon et non à Paris. D'ailleurs bon nombre de congressistes préférèrent loger dans les hôtels de la ville plutôt que dans les chambres d'étudiants. Bien leur en prit, car les organisateurs avaient oublié de faire allumer la chaudière pour l'eau chaude sanitaire des chambres d'étudiants...

Comme Vallet était sur place, en tant que professeur à la faculté et directeur du laboratoire du cuir, il accepta, aidé par Smadja, le prendre en charge l'organisation du congrès et notamment son secrétariat. Nous réussîmes à obtenir quelques crédits de la part des Relations Culturelles et de la DGRST. A cela s'ajoutèrent les participations des congressistes, mais ces sommes ne suffirent pas, comme nous l'espérions, à assurer l'impression des exposés, en plus des frais du congrès. Ces difficultés furent partiellement résolues par Rheologica Acta qui put en publier une partie.

Tout le reste se passa fort bien. Cinq amphithéâtres fonctionnaient simultanément et les congressistes pouvaient converser en se promenant dans la grande galerie qui reliait ces cinq salles.

Une conférence devait être faite par Rehbindler en tant qu'invité. Ce savant russe avait accepté l'invitation, d'autant plus qu'il parlait très bien le français, ayant fait ses études secondaires à Lausanne. Mais depuis Juin ou Juillet il ne répondait plus aux lettres. A l'ouverture du congrès nous eûmes l'explication de ce silence : il était mort. Nous demandâmes alors à son compatriote G.V. Vinogradov de bien vouloir remplacer l'exposé de Rehbindler par un éloge de sa vie et de ses travaux, ce qui fut fait au pied levé, en anglais.

Pendant toute la semaine que dura ce congrès, Vallet, Joly, Smadja et moi, nous fûmes très occupés par les tâches matérielles et administratives qu'il fallait assurer. Il fallut en outre fournir chaque jour un article à la presse locale et, le dernier jour, passer à la télévision.

#### TERMINOLOGIE

Dès 1954 le groupe chargea une commission restreinte d'étudier une nomenclature en rhéologie, proposée par Burgers et Scott Blair. Les membres en furent : Buré, Crussard, Mme Dobry-Duclaux, Dubois, Hénin, Le Boiteux, Le Rolland, L'Hermite, Mathieu, Persoz, Tharion, Vallet et Weiss.

La première réunion de cette commission eut lieu le 19 novembre 1954 et il y fut décidé d'élaborer un projet de terminologie française. Le 28 mars 1957, une première liste d'une quarantaine de termes fut proposée, puis reproduite dans le Cahier, 1957, n° 2, p.32. La commission se réunit encore le 19 décembre 1957 à l'Institut Henri Poincaré, puis les choses tombèrent dans l'oubli.

En 1964 Scott Blair et Reiner, pour établir un dictionnaire quadrilingue (la quatrième langue étant l'hébreu), nous

demandèrent les équivalents français de nombreux termes. Cette question fut débattue à la Commission Nationale de Rhéologie le 23 octobre 1964 et la conclusion fut la nécessité d'établir un dictionnaire français de rhéologie, dont les termes et les définitions seraient mis en discussion dans le bulletin du groupe. Et ici, je dois rendre un hommage particulier à Jean Mandel,

qui fit avancer la terminologie à grands pas. A cette époque nous avions chaque année huit réunions du bureau et deux réunions du conseil, soit en tout dix réunions. En tant que président du groupe et à chaque réunion, à partir du 21 janvier 1965, Mandel amenait une liste de définitions à discuter. Une photocopie était remise à chacun. Et ses propositions entraînaient des discussions passionnées qui, parfois, se prolongeaient fort tard le soir. Et il arrivait même qu'une fois chacun rentré chez soi, des conversations téléphoniques prolongeassent ces discussions. René Buvet, notamment, épris de logique, critiquait à l'adjectif "instantané", qui, bien entendu, n'a qu'un sens relatif, ce que Buvet nous a forcés à préciser par ses réflexions judicieuses. En somme Buvet apportait le point de vue du physicien à des définitions d'origine essentiellement mathématique.

Les termes arrêtés par le bureau étaient publiés au bulletin, puis rediscutés en conseil et publiés une deuxième fois au bulletin.

La première version de ce dictionnaire fut publiée en décembre 1968 par les Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. Les 80 termes qu'il contenait se situaient dans un ordre logique et il fallut lui adjoindre un index alphabétique.

En vue du congrès de 1972, une deuxième version, comportant 107 termes fut publiée par la même revue en juillet-août 1972 et distribuée largement aux congressistes. Les étrangers s'intéressaient vivement à notre travail de normalisation. Notre dictionnaire fut notamment traduit en anglais.

Depuis, Christian Huet a poursuivi et refondu ce travail. Il a préparé une troisième édition d'environ 160 termes, qui, malheureusement, n'a pas pu encore être éditée.

#### BIBLIOTHEQUE

Un autre objectif assigné au groupe est celui de la documentation. Dès 1955 la Commission Nationale songea à réunir un certain nombre de documents, livres, revues, tirés à part, et à les déposer à l'Institut Henri Poincaré, ainsi qu'un fichier bibliographique. Mme Dobry-Duclaux suggéra de publier des analyses bibliographiques dans le cahier, ce qui fut fait, d'autant plus qu'à partir de 1957, la société Péchiney nous envoya chaque mois une sélection de sa bibliographie. Cela nous facilita grandement le travail. En mars 1959 Buvet proposa que la bibliothèque du groupe fût déposée à l'Ecole des Mines ou à l'X. Le bibliothécaire des Mines, consulté, souhaitait que ce dépôt fût un don définitif. Finalement, vers 1964, nos documents furent déposés à l'Ecole Polytechnique, dans la bibliothèque du laboratoire de Jean Mandel. Lorsque l'école fut transférée à Palaiseau, on déménagea la bibliothèque à l'Ecole des Ponts et Chaussées et elle se trouve maintenant au CERAM à Noisy-le-Grand.

Je dois dire cependant que très peu de gens viennent consulter les ouvrages ou les revues qui s'y trouvent et qui

commencent à être relativement nombreux. Pourtant les nouvelles acquisitions ont souvent été signalées dans le bulletin.

#### ACTIONS PEDAGOGIQUES

Dès l'origine la Commission Nationale de Rhéologie du CNRS estima que l'un des buts à poursuivre était l'enseignement de la rhéologie en France.

Sans entrer dans les détails, signalons que cette consigne fut relativement bien suivie, puisque plusieurs cycles successifs de conférences furent donnés par les membres du groupe : dès 1955-56 à l'Ecole Normale de Saint-Cloud, en 1957 et en 1958 au Centre de Perfectionnement Technique de la Maison de la Chimie. En 1958 et en 1959, à l'Ecole de Physique et Chimie, eurent lieu deux séminaires dont les exposés furent publiés dans les Cahiers.

A la rentrée scolaire de 1962, il fut créé à la Faculté d'Orsay un enseignement de troisième cycle (DEA de mécanique des solides), attaché à la chaire du professeur Mazet, qui y incorpora un laboratoire et des conférences de rhéologie faites par des personnalités extérieures à la faculté. Chaque promotion suivait ainsi quinze à vingt-cinq conférences. Vers 1967 ces cours commencèrent à être moins suivis, car un nouveau décret autorisa les écoles d'ingénieurs à préparer au DEA dans leurs propres établissements.

Mandel organisa pour ses élèves des conférences de rhéologie à l'X et aux Mines, et cette dernière école admettait la présence d'auditeurs libres.

En septembre 1967, les anciens élèves de l'INSA de Lyon organisèrent un séminaire de rhéologie dont je reparlerai dans un instant.

D'autres actions pédagogiques eurent lieu ensuite dans divers organismes, à l'Institut Supérieur des Matériaux, à l'Université de Compiègne, à l'Ecole des Travaux Publics, de l'Etat, à Grenoble, Bordeaux, Toulouse, Poitiers... Nous ne pouvons toutes les citer, car nous n'en sommes plus régulièrement tenus au courant. Au début, en effet, le Groupe détenait un monopole de fait. Faute de spécialistes, il était pratiquement impossible de mettre sur pieds un enseignement de rhéologie sans faire appel au Groupe. Depuis un enseignement de rhéologie n'est plus vrai. Cela prouve que la rhéologie pénètre peu à peu dans les universités, écoles et laboratoires.

Vers les années 1960, le directeur du Palais de la Découverte demanda à Weiss de l'aider à installer un stand de démonstration consacré à la rhéologie. Je dois dire, malheureusement, que pour répondre à son attente, nous n'avons rien proposé. De sorte que la rhéologie est restée absente du Palais de la Découverte. Plus récemment, un jeune ingénieur ayant lancé un appel au sujet d'expériences à mettre au public au centre de la Villette, je lui ai proposé onze expériences de physique amusante, dont trois de rhéologie : l'une sur l'effet Weissenberg, l'autre sur la dilataance des sables dans une poire de caoutchouc et la dernière sur la mémoire des formes dans le cas des polymères. Je ne sais pas si ces propositions ont été suivies de réalisations.

#### LIVRES DE RHEOLOGIE

Dès 1955, Henri Weiss souhaita que le Groupe écrive collectivement un ouvrage élémentaire de rhéologie, pour compléter

la traduction française, Rhéologie Théorique, publiée par Dunod de l'ouvrage anglais de Reiner : Douze leçons de rhéologie. Le titre en avait été modifié, car, en vue de la traduction française, Reiner avait ajouté deux chapitres à son livre qui en comptaient donc 14.

Weiss aurait souhaité d'assez nombreux fascicules susceptibles d'être tenus à jour et il chargea Georges Vallot de s'occuper de cette opération. Mais Vallot était trop occupé pour pouvoir y donner suite immédiatement. Le temps passait et rien ne se faisait. En 57, Vallot, surchargé de travail, me demanda d'établir le plan de ce livre. Ce que je fis. Je pus l'exposer à la réunion du 6 avril 1957 de la Commission Nationale. A la suite de quoi, avec Mathieu, Mandel et Weiss, nous inscrivîmes des noms d'auteurs en face de chaque chapitre. Le 15 mars 1958, je pus déclarer à la Commission que la première partie, de nature générale, était prête pour l'impression. Pères accepta d'écrire la préface de ce livre, dès qu'il serait en possession des bonnes feuilles.

Dunod s'était chargé de la publication, mais demanda que l'on choisisse un auteur principal, afin d'en faciliter l'inscription dans les catalogues, ainsi que la publicité. Cette question fut posée au cours d'une réunion entre les auteurs et, unanimement, ceux-ci me désignèrent comme rédacteur en chef, bien que je n'eusse pris, dans ce domaine, aucune initiative.

Le 7 mars 1959 je pus annoncer à la Commission que le livre était à l'impression. A la réunion suivante, le 19 décembre 1959, je signalai que les premières épreuves étaient corrigées et la sortie prévue pour le début 1960.

Lorsque l'Introduction à l'Etude de la Rhéologie fut imprimée, je remis un exemplaire à chaque auteur et je me rendis à Bourg-la-Reine, chez Pères. Avec un exemplaire à la main, je sonnai chez lui. Il était en robe de chambre et me reçut très aimablement. Je lui tendis le livre. Il l'ouvrit et, l'ayant feuilleté, il s'écria : "Mais, je ne vois pas ma préface! où est ma préface?" Je regardai à mon tour. Effectivement la préface manquait et le premier chapitre apparaissait deux fois ! Alors je redescendis en trombe chercher un autre exemplaire dans ma voiture et je fus suivi par le chat du doyen, tandis que Pères, sur le palier de l'escalier, criait : "Mon chat ! Mon chat !" Finalement le chat rentra dans l'appartement et je remontai remettre à Pères un exemplaire complet. L'exemplaire défectueux fut rendu à Dunod qui écrivit une lettre d'excuses à Pères. Ce fut réellement une malchance extraordinaire que le seul exemplaire muni de ce défaut tombât précisément sur l'auteur de la préface!

A la suite de cette publication, je fus invité par Lellionnais à faire à France III une causerie sur la rhéologie et je demandai à Henri Weiss de m'y accompagner. Cette émission fut diffusée le 17 novembre 1960 sous le titre "Des liquides durs aux solides qui coulent" dans la série La science en marche.

Comme vous le savez, je dus m'occuper par la suite d'un deuxième livre, pour lequel je n'eus pas davantage d'initiative... En 1966 je reçus la visite de Paris, qui s'occupait du CAST: Centre d'Actualisation Scientifique et Technique, une émanation des anciens élèves de l'INSA de Lyon. Paris désirait organiser à Lyon une session de rhéologie d'une semaine. Il me demandait d'établir un programme de cours et de choisir un conférencier pour chaque cours. C'est bien entendu ce que je fis. Après cela il me demanda de présider la session, qui eut lieu du 18 au 22 septembre 1967. Mes obligations à l'ONERA ne me permirent

de le faire que pendant la seconde moitié de la semaine. Mandel accepta d'ouvrir les cours et de présider la première moitié de la semaine. Paris me demanda ensuite de rassembler les textes des conférences pour en faire un fascicule du CAST. Je le fis. Quand il fut question ensuite de publier ce fascicule chez Masson, il fallut que j'en demande l'autorisation à Dunod, qui me l'accorda sans discussion. Et c'est ainsi que parut ce deuxième livre de rhéologie, à la fin duquel j'ajoutai notre dictionnaire, limité à ce moment-là à 80 termes.

#### SECTION LYONNAISE

Cette session du CAST eut à Lyon un certain succès et réunit de nombreux auditeurs. C'est à la suite de cette impulsion que Georges Vallet et son adjoint Claude Smadja proposèrent d'instaurer à Lyon une section du Groupe de Rhéologie. La section lyonnaise prit donc naissance en 1967 et fit preuve jusqu'au congrès de 1972 d'une assez grande activité en organisant des conférences et en discutant les définitions du dictionnaire proposées par le bureau.

#### INSTITUT DE RHEOLOGIE

Une question qui a été agitée pendant des années et dont il faut bien parler ici, est celle de la création d'un laboratoire ou d'un institut de rhéologie. La Commission Nationale, lors de sa réunion du 28 février 1956, évoqua la création d'un laboratoire de rhéologie à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud, comme conséquence du cycle de conférences déjà organisé. Quelques thèses de rhéologie ont, je crois, été préparées et soutenues dans cette école, mais cela n'a sans doute pas été très loin. A la réunion du 19 décembre 1959, la Commission discuta encore une fois la création d'un "établissement scientifique spécialisé en rhéologie". En attendant il fut décidé de procéder à un inventaire des laboratoires français de rhéologie. Peu à peu au cours de nos conversations avec Weiss, Mandel, Mathieu, Thirion, Buvet, Vallet et beaucoup d'autres, l'idée d'un "institut" suivait son chemin.

La chose m'intéressait personnellement, car à cette époque l'atmosphère de l'ONERA était irrespirable. En juillet 1959 j'élaborai un premier projet de laboratoire de rhéologie, qui prévoyait 22 personnes et 700 m<sup>2</sup> de bâtiments. Je remis ce projet à diverses personnalités et notamment à Pères qui me reçut dans son grand bureau de la Sorbonne. Je savais que Pères avait beaucoup d'influence sur les pouvoirs publics, puisqu'il avait réussi à les décider à construire la faculté de la halle aux vins ainsi que celle d'Orsay. C'était donc lui qu'il fallait convaincre. Malheureusement, à chacune de mes phrases, il me répondait : "La question n'est pas mûre ! La question n'est pas mûre !". De sorte que j'essayai un échec.

Un deuxième projet fut élaboré par Weiss en décembre 1960, puis un troisième, de février 1961, envisageait un personnel de 94 unités et une surface de 2000 m<sup>2</sup>. Donc le projet prenait de l'ampleur ! Weiss en parla à diverses personnes et notamment à Pignaniol qui, à cette époque, travaillait aux plans quinquennaux. Pignaniol ne contestait pas l'utilité du projet, mais il estimait qu'il devait être défendu par une "haute personnalité dont l'autorité ne puisse pas être contestée". C'était à peu de chose près l'avis de Dardel, de la DGRST et celui de Coulomb, directeur du CNRS.

La question fut rediscutée le 23 août 1965 à la Commission

Nationale de Rhéologie. Le président Mazet estimait qu'il était préférable de créer, dans le cadre du 6e plan, non pas un organisme de recherches, mais un laboratoire de servitude, mettant ses machines d'essais ou ses moyens de calcul à la disposition des chercheurs d'autres laboratoires. Mandel, au contraire, voyait plutôt la création d'un organisme de recherches théoriques. Finalement il fut demandé au Groupe de rhéologie de se livrer à une enquête parmi ses membres, pour déterminer les véritables besoins des laboratoires français dans ce domaine. Et la question est toujours en suspens. Cependant le vidé qui existait à l'époque a été comblé. La plupart des laboratoires universitaires ou industriels qui ont affaire aux matériaux, se sont munis de moyens de mesures rhéologiques et sont suffisamment documentés pour qu'un institut spécialisé soit devenu inutile.

#### TRAVAUX INTERLABORATOIRES

Dès février 1955, à la deuxième réunion de la commission, Vallet proposa de créer un sous-groupe dont le rôle devait être de construire des appareils de mesure corrects pour l'expérimentation rhéologique. Il devait être fait appel au Service des Prototypes du CNRS. Le 28 février 1956 la Commission Nationale envisagea de mettre au point un viscosimètre très précis, capable d'une large échelle de mesure. Ces vœux n'étaient pas très réalistes, chaque laboratoire étant amené à construire lui-même l'appareil qui lui est nécessaire, lorsqu'il ne le trouve pas dans le commerce.

Cependant tous les échanges de vue, toutes les informations sur la rhéométrie peuvent être de la plus grande utilité et c'est dans cet esprit que le groupe actuel a créé, il y a environ deux ans, sur l'initiative de Bouton, une commission appareils de mesure. Bien entendu, il ne s'agit plus, cette fois, de construire collectivement des appareils comme on l'avait envisagé il y a trente ans.

En revanche une idée qui était réalisable immédiatement était celle des travaux interlaboratoires, chaque laboratoire étudiant un même produit avec les techniques qui lui sont propres. Ce projet était inspiré de l'exemple américain, qui avait conduit à des résultats intéressants sur le polyisobutylène.

Le 6 avril 1957 la Commission Nationale note que Coste, du laboratoire Kodak, a, dans ce but, distribué à quelques laboratoires des éprouvettes d'un même produit. Le 15 mars 1958 le procès-verbal indique que des travaux sont en cours. Le 19 décembre 1959 on annonce que quelques résultats préliminaires ont été publiés dans les Cahiers. Sous l'impulsion de Buvet, la Société Péchiney fournit un polystyrène nommé P3 à divers laboratoires. Kovacs à Strasbourg en mesura le Tg par la méthode dilatométrique, tandis que moi-même, j'en mesurai la dureté pendulaire à diverses températures, ce qui permit de retrouver le Tg pour un temps donné. Malheureusement les choses n'allèrent guère plus loin. Et ces tentatives ont maintenant sombré dans l'oubli.

#### CONTRATS DGRST

Plus efficace, semble-t-il, fut l'action menée par la DGRST (Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique) dans le domaine de la rhéologie des polymères. Vers les années 1960 fut créée une Commission de Chimie Macromoléculaire dont

la présidence fut confiée à Georges Champetier. Celui-ci forma trois sous-commissions: membranes, polymérisation et propriétés classiques. Et cette dernière, sous-commission, propriétés classiques, consacra son activité - et ses crédits - à la rhéologie, au fractionnement et au vieillissement, mais principalement à la rhéologie. Champetier n'avait pas oublié, en effet, l'action menée par le groupe et l'importance de la rhéologie dans la science des polymères. Mathieu fit partie de cette commission et mon laboratoire de l'ONERA put obtenir un contrat de recherches de la DGRST. Lorsque Mathieu, étant malade, dut se retirer, je fus nommé à sa place et Champetier me donna la responsabilité de la sous-commission propriétés classiques, avec l'aide d'Henri Benoit. Cela me mit d'ailleurs dans une position assez délicate, lorsque j'eus à juger des rapports que j'avais moi-même rédigés.

Chaque année nous organisons un colloque de deux jours, où chaque contractant devait exposer les résultats de ses propres travaux. Mazet y était invité en tant que président de la Commission Nationale de Rhéologie et les résumés des communications paraissaient dans le bulletin du groupe.

Je pense que l'impulsion donnée aux laboratoires universitaires et surtout industriels par cette action de la DGRST, bien qu'elle ait coûté cher, a finalement été profitable, forçant chacun à s'équiper et à entrer en contact avec les autres rhéologues, par le biais des colloques.

#### CONCLUSION

Voilà donc l'histoire très résumée des trente années d'existence du Groupe Français de Rhéologie, qui, on peut le dire, répondait à une nécessité, à cause de la complexité du comportement des corps. Je suis désolé d'avoir profité de l'occasion pour évoquer des souvenirs personnels et j'espère que vous voudrez bien m'en excuser.

Les réunions trimestrielles sont peut-être aujourd'hui moins suivies qu'autrefois, mais le succès des colloques annuels est plutôt encourageant. Les actions pédagogiques sont sans doute moins indispensables qu'au début, car chaque organisme installe ses propres laboratoires, chaque école prévoit ses propres cours de rhéologie. Grâce au Groupe, la rhéologie est maintenant mieux connue dans les milieux scientifiques et industriels.

La plus grande partie de la terminologie a été mise sur pieds. Il faudra cependant la compléter, puis la tenir à jour à mesure que nos connaissances progresseront... un peu comme le dictionnaire de l'Académie Française, qui est en perpétuelle évolution.

Et il est réconfortant de constater que le Groupe est maintenant pris en mains par une équipe de jeunes qui, avec désintéressement, s'efforcent de poursuivre l'oeuvre déjà accomplie par les anciens.

PREMIERE JOURNEE

PREMIERE SESSION

**THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DES VITESSES EN DEFORMATIONS QUASI-STATIQUES DES MILIEUX VISCOELASTIQUES STANDARDS**

THEOREM OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF VELOCITIES IN QUASI-STATIC DEFORMATION OF VISCOELASTIC STANDARD MEDIA

M. BASSOUT - LELLICH

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
Faculté des Sciences de METZ  
Ile du Sauley  
57045 METZ CEDEX, FRANCE

**R E S U M E**

Dans cet article, on présente la théorie des milieux viscoélastiques standards illustrée par la description du fluide de MAXWELL, en grandes déformations, pour des comportements non-linéaires. Cette théorie est compatible avec les principes de thermodynamique et le principe d'ONSAAGER. On montre une propriété susceptible d'être vérifiée expérimentalement par des essais de traction simple effectués sur le zinc, par la même propriété, on peut démontrer l'existence et l'unicité des vitesses d'un milieu viscoélastique standard présentant de l'élasticité instantanée.

**A B S T R A C T**

In this paper, we present the theory of viscoelastic standard media illustrated by the description of MAXWELL fluid, in large deformations, for a nonlinear behavior. This theory is compatible with the principles of thermodynamics and the principle of ONSAAGER. We show a property susceptible of being verified experimentally by a speed-trial of simple traction effected on zinc, by the same property, we can demonstrate the existence and unicity of speeds for a viscoelastic standard media presenting instantaneous elasticity.

**1. INTRODUCTION**

Pour d'écrire un comportement rhéologique d'après la théorie des milieux viscoélastiques standards notée par M/S (1),(2),(3), nous avons besoin de deux potentiels, le premier est le potentiel thermodynamique (l'énergie libre)  $\phi(\epsilon, \dot{\epsilon})$  fonction de la déformation  $\epsilon$ , de variables internes  $\xi$ , le deuxième est le potentiel de dissipation  $\Omega(\dot{\epsilon}, X)$  fonction de  $\dot{\epsilon}$  et de  $X$  ou

$X = - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\epsilon}}$  est la force thermodynamique associée à chaque variable interne  $\xi$

(on suppose pour simplifier que  $\phi$  et  $\Omega$  sont relatifs à un élément matériel de volume unité dans la configuration initiale)

L'évolution de  $\xi$ , et le tenseur des contraintes  $\sigma$  conjugué du tenseur  $\epsilon$  obéissent par les équations :

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} \quad (1.1)$$

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \quad (1.2)$$

(1.1) constitue une généralisation des relations d'Onsager.

(1.2) est l'équation de Coleman, valable puisque le milieu présente de l'élasticité instantanée  $\phi$  et  $\Omega$  dépendent aussi de la température  $T$ . Les déformations peuvent être infiniment petites ou finies. Notons qu'un saut brusque de  $\epsilon$  et  $T$  change la valeur de  $\xi$ , mais n'entraîne pas de discontinuité de  $\dot{\xi}$ . C'est là une propriété caractéristique des variables internes. Ce formalisme a été généralisé par Mandel (4) pour des milieux sans élasticité instantanée tels que le solide de Kelvin. Nous nous en tiendrons ici aux milieux doués d'élasticité instantanée.

Suivant une hypothèse faite par Rice (5) et suggérée également par Mandel (4) nous avons admis que  $\xi$  est une fonction des variables internes  $\xi$  et des forces thermodynamiques  $X$ , cette fonction ne dépendant pas explicitement de  $\epsilon$ . Cela revient à choisir  $\Omega$  fonction des  $\dot{\xi}$  et  $X$  (6).

Ce point de vue est d'ailleurs confirmé par l'étude des assemblages de ressorts et d'amortisseurs linéaires ou non linéaires (modèles rhéologiques) (7).  $\Omega$  doit nécessairement vérifier la condition de dissipativité

$$X\dot{\xi} = X \frac{\partial \Omega}{\partial X} \geq 0 \quad (1.3)$$

qui résulte du second principe de la thermodynamique

$$\left( \frac{1}{T} X \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) \text{ est le taux de production intrinsèque d'entropie}$$

Une autre condition plus restrictive, c'est la condition de convexité c'est à dire :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \geq 0 \quad (1.4)$$

avec en outre

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = 0 \text{ pour } X = 0 \quad (1.5)$$

En effet, a et b dépendent de l'histoire de la déformation avant le saut, sans dépendre du saut de vitesse lui-même, pour pouvoir calculer la pente

$$\frac{dc}{dc} = a + \frac{b}{c} \quad (3.1)$$

La mesure de  $\frac{dc}{dc}$  après le saut de vitesse était extrêmement imprécise de ce fait, la relation (2.1) ou (3.1) n'a pu être vérifiée que qualitativement. La relation (2.1) a été déjà utilisée par WEBER pour décrire le comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse (10).

#### 4. MILIEUX VISCOELASTIQUES STANDARDS ET FLUIDE DE MAXWELL

4.1 Description du fluide de MAXWELL pour des déformations infiniment petites est donné par les équations :

$$\dot{\epsilon}_{i,j} = \lambda \delta_{ij} + \dot{\epsilon}_{ij} - \epsilon_{ij}^P$$

$$\dot{\epsilon}_{i,j} = g(J_2) s_{i,j}$$

où g est une fonction positive et croissante du second invariant  $J_2$  du déviateur des contraintes  $s_{i,j}$ .  
Nous adopterons les notations suivantes décrivant un élément matériel dans différents états. Les déformations sont supposées homogènes.

$I(T_0)$  : configuration initiale à la température  $T_0 = I(T_0)$  a un volume unité  
 $R(T_0)$  : configuration relâchée à la température  $T_0 = R(T_0)$  a un volume unité  
 $R(T)$  : configuration relâchée à la température T  
 $A(T)$  : configuration actuelle à la température T

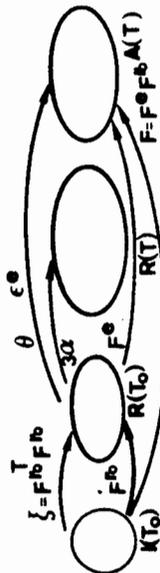


fig. (4.1)

4.2 Expression de  $\dot{\phi}$  et  $\Omega$  du fluide de MAXWELL  
 L'énergie libre du fluide de MAXWELL est :

$$\dot{\phi} = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3\alpha)^2 + \mu (\dot{\epsilon}_{i,j} - \alpha \delta_{i,j}) (\dot{\epsilon}_{i,j} - \alpha \delta_{i,j}) - \int S(T) dT$$

Le potentiel de dissipation est :

$$\Omega = f(J_2, T) ; J_2 = 2\epsilon_{i,k} \epsilon_{j,k} X_{i,j} X_{k,k} - \frac{2}{3} (\epsilon_{i,j} X_{i,j})^2$$

$\dot{\phi}$  : énergie libre d'un élément matériel dans  $A(T)$   
 $\lambda, \mu$  : coefficients de Lamé de l'élasticité instantanée supposée toujours isotrope; ce sont des fonctions de la température T

$l_r$  : longueur d'un segment matériel dans  $R(T)$   
 $l_r^e$  : longueur de ce segment dans  $R(T_0)$   
 $V_r$  : volume de  $R(T)$   
 $V_r^e$  : volume de  $R(T_0)$   
 $\alpha$  : dilatation thermique linéaire  $\log \frac{l_r}{l_r^e}$  de la transformation  $R(T_0) \rightarrow R(T)$

$3\alpha$  : dilatation thermique volumique  $\log \frac{V_r}{V_r^e}$  de la transformation  $R(T_0) \rightarrow R(T)$   
 $S(T)$  : entropie de la configuration relâchée

$\frac{\partial x_i}{\partial a_j}$  : tenseur gradient de la transformation  $I(T_0) \rightarrow A(T)$ .  $a_i$  sont les coordonnées initiales,  $x_i$  les coordonnées finales relativement à un même repère orthonormé. On désigne aussi le tenseur  $F_{i,j}$  par  $F$ , et on pose  $G = F^{-1}$

Soit  $F^e : I(T_0) \rightarrow R(T_0)$  et  $F^* : R(T_0) \rightarrow A(T)$   
 Alors  $F$  se décompose comme suit :

$\theta$  : dilatation volumique  $\log \frac{V_r}{V_r^e}$  de la transformation  $R(T_0) \rightarrow A(T)$   
 On a  $\theta = \log \det F$

$\xi$  : variable interne tensorielle. C'est un tenseur symétrique égal au tenseur droit de la transformation:  $I(T_0) \rightarrow R(T_0)$ .  $\xi$  ne subit pas de discontinuité lors d'un saut brusque de la déformation et de la température.

Alors la variable interne considérée est  $\xi = F^e \cdot \xi^* \cdot F^{e^{-1}}$

$\epsilon_{i,j}$  : tenseur de déformation élastique; c'est le tenseur de déformation logarithmique de la transformation:  $R(T_0) \rightarrow A(T)$ .  
 $c^*$  a les expressions équivalentes suivantes :

$$c^* = -\frac{1}{2} \log (F^* F^{*T}) = -\frac{1}{2} \log (G^T \xi G) = -\frac{1}{2} \log (F \eta F^T)$$

$$A^* = G^T \xi G$$

$$B^* = F \eta F^T = (A^*)^{-1} = A^{*-1}$$

$$X_{i,j} = -\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi_{i,j}} = \mu \epsilon_{i,j}^e B_{i,j}^e G_{i,j} + \alpha G_{i,j}$$

est la force thermodynamique associée à  $\xi_{i,j}$

$$\dot{\xi}_{i,j} = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \xi_{i,j}} = 4\mu f'(\xi_{i,j}) \epsilon_{i,j}^e F_{i,j}^e - \frac{\theta}{3} \xi_{i,j}$$

est l'évolution de  $\xi_{i,j}$ , où  $f'$  est la dérivée première et seconde de  $f$  par rapport à  $J_2$ .

D'autre part, en admettant, l'invariance du volume de  $R(T_0)$ , on remarque que le comportement est dissipatif pour  $f' > 0$ , il est convexe pour  $f'' > 0$  et  $f''' > 0$ .

#### 5. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE D'UN M/S AVEC ELASTICITE INSTANTANEE

Dans ce paragraphe, on va donner un théorème d'existence et d'unicité pour un problème aux limites en vitesse à partir d'un état d'équilibre stable (critère d'énergie) d'un milieu élastique, et un M/S à élasticité instantanée, en déformation quasi-statique.

5.1. Position du problème

Soit D un domaine ouvert borné de l'espace  $R^3$ , représentant un matériau élastique, ou viscoélastique. On décompose la frontière  $\partial D$  de D en deux parties  $\Gamma = \partial_1 D$  (non vide) est la partie fixée, et  $\partial_2 D = \partial D - \partial_1 D$  le restant. Les forces d'inertie étant négligeables (déformations quasi-statiques).

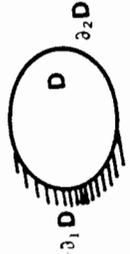


fig. (5.1)

On suppose que D est stable, c'est-à-dire l'équation d'équilibre vérifie les deux conditions (E.F. et C.E.) suivantes :

Ellipticité forte (E.F.)

il existe  $C_1 > 0$  tel que :

$$\Phi_{,jkk} \alpha_j \beta_k \beta_h > C_1 \alpha_j \alpha_j \beta_j \beta_j \quad \forall \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}^3$$

Critère d'énergie (C.E.)

$$a(v, \hat{v}) = \int_D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial x_j} da > 0 \quad \forall \hat{v} \in B - \{0\}$$

Où B est l'espace de BIRNBAUM suivant :

$$B = \{ v = (v_1, v_2, v_3) \mid v_i \in H^1(D) ; v_i = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et } p > 3 \}$$

5.2. Cas d'un milieu élastique dont l'équilibre est stable

Considérons tout d'abord, le cas où  $\Gamma = \partial_1 D \neq \emptyset$ , supposons que D est un milieu élastique,  $\Phi$  est l'énergie libre.

$$\Phi_{,jkk} = \Phi_{,kjj}$$

En plus, les deux conditions E.F. et C.E. sont vérifiées.

Nous allons considérer l'espace de HILBERT  $V = [H_1^1(D)]^3$  tel que :

$$H_1^1(D) = \{ v \in H^1(D) ; v_i = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

$H_1^1(D)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(D)$ , donc, il est un espace de HILBERT, la semi-norme :

$$\|v\|_{H_1^1(D)} = \|v\|_{H_1^1(D)} = \left( \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(D)}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur  $H_1^1(D)$  équivalente à la norme induite par  $\|v\|_{H^1(D)}$

Théorème (5.1)

Pour un corps élastique D stable, le problème aux limites :

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} (\Phi_{,jkk}) = 0 \quad \text{dans } D \\ v_i = 0 \quad \text{et } \Phi_{,jkk} n_j = f_i \end{array} \right] \quad (5.2.1) \quad (5.2.2)$$

$$\left[ \begin{array}{l} v(x, t) = 0 \quad \text{pour } t = 0 \end{array} \right]$$

admet une solution unique dans l'espace  $V = [H_1^1(D)]^3$

En fait, en multipliant par une fonction test  $\hat{v} \in V$ , en tenant compte de (5.2.2) et en appliquant la formule de GREEN, la démonstration du théorème (5.1) se ramène à démontrer le théorème suivant (11) :

Sous les hypothèses de C.E. et E.F., le problème variationnel suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{v} \in V \text{ tel que :} \\ a(v, \hat{v}) = \int_D f_i \hat{v}_i da \\ \forall \hat{v}, \hat{v} \in V \end{array} \right] \quad (5.2.3)$$

$$\text{où } a(v, \hat{v}) = \int_D \Phi_{,jkk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} da$$

admet une seule solution dans l'espace V

Démonstration

I. Continuité de  $a(v, \hat{v})$  sur l'espace V

Proposition (5.1)

La forme  $a(v, \hat{v})$  est continue dans l'espace V; il existe une constante positive M telle que :

$$|a(v, \hat{v})| \leq M \|v\|_V \|\hat{v}\|_V \quad \forall v, \hat{v} \in V \text{ et } M > 0 \quad (5.2.4)$$

Démonstration

En appliquant, l'inégalité de SCHWARTZ, on a :

$$|a(v, \hat{v})| \leq \|\Phi_{,jkk}(a)\|_{L^2(D)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(D)} \|\hat{v}\|_{L^2(D)}$$

$$|a(v, \hat{v})| \leq \alpha C_1 \|v\|_{H_1^1(D)} C_2 \|\hat{v}\|_{H_1^1(D)} \quad ; \quad C_1, C_2, \alpha > 0$$

$$\text{Où } \alpha = \|\Phi_{,jkk}(a)\|_{L^2(D)} = \text{Sup}_{a \in D} \Phi_{,jkk}(a)$$

$$|a(v, \hat{v})| \leq \alpha C_1 C_2 C_3 \|v\|_V \|\hat{v}\|_V \quad ; \quad C_1, C_2, C_3 > 0$$

Finalement, on obtient (5.2.4) avec  $M = \alpha C_1 C_2 C_3 > 0$

II. Coercivité de  $a(v, \hat{v})$  sur l'espace V

La démonstration de la proposition suivante est due à FOTIER-FERRY (9)

Proposition (5.2)

Sous les hypothèses de E.F. et C.E., la forme quadratique  $a(v, \hat{v})$  est coercive sur l'espace V.

La démonstration de cette proposition revient à démontrer les deux lemmes suivants :

lemme (5.1)

Soit  $a_1(v)$  une forme quadratique continue sur un espace de HILBERT, de façon que :

$$a_1(v) = a_2(v) + a_3(v)$$

Où  $a_2(v)$  est une forme quadratique coercive

$a_3(v)$  est une forme quadratique faiblement continue

Alors, si  $a_1(v)$  est positive quel que soit  $v \in V$ , donc  $a_1$  est coercive.

Lemme (5.2)

$$C.E. \Leftrightarrow a(v, v) > 0 \quad \forall v \in V - \{0\}$$

III. Le deuxième membre de (5.2.3) est une forme linéaire bornée sur l'espace

$$V : \left| \int_D f_i \hat{v}_i da \right| \leq \|f\|_{L^2(D)} \|\hat{v}\|_{L^2(D)} \quad \forall \hat{v} \in V$$

pour  $f \in L^2(D)$ , c'est à dire que la force f est bornée, donc :

$$\left| \int_D f_i \hat{v}_i da \right| \leq C_1 \|\hat{v}\|_{L^2(D)} < C_1 C_2 \|\hat{v}\|_{H_1^1(D)} \quad \forall \hat{v} \in V$$

$$\text{ou } \left| \int_D f_i \hat{v}_i da \right| \leq C \|\hat{v}\|_V \quad ; \quad C = C_1 C_2 \quad \forall \hat{v} \in V$$

De 1., 11., et 111) on peut donc appliquer le lemme de LAX-MILGRAM, par conséquent, il existe une solution  $v$  et une seule appartenant à l'espace  $V$ .

Remarques

1. L'interprétation physique du résultat précédent est que la stabilité entraîne l'existence et l'unicité des vitesses dans le corps lorsqu'on impose des vitesses sur la frontière  $\partial D$ .

2. Si au lieu de fixer une partie  $\partial_1 D$  de la frontière, on fixe toute la frontière, c'est-à-dire,  $f = \partial_1 D = \partial D$ . Dans ce cas le théorème (5.1) ou (5.2) est encore valable, pour  $V = [H_0^1(D)]^3$ . Remarquons que la démonstration de la coercivité est encore valable dans  $V = [H_0^1(D)]^3$ .

5.3. Cas d'un M/S à élasticité instantanée stable à l'équilibre  
On sait qu'un M/S à élasticité instantanée est décrit par  $\phi(c, \ell)$  et  $\Omega(X, \xi)$ . L'équation d'équilibre du milieu est :

$$\frac{\partial \theta_{i,j}}{\partial a_j} = 0 \quad (5.3.1) \quad (\text{le tenseur de Boussinesq } \theta_{i,j} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{i,j}})$$

doit être vérifiée avec :

$$\theta_{i,j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} \frac{\partial v_k}{\partial a_h} + \frac{\partial^2 \phi(F, \ell)}{\partial F_{i,j} \partial \ell_{k,h}} \xi_{k,h}(X, \ell) ; \quad v_k = \dot{x}_k \quad (5.3.2.)$$

(5.3.2) peut encore s'écrire :

$$\theta_{i,j} = \frac{\partial v_k}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} + b_{i,j,k,h} \xi_{k,h} \quad (5.3.3)$$

tels que :

$$\frac{\partial \phi_{i,j,k,h}}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} \text{ et } b_{i,j,k,h} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial F_{i,j} \partial \ell_{k,h}}$$

Remarquons que (5.3.3) est semblable à (2.1)

A partir d'un M/S à élasticité instantanée décrit par (5.3.3)

l'équation (5.3.1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} \right) + \frac{\partial}{\partial a_j} (b_{i,j,k,h} \xi_{k,h}) = 0 \quad (5.3.4)$$

où le deuxième terme est une quantité connue, alors (5.3.4) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} \right) = g_i, \quad \text{où } g_i = \frac{\partial}{\partial a_j} (b_{i,j,k,h} \xi_{k,h})$$

qui est l'équation d'équilibre, et le problème aux limites suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial v_k}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} \right) = g_i, \\ \frac{\partial v_k}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} n_j = q_i, \end{array} \right. \quad (5.3.5)$$

$$v_i |_{\Gamma} = 0 \quad \frac{\partial v_k}{\partial F_{i,j} \partial F_{k,h}} n_j |_{\partial_2 D} = q_i, \quad (5.3.6)$$

$$v_i(x, 0) = 0$$

admet une solution unique dans l'espace  $V = [H_0^1(D)]^3$

En effet, une démonstration analogue à celle du théorème (5.1) nous ramène au problème variationnel suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} \text{trouver } \vec{v} \in V \text{ tel que :} \\ a(v, \vec{v}) = \int_D f_i \vec{v}_i da \quad ; \quad (f_i = g_i - q_i) \quad \forall \vec{v} \in V \end{array} \right.$$

Alors, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème (5.3)

Sous les hypothèses de E.F. et C.E., tout milieu viscoélastique standard à élasticité instantanée stable, en déformation quasi-statique, admet une solution unique pour le problème en vitesse.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) HALPHEN.B. et QUOC SON.N. Sur les matériaux standards généralisés. Journal de Mécanique vol.14, n°1, p.p 39-63, 1975
- (2) WEBER.J.D. et BASSOUT-LELLICH.M. Deux applications de la théorie des milieux standards généralisés. Communication au G.F.R., le 24 mai 1984. Cahiers du G.F.R., à paraître.
- (3) BASSOUT-LELLICH.M. Sur la théorie des milieux viscoélastiques standards. Thèse de doctorat de l'Université de Metz, à paraître.
- (4) MADEL.J. Variables cachées, puissance dissipée. Dissipation normale. Cahiers du G.F.R., numéro spécial, p.p 37-49, 1980.
- (5) RICE.J.R. Inelastic constitutive relations for solids: An internal variable theory and its applications to metal plasticity. J.Mech.Phys.Solids. vol. 19, p.p 433,455, 1971.
- (6) WEBER.J.D. and EBERHARDT.A. Internal state variables and normality in viscoplastic flow. Rhéol. Acta 21.p.p 403,405, 1982
- (7) WEBER.J.D. Mécanique des milieux déformables non linéaires. Edition Eyrolles, 1972.
- (8) BASSOUT-LELLICH.M. Théorie des milieux standards généralisés et corps de Maxwell. Communication au G.F.R., le 4 octobre 1984. Cahiers du G.F.R., à paraître.
- (9) POTIER-FERRY.M. On the mathematical foundations of elastic stability theory. Arch. Rat.Mech. Anal. vol. 78, p.p 55-72, 1982.
- (10) WEBER.J.D. Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse. Cahiers du G.F.R., n° spécial Rhéologie, 15 novembre 1973.
- (11) BASSOUT-LELLICH.M. Homogénéisation des milieux viscoélastiques non homogènes. Thèse de doctorat 3ème cycle, Université de Franche-Comté, 1983.

**RESULTATS RECENTS RELATIFS A LA CONJECTURE D'ERICKSEN**

**NEW RESULTS ON THE ERICKSEN'S CONJECTURE**

G. MAYNE

Université Libre de Bruxelles  
Campus Plaine C.P. 218/1  
Boulevard du Triomphe  
1050 BRUXELLES - BELGIQUE

**RESUME**

L'écoulement de Poiseuille d'un fluide non newtonien incompressible n'est possible que si les courbes isovites sont à courbure constante. Cette conjecture d'Ericksen est établie en utilisant un système de coordonnées curvilignes planes orthogonales dont une des familles est constituée des courbes isovites. Cette conjecture n'est plus valable si les fonctions phénoménologiques et la pression hydrostatique vérifient des conditions différentielles bien précises. Ces conditions sont satisfaites pour les contre-exemples à la conjecture proposés par R.L.Fosdick et J.Serrin.

**ABSTRACT**

The Poiseuille flow of an incompressible non newtonian fluid is only possible if the curves of constant speed have constant curvature. This Ericksen's conjecture is proved using a plane curvilinear coordinate system consisting of the unknown constant speed curves and the curves orthogonal to them. This conjecture falls when precise conditions on the phenomenological functions and on the hydrostatic pressure are fulfilled. It is easy to verify that the counter-examples considered by R.L.Fosdick and J.Serrin satisfy these conditions.

**§ 1. INTRODUCTION**

En 1956 (1), J.L.Ericksen formule la conjecture que voici :

L'écoulement rectiligne permanent dans un tube de section quelconque (écoulement de Poiseuille) d'un fluide visqueux non newtonien incompressible n'est possible que si les lignes isovites sont à courbure constante (en particulier, le contour de la section droite du tube qui correspond à la ligne de vitesse nulle). Pour un écoulement de Poiseuille parallèle à l'axe  $x_3$  d'un repère cartésien  $(x_1, x_2, x_3)$ , le champ des vitesses peut s'écrire :

$$v_1 = v_2 = 0 \quad v_3 = 2\phi(x_1, x_2) \quad (1)$$

Où  $\phi$  désigne un fluide non newtonien du type fluide simple au sens de W.Noll.

Pour définir un tel fluide, on prend comme état de référence l'état actuel caractérisé par les variables  $(x, t)$ ; la position  $\xi$  à l'instant  $\tau$  de la particule qui se trouvait en  $x$  à l'instant  $t$  est définie par

$$\xi = \chi(x, t; \tau)$$

Le gradient-déformation relatif  $F(x, t; \tau)$  de composantes

$$F^i_j = \frac{\partial \chi^i}{\partial x^j}$$

est, pour un fluide incompressible, tel que

$$\det F = 1 \quad V \tau$$

Un fluide simple se définit par une équation constitutive du type

$$\bar{T} = -p \mathbf{1} + \bar{T}_D \quad (2)$$

$$\bar{T}_D = \int_{s=0}^{\infty} \bar{F} [F(x, t; t-s)] \text{ avec } \text{tr } \bar{T}_D = 0 \quad (3)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique et  $\bar{F}$  est une fonctionnelle de l'histoire du gradient-déformation relatif.

Pour un écoulement de Poiseuille (2) :

$$\xi_1 = x_1 \quad \xi_2 = x_2 \quad \xi_3 = x_3 + 2(\tau - t)\phi$$

$$F(x, t; \tau) = \mathbf{1} + (\tau - t)M$$

AVEC

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\phi_{,1} & 2\phi_{,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x,t;t-s) = \mathbb{I} - sM$$

$$\bar{t}_D = \int_{s=0}^{\infty} F[\mathbb{I} - sM] \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} f(M)$$

Pour un fluide isotrope, on peut montrer (2) que  $f$  est n\u00e9cessairement de la forme :

$$f(M) = k_0 \mathbb{I} + k_1 V + k_2 V^2 + k_3 W$$

$$k_i = k_i(K) \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad \text{avec} \quad K = |\text{grad } \phi|$$

$$V = \frac{1}{2}(M + M^t) \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque  $\text{tr } \bar{t}_D = 0$ ,  $3k_0 + 2K^2 k_2 + k_3 = 0$  de sorte que (2) devient :

$$\bar{t} = -p \mathbb{I} - \frac{1}{3}(k_3 + 2K^2 k_2) \mathbb{I} + K_1 V + k_2 V^2 + k_3 W \quad (4)$$

Le fluide de Reiner-Rivlin correspond au cas particulier  $k_3 = 0$  et le fluide newtonien au cas  $k_2 = k_3 = 0$ ,  $k_1 = 2\mu$ .  
Notons que le dernier terme de l'\u00e9quation (4) est sans incidence sur les \u00e9quations du mouvement car il n'intervient que dans la composante  $t_{33}$  et sa d\u00e9riv\u00e9e par rapport \u00e0  $x_3$  est nulle.

En supposant que les forces volumiques d\u00e9rivent d'un potentiel  $U$  et en posant

$$P = p + U + \frac{1}{3}(k_3 + 2K^2 k_2)$$

les \u00e9quations du mouvement s'\u00e9crivent :

$$\begin{cases} P_{,i} = (k_2 \phi_{,i} \phi_{,j})_{,j} \\ P_{,3} = (k_1 \phi_{,j})_{,j} \end{cases} \quad i, j = 1, 2 \quad (5)$$

o\u00f9  $_{,j}$  d\u00e9signe la d\u00e9riv\u00e9e partielle par rapport \u00e0  $x_j$  (il y a sommation sur les indices r\u00e9p\u00e9t\u00e9s).

Le gradient de  $P$  ne d\u00e9pendant pas de  $x_3$ , on a aussi :

$$P = -cx_3 + q(x_1, x_2) \quad (6)$$

En introduisant (6) dans (5), il vient :

$$\begin{cases} q_{,i} = (k_2 \phi_{,i} \phi_{,j})_{,j} \\ -c = (k_1 \phi_{,j})_{,j} \end{cases} \quad (7)$$

En posant  $R = q - \frac{1}{2} \int k_2 d(\nabla \phi)^2$ , (7.1) s'\u00e9crit :

$$R_{,i} = (k_2 \phi_{,j})_{,j} \phi_{,i}$$

qui montre que la fonction  $R$  d\u00e9pend de  $(x_1, x_2)$  par l'interm\u00e9diaire de  $\phi$  :

$$R = R(\phi)$$

Le syst\u00e8me (7) peut alors s'\u00e9crire :

$$\begin{cases} -c = (k_1 \phi_{,j})_{,j} \\ \frac{dR}{d\phi} = R' = (k_2 \phi_{,j})_{,j} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{o\u00f9 } R = p + U + cx_3 + \frac{1}{3}(k_3 + 2K^2 k_2) - \frac{1}{2} \int k_2 d\phi^2$$

## § 2. CONDITION DE COMPATIBILITE DES EQUATIONS

Le syst\u00e8me (8) est g\u00e9n\u00e9ralement incompatible sauf, \u00e9videmment, si  $k_2$  et  $k_1$  sont proportionnels. Pour \u00e9tudier la compatibilit\u00e9 de ce syst\u00e8me, nous allons \u00e9crire les \u00e9quations (8) dans un syst\u00e8me de coordonn\u00e9es curvilignes orthogonales  $(y_1, y_2)$  dont les lignes  $y_1 = \text{constante}$  sont les courbes isoviteesses  $\phi(x_1, x_2) = \text{constante}$ . Le changement de coordonn\u00e9es se pr\u00e9sente donc sous la forme :

$$\begin{cases} y_1 = \phi(x_1, x_2) \\ y_2 = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

Si le tube est fixe et si on admet la condition d'adh\u00e9rence \u00e0 la paroi, la courbe  $y_1 = 0$  est le bord de la section droite du tube. Dans ces coordonn\u00e9es, le tenseur m\u00e9trique a deux composantes non nulles :  $F_{11}$  et  $F_{22}$  et on aura :

$$k^2 = |{}_{PR} \text{rad } \phi|^2 = r^i \phi_{,i} \phi_{,j} = r_{,1}^{-1} \quad (9)$$

désigne ici la dérivée partielle par rapport à  $y_i$ .  
Les fonctions phénoménologiques  $k_1$  et  $k_2$  ne dépendent donc que de  $r_{,11}$ .  
Le système (8) devient alors

$$\begin{cases} -c = \frac{1}{\sqrt{r_{,11}^2 r_{,22}}} \left( \sqrt{r_{,11}^2 r_{,22}} \frac{k_1}{r_{,11}} \right)_{,1} \\ R'(y_1) = \frac{1}{\sqrt{r_{,11}^2 r_{,22}}} \left( \sqrt{r_{,11}^2 r_{,22}} \frac{k_2}{r_{,11}} \right)_{,2} \end{cases} \quad (10)$$

Puisque les coordonnées curvilignes  $(y_1, y_2)$  sont planes, les composantes  $r_{,11}$ ,  $r_{,22}$  du tenseur métrique doivent vérifier la condition de courbure totale nulle :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{r_{,11}^2 r_{,22}}} \right)_{,1} + \left( \frac{1}{\sqrt{r_{,11}^2 r_{,22}}} \right)_{,2} = 0 \quad (11)$$

De sorte que le système (8) est équivalent à un système de 3 équations à 2 inconnues  $r_{,11}$  et  $r_{,22}$ .  
En posant

$$r_1 = \sqrt{r_{,11}} \quad r_2 = \sqrt{r_{,22}} \quad T_1 = \frac{k_1}{k_2} \quad T_2 = \frac{r_1}{r_2} \quad (12)$$

le système (10) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} r_{1,1} = -\lambda - \mu r' \\ r_{2,1} = r_2(\eta + \nu r') \\ \left( \frac{r_{2,1}}{r_1} \right)_{,1} + \left( \frac{r_{1,2}}{r_2} \right)_{,2} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \lambda &= c r_1 \frac{T_2}{T_1} & \mu &= r_1 \frac{T_1}{T_1} \\ \eta &= -c r_1 \frac{T_2}{T_1} & \nu &= r_1 \left( T_2 - \frac{T_2}{T_1} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Nous supposons  $T_1 \neq 0$  puisque, dans le cas contraire,  $k_1$  et  $k_2$  sont proportionnels, le système (8) est trivialement compatible et la conjecture d'Erickson tombe.

En multipliant (13.3) par  $\frac{1}{r_2} r_{1,2}$ , cette équation peut être intégrée par rapport à  $y_2$  quand on tient compte des deux autres équations du système (13); la relation qui en résulte peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{r_{1,2}}{r_2} \right)^2 + \gamma + \delta r' + \epsilon r'^2 + \varphi r'' = \psi(y_1)$$

$\gamma, \delta, \epsilon, \varphi$  sont des fonctions de  $r_1$  définies par leurs dérivées par rapport à  $r_1$  en fonction de  $T_1, T_2$  et de leurs dérivées :

$$\begin{aligned} \text{dét. } \frac{dY}{dr_1} &= c^2 \frac{r_{,1}'}{T_1} \left( T_2 \frac{T_2'}{T_1} \right) \\ \gamma' &= 2c r_1 \frac{T_2'}{T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)' \\ \delta' &= 2c r_1 \frac{T_2'}{T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)' \\ \epsilon' &= \frac{r_{,1}'}{2T_1} \left[ \frac{1}{T_1} \left( \frac{T_2'}{T_1} \right)' \right] \\ \varphi' &= - \frac{T_2'}{T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)' \end{aligned} \quad (15)$$

$S$  est une fonction arbitraire de  $y_1$  introduite par l'intégration.  
La compatibilité du système (13) qui est équivalent au système (13.1) (13.2) et (15) résulte de la compatibilité de (13.1) et (15). Pour obtenir explicitement cette condition de compatibilité, on calcule la dérivée seconde mixte  $r_{,1,1,2}$  en dérivant (13.1) par rapport à  $y_2$  et (15) par rapport à  $y_1$ . En égalant ces deux expressions, on obtient la condition suivante :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta r')(S - \gamma - \delta r' - \epsilon r'^2 - \varphi r'') + (\lambda + \mu r')(y' + \delta' r' + \epsilon' r'^2 + \varphi' r'') \\ + S' - \delta r'' - 2\epsilon r' r'' - \varphi r''' = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{où } \alpha = 2(\lambda' + \eta) \quad \beta = 2(\mu' + \nu)$$

La condition (16) constitue une relation entre  $r_1$  et  $y_1$  uniquement : elle dépend de  $r_1$  par l'intermédiaire des fonctions représentées par des lettres grecques et de  $y_1$  par les fonctions  $R$  et  $S$ .  
Dès lors, si (16) dépend explicitement de  $r_1$ ,  $r_1$  est une fonction de la seule variable  $y_1$  et on a la proposition suivante :

Théorème : si (16) dépend explicitement de  $r_1$ , alors la conjecture d'Erickson est valable.

Démonstration : la courbure  $C_1$  des courbes  $y_1 = \text{constante}$  est donnée par

$$C_1 = \frac{1}{r_1^2} r_{2,1} = \frac{1}{r_1} (\eta + \nu r')$$

en vertu de (13.2). C'est une fonction de  $r_1$  par  $\eta, \nu$  et de  $y_1$  par  $r'$ .

Si (17) dépend explicitement de  $\rho_1, \kappa_1$  ne dépend que de  $y_1$  et, par conséquent,  $C_1$  également. Il en résulte que ces courbes  $y_1 = \text{constante}$  sont à courbure constante.

Si (17) ne dépend pas explicitement de  $\rho_1$ , c'est-à-dire si cette relation se réduit à une équation différentielle liant les fonctions  $R$  et  $S$ , la conclusion précédente ne tient plus et la conjecture d'Erickson fait défaut.

Nous allons maintenant tenter d'obtenir des conditions explicites sur les fonctions  $k_1, k_2$  et  $R$  pour que (17) ne dépende pas explicitement de  $\rho_1$ .

### §3. DISCUSSION SUR LA VALIDITÉ DE LA CONJECTURE

Pour déterminer les fonctions  $k_1, k_2$  et  $R$  telles que (17) ne dépende pas explicitement de  $\kappa_1$ , nous devons exprimer que la dérivée de (17) par rapport à  $\kappa_1$  s'annule identiquement. Il en résulte que  $S(y_1)$  doit être identifiée à

$$S(y_1) = \frac{1}{\alpha' + \beta'R'}(a + bR' + dR'^2 + eR'' + fR'^3 + gR'R'' + \varphi'R''') \quad (18)$$

où  $a = (\alpha\gamma - \lambda\gamma')$ ,

$$b = (\alpha\delta + \beta\gamma - \mu\gamma' - \lambda\delta')$$

$$d = (\alpha\epsilon + \beta\delta - \mu\delta' - \lambda\epsilon')$$

$$e = (\alpha\varphi - \lambda\varphi' + \delta)$$

$$f = (\epsilon\beta - \mu\epsilon')$$

$$g = (\beta\varphi - \mu\varphi' + 2\epsilon)$$

Puisque le membre de droite de (18) ne peut dépendre de  $\kappa_1$ , sa dérivée par rapport à  $\kappa_1$  doit être identiquement nulle :

$$(\alpha' + \beta'R')(\delta' + b'R' + d'R'^2 + e'R'' + f'R'^3 + g'R'R'' + \varphi'R''') - (\alpha'' + \beta''R' + \beta'R'')(a + bR' + dR'^2 + eR'' + fR'^3 + gR'R'' + \varphi'R''') = 0 \quad (20)$$

Cette relation implique des conditions sur  $k_1, k_2$  et  $R$ .

Si on suppose que la perte de charge  $c$  n'est pas nulle et si on impose a priori aucunes conditions sur  $R'$ , les fonctions  $\alpha, \beta, a, b, d, e, f, \kappa, \varphi'$  qui dépendent de  $\kappa_1$  par l'intermédiaire de  $k_1$  et  $k_2$  doivent satisfaire 10 équations qui seront fatalement incompatibles. On peut voir que la seule manière d'éviter ces incompatibilités est d'admettre que  $R'$  est constante :

$$R' = k$$

Dans ce cas, on peut montrer que  $k_1$  et  $k_2$  doivent satisfaire l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{R'}{T_1}\right)^2(c + kT_1)^4 = v(\gamma + k\delta + k^2\epsilon - \varphi'^{-1})$$

$p$  et  $l$  sont des constantes d'intégration et  $v = \varphi'^{-1}$ .

Il résulte de (18) que le cas  $\alpha' + \beta'R' = 0$  doit être envisagé à part. On peut montrer, dans cette hypothèse, que la relation (17) ne dépendra pas explicitement de  $\rho_1$  si

$$R' = k$$

$$T_2 = \frac{q}{2}(c + kT_1) \frac{1}{\left[\frac{R'}{T_1}(c + kT_1)^2\right]}, \quad (22)$$

$$qS + S' - \frac{1}{l} = 0$$

et si  $T_1$  vérifie l'équation (21).

Si la constante arbitraire  $q$  est nulle, alors

$$\left[\frac{R'}{T_1}(c + kT_1)^2\right]' = 0$$

$$\text{et } c + kT_1 = (\rho_1^2 + w)^{-1} \quad (23)$$

$w$  est une constante arbitraire et  $T_2$  doit vérifier (21).

Cas particulier  $c = 0$ .

Dans ce cas,  $\alpha = \gamma = \delta = \lambda = 0$  et (20) se réduit à

$$\beta'R'(f'R'^3 + g'R'R'' + \varphi'R''') - \beta''R'(fR'^3 + gR'R'' + \varphi'R''') = 0 \quad (24)$$

L'étude de la condition (24) suggère deux sous-cas :

1. (24) ne se réduit pas à une condition différentielle sur  $R'$  du type  $R''' = 2pR'R'' + qR'^3$  où  $p$  et  $q$  sont des constantes. (24) implique alors les trois conditions suivantes :

$$\beta'R' - \beta''R = 0$$

$$\beta'R' - \beta''R = 0$$

$$\beta'\varphi'' - \beta''\varphi' = 0 \quad (25)$$

Par intégration, ces relations deviennent :

$$f = a_1\beta', \quad g = a_2\beta', \quad \varphi' = a_3\beta' \quad (26)$$

où  $a_1, a_2, a_3$  sont des constantes.

En introduisant (26) dans (18), il vient :

$$S = a_1 R_1'^2 + a_2 R_1'' + a_3 \frac{R_1'''}{R_1'} \quad (27)$$

(17) se réduit alors à une équation différentielle en la fonction  $R_1'$  :

$$a_3 \left(\frac{R_1'''}{R_1'}\right)' + u R_1'''' + v R_1'''' + w R_1'^3 = 0 \quad (28)$$

$u, v, w$  sont des constantes arbitraires.

Le système (25) comprend trois conditions différentielles portant sur les deux fonctions phénoménologiques  $k_1$  et  $k_2$ . Il est trivialement compatible si  $\varphi' = 0$ , car alors, en vertu de (16) et (19),  $f = g = 0$ . Mais, dans ce cas,  $C_1 = 0$  et la conjecture d'Erickson reste valable.

L'étude de la compatibilité des conditions (25) est très compliquée; elle se simplifie considérablement dans le cas particulier  $u = v = w = 0$  pour lequel (25) sera compatible si

$$\left(\frac{2}{T_1}\right)^2 = 2a_1 g_1^2 + 2b \quad (29)$$

$$T_1^{-1} = \frac{1}{4h} d^{2-n} \left[ \frac{1}{n-2} e^{-(2-n)x} - \frac{1}{n+2} e^{-(2+n)x} \right] + \ell \quad (30)$$

où  $a, b, h, n, \ell$  sont des constantes réelles;  $a > 0, b > 0, d^2 = \frac{b}{a}$  et  $g_1 = d \operatorname{sh} x$ .

Si  $n = 2$   $T_1^{-1} = -\frac{1}{4h} \left(x + \frac{1}{4} e^{-4x}\right) + \ell \quad (31)$

Si  $n = -2$   $T_1^{-1} = \frac{d^4}{4h} \left(x - \frac{1}{4} e^{4x}\right) + \ell \quad (32)$

Si  $d = 0$   $T_1^{-1} = \frac{1}{2^{n(n-2)}} \ell_1^{2-n} + \ell \quad (33)$

Si  $d = 0$   $n = 2$   $T_1^{-1} = -\frac{1}{4h} \ell_1^n \ell_1 + \ell \quad (34)$

2. (24) se réduit à une relation du type

$$R'' = 2pR'R'' + qR_1'^3 \quad (35)$$

où  $p$  et  $q$  sont des constantes.

Il résulte alors de (24) que  $k_1$  et  $k_2$  doivent satisfaire deux équations différentielles

$$\beta'(f' + q\varphi'') - \beta''(f + q\varphi') = 0 \quad (36)$$

$$\beta'(\varphi' + 2p\varphi'') - \beta''(g + 2p\varphi') = 0$$

Par intégration, il vient

$$f + q\varphi' = a_1 \beta' \quad (37)$$

$$g + 2p\varphi' = a_2 \beta'$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des constantes. De (18), on tire :

$$S = a_1 R_1'^2 + a_2 R_1'' \quad (38)$$

En intégrant (37), on trouve

$$\epsilon\beta - \mu\epsilon' + q\varphi = a_1 \beta + b_1 \quad (39)$$

$$\beta\varphi - \mu\varphi' + 2\epsilon + p\varphi = a_2 \beta + b_2$$

En introduisant (39) dans (17), on voit que :

$$b_2 = 2a_1 + a_2 p$$

$$b_1 = a_2 q$$

de sorte que (39) s'écrit finalement :

$$(\epsilon - a_1)\beta - \mu\epsilon' + q\varphi = a_2 q \quad (40)$$

$$(\varphi - a_2)\beta - \mu\varphi' + 2\epsilon + p\varphi = 2a_1 + p a_2$$

Si  $q = 0$ , (35) peut être intégrée :

$$R'' = pR_1'^2 + \ell \quad (41)$$

Il résulte alors de (24) que

$$\beta'(f + p g + 2p^2 \varphi') - \beta''(f + p g + 2p^2 \varphi') = 0$$

$$\ell[\beta'(g + 2p\varphi') - \beta''(g + 2p\varphi')] = 0 \quad (42)$$

Le système est équivalent à (36) avec  $q = 0$  sauf si  $k = 0$ ; dans ce dernier cas,

$$R'' = pR'^2 \quad (43)$$

Les deux conditions (42) se réduisent à la seule condition (42.1) que l'on peut intégrer deux fois :

$$f + pg + 2p^2\varphi' = a_1\beta' \quad (44)$$

$$\varepsilon\beta - \mu\varepsilon' + p(\beta\varphi - \mu\varphi' + 2\varepsilon) + 2p^2\varphi = a_1\beta + b_1 \quad (45)$$

de (18), on obtient

$$S = a_1R'^2 \quad (46)$$

En vertu de (17), on doit avoir

$$b_1 = 2a_1p$$

$k_1$  et  $k_2$  doivent donc vérifier une seule condition qui s'écrit :

$$\varepsilon\beta - \mu\varepsilon' + p(\beta\varphi - \mu\varphi' + 2\varepsilon) + 2p^2\varphi = a_1(\beta + 2p) \quad (47)$$

Si  $\beta' = 0$ , la fonction  $S$  n'est plus définie par (18). En dérivant (17) par rapport à  $g_1$ , on trouve :

$$fR'^3 + gR'R'' + \varphi'R''' = 0 \quad (48)$$

On a nécessairement (35) car, dans le cas contraire,  $\varphi' = 0$  et  $C_1 = 0$ . Dès lors,

$$f + g\varphi' = 0$$

$$g + 2p\varphi' = 0 \quad (49)$$

On retrouve (37) avec  $\beta' = 0$ . Mais si  $\beta$  est une constante,  $T_2$  est une fonction de  $T_1$  et de ses dérivées de sorte que (49) impose deux relations différentielles sur  $T_1$  qui sont généralement incompatibles. Il n'en est pas de même si  $q = 0$ , car en vertu de (43),

$$R'' = pR'^2$$

et (48) se réduit à une seule condition sur  $T_1$  et  $T_2$  :

$$f + pg + 2p^2\varphi' = 0$$

C'est la relation (44) avec  $\beta' = 0$ .

#### § 4. CONTRE-EXEMPLES DE FOSDICK ET SERRIN

En 1973, R.L.Fosdick et J.Serrin (2) ont établi analytiquement la conjecture sur la base d'un théorème qui supposait la section droite du tube bornée et connexe, la perte de charge non nulle et certaines conditions de régularité des fonctions  $k_1$  et  $k_2$ .

Pour faire apparaître le caractère nécessaire de ces hypothèses, ils ont présenté différents contre-exemples pour lesquels, ces hypothèses n'étant pas satisfaites, la conjecture n'est plus valable. Il est facile de vérifier que, pour tous ces contre-exemples,  $k_1, k_2$  et  $R$  sont telles que la relation (17) ne dépend pas explicitement de  $g_1$  et que ces fonctions vérifient un des groupes de conditions obtenues au paragraphe précédent.

##### A. Contre-exemples avec $c \neq 0$

$$1. \quad \phi = -\frac{a}{4}x_1^2 + \frac{b}{2}x_2 \quad R = -2aby_1$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 4 \frac{fg_1 + k\sqrt{4 - b^2R_1^2}}{\sqrt{4 - b^2R_1^2}}$$

C'est un cas particulier de (21) avec

$$p = -32 \frac{a^2r^2}{b^2} \quad k = -2a\lambda$$

$$2. \quad 2\phi = -\frac{a}{4}r^2 + b\theta \quad R = -2aby_1$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = \frac{4f}{g_1} (4 + \varepsilon \sqrt{16 - \frac{2^2 4}{a^2 b^2 R_1^2}}) + 4g \quad \varepsilon = \pm 1$$

Cas particulier de (21) avec

$$p = -32a^2bf^2 \quad k = -2a\lambda$$

##### B. Contre-exemples avec $c = 0$

$$1. \quad \phi = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) \quad R = 32ky_1^2 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 16ky_1^{-2} + 4d$$

On retrouve (29) avec  $b = 0$   $a = \frac{1}{8}$  et (33) avec

$$n = 4 \quad h^{-1} = 2^8 k \quad \ell = 2d$$

$$\phi = \frac{1}{2} r^m \cos m\theta \quad R = 4km \frac{2}{m-1} y_1^2$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 4k \left| 2e_1^{-\frac{1}{2}} \right|^{m-1} + 4d$$

C'est un cas particulier de (29) avec  $b = 0$   $a = \frac{1}{8}$

$$n = \frac{2m}{m-1} \quad h^{-1} = (n-2)2^{n+3}k \quad \ell = 2d$$

$$3. \quad 2\phi = q \ell n \frac{ch bx_2 - \cos bx_1}{ch bx_2 + \cos bx_1} + d \quad R = b^2 \frac{2y_1 - d}{q} k$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = -4k \ell n \frac{e_1^{-1}}{2} + 4m$$

Ces fonctions vérifient (28) avec  $u = v = w = 0$ .

$$(29) \text{ avec } a = \frac{1}{8} \quad b = 0$$

$$(34) \text{ avec } h^{-1} = 8k \quad \ell = 2m + 2k \ell n 2$$

§ 5. CONCLUSION

L'écoulement de Poiseuille d'un fluide non newtonien incompressible n'est possible que si les courbes isovites sont à courbure constante sauf si  $k_2 = \ell k_1$  avec  $R' = -\ell c$  ou si  $k_1, k_2$  et  $R'$  vérifient une des conditions du § 3.

Ce résultat a été obtenu sous l'hypothèse implicite que les courbes isovites sont suffisamment régulières pour constituer des lignes de coordonnées du plan; il ne peut donc être étendu aux cas où le bord de la section droite du tube présente des discontinuités. Par ailleurs, pour des tubes carrés ou rectangulaires, on a pu construire des solutions (3) qui ne sont pas rectilignes.

BIBLIOGRAPHIE

(1) J.L.Ericksen : Overdetermination of the speed in rectilinear motion of non-newtonian fluids. Quarterly of Appl.Math. 14 (1956).  
 (2) R.L.Fosdick and J.Serrin : Rectilinear steady flow of simple fluids. Proc. R.Soc.Lond. A 332 (1973).  
 (3) P.Townsend, K.Walters and W.M.Waterhouse : Secondary flows in pipes of square cross section and the measurement of the second normal stress difference. J.of Non-Newtonian fluid Mech. 1 (1976).

**SCHEMAS THERMOMECHANIQUES DE L'HYSTERESIS ET RESULTATS RECENTS EN GRANDES DEFORMATIONS ELASTOPLASTIQUES**

THERMOMECHANICAL SCHEMES OF HYSTERESIS AND NEW RESULTS IN THE FIELD OF FINITE STRAIN PLASTICITY

- D. FAVIER  
 I.N.P.G., GPM2, B.P. 46 - 38402 St MARTIN D'HERES, GRENOBLE, FRANCE  
 P. GUELIN  
 C.N.R.S., IMG, B.P. 68 - 38402 St MARTIN D'HERES, GRENOBLE, FRANCE  
 P. PEGON  
 C.C.R. Euratom, Joint Research Center, I 21-020, ISPRA, ITALIAE

RESUME

Le travail est en trois parties : analyse de l'état des principes, des méthodes et des résultats en matière de description de l'hystérésis mécanique ; rappel des bases physiques et du formalisme naturel d'une classe de schémas à mémoire discrète ; applications au cas des grandes déformations élastoplastiques à l'aide d'un schéma simple du type de Zaremba et illustration en problèmes homogènes.

ABSTRACT

The aim of this paper is three-fold : first to analyse the state of principles, methods and results describing mechanical hysteresis ; second to recall the physical basis and the formalism of a class of discrete memory schemes ; third to show application in finite strain plasticity using a simple scheme of Zaremba type and to illustrate in the case of homogeneous problems.

i) L'hystérésis est un phénomène universel, et peut donc, en tant que tel, susciter la mise en jeu d'éléments conceptuels importants. Le phénomène d'hystérésis [1] est observé dans des domaines très variés de la physique : les temps caractéristiques des hystérésis de filtration et des hystérésis par bi-stabilité optique sont, respectivement, de l'ordre de  $10^3$  s et de  $10^{-11}$  s. En mécanique des continus, l'hystérésis s'observe non seulement pour des solides tels que les alliages métalliques, mais aussi pour des corps tels que les graisses et les matériaux pulvérulents. En résumé, les résultats obtenus depuis deux décennies à l'aide des moyens expérimentaux modernes suggèrent que la notion de transformation irréversible renversable [1], lorsqu'elle est reconnue comme irréductible [2], doit jouer, en matière de schématisation du réel, un rôle d'une importance comparable aux rôles tenus par le concept d'onde, la notion de potentiel et les irréversibilités du genre de diffusion.

ii) En matière d'hystérésis mécanique la situation ne se présente pas favorablement, qu'il s'agisse des principes, des méthodes ou des résultats. Quelques études combinent des techniques de statistique, de discontinuité et de réversibilité pour suggérer la possibilité de réduire les schémas de l'hystérésis aux schémas dynamiques classiques [3] [4] : la situation conceptuelle n'est pas simple et évoque celle apparue naguère en théorie des systèmes à la Van der Pol [2] [5]. Quelques études apportent des contributions spécifiques bien fondées [1] [2] [6] [7]. Pour se présenter sous forme thermomécanique la plupart des travaux se poursuivent en utilisant un formalisme thermodynamique classique bien qu'il soit parfaitement connu que ni l'équation fondamentale de Gibbs, ni le principe associé dit "de l'équilibre local", ni l'irréversibilité d'hystérésis. La situation, en quelque sorte étonnante sur le plan conceptuel, tient bien entendu au fait que, dans son état actuel, la théorie des milieux continus n'est pas indépendante des positions positivistes adoptées en Physique sur la base de la doctrine hamiltonienne [9] : les nombreux modèles proposés recèlent des difficultés de fond et la situation actuelle de la mécanique du continu relève encore de la célèbre analyse de Rivlin [10]. Cette situation nécessite aussi le rappel [11] de l'importance, trop longtemps oubliée, de la géométrie différentielle et des conditions générales d'invariance des théories [12]. Elle pousse Oden et Bathe [13] à formuler des observations critiques en matière d'applications : les aspects opératoires sont soulignés au dépend de l'analyse des concepts qui en constituent les bases. Il n'est donc pas surprenant qu'il soit encore possible d'adopter actuellement un point de vue présenté en 1972 par Ziegler [14] en matière de résultats pratiques : l'essentiel des résultats fiables obtenus en plasticité appliquée est basé sur l'analyse limitée mise en oeuvre dans des conditions de chargement monotone (de sorte que le concept de base, qui est celui de potentiel, est, en la circonstance, et par définition, d'un usage sans intérêt conceptuel et que les succès évoqués indiquent seulement l'éventuelle pertinence de la notion de plasticité).

iii) Le calcul des structures ainsi que les recherches expérimentales macroscopiques et microscopiques font apparaître des questions essentielles qui mettent en cause le bien fondé des modèles existants alors même qu'il est devenu peu commode non seulement d'améliorer ces modèles mais aussi d'en changer. D'une part des résultats pratiques doivent être obtenus sous sollicitations cycliques. D'autre part les moyens d'essais permettent de déceler des effets secondaires et des processus microstructuraux difficiles à décrire et qui mettent en cause les bases des modèles existants. Enfin, les recherches menées durant les trois dernières décennies en vue d'améliorer les modèles intégraux et à variables internes procurent des succès limités au prix d'efforts considérables.

iv) Cette situation bloquée peut être analysée dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques. Classiquement il est postulé qu'il n'existe pas de systèmes dont la description n'est possible que si l'on connaît déjà toute l'évolution. Ce déterminisme strict est conforme par excès à l'esprit du

déterminisme au sens large que représente le principe de détermination [15] et qui implique "seulement" l'idée du progrès indéfini des prévisions "responsables" [16]. Il conduit à poser que les seuls schémas "à priori" admissibles appartiennent nécessairement à la classe des systèmes dynamiques, classiques ou conduisent à des systèmes de cette classe. En conséquence, tout usage de la notion de mémoire ne peut être envisagé autrement que sous la forme d'un artifice provisoire reflétant le caractère incomplet du choix des variables d'état. Enfin, tout schéma irréductible est à rejeter définitivement comme non déterministe au sens strict. Les schémas possibles sont donc contenus dans des limites précises qui peuvent nous apparaître aujourd'hui comme excessivement étroites. Mais il ne faut pas perdre de vue l'extraordinaire capacité opératoire des schémas dynamiques classiques et se souvenir de la raison essentielle pour laquelle un principe aussi strict a pu être longtemps tenu pour indispensable. Il a en effet pour rôle d'écarter du champ de la physique le concept de mémoire.

Le concept devait être écarté dans la mesure où il semblait impliquer définitivement l'intervention d'actions à distance instantanées et équivalait donc à une négation du caractère opératoire du principe de causalité. Bien entendu, l'argument des actions instantanées a aujourd'hui perdu toute force du fait des résultats d'observations à échelle fine, observations qui font apparaître comment la matière peut être envisagée comme support de mémoire.

v) Cette première analyse explique les raisons de l'intense effort de développement des théories à variables internes, théories fondées sur l'hypothèse selon laquelle les lois véritablement importantes sont celles dites "simples", c'est à dire hamiltoniennes, mises en jeu à échelle fine. C'est la considération de ces échelles qui permet de décrire une simplicité du réel, qui n'est pas impliquée dans l'idée du déterminisme au sens large : si les échelles intéressantes ne peuvent être considérées l'ensemble conceptuel devient non falsifiable et sort donc du champ scientifique [16]. Le fait est qu'il a été procédé à la mise en oeuvre d'un nombre fini de variables scalaires puis tensorielles. Les problèmes ont alors été ceux d'objectivité, de nature physique et de nombres des variables (2 au moins, en cyclique, selon les idées actuelles). On a enfin constaté qu'il était délicat de mesurer les variables internes et ce sont ces dernières difficultés, lourdes de conséquences sur le plan opératoire, qui ont suscité d'intenses recherches interdisciplinaires finalement fructueuses pour la raison suivante : l'importance des notions de configurations de dislocations et d'immobilisation de dislocations a été reconnue. La doctrine relative aux échelles fines essentielles est donc en cause.

vi) L'état des affaires peut aussi être étudié du point de vue thermomécanique. Les limites de validité de l'équation de Gibbs ont été précisées par Gibbs lui-même. Elles touchent à des questions microstructurales d'une extrême importance en ce sens qu'elles garantissent la compatibilité de l'équation de Gibbs avec la doctrine des lois "simples" à échelle fine, doctrine déjà évoquée au point v). En d'autres termes l'équation de Gibbs et le principe associé dit de l'équilibre local valent lorsqu'il s'agit de schématiser les irréversibilités par "forces retardatrices". Les théories à variables internes sont donc d'autant plus efficaces que la température relative est plus élevée, que les immobilisations de dislocations jouent un rôle décroissant, que les irréversibilités mises en jeu à l'échelle de l'élément sont du genre de viscosité ou de diffusion. Inversement on doit s'attendre à rencontrer des difficultés, lorsque des "forces inhibitrices" sont prépondérantes : Gibbs donne d'ailleurs la plasticité comme exemple. Dans de tels cas glissement et frottement sont les processus à échelle fine (10  $\mu$ m par exemple) qui font des agrégats solides des continus très différents des fluides. Cette distinction marquée par Gibbs a été également soulignée par FER [1] en 1970. Malgré cela, l'algorithme des deux genres d'irréversibilités se poursuit en mécanique à travers un nombre considérable de "modèles viscoplastiques".

vii) Enfin, lorsqu'il s'agit d'examiner l'état des principes et des méthodes sous l'angle mathématique du formalisme tensoriel, le cadre naturel est celui de la géométrie différentielle. La notion essentielle est celle de

transport, notion mise en jeu pour définir la notion de déformation de Cauchy et seulement interprétable en faisant intervenir le concept de mémoire discrète dont on a vu l'incompatibilité avec le point de vue le plus classique (cf. [17] à [23]). Compte tenu des exigences d'invariance générale et d'objectivité naturelle on conduit à envisager l'usage de la méthode de Van Dantzig, une définition abstraite du tenseur contrainte de Cauchy et l'usage d'un tenseur de contrainte transporté ("contrainte de référence") jouant un rôle analogue au tenseur de déformation (transporté) de Cauchy et permettant d'obtenir une équation analogue à celle de Gibbs mais valable pour l'hystérésis.

viii) Les trois analyses (systèmes dynamiques, thermomécaniques, mathématiques) sont convergentes. Renoncer à l'usage des schémas irréductibles ne permet pas d'aller au delà des limites indiquées par Gibbs alors que les résultats d'observations microstructurales incitent à les dépasser, que la géométrie différentielle en procure les moyens, que, de toute façon, la notion de déformation implique déjà une rupture radicale entre mécanique du continu et dynamique classique et qu'enfin les notions de transport et de mémoire discrète qui sont à l'origine de cette rupture méritent à présent une attention particulière compte tenu des observations à échelle fine. Les origines des choix théoriques proposés peuvent donc être résumées ainsi : abandon de la doctrine des lois simples aux échelles accessibles dans le cadre des descriptions continues et recours éventuel aux schémas irréductibles à mémoire discrète ; abandon des tentatives à variables internes aussi longtemps que l'étude des schémas à variables externes déformation contrainte densité de masse n'est pas très approfondie au sens du programme ci-dessous ; abandon de la mise en oeuvre de l'inégalité de Clausius Duhem et recherche d'une extension de Gibbs, éventuellement à mémoire discrète ; abandon des tentatives de schématisation relatives aux cas où se trouvent amalgamées les diverses irréversibilités (théories de viscoplasticité) mais examen prioritaire du phénomène d'hystérésis pure ; abandon des invariances et objectivité par rotation mais formulation respectant l'invariance générale et l'objectivité naturelle par l'usage de coordonnées entraînées ; abandon des tentatives de décomposition du seul tenseur cinématique bien défini, à savoir le tenseur vitesse de déformation, mais introduction du formalisme de transport pour la déformation et la contrainte, ce qui revient à admettre l'usage du concept de mémoire discrète et le recours aux schémas irréductibles. Le programme des travaux prioritaires peut donc être résumé en disant qu'il s'agit d'abord de proposer des schémas ; compatibles avec l'ensemble des phénomènes d'hystérésis ; prenant en compte les situations où le rôle de la mémoire discrète est essentiel ; décrivant les aspects thermomécaniques et non simplement mécaniques ; n'incluant pas nécessairement l'usage de la notion de réversibilité ; permettant l'extension au cas non monotherme, au cas non isotrope et aux divers cas d'écroissements ; permettant de définir les liens entre le concept de mémoire, l'hystérésis et la notion de stabilité.

ix) Le seul point de départ intéressant est constitué par des modèles symboliques à ressorts et frotteurs. Ces modèles essentiellement unidimensionnels n'indiquent pas immédiatement la voie d'une extension tensorielle unique. Mais ils peuvent devenir heuristiques au terme d'études unidimensionnelles complètes car ils respectent les choix indiqués à savoir : pas de simplicité à échelle fine (frottement) ; pas de variables internes (la force dans chaque élément et la position de son frotteur peuvent être calculées à chaque stade de l'évolution) ; pas de recours à la notion d'entropie (frottement mis en jeu immédiatement) ; pas d'amalgame de divers types d'irréversibilités (frottement de Coulomb) ; pas d'usage nécessaire de la notion de domaine élastique (loi de distribution du frottement) ; pas de restriction nécessaire aux aspects purement mécaniques en ce sens qu'il est possible d'étudier les taux de chaleur (dûs au frottement).

## 2. UNE CLASSE DE SCHEMAS THERMOMECHANIQUES A MEMOIRE DISCRETE

2.1. Pour les raisons indiquées (§1.9), il est utile de procéder à l'examen des propriétés des modèles symboliques à ressorts et frotteurs et ceci non seulement du point de vue mécanique - ce qui est classique, cf. (24) ou (25) par exemple - mais également sous l'angle énergétique (ce qui a été fait il y a quelques années : cf. (15), (17), (18), (19) et (26) à (29) par exemple). Le résultat peut être présenté brièvement comme suit. Soit  $P_e$  et  $P_i$  les densités de puissance des efforts extérieurs et intérieurs ; soit  $K$  et  $E$  les densités des taux d'énergie de type cinétique et interne ; soit  $\Pi$  et  $\omega$  les densités de puissance réversible et de dissipation intrinsèque ; soit enfin  $\lambda$  et  $\dot{\lambda}$  les densités des taux de frottement (et non à des actions à distance ou autre phénomène extrinsèque), l'étude des propriétés mécaniques des modèles fait ressortir le rôle essentiel d'une fonctionnelle d'homothétie  $\omega$  (à valeur 1 ou 2) et des fonctionnelles  $\lambda$  et  $\dot{\lambda}$  qui définissent (à tout instant  $t > t_0$  du parcours d'une branche ou arc de branche de cycle d'hystérésis) les coordonnées du point origine  $R$  de la branche (ou branche support d'arc) ; cette origine  $R$  joue le rôle de référence pour la description de la branche (ou de l'arc de branche). D'autre part, l'étude énergétique détermine les expressions des taux :

$$P_i = -\sigma \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} ; -\dot{\lambda} \dot{\lambda} = \frac{1}{\omega} \left( \Delta_R^t \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} - \Delta_R^t \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} \right) ;$$

$$\dot{E} = \frac{1}{\omega} \left[ (\omega - 1) (\sigma + R^0) \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} + \Delta_R^t \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} \right] ;$$

$$\text{avec : } \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial R^0}{\partial t} = 0 ; \Delta_R^t = (\epsilon - R^0) \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} ; \dot{\lambda} = (\sigma - R^0) \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} ; D = \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t}$$

$$\text{et des taux } \Pi = \frac{\sigma}{R^0} \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} ; C = \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t} \Delta_R^t ; \psi = -P_i - \Pi = \Delta_R^t \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t}$$

Finalment l'étude complète des modèles suggère qu'un schéma d'hystérésis pure est la réunion de six conditions :

- existence de mémoire discrète :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial R^0}{\partial t} = 0$$

- équation différentielle multivoque (donnant  $P_i$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_R^t) = f \left[ \Delta_R^t, \frac{\partial \Delta_R^t}{\partial t}, \Delta_R^t, \Delta_R^t, \omega \right]$$

- bilans et taux fondamentaux ( $P_e$  est supposée spécifiée) :

$$\begin{bmatrix} k \\ \phi \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\omega & 1/\omega & 1/\omega \\ 0 & (1-\omega)/\omega & 1/\omega & 1/\omega \\ 0 & (1-\omega)/\omega & 1/\omega & 1/\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_e \\ P_i \\ \Pi \\ C \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \dot{k} + \dot{E} = P_e + \dot{\lambda} \\ \dot{\phi} = \dot{\lambda} + \Pi \\ \dot{\lambda} = \dot{\lambda} + \psi \end{matrix}$$

- critère d'inversion créant les affixes  $R$  ( $R^0, R^t$ ) et défini en respectant le second principe ( $\phi \geq 0$ )

- algorithme de définition des fonctionnelles  $\omega$  et  $R^0$

- condition d'existence d'un état neutre ( $\epsilon = \sigma = 0$  ;  $I = 0$ ) initial unique quasi restaurable par le cyclage infini classique (cf. (15) par exemple).

On note que la seule de ces six conditions qui particularise un corps est la seconde, c'est-à-dire l'équation multivoque. A ce sujet, il est commode de noter que l'exemple le plus simple est du genre du modèle de Prager :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu \left( 1 - \frac{\sigma}{S_0} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad \text{en première charge}$$

où le sens de deux paramètres  $\mu$  et  $S_0$  est évident. Ce modèle donne en effet d'abord :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu D - \left(\frac{\mu}{S_2}\right) \phi \quad \sigma$$

puis l'extension au cas cyclique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{R^0}^t) = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{R^0}^t) + \alpha \phi \Delta_{R^0}^t$$

qui est bien de la forme indiquée ci-dessus.

2.2. L'extension au cas tensoriel se déroule comme suit. On traduit d'abord la rupture conceptuelle radicale entre la dynamique classique et la mécanique des continus en explicitant complètement le fait que le tenseur de déformation de Cauchy introduit le concept de mémoire discrète dès l'origine de la théorie des continus. Cette formulation explicite s'obtient de façon unique (et immédiate) en généralisant le scalaire  $\Delta_{R^0}^t$  selon :

$$\Delta_{R^0}^t = \frac{1}{2} g - \frac{1}{2} R^g$$

où  $g$  et  $R^g$  notent respectivement le champ de tenseur métrique associé aux coordonnées matérielles  $x^k$  entraînés par les points matériels  $M(x^k)$  ( $Vt$ ) et le champ de tenseur de Cauchy :

$$g = g_{ij}(x^k, t) g^i(x^k, t) \otimes g^j(x^k, t) \quad R^g = g_{ij}(x^k, t) g^i(x^k, t) \otimes g^j(x^k, t)$$

L'invariance de la mémoire discrète  $\left(\frac{\partial}{\partial t} R^g = 0\right)$  se généralise selon :

$$L_{V..} R^g = \left[\frac{\partial}{\partial t} (g_{ij}(x^k, t))\right] g^i(x^k, t) \otimes g^j(x^k, t) = 0 ; \frac{\partial}{\partial t} (d\sigma^2) = 0$$

où  $L_V$  note la dérivée covariante dénommée dérivée de Lie par Van Kampen (et introduite par Slobodzinski, Van Dantzig et Van Kampen). Parallèlement, on généralise au cas tensoriel les fonctionnelles  $\sigma$  et  $\Delta_{R^0}^t$  en introduisant un transport de  $t$  à  $t$  du tenseur relatif de Cauchy, de poids 1 et de vecteur relatif associé :

$$T = (v_j \sigma_{ij}) g_i = (v_j \sigma_j^i) g_i$$

Dans ces relations  $v$  note les composantes covariantes de la normale (relative) à l'élément de surfacé caractérisé par du  $du^a$  de sorte que :

$$v_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \frac{\partial x^k}{\partial u^2} \frac{\partial x^l}{\partial u^1} ; L_V v = 0$$

La généralisation recherchée est donc par exemple :

$$t_{R^0} = \sigma_{ij}(x^k, t) g_i(x^k, t) \otimes g_j(x^k, t) ; L_{V..} t_{R^0} = 0 ; L_V t_T = 0$$

La densité fondamentale  $\Pi$  se généralise selon :

$$\Pi = t_{R^0}^i j D_i = t_{R^0}^i j (L_{V..} \Delta_{R^0}^t)$$

et l'extension de la définition de  $C$  est par exemple :

$$C = (L_V \Delta_{R^0}^t) j \Delta_{R^0}^t j$$

Enfin l'équation multivoque est :

$$L_V \Delta_{R^0}^t + \Delta_{R^0}^t = L_V \sigma + \Delta_{R^0}^t \text{ symbolique } L_V \Delta_{R^0}^t + \Delta_{R^0}^t$$

si le choix de sa variance est celui retenu pour le transport de  $\sigma$  (et de  $T$ ). 2.3. Ce bref rappel permet de faire rapidement trois remarques essentielles sur le plan des principes, des méthodes et des résultats fondamentaux.

- i) On constate tout d'abord que l'extension tensorielle est thermomécanique en ce sens que l'on dispose d'une équation analogue à celle de Gibbs (dont on a vu l'importance §1.), de l'expression de  $\phi$  et du taux  $\dot{\phi}$  observable (fig. 1).
- ii) On remarque ensuite que la méthode permet de définir plusieurs schémas mais que tous ces schémas respectent le principe de déterminisme bien qu'ils ne soient pas de forme hamiltonienne. En effet, d'une part il y a plusieurs combinaisons possibles des variances de définition de conditions 1 et 2 du schéma et d'expression de  $C$  ; par exemple un schéma "complètement covariant" est :

$$(L_{V..} \Delta_{R^0}^t)_{ij} = a_0 g_{ij} + a_{\infty} \Delta_{R^0}^t \epsilon_{ij} + a_1 D_{ij} + a_2 \Delta_{R^0}^t \sigma_{ij} ;$$

$$L_{V..} R^0_{ij} = 0 ; L_{V..} R^0_{ij} = 0$$

et donne donc les équations différentielles multivoques

$$\partial \sigma^i j / \partial t = a_0 g^i j + a_{\infty} \Delta_{R^0}^t \epsilon^i j + a_1 D^i j + a_2 \Delta_{R^0}^t \sigma^i j - 2(D^i_{.k} \Delta_{R^0}^t \sigma^k j + \Delta_{R^0}^t \sigma^i k D^k j)$$

Mais d'autre part tous les schémas sont tels qu'un voisinage de l'espace des causes s'applique dans l'espace des effets selon deux voisinages tangents (cf Fig.2) : la discontinuité de l'application existe toujours (quelque soit la cinématique rotationnelle ou non, ce qui contredit le résultat de (30)) mais elle tend vers 0 plus vite que l'amplitude des causes (19) ce qui assure la compatibilité avec le principe de déterminisme.

iii) Enfin la troisième remarque relève d'une analyse critique envisagée sous l'angle du respect des principes d'invariance et d'objectivité. Il faut d'abord souligner que tous les schémas possibles respectent les critères les plus généraux d'invariance tensorielle et d'objectivité stricte. Ensuite il faut distinguer que l'un des schémas possibles (et un seul) permet même de satisfaire à la méthode de Van Dantzig qui exige que les définitions des schémas physiquement significatifs soient formulées de façon indépendante d'une métrique. Ce schéma unique, de type mixte est le plus abstrait en ce sens que le transport est défini par :

$$L_V \cdot R^g = L_V \cdot \delta = L_V \cdot t_{R^g} = 0 ; (L_V \cdot \delta)^i j = (L_V \cdot \delta)^j_i = 0 ;$$

et que  $\sigma$  est défini selon :  $2\sigma = \delta + \delta$

par l'intégration, assurant  $\delta^i_j = \delta^j_i$ , de :

$$\partial \delta^i_j / \partial t = a_0 \delta^i_j + a_{\infty} \Delta_{R^0}^t \epsilon^i_j + a_1 D^i_j + a_2 \Delta_{R^0}^t \sigma^i_j$$

$$\partial \delta^j_i / \partial t = a_0 \delta^j_i + a_{\infty} \Delta_{R^0}^t \epsilon^j_i + a_1 D^j_i + a_2 \Delta_{R^0}^t \sigma^j_i$$

L'intégration peut être faite sur  $\delta$  ou bien  $\delta$  seulement, mais le calcul des invariants doit tenir compte du fait que les bases de définition de  $\delta$  et  $\delta$  sont respectivement  $\bar{g}_i \otimes \bar{g}^j$  et  $\bar{g}^i \otimes \bar{g}_j$ . Pour achever l'exposé de cette troisième remarque il faut indiquer un résultat tout à fait remarquable : le schéma mixte dont la méthode de définition vient d'être indiquée est justement celui dont les propriétés sont les plus immédiatement adaptées à la description du comportement élastoplastique. Pour le voir, il suffit de mener une étude systématique. On constate d'abord que les seuls schémas admissibles sont ceux où les variances de définition du transport et de l'équation différentielle multivoque sont identiques. Il reste donc trois cas : contravariance complète (cas A), covariance complète (cas B) et cas mixte (cas C). L'étude de la traction compression simple et isovolume et du cisaillement simple montre l'intérêt évident du seul schéma mixte (Fig. 3).

Trois commentaires sont utiles pour conclure ce paragraphe et introduire le suivant.

- i) La géométrie différentielle procure un cadre naturel pour définir une unique classe de schémas tensoriels dont les propriétés sont presque immédiatement compatibles avec celles observées dans les situations où l'écoulement est négliable relativement à l'hystérésis pure. D'autre part sur un plan opératoire plus proche des applications, l'un des auteurs a spécialement contribué à démontrer que l'usage de la géométrie différentielle ne semble pas être un obstacle à l'obtention de solutions numériques en problèmes non homogènes (cf (20), (21), (23), (31)).
- ii) A ce stade de l'exposé l'étude reste inachevée en ce sens qu'il reste à préciser la définition ou la méthode de définition des schémas mixtes d'hystérésis pure de façon à ce qu'ils présentent des propriétés, certe

idéalisées, mais cependant très proches de celles observées : propriétés thermomécaniques similaires à celles des modèles ; propriétés respectant le rôle de la notion de plasticité ; propriétés adaptées à l'étude des effets de couplage isotrope-déviatoire ou à l'étude des effets secondaires bien avérés.

iii) Le fait que l'étude soit inachevée et qu'elle le restera partiellement au terme du paragraphe suivant, ne doit pas inciter à minimiser l'importance du rôle de la géométrie différentielle. Ce rôle est en effet essentiel non seulement pour définir un comportement irréversible idéalisé mais aussi en matière de viscoélasticité et de comportement réversible. En d'autres termes la géométrie différentielle procure le cadre naturel pour développer l'étude d'une théorie bien fondée et opératoire de l'hyperélasticité. Le caractère historique prestigieux et l'abondance exceptionnelle des développements déjà consacrés à cette théorie fait souvent croire qu'en la matière l'essentiel a déjà été fait sur tous les plans. Il n'en est rien : sur le plan des résultats les illustrations données à l'aide de corps de Treloar, Mooney, Thomas, etc... sont d'un intérêt restreint pour décrire les propriétés observées. Sur le plan des méthodes, la théorie classique s'avère peu commode pour étudier des points essentiels (conditions de couplage et effets du second ordre). Enfin, sur le plan fondamental, on note que le scalaire d'énergie potentielle élastique est curieusement rapporté au volume initial, que l'on utilise une dérivation formelle de ce scalaire relativement à une mesure de déformation (cf. par exemple (32)) et que le cas de l'anisotropie caractérisée par trois vecteurs non orthogonaux est à tout le moins très peu abordé. Le recours à la géométrie différentielle permet cependant de proposer les bases suivantes. La contrainte hyperélastique  $\sigma$  est définie au temps actuel, de même que la densité scalaire par unité d'étendue  $E$  d'énergie élastique. Au temps  $t$  actuel, la déformation peut être caractérisée de deux façons, soit par  $Rg$  soit par  $\Delta R^e$ . Enfin, la base des formulations est constituée par :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sigma_{rev}^{ij} D_{ji}$$

Si  $E$  est fonction des invariants principaux de  $G = Rg$  on obtient la généralisation au cas du repérage actuel de métrique  $g$  :

$$\Delta_0^t \sigma^{ij} = 2 \left[ -G^{ir} G_r^j \frac{\partial E}{\partial II_G} + G^{ij} \left( \frac{\partial E}{\partial I_G} + I_G \frac{\partial E}{\partial III_G} \right) + III_G \frac{\partial E}{\partial III_G} \sigma^{ij} \right]$$

Les jeux  $I_G, II_G, III_G$  et  $I_G, II_G, III_G$  donnant respectivement :

$$\Delta_0^t \sigma^{ij} = 2 \left[ G^{ir} G_r^j \left( \frac{\partial E}{\partial I_G} + I_G \frac{\partial E}{\partial III_G} \right) + G^{ij} \left( \frac{\partial E}{\partial I_G} - \left( \frac{I_G^2}{2} - III_G \right) \frac{\partial E}{\partial III_G} \right) \right]$$

$$\Delta_0^t \sigma^{ij} = 2 \left[ G^{ir} G_r^j \left( \frac{\partial E}{\partial III_G} + \frac{I_G}{3} \frac{\partial E}{\partial III_G} \right) + G^{ij} \left( \frac{\partial E}{\partial III_G} (III_G - I_G II_G - \frac{I_G^3}{6}) \right) \right]$$

$$\Delta_0^t \sigma^{ij} = 2 \left[ G^{ir} G_r^j \left( \frac{\partial E}{\partial III_G} + \frac{I_G}{3} \frac{\partial E}{\partial III_G} \right) + G^{ij} \left( \frac{\partial E}{\partial I_G} - \frac{1}{3} \frac{\partial E}{\partial III_G} + \frac{1}{3} \left( III_G - \frac{I_G^2}{3} \right) \frac{\partial E}{\partial III_G} \right) + G^{ij} \frac{\partial E}{\partial III_G} \left( III_G - \frac{I_G}{3} II_G + \frac{I_G^3}{27} \right) \right]$$

L'usage de  $\Delta_0^t$  et des jeux  $(I_e, II_e, III_e), (I_e, II_e, III_e), (I_e, II_e, III_e)$  donnent des formules analogues. Un autre jeu possible est :  $v = \sqrt{g}/\sqrt{G}, III_e, III_e$  et donne un schéma d'hyperélasticité isotrope mieux adapté aux études physiquement significatives :

$$\Delta_0^t \sigma^{ij} = \alpha_0 \delta^i_j + \alpha_1 \Delta_0^t \sigma^{ij} + \alpha_2 \Delta_0^t \sigma^{ij} \Delta_0^t \sigma^{ij}$$

$$\alpha_0 = v \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{3} \frac{\partial E}{\partial III} + 2 \frac{\partial E}{\partial III} \frac{I^3}{3} - \frac{I^3}{27} - III - III - III - \frac{I^2}{3}$$

$$\alpha_1 = \left( 1 + \frac{2I}{3} \right) \frac{\partial E}{\partial III} + 2 \frac{\partial E}{\partial III} \frac{I^2}{9} - \frac{I^2}{3} - \frac{I}{3}$$

$$\alpha_2 = -2 \frac{\partial E}{\partial III} + \left( 1 - \frac{2I}{3} \right) \frac{\partial E}{\partial III}$$

$$I = \dot{v}/v - 2 \Delta_0^t \sigma^{ij} D_{ji} \quad (= D^{ij} \sigma_{ji})$$

On note que les propriétés isotropes sont définies par :

$$I \Delta_0^t \sigma = 3 v \frac{\partial E}{\partial v} - 2 \left( 2 \frac{\partial E}{\partial III} + 3 \frac{\partial E}{\partial III} \frac{\partial E}{\partial III} \right)$$

Bien entendu,  $\Delta_0^t \sigma_{rev}$  est symétrique et ses taux de Lie s'obtiennent immédiatement après calcul de  $A_{ij}^t = \partial \sigma_{ij} / \partial t$

$$\text{On obtient : } \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_0^t \sigma^i_j) = A^i_j - 2 D^{ik} \Delta_0^t \sigma_{kj} = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_0^t \sigma^i_j)$$

Un jeu polaire  $(V, Q_e, V_e)$  peut être utilisé. Le schéma de  $\sigma_{rev}$  permet de préparer l'analyse des effets de superélasticité et de mémoire de forme (cf Fig. 4 et (33), (34)) :  $\sigma = \sigma_2 + \sigma_{rev}$ .

### 3. SCHEMAS SIMPLES DU TYPE DE ZAREMBA ET PLASTICITE

3.1. Lorsque l'on cherche à préciser la définition des schémas à variance mixte de façon à ce qu'ils présentent des propriétés physiquement admissibles, la situation peut être présentée brièvement comme suit. Il faut prévoir la définition d'un état initial neutre restaurable par cyclage à préciser, prévoir que  $II$  (nul si  $\omega = 1$ ) n'est révélé que par inversion, prévoir que la thermomécanique est très différente selon que  $\omega = 1$  ou 2 (cf. la forme de  $\dot{E}$ ), assurer l'absence d'écrouissage (indépendance vis à vis de  $\eta = \int \omega \sigma \dot{\sigma}$ ), assurer le respect de la notion classique de limite de plasticité (ce qui n'est pas encore réalisé : cf. fig. 3). C'est surtout ce dernier point qui va retenir notre attention et ceci en dépit du fait que d'autres impératifs peuvent immédiatement être choisis pour orienter l'analyse. Nous savons en effet qu'il faut, par exemple, prévoir une définition ou une méthode de définition explicitant bien la profonde distinction entre les cas à une et trois dimensions : on retrouve là une situation classique en physique (problèmes à N corps, turbulence, réactions chimiques à couplage non linéaires), situation où se pose généralement des questions de stabilité si délicates qu'elles mettent en cause les bases même du déterminisme strict. Notons à ce propos qu'en matière de "lois" constitutives ces questions ont suscité récemment une série d'études fort surprenantes en ce sens qu'elles semblent justifier leur caractère critique et leur capacité méthodologique sur la prétention, dénuée de fondement, d'imposer aux schémas non hamiltoniens davantage de stabilité et de continuité qu'il est possible d'en garantir à l'aide de schématisations classiques (16).

3.2. Quelques hypothèses simplificatrices peuvent être faites sans restreindre ou égarer l'analyse :  
 i) On peut supposer que la distinction entre  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\sigma}$  n'est pas essentielle de façon à travailler sur une forme invariante unique. A des équations telles que, par exemple :  $\frac{\partial}{\partial t} \Delta_0^t \sigma^i_j = \alpha_0 \delta^i_j + \alpha_1 \Delta_0^t \sigma^i_j + \alpha_2 \Delta_0^t \sigma^i_j$  ;  $\alpha_{11} = 0$  se trouve alors associée la forme invariante

Une première charge de traction est suivie d'un cyclage ("centré", à trajet de contrainte rectiligne) orienté à :

$$\varphi_{\Delta} = \frac{\pi}{2} + n \frac{\pi}{12} ; n = 1, 3, 5, 6.$$

Les schémas S1, S2, S3 donnent le même résultat pour l'orientation  $n = 6$  qui correspond à une traction-compression. D'autre part l'étude thermomécanique complète montre que les schémas S1 et S2 ne sont pas satisfaisants alors que S3 l'est. Les illustrations données ici sont destinées à montrer que les 3 schémas donnent "presque" les mêmes résultats pour les orientations  $n = 3, 5, 6$  alors que le cas  $n = 1$  met en évidence la profonde différence d'intérêt qui existe entre S1, S2 d'une part et S3 d'autre part (sur les figures 6 et 7 QS et QE, notent des intensités de  $\Delta_0 \sigma$  et  $\Delta_0 \epsilon$  intensités normées selon  $\sigma/\sqrt{2} \epsilon$  et  $\sigma_0 \omega/\sqrt{2} \epsilon$ ; d'autre part -OP note  $-\sigma_0 \omega/\sqrt{2} \epsilon$  et PHEP note  $\varphi_{\Delta c} / \pi$ ). Il est clair : d'une part, que l'inanité d'un schéma ou d'une conclusion peut être masquée par une étude numérique insuffisante (cf. (30) par exemple) ou par une présentation maladroite des résultats ; d'autre part, que les résultats intéressants sont ceux relatifs aux difficultés qui subsistent ; enfin qu'il ne s'agit pas de décrire seulement la façon d'obtenir des résultats mais plutôt d'indiquer comme le suggère ODEN et BATHÉ [13] sur quelles bases essentielles ils sont fondés.

3.4. Lors du premier chargement ( $\omega = 1 ; \Pi = 0$ ) on a

$$\dot{\Pi}_{\Delta \sigma} = \alpha_1 \dot{\sigma} + \alpha_4 2 \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} + \alpha_6 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} - (\alpha_6/\alpha_1) 2 \Pi_{\Delta \sigma} 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} \text{tg } 3\varphi \dot{\varphi}$$

soit

$$\Pi_{\Delta \sigma} = A \dot{w} + B \dot{\varphi} ; A = \alpha_1 + \alpha_4 2 \Pi_{\Delta \sigma} + \alpha_6 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} ; w = \int_{t_R}^t \dot{\sigma} \text{d}\tau ; t_R = 0$$

ce qui incite à distinguer au moins les trajets radiaux isophasé ( $\dot{\varphi} = 0$ ) et neutre isodissipatif ( $w = \dot{\sigma} = 0$ ). Cette distinction (fig. 8) est compatible avec la spécification d'une surface limite de plasticité asymptotique. Il est possible de tendre vers cette surface limite à l'aide de trajets radiaux OQ (fig. 8) de longueur  $Q(\varphi)$ . Il est aussi possible de tendre vers cette surface puis de la "longer" à l'aide de trajets OQN comportant un segment radial et un segment neutre QN (fig. 8). Le schéma peut être considéré comme compatible avec la surface limite spécifiée si ce trajet ON tend vers cette surface lorsque  $\alpha(\varphi) \rightarrow \infty$  (spécifié). En d'autres termes les lieux des extrémités  $\alpha(\varphi)$  de même  $w(\varphi)$  et les lignes neutres doivent être confondus et tendre vers la surface limite si  $w \rightarrow \infty$ . On peut même imposer l'homothétie de ces lignes isovaleur et de la ligne limite de plasticité : les pentes des lieux et des lignes neutres doivent être égales à la pente limite au point limite  $Q_0(\varphi)$  associé à  $\alpha(\varphi)$  considéré (fig. 8). On voit immédiatement que cette condition naturelle est réalisée (trivialement) dans ce que l'on peut appeler la situation de Mises ( $\alpha_6 = 0 ; \alpha_4$  constant) car les lieux iso  $w$  radiaux sont des cercles gradués selon

$$w(\varphi) = -(\alpha_6^2/2\alpha_1) \text{Ln}(1 - \alpha_6^2/\alpha_1^2) ; \alpha_6 = \sqrt{2} \alpha_0 ; \text{Lim } \Pi_{\Delta \sigma} = \alpha_0^2$$

les lignes neutres sont des cercles  $\Pi_{\Delta \sigma} = 0$  et la ligne limite de plasticité est le cercle de rayon  $\alpha_0$ . On constate au contraire immédiatement que le cas de la ligne de plasticité quelconque n'est pas trivial puisque la pente des lieux iso  $w$  radiaux est telle que :

$$0 = \frac{dw}{d\varphi} \frac{0}{A(\varphi, \varphi)} + \int_{\alpha_0}^{\alpha(\varphi)} \left( -\frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{A^2} \right) dq$$

alors que celle des trajets neutres est telle que :

$$0 = \frac{dQ}{d\varphi} + \frac{\alpha_6}{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{6}} \int_{\alpha_0}^{\alpha(\varphi)} Q^4 \sin 3\varphi \Pi_{\Delta \sigma}^2 - \alpha_6 2 \Pi_{\Delta \sigma} 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} \text{tg } 3\varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{I}_{\Delta \sigma} = 3 \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 I_{\Delta \sigma} ; \zeta = D^k_k ; I_{\Delta \sigma} = \Delta_{R^0}^{t,k} k$$

$$\dot{\Pi}_{\Delta \sigma} = \alpha_1 \dot{\sigma} + \alpha_2 2 \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} ; \dot{\sigma} = \Delta_{R^0}^{t-1,j} j ; 2 \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} = \Delta_{R^0}^{t-1} k \Delta_{R^0}^{t-k} i$$

$$\dot{\Pi}_{\Delta \sigma} = \alpha_1 \dot{\sigma} + \alpha_2 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} ; \dot{\sigma} = \Delta_{R^0}^{t-1} k \Delta_{R^0}^{t-k} i ; 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} = \Delta_{R^0}^{t-1} k \Delta_{R^0}^{t-k} i \Delta_{R^0}^{t-1} i$$

Ceci revient à envisager seulement des cinématiques irrotationnelles à directions principales fixes.

ii) On peut envisager des schémas "simples" au sens de  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  linéaires en D (absence d'effets visqueux)

iii) On suppose le découplage des propriétés isotrope et déviatoire. Par exemple, dans le cas évoqué en i) ci-dessus, on envisagera

$$\alpha_1 = \alpha_1 = 2 \mu = 2 \mu^0 \sqrt{6} ; \alpha_0 = \alpha_0 \zeta + \alpha_3 \bar{\varphi} + \alpha_5 \bar{\psi}$$

$$\alpha_0 = \lambda = \lambda^0 \sqrt{6} ; \alpha_3 + \alpha_4 I_{\Delta \sigma} = 3 \alpha_5 + \alpha_6 I_{\Delta \sigma} = 0$$

$$\alpha_2 = \alpha_4 \bar{\varphi} + \alpha_6 \bar{\psi} ; \dot{I}_{\Delta \sigma} = (3 \alpha_0 + \alpha_1) \zeta = (3 \lambda^0 + 2 \mu^0) \sqrt{6} \partial v / \partial t$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\sigma} = \Delta_{R^0}^{t-1} j \dot{D}^j_i ; \dot{\Pi}_{\Delta \sigma} = \alpha_1 \dot{\sigma} + \alpha_4 2 \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} + \alpha_6 2 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma}$$

Avec de telles conditions de découplage l'analyse se déroule dans un plan déviatoire où les éléments polaires sont notés  $\alpha, \varphi$  pour  $\sigma$  et  $Q, \varphi_{\Delta}$  et  $\theta = \Delta_{2R}^{t,p}$  pour  $\Delta \sigma$  (fig. 5). On sait que :

$$Q^2 = 2 \Pi_{\Delta \sigma} ; Q_{\Delta}^2 = 2 \Pi_{\Delta \sigma} ; 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} = (1/\sqrt{6}) Q^3 \cos 3\varphi ; \dot{\varphi}_{\Delta} = \dot{\theta}$$

$$3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} = (1/\sqrt{6}) Q^3 \cos 3\varphi_{\Delta} ; \varphi_{\Delta} = \theta + \varphi_R ; \dot{\varphi}_{\Delta} = \dot{\theta}$$

On note que la forme du schéma permet d'établir un lien entre  $\bar{\psi}$  et la phase d'un trajet rectiligne  $\sigma$  ou  $\Delta \sigma$ . Par exemple, avec le formalisme ci-dessus, on a toujours :

$$\alpha_1 (\dot{\sigma} / 2 \Pi_{\Delta \sigma} - \dot{\psi} / 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma}) = \dot{\Pi}_{\Delta \sigma} / 2 \Pi_{\Delta \sigma} - \dot{\Pi} \Pi_{\Delta \sigma} / 3 \Pi \Pi_{\Delta \sigma} = \text{tg } 3\varphi_{\Delta} \dot{\varphi}_{\Delta}$$

Telles sont les trois hypothèses qui vont nous permettre d'indiquer rapidement quelques résultats récents.

3.3. Considérons le schéma ci-dessus dans le cas où  $\alpha_6$  est nul :

$$\dot{\Pi}_{\Delta \sigma} = 2 \mu + \alpha_4 2 \Pi_{\Delta \sigma} \dot{\sigma} ; w = \int_{t_R}^t \dot{\sigma}(\tau) \text{d}\tau$$

La définition s'achève en spécifiant  $\alpha_4$  et la fonction d'aide corrigée  $W_M$  (M pour modifié). Partant d'un cas trivialement non satisfaisant (19) (à la Prager, de rayon de Mises  $Q = \sqrt{2} \alpha_0$ ) tel que :

$$\alpha_4 = -\mu / (\omega S^0)^2 ; W_M = 2 w / \omega^2$$

On envisage 3 schémas :

$$S1 : \alpha_4 = -\mu / (\omega S)^2 ; \omega S = \omega (Q^2 - Q_R^2 \sin^2 \theta)^{1/2} ; W_M = 2 w / \omega^2$$

$$S2 : \text{idem pour } \alpha_4 ; W_M = \int_{t_R}^t \frac{2}{\omega^2} \left( \frac{S^0}{S(\tau)} \right)^2 \bar{\varphi}(\tau) \text{d}\tau$$

$$S3 : \alpha_4 = -\mu / (\omega S \cos \theta)^2 ; W_M = \int_{t_R}^t \frac{2}{\omega^2 \cos^2 \theta(\tau)} \bar{\varphi}(\tau) \text{d}\tau$$

Dès lors  $\alpha_6$  est déterminé par la pente de la ligne limite de plasticité  $P(\varphi)$  et  $\alpha_4(q, p)$  est déterminé par :

$$0 = L(\varphi) \frac{Q}{A(q, p, \alpha_4(q, p))} - \int_0^{\Delta A} \frac{d\alpha}{\partial p A^2} d\alpha$$

Cette équation aux dérivées partielles  $\delta\alpha_4/\delta q, \delta\alpha_4/\delta p, \delta\alpha_4/\delta\varphi$  est de la forme

$$q^2 (\alpha_4 L(\varphi) + q \frac{\partial \alpha_4}{\partial q} L(\varphi) + q \frac{\partial \alpha_4}{\partial p}) = f(q, p, \alpha_6, \partial \alpha_6/\partial q, \partial \alpha_6/\partial p)$$

3.5. Passons à l'étude du premier trajet de décharge, supposé rectiligne. L'instant d'inversion  $t_A$  marque une discontinuité essentielle ayant plusieurs aspects fondamentaux. Les fonctionnelles  $I$  et  $\Phi$  passent respectivement de 1 à 2 et de 0 à  $I = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D \neq 0$ . La famille de lignes neutres telles que  $W \cdot \nabla W \cdot \nabla \Psi_A$  glisse brusquement pour former un faisceau (sans intersections) permettant des trajets neutres issus de R (fig. 8). Parallèlement au fait que  $I$  devient non nul, les lignes neutres ne sont plus centrées et il est intuitif : que  $\Phi$  ne va plus être l'unique quantité essentielle de l'analyse mais que le point d'inversion  $Q_A, \Psi_A$  va jouer un rôle d'orientation essentiel ; que le trajet cyclique fondamental de restauration de l'état neutre initial n'est pas quelconque. Il faut aussi noter que le processus discontinu qui vient d'être brièvement décrit est le seul compatible avec la thermomécanique associée du schéma d'hystérésis pure (cf. § 2.1.) : ce processus n'a rien à voir avec les entraînements progressifs de cercles illustrant des modèles "d'écroissements" périodiquement proposés. On constate enfin que la situation de Mises n'est plus triviale, ni même simple. Pour s'en douter il suffit par exemple de voir que l'équation en variables  $Q_A, \Psi_A$  d'un cercle neutre  $C_0$  est obtenue à partir de  $\Psi_A = \theta \cdot \Psi_A$  ;  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$  ;  $Q_A = 2 Q_0 \cos \theta$  ;  $\cos(\theta + b) = \dots$ . En fait, la situation de Mises est d'autant plus intéressante qu'elle fait clairement ressortir l'importance de l'orientation  $\theta$  (fig. 8). La forme de  $\Psi_A$  dans le schéma S3 apparaît alors naturelle (§ 3.3). Sur les plans opératoire et méthodologique (étude complète et bien fondée des couplages et effet du second ordre) la remarque à faire est la suivante. L'étude de la première charge (§ 3.4) part de la forme tensorielle "générale" et va vers l'analyse particulière menée dans le plan déviatoire où est spécifiée la limite de plasticité. Au contraire, ici, on dispose d'une analyse particulière (dans le plan déviatoire) mais la forme tensorielle convenable n'est pas immédiatement apparente. L'étude montre que des schémas de Zaremba plus généraux (comportant un terme en  $\sigma_{ij} \Delta \sigma_{ij} \Delta \sigma_{ij}$ ) sont sans intérêt, ce qui est remarquable (la non linéarité tensorielle n'est pas la solution). Lorsque l'on conserve la forme tensorielle linéaire proposée ici il est heuristique d'envisager :

$$W_{ij} = \alpha_4 W + 2 \alpha_6(\theta) ; \alpha_2 = \partial/\partial t (W_{ij}/\cos \theta) ; \alpha_4 = 0$$

$$\dot{W} = \Phi ; 2 \Pi \Delta \sigma = 3 \Pi \Pi \Delta \sigma$$

3.6. Créé et étudié par l'un des auteurs, le schéma heuristique satisfaisant S3 permet l'analyse de la correspondance cause-effet dans le cas où la cause ( $Q_A, \Psi_A$ ) parcourt des segments rectilignes successifs. Des lors l'étude évoquée à propos du déterminisme (§ 2.3 ii) peut être reprise avec une série de trajectoires finies. On obtient donc quelques indications préliminaires en matière de "stabilité". Il s'agit là d'un embryon d'étude (plutôt désiroire face aux développements qui nécessite une théorie complète de stabilité des solutions des équations multivoques envisagées ici). On donne cependant un résultat (obtenu avec S3) de façon à contrebattre "l'intuition" selon laquelle les schémas multivoques impliquent nécessairement des "instabilités" inadmissibles et ruinent donc le sens physique éventuel du concept de mémoire

discrete (cf. fig. 9 où la correspondance est indiquée près et loin de la limite de plasticité). La discontinuité associée au saut fonctionnel existe toujours (l'examen attentif de la figure 9 permet de la repérer dans la zone où les intégrations sont denses). Finalement :

1. La classe des schémas proposés peut être intéressante si l'expérience confirme convenablement l'absence de domaine élastique réel pour les matériaux à comportement élastoplastique (même dans des cas du genre acier à palier (26)). Cette inexistence semble confirmée par l'expérience (35). En revanche la superposition  $\sigma_a + \sigma_{rev}$  est possible (33) : c'est une des raisons qui incitent au développement d'une théorie opératoire de la grande élasticité.

2. Malgré la "non linéarité" de la géométrie différentielle l'unique classe des schémas obtenus en suivant la méthode de Van Dantzig est compatible avec la notion de limite de plasticité.

3. En mécanique du continu la géométrie différentielle est l'outil privilégié d'une schématisation du réel basée sur la relation fondamentale

$$II = \int_{R^3} \sigma_{ij}^t (L_{v..} \Delta_R \epsilon^t)_{,i}$$

et un critère de stabilité de Prigogine modifié selon

$$L_{v..} \geq 0 ; L_v (L_v \psi) \leq 0$$

Lorsque ces règles sont mises en jeu il n'est pas possible de rendre opératoire presque tous les formalismes.

4. Le développement d'une théorie de l'homogénéisation en présence de frottement de Coulomb semble spécialement intéressant pour fonder la description des écoulements et les extensions au cas non monotherme.

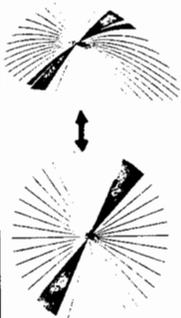
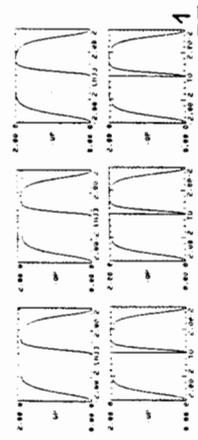
5. Le concept de mémoire discrète semble doté d'un statut privilégié.

6. Le caractère universel du phénomène d'hystérésis suscite la mise en jeu d'éléments conceptuels importants.

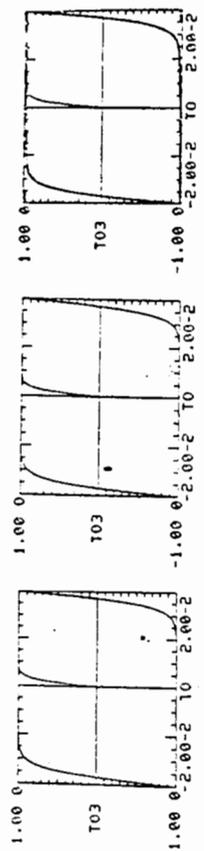
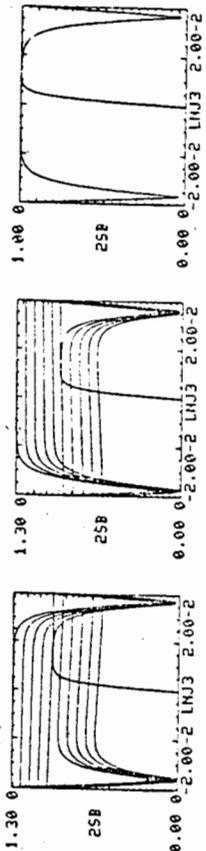
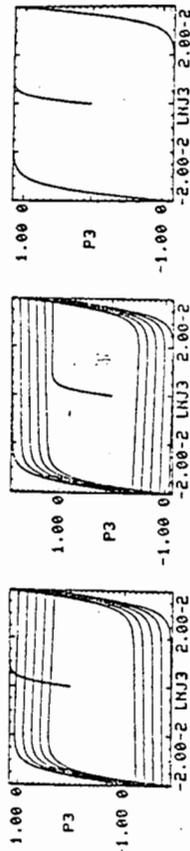
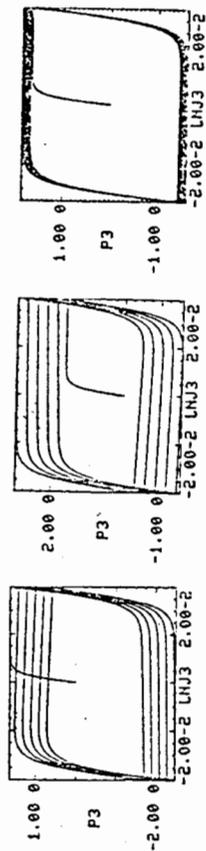
#### BIBLIOGRAPHIE

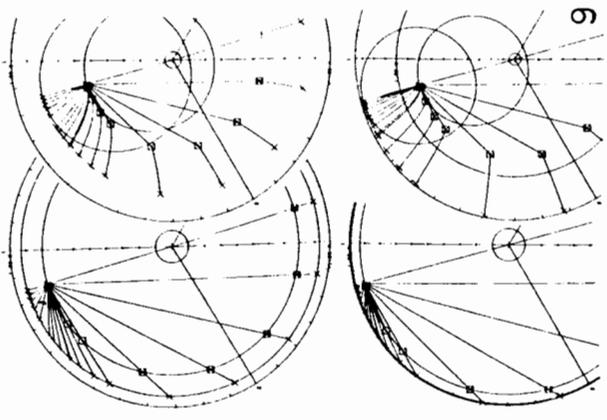
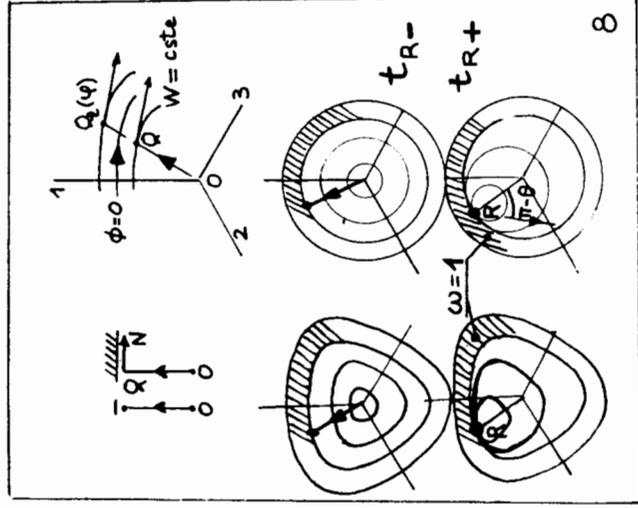
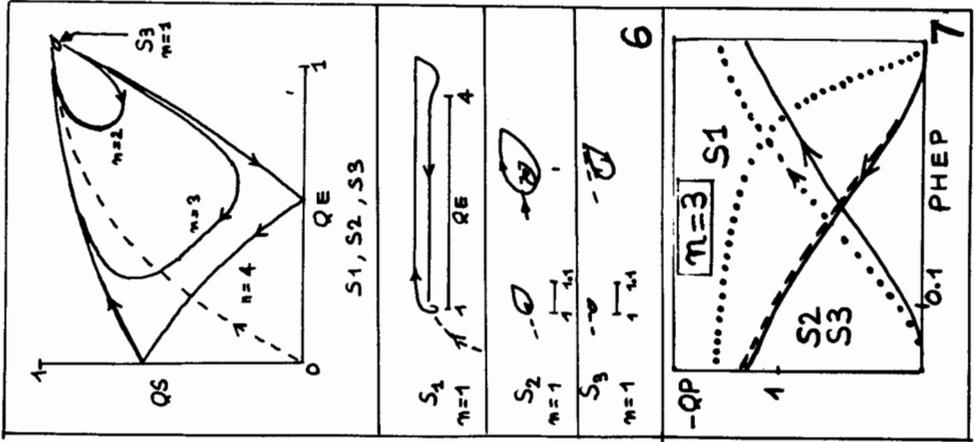
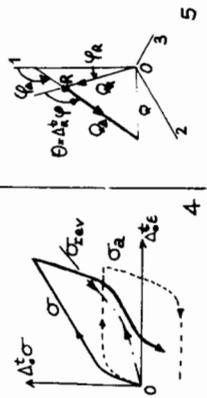
- [1] F. FER, Thermodynamique, Gordon and Breach, 1970.
- [2] I. VOGEL, Théorie des systèmes évolutifs, Paris, Gauthiers-Villars, 1965
- [3] I. MULLER, A model for a body with shape-memory, Arch. Rational Mech. Anal., 67, 1978, p 61-77.
- [4] F. PREISACH, Zeitschrift für Physik, 94, 1935.
- [5] N. MINORSKY, Théorie des oscillations (chap. V, VI, VII), Paris, Gauthiers-Villars, 1967.
- [6] V. VOLTERA, Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità, R. C. Lincei, 5, 18, 1909, p. 295-301.
- [7] P. W. BRIDGMAN, The thermodynamics of Plastics Deformation and Generalized Entropy, Rev. Modern Physics, vol. 22, 1, 1950, p 56-63.
- [8] P. GUELLIN, J. M. BOISSERIE, The heat supply trap lying at the origin of thermoelastic analysis, Res. Mechanica Letters 2, 13-17, 1982.
- [9] F. FER, L'irréversibilité fondement de la stabilité du monde physique, Paris, Gauthiers-Villars, 1977.
- [10] R. S. RIVLIN, Red-herring and sundry unidentified fish in non-linear continuum mechanics, Inelastic behaviour of solids, New-York, Mc Graw Hill, 1970.
- [11] J. E. MARSDEN, J. R. HUGUES, Mathematical Foundations of Elasticity, New Jersey, Prentice Hall, 1983.
- [12] D. VAN DANTZIG, The fundamental equation of electromagnetism, independent of metrical geometry ; Proc. Cambridge Phil. Soc., 30, 1934, p. 421-427.
- [13] J. T. ODEEN, K. J. BATHE, A commentary on Computational Mechanics, App. Mech. Reviews, Vol 31, n° 8, p. 1053-1058, 1978.
- [14] H. ZIEGLER, Thermomechanics, Quarterly of Applied Mathematics, XXX, 1, 1972, p. 91-107.

- 115| P. GUELIN, Remarques sur l'hystérésis mécanique, J. de Méca., 19, 2, 1980 (voir aussi : BOISSERIE-GUELIN, Trans. 4th SMIRT, L 119, 1977).
- 116| K. POPPER, L'univers résolu.
- 117| GUELIN, P., Notes on the Cauchy tensors and expressing the discrete memory concept. The Summer School on Two Phase Medium Mechanics, Dembicki, E. (Ed.), Gdansk, 1983, pp 57-132.
- 118| P. GUELIN, W. K. NOWACKI, Remarques sur les ondes d'accélération dans un continu élastoplastique à hystérésis, Arch. Mech. Stos., 1984.
- 119| P. GUELIN, W. K. NOWACKI, P. PEGON, Etude des schémas thermomécaniques à mémoire discrète : bases physiques et formalisme, Arch. Mec. Stos., 1985.
- 120| P. PEGON, thèse, Grenoble, 1983.
- 121| P. GUELIN, P. PEGON, Finite strain plasticity, Proc. of the 8th Int. Conf. on Structure Mechanics in Reactor Technology, Brussels, 1985.
- 122| P. PEGON, P. GUELIN, On thermomechanical Zaremba Schemes of Hysteresis, Res. Mechanica Letters, 1985.
- 123| P. PEGON, P. GUELIN, Finite strain plasticity in convected frames, Num. Meth. in Eng. 1985.
- 124| De CARBON C. Deformation des solides, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 215, 1942, p. 241-244.
- 125| PERSOZ B., Modèles non linéaires, La Rhéologie, chap. III, Masson, Paris, 1969, p. 45-72.
- 126| FAVIER D., Thèse, Grenoble, 1981 et Arch. Mech. Stos., 3, 1985.
- 127| HAN S., Thèse, Grenoble, 1985.
- 128| BOISSERIE J. M., GUELIN P., TERRIEZ J. M., WACK B., JEMT, ASME, 1983.
- 129| WACK B., TERRIEZ J. M., GUELIN P., Acta Mechanica, 50, 1983.
- 130| DI BENEDETTO H., DARVE F., J. de Méca. Théorique et Appliquée., Vol. 2, n° 5, 1983, pp 769-798.
- 131| PEGON P., GUELIN P., Problèmes aux limites en grandes déformations élastoplastiques, Arch. Mec. Stos., 1985.
- 132| COHEN H., WANG C.C., A note on hyperelasticity, A. Rat. Mech. und Analysis, 85, p 213-236, 1984.
- 133| BOISSERIE J. M., GUELIN P., Proc. 6th Int. Conf. SMIRT, L 315, 1981.
- 134| VERGUTS H., AERNOUDT E., Monitoring the response of Shape memory alloys.... Proc. 7th Int. Conf. on the Strength of Metals and Alloys Montreal, August 12-16, 1985, p. 563-568.
- 135| HAN S., WACK B., Properties of the pure hysteresis behavior, Arch. Mech. Stos. Voir aussi ce numéro.



$Q\Delta\epsilon \ll S_0$        $Q\Delta\epsilon \ll S_0/4$       2





## LOCALISATION DES DEFORMATIONS DANS LES MILIEUX RADOUICISSANTS

STRAIN LOCALISATION IN SOFTENING MEDIA

P. HABIB

Laboratoire de Mécanique des Solides  
(E.P. - E.N.S.M.P. - E.N.P.C. - Associé ou C.N.R.S.)  
Ecole Polytechnique  
91128 PALAISEAU Cedex - FRANCE

### RESUME

La localisation des déformations avec formation de surfaces de glissement dans des matériaux comme les sols, les roches, les bétons ou les métaux à chaud est associée à une rupture progressive se développant en fonction du chargement. L'apparition des discontinuités engendrées par les surfaces de glissement perturbe gravement les concepts de la Mécanique des milieux continus puisqu'elle correspond à la formation de blocs plus ou moins rigides reliés par un milieu dont les propriétés sont plus ou moins dégradées par le radoucissement. On examine certaines conséquences de cet effet pour quelques applications du domaine de la Mécanique des milieux pulvérulents.

### ABSTRACT

Strain localisation with slip surfaces formation in different materials as soils, rocks, concrete or hot metals is associated with progressive failure increasing with loading. These discontinuities modify continuous medium mechanic concepts as they correspond to the movement of more or less rigid blocks bound by a material the mechanical properties of which are weakened by softening. Consequences of this situation are studied for some applications in the field of granular materials mechanic.

Communication au Groupe Français de Rhéologie le 27 Novembre 1985.

## I - INTRODUCTION

Lorsqu'on charge un corps jusqu'au seuil de ruine, on peut distinguer trois modes différents de destruction de la matière ; avec les matériaux fragiles comme les verres, les céramiques, les minéraux en compression simple, les structures se cassent en morceaux indépendants. A l'inverse, dans l'écoulement plastique des matériaux ductiles, comme l'acier doux ou les argiles molles, la continuité des corps est conservée, les propriétés mécaniques et l'intégrité d'un volume élémentaire de la matière ne paraissent pas altérées. Enfin, avec les matériaux radoucissants, comme les sables denses, les argiles raides, les roches sous forte pression, les métaux près de leur point de fusion, une situation intermédiaire se présente. La ruine se produit avec apparition d'une ou de plusieurs surfaces de glissement sur lesquelles les propriétés mécaniques sont localement dégradées. Dans le premier cas, la structure n'a plus aucune résistance : l'étude de la propagation des fissures qui mènent à la ruine est du domaine de la mécanique de la rupture ; dans le deuxième cas, la structure rompue a tout jours de la résistance, elle en a même davantage en cas d'écrouissage : la détermination des seuils d'écoulement est du domaine de la théorie de la plasticité ou de l'élastoplasticité ; dans le dernier cas, la résistance est moindre que l'initiale mais elle existe quand même : il n'existe pas à l'heure actuelle d'approche satisfaisante de cette phase de problèmes.

La définition physique des surfaces de glissement et de leurs orientations ne sont pas encore claires et diverses interprétations peuvent être données. Quoi qu'il en soit la localisation de la déformation sur des surfaces de glissement perturbe évidemment le concept de milieu continu et rend suspect l'application des formules classiques de la plasticité à de tels milieux. L'existence des surfaces de glissement a donc des conséquences pratiques extrêmement importantes.

On va distinguer successivement le cas du champ de contrainte homogène puis hétérogène.

## II - CHAMP DE CONTRAINTE HOMOGENE

Dans un champ de contrainte homogène comme par exemple dans un essai triaxial ou une compression simple après élimination des effets de frottement aux extrémités des éprouvettes, la localisation de la déformation sur un plan de glissement incliné sur la direction de la contrainte principale majeure n'apparat que lorsque le comportement du matériau est radoucissant.

L'explication classique est la suivante ; elle est basée sur l'idée que la matière n'est pas homogène (Mandel, 1966). De deux plans de glissement potentiels voisins, c'est le plus faible qui cède le premier. S'il y a écrouissage, le durcissement qui se produit dans le plan de glissement permet d'atteindre l'effort suffisant pour entraîner la déformation du plan plus résistant voisin et la déformation se propage dans tout le volume. S'il y a radoucissement, au contraire, dès la rupture du plan de glissement le plus faible, la contrainte diminue et il n'y a plus aucune raison pour que les plans voisins c dent à leur tour. En général, le module d'Young d'un sol à la décharge est beaucoup plus grand que le module du premier chargement, de sorte qu'à partir de la détente qui se produit dans la matière après la formation de la première surface de glissement, les parties non affectées par la localisation de la déformation se comportent désormais comme des blocs rigides qui coulissent sur les surfaces de glissement. Dans le cas

des grandes déformations, les surfaces de glissement se déforment par érosion ou bien de nouvelles surfaces de rupture se produisent dans les blocs monolithes si la cinétique de la rupture ne permet pas un mouvement indéfini.

La formation d'un plan de glissement dans un matériau subissant un champ de contrainte homogène est donc liée à la présence d'un maximum dans la courbe effort-déformation des matériaux (Mollenkamp, 1985) et réciproquement. Dans un essai triaxial classique l'apparition d'un plan de glissement survient peu après le franchissement du maximum de la courbe effort-déformation, ce qui ne veut pas dire que rien ne se soit produit plus tôt. Ainsi, il a été montré pour des matériaux pulvérisés bi-dimensionnels denses (Duthilleul, 1983), que pendant la déformation qui précède le maximum de contrainte une dilatance se produit initialement dans une bande inclinée dont l'épaisseur diminue progressivement en même temps que la densité y décroît, pour se matérialiser finalement sous la forme d'un plan de glissement. Dans le cas des milieux pulvérisés denses le début du chargement apparaît comme une période de préparation de la localisation de la déformation et son aboutissement est la formation physique d'une surface de glissement.

La description qui vient d'être donnée du phénomène a pour conséquence immédiate que la loi de comportement du matériau ne peut pas être formalisée au-delà du maximum de résistance (figure 1) ; en effet au-delà de cette valeur la déformation n'est plus continue : elle est pratiquement nulle dans les blocs qui glissent les uns par rapport aux autres ; elle est extrêmement grande dans une zone étroite autour de la surface de glissement.

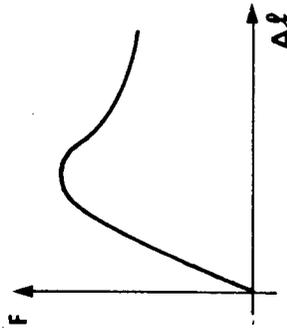


Figure 1 - Comportement radoucissant.

Il n'est plus possible de rapporter le déplacement  $\Delta l$  des extrémités d'une éprouvette d'essai à la longueur  $l$  de cette éprouvette puisque la déformation n'est pas homogène :  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$  n'a plus de signification physique.

Quel est donc le paramètre physique auquel il faut rattacher la formation d'une surface de glissement ? Il est difficile de répondre à cette question et peut-être y a-t-il plusieurs réponses selon les matériaux. Une réponse peut être fournie à partir des essais de cisaillement à la boîte de Casagrande ou le maximum de résistance d'un sol est atteint après un déplacement relatif de quelques millimètres de la demi-boîte supérieure par rapport à la demi-boîte inférieure. Des résultats analogues ont été obtenus par Van Mier (1985) avec du béton au cours d'essais triaxiaux sur des éprouvettes de longueurs différentes. Dans le début des essais lorsque la déformation augmente avec la contrainte, Van Mier obtient une courbe unique quelque soit la longueur des éprouvettes ;

ceci est un résultat banal ; il a obtenu des courbes différentes à partir du moment où le maximum de résistance était dépassé et que le radoucissement commençait à apparaître ; le radoucissement était d'autant plus marqué que les éprouvettes étaient longues ; ceci a d'ailleurs été déjà observé pour d'autres matériaux comme les sols (Habib, 1984). Mais ce que Van Mier a montré, c'est qu'en prenant comme paramètre le déplacement  $\Delta l$  après le maximum il obtenait à nouveau une courbe unique et indépendante de la longueur des éprouvettes pour représenter le comportement de la matière. La pente du radoucissement en fonction du déplacement relatif des blocs est donc une caractéristique mécanique de la matière indépendante de la longueur de l'échantillon et par conséquent elle a une signification physique alors que la pente du radoucissement en fonction de la déformation n'en a pas.

Cette observation est extrêmement importante notamment lorsqu'on envisage des calculs numériques par exemple par la méthode des éléments finis : l'expérimentation ne peut pas fournir au calculateur une loi de comportement ( $\sigma, \epsilon$ ) avec radoucissement (ou il peut en fournir autant qu'on en veut).

### III - CHAMP DE CONTRAINTE HETEROGENE

Lorsqu'on sollicite un matériau radoucissant au-delà du seuil d'écoulement avec un champ de contrainte hétérogène, comme par exemple celui d'un poinçon superficiel ou faiblement enfoncé, on observe des choses apparemment paradoxales. Dans certains cas, on ne voit pas apparaître de surface de glissement. Dans d'autres, on voit apparaître une surface de glissement et on observe un radoucissement mais parfois il y a une surface de glissement et il n'y a pas d'effet de radoucissement sur la représentation force-déplacement.

Ce phénomène est illustré sur la figure 2 d'après Weber (1971) qui représente les résultats d'un essai de poinçonnement d'un sable. Au cours de l'enfoncement d'un poinçon dans un milieu pulvérisé, on voit apparaître successivement un nombre limité de surfaces de glissement, typiquement deux ou trois, et lorsque le poinçon a pénétré profondément au sein du massif il ne se produit plus de localisation.

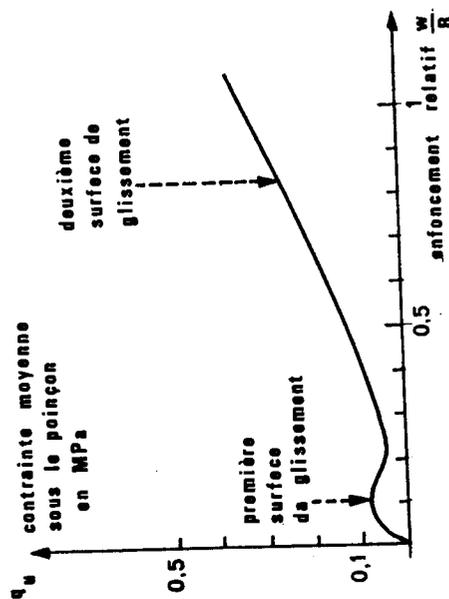


Figure 2 - Poinçonnement de sable de Leucate sec (d'après Weber, 1971).

Sur la figure 2, l'apparition de la première surface de glissement est bien marquée sur la courbe force-enfoncement par un maximum qui montre ainsi le radoucissement ; mais les surfaces de glissement suivantes ne se signalent pas particulièrement et la force portante croît d'une façon monotone avec l'enfoncement.

D'une façon générale, lorsqu'une surface de glissement se produit dans un sol présentant du radoucissement, elle se développe progressivement au cours du chargement. Ce fait a été mis en évidence par de nombreux auteurs sur des modèles en laboratoire ou par des mesures in-situ pendant des glissements de terrains. Les méthodes utilisées ont été très différentes :  $\gamma$  - densimétrie pour suivre la dilatacion de la surface de glissement dans les sables, radiographie X d'un quadrillage de billes de plomb dans de l'argile (non dilatante), déformation plane d'une tranche mince derrière une vitre avec observation du cisaillement d'un quadrillage coloré, etc ... Pour des structures relativement petites comme des fondations en surface ou pour des murs de soutènement en butée comme en poussée, il a été montré que la progression de la ligne de glissement était fonction de la progression de l'effort et qu'alors même que le matériau était radoucissant, la butée limite derrière un mur était atteinte par une croissance monotone de l'effort ou fonction du déplacement.

La figure 3 montre le développement d'une famille de surfaces de glissement sous un poinçon de 40 cm de large, dont la plus longue débouche juste en surface (Chazy et Habib, 1961).

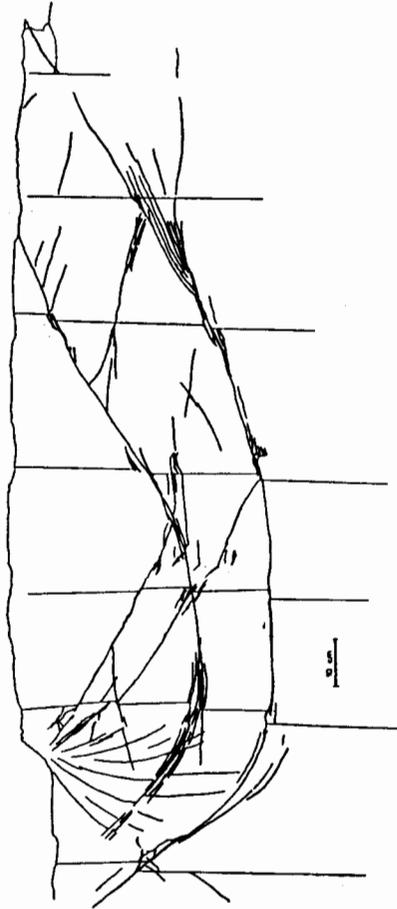


Figure 3 - Surface de glissement sous une fondation.

Il est nettement visible sur cette figure que le déplacement diminue sur la surface de glissement la plus profonde lorsqu'on s'éloigne du bord de la fondation, et que les autres surfaces de glissement ont été arrêtées en cours de développement et qu'elles sont apparues après la surface principale qui les enveloppe toutes.

Examinons donc ce qui se passe au moment de l'amorçage d'une surface de glissement dans un champ non uniforme. La figure 4 représente le début de la rupture d'un massif de terre en pente soumis à son poids propre. Dans le petit domaine  $\delta$  qui entoure le point critique  $P$  le critère de rupture est atteint. Si ce domaine est suffi-

samment petit le champ de contrainte peut y être considéré comme uniforme : il y aura formation d'une surface de glissement si le sol est radoucissant ou déformation continue si le sol présente de l'écroutissage.

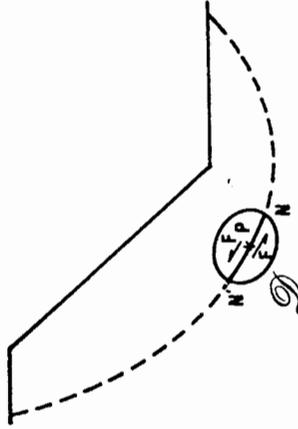


Figure 4 - Franchissement du critère de plasticité.

Plaçons-nous dans le cas d'un radoucissement suffisamment petit pour que la solution élasto-plastique classique puisse être considérée comme une bonne approximation du problème étudié. Cela ne serait pas le cas pour une roche ou pour du béton où la résistance résiduelle est beaucoup plus petite que la résistance de la matière avant la rupture. Etudions ce qui se produit sur la surface de glissement de la figure 4 et dans son prolongement tracé en tireté sur la figure 5 et représentons la déformation d'un certain nombre de segments perpendiculaires à la surface de glissement et supposés rectilignes avant la déformation dans le massif vierge.

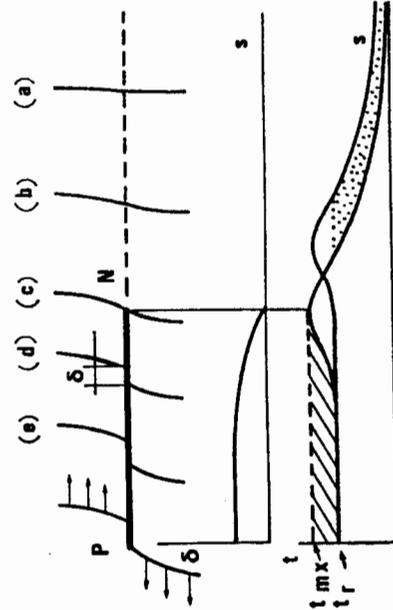


Figure 5 - Déplacements et contraintes de cisaillement et dans son prolongement.

Loin de l'extrémité de la fissure, le segment (a) est resté à peu près droit. Le segment (b) est un peu déformé et la déformation est maximale pour le segment (c) qui passe par l'extrémité N de la fissure. Entre N et P il se produit un glissement  $\delta$  entre les lèvres de la fissure qui coupe les droites (d) et (e). Le glissement  $\delta$  augmente de N vers P. On a porté sur la figure 5 le déplacement  $\delta$  en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  le long de la fissure ainsi que le cisaillement  $t$  correspondant (dans le cas d'un corps de Tresca pour simplifier l'exposé mais on généraliserait sans difficulté pour un corps de Coulomb).

Dans la solution élasto-plastique classique, le cisaillement serait constant le long de NN' et il lui correspondrait un effort de cisaillement  $F$  dans chaque demi-domaine de  $D$  de la figure 4 ;  $t = ct$  =  $t_{mx}$  est tracé en tireté sur la figure 5. Dans le cas du radoucissement  $t(s)$  diminue avec le déplacement relatif des lèvres de la fissure ; il est indiqué un trait plein sur la figure 5. La surface hachurée correspond à un déficit  $\Delta F$  de la force de cisaillement  $F$  dont la valeur est :

$$\Delta F = \int_{PN} (t_{mx} - t(s)) ds$$

qu'on peut majorer par :

$$\Delta F < (t_{mx} - t_r) 2l$$

où  $t_{mx}$  est la plus grande résistance,  $t_r$  la résistance résiduelle et  $l$  la longueur de la fissure PN. Pour assurer l'équilibre, il faut que la fissure de la figure 5 progresse vers la droite de  $\Delta l$  (en montrant de II au sens de la mécanique de la rupture) avec une perturbation du champ élastique au-delà, de façon telle qu'avec les approximations de la figure 1 l'aire ponctuelle soit égale à l'aire hachurée. L'allongement  $\Delta l$  de la fissure permet de compenser le déficit de cisaillement  $\Delta F$  en apportant le supplément de résistance  $\Delta l \cdot t_r$ . On connaît ainsi un majorant de  $\Delta l$  :

$$\Delta l < \left( \frac{t_{mx}}{t_r} - 1 \right) l$$

$$\frac{\Delta l}{l} < \frac{t_{mx}}{t_r} - 1$$

Ainsi, si le radoucissement correspondant à la résistance résiduelle est de 10%, l'allongement de la fissure qui permet le rétablissement de l'équilibre est de 10%. Ce mécanisme n'est possible que si le ligament (c'est-à-dire la zone comprise entre l'extrémité N de la fissure et la frontière libre du milieu étudié) est suffisamment large pour supporter l'augmentation de la contrainte dans le domaine élastique. Dans le cas contraire, la surface de glissement atteint le bord libre et la plastification est totale avec un écoulement libre. Mais si la plastification reste contenue, le mécanisme précédent bloque le mouvement de la surface de glissement en permettant à la déformation de se concentrer sur une autre surface de glissement, peut-être pas au voisinage immédiat de la première, car on concevrait mal qu'il soit possible d'y supporter  $t_{mx}$  alors que la première ne peut plus supporter que  $t_r$ . On doit donc prévoir l'apparition d'une multitude de surfaces de glissement discontinues et côte à côte, difficilement visibles parce que situées à l'intérieur du massif plastifié mais qui permettent de revenir au concept de quasi homogénéité. Ce résultat est tout à fait conforme à l'expérience (figure 3).

IV - APPLICATIONS A DES PROBLEMES PARTICULIERS

Les phénomènes décrits en champ de contrainte homogène et en champ hétérogène permettent d'interpréter de nombreuses observations. Nous n'en citerons que trois.

a. Force portante des fondations

Il s'agit à nouveau du problème du poinçon, mais ce qui sera dit ici, est valable pour d'autres cas de rupture avec localisation de la déformation. La surface de rupture qui se développe au cours du chargement est fonction des caractéristiques de la matière vierge et n'évolue plus - ou à peine - au fur et à mesure de son développement. Par contre, la matière se transforme dans la surface de glissement : la compacité et l'angle de frottement interne d'un sable dense diminuent comme d'ailleurs la cohésion d'une argile ; elles tendent vers les valeurs résiduelles. La valeur théorique de la force portante qu'on détermine à partir des hypothèses de la plasticité parfaite sans radoucissement a donc d'autant plus de chance d'être trop optimiste que l'écart entre la résistance maximale et la résistance résiduelle est grand.

Dans une description grossière, on peut dire que tout se passe comme si la rupture plastique se produisait par glissement sur des surfaces dont la forme est liée aux caractéristiques maximales, mais dont le critère de rupture est lié aux caractéristiques résiduelles. Il va sans dire que la cinétique des mouvements relatifs des blocs rigides entre les différentes surfaces de glissement n'est pas bien assurée, en particulier lorsque les réserves de dilataance sont localement épuisées, ou pendant des grands déplacements. Cette description, cependant, suggère un majorant et un minorant pour la valeur de la charge ultime.

On peut en effet écrire que la charge ultime  $q_U$  d'un corps radoucissant de caractéristiques  $\phi_{mx}, \phi_r, C_{mx}, C_r$  est comprise entre les charges limites  $q_U(\phi_{mx}, C_{mx})$  et  $q_U(\phi_r, C_r)$  :

$$q_U(\phi_r, C_r) < q_U < q_U(\phi_{mx}, C_{mx})$$

et on est sûr que la charge ultime  $q_U$  est plus petite que la borne la plus grande, puisque l'angle de frottement dans la surface de glissement est  $\phi_r$  et non  $\phi_{mx}$ , et plus grande que la borne la plus petite puisque la surface de glissement réelle est plus longue que celle qui correspond à  $\phi_r$ .

Les différences peuvent être très grandes dans certains cas. Par exemple, pour les fondations superficielles sur des milieux pulvérulents ( $C_{mx} = C_r = 0$ ), les coefficients de portance peuvent varier de 1 à 4 lorsque  $\phi$  passe de 32° (ce qui correspond souvent à un milieu pulvérulent sans radoucissement) à 40° où le radoucissement est nettement marqué. On peut pour ce problème proposer de minorer la borne supérieure par le coefficient  $(tg\phi_r / tg\phi_{mx})$  en utilisant la description précédente et supposant que dans la surface de glissement l'angle de frottement est réduit à la valeur résiduelle. De la même façon on peut tenter de majorer la borne inférieure en tenant compte du fait que la surface de glissement réelle est plus profonde et plus longue que celle que l'on aurait avec un matériau pulvérulent dont l'angle de frottement serait égal à l'angle de frottement résiduel. De telles corrections grossières peuvent être proposées sans difficultés pour la poussée ou pour la butée dans des milieux pulvérulents (Habib, 1984), ou pour des milieux purement cohérents ou même pour des matériaux cohérents et ayant un angle de frottement interne.

### b. Effet d'échelle

Il est bien connu que le poinçonnement des petites fondations sur des sables denses donne des coefficients de force portante plus grands que ce que l'on observe pour des grandes fondations. Pour être plus précis, si on écrit la valeur de la pression limite  $q_u$  sous la forme classique :  $q_u = 1/2 \gamma B N_y$ , le coefficient de portance  $N_y$  est très grand pour les petits modèles.

La progression de la surface de glissement et l'augmentation de sa longueur avec l'augmentation du chargement et la notion de rupture progressive allée à la formation d'une surface de glissement dans un milieu radoucissant permettent de donner une explication de ce phénomène.

Il est bien clair que lorsqu'une fondation est suffisamment grande pour que la surface de glissement progresse avec l'augmentation du chargement, le travail de dilatation est pratiquement étalé sur toute la durée du chargement. Nous avons vu précédemment que la progressivité de la rupture conduit à étudier l'équilibre final sur une surface de glissement où la résistance au cisaillement correspond à la résistance résiduelle, même si la forme de la surface est fonction des caractéristiques initiales du milieu pulvérulent. Nous avons vu aussi que dans les essais de cisaillement à la boîte de Casagrande, la résistance maximale d'un matériau radoucissant est atteinte puis dépassée lorsque le déplacement relatif de part et d'autre du plan de glissement est de l'ordre de 3 à 5 mm. Enfin, c'est un autre résultat classique pour le poinçonnement des fondations de constater que la rupture est consommée lorsque l'enfoncement atteint 5% de la largeur B de la base. Le rapprochement de ces deux grandeurs : 3 à 5 mm = 5/100 B donne B de l'ordre de 6 à 10 cm.

Pour des largeurs plus petites que ces valeurs, la surface de rupture se développe en même temps que la rupture générale de la fondation : travail de dilatation et travail de rupture générale sont simultanés et la portance est élevée. Pour des largeurs plus grandes, la surface de glissement se développe à partir d'un bord de la fondation dès que l'enfoncement dépasse trois millimètres et le mécanisme de rupture progressive entraîne la séparation entre travail de dilatation et travail de frottement : la dilatation est active dans une bande située à l'avant de la surface de glissement et qui se déplace avec elle. Plus la surface de glissement est longue (c'est-à-dire plus la fondation est large) plus le travail de dilatation est "dilué" dans le travail de poinçonnement : la portance paraît plus faible puisque l'effet de la dilatation diminue. B = 10 cm apparaît donc comme une valeur en-deçà de laquelle l'effet d'échelle peut être important, au-delà de laquelle il s'estompe et disparaît. La figure 6 donne des résultats expérimentaux de Tcheng et Iseux (1966) qui sont en accord avec ce commentaire : la largeur critique que l'on peut en déduire pour une fondation est de 10 à 12 cm en accord avec l'évaluation précédente. On remarque que les valeurs de  $N_y$  des petites fondations correspondent à des angles de frottement interne très grands. Ils devraient évidemment être associés aux valeurs maximales des courbes efforts-déformations des essais triaxiaux.

Le mécanisme qui vient d'être décrit n'est pas limité aux sables, mais peut s'appliquer aux milieux purement cohérents comme les argiles saturées. Certes la dilatation est nulle, mais le radoucissement que l'on observe y est associé à la destruction d'une structure, comme pour les roches ou les bétons, même si elle n'est pas aussi visible. L'expérience montre que le déplacement relatif qui entraîne l'apparition d'une surface de glissement dans un appareil de cisaillement est aussi de l'ordre de 3 à 5 mm pour les argiles comme pour les sables. Le mécanisme de rupture progressive

avec destruction de la structure de l'argile dans une bande située à l'avant de la surface de glissement en développement est donc tout à fait analogue et démontre l'existence d'un effet d'échelle en-dessous de B = 10 cm environ pour les argiles raides radoucissantes, alors qu'il n'y a pas pour les argiles plus molles à comportement plastique (ou élastoplastique).

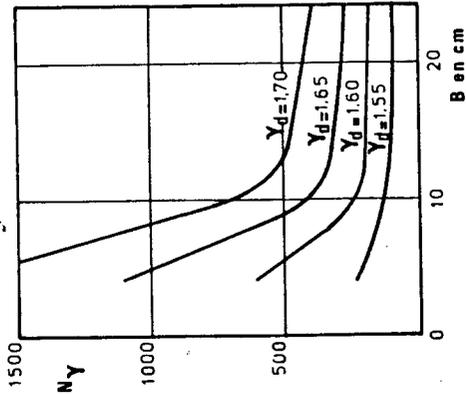


Figure 6 - Variation de  $N_y$  en fonction de la largeur B de la fondation (d'après Tcheng & Iseux, 1966).

Mais cet effet est certainement beaucoup plus modeste pour les argiles que pour les sables. Pour une argile radoucissante avec  $\phi_{uu} = 0$  il faut associer deux valeurs de la cohésion  $C_{mx}$  et  $C_r$  et ces valeurs ne sont pas très différentes pour des pressions de consolidation courantes, (alors que la résistance résiduelle d'une roche peut être beaucoup plus faible que la résistance maximale). Or la force portante  $q_u = C_{nc}$  est proportionnelle à la cohésion, ce qui fait que la diminution de portance peut passer inaperçue alors que grande différence entre les portances à cause de l'effet multiplicateur du frottement que l'on retrouve, par exemple, en comparant les expressions classiques de  $N_y(\phi_{mx})$  et  $N_y(\phi_r)$ .

c. Angle de talus naturel des milieux pulvérulents  
L'angle à la base d'un talus en équilibre limite est théoriquement égal à l'angle de frottement interne  $\phi$  du critère de Coulomb. Ce phénomène n'est jamais utilisé actuellement comme expérience pour déterminer l'angle de frottement d'un sable car la définition de l'angle du talus est ambiguë.

On distingue en effet un angle de talus en remblai et un angle de talus en déblai. Pour un sable déversé, c'est-à-dire à l'état lâche, l'angle de remblai est souvent voisin de  $30^\circ$ . Si on cherche à creuser en déblai au pied d'un talus en remblai, on peut obtenir un angle un peu plus grand, probablement à cause du caractère dynamique de la mise en remblai. Pour un sable dense, l'angle de remblai ne peut évidemment pas être défini puisqu'un remblai est par nature lâche ; par contre, l'angle de déblai est généralement plus grand que  $30^\circ$ , mais il atteint rarement  $40^\circ$ . On constate alors que l'effondrement ne se produit pas par un mécanisme de glissement circulaire profond mais par des avalanches régressives superficielles.

## HISTORIQUE DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

HISTORY OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY

B. PERSOZ

68, Boulevard Saint-Michel  
75006 PARIS

### RESUME

Le Groupe Français de Rhéologie fonctionne depuis 1954. C'était à l'origine une émanation de la Commission Nationale de Rhéologie, formée au C.N.R.S. sous l'impulsion de Henri Weiss. Depuis 1964, le groupe, devenu autonome avec Jean Mandel comme premier président, finance lui-même ses Cahiers. Les différentes activités du groupe sont examinées ici : bulletin, conférences, colloques annuels, congrès international de 1972, terminologie, documentation, enseignement, rédaction de livres et travaux interlaboratoires.

### ABSTRACT

The French Group of Rheology has functioned since 1954. At the beginning it emanated from the National Commission of Rheology initiated by Henri Weiss. Since 1964 this group, which became autonomous under Jean Mandel, its first president, has financed itself its "Cahiers". The Group's various activities are reviewed : a bulletin, conferences, annual colloquia, the International Congress of 1972, terminology, documentation, teaching, editing of books and interlaboratory exchanges.

Conférence inaugurale du 20ème Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie prononcée le 27 novembre 1985.

PREMIERE JOURNEE

DEUXIEME SESSION

**COMPORTEMENT ET MODELISATION D'UNE ROCHE POREUSE (CRATE) JUSQU'A  
DES PRESSIONS DE CONFINEMENT DE 50 MPa**

**BEHAVIOUR AND MODELISATION OF A POROUS ROCK (CHALK) UNDER CONFINING  
PRESSURE UP TO 50 MPa**

SHAO J.F., HENRY J.P.

Université de Lille I  
Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille  
Laboratoire de Mécanique des Matériaux Fragiles  
59655 VILLENEUVE D'ASCQ Cédex - FRANCE

**RÉSUMÉ**

L'étude a porté sur une craie blanche très poreuse ( $\epsilon = 45\%$  de porosité). Des essais de compression hydrostatiques et triaxiaux ont été menés jusqu'à des pressions de confinement de 50 MPa. Ces essais ont permis de traduire le comportement mécanique de la roche (courbes contraintes - déformation progressive de la variation de volume) et de mettre en lumière la destruction progressive de la structure (caractère fortement contractant). Un modèle de Lade est utilisé pour simuler le comportement de cette craie ; Les modifications importantes sur ce modèle consistent en l'introduction d'une zone élastique, d'une loi de variation du module d'Young avec la pression de confinement et le deuxième invariant du déviateur des contraintes, et d'une loi d'érouissage dépendant de la pression de confinement. Ces modifications permettent de simuler avec une bonne approximation les résultats expérimentaux.

**ABSTRACT**

Hydrostatic and triaxial tests are performed on a white and porous chalk ( $\epsilon = 45\%$ ) for confining pressure of up to 50 MPa. These tests give the mechanical behaviour of the rock (stress - strain and stress - bulk volume rate relations) and show a progressive collapse of the structure (high diminution of void volume). A Lade's model is used to interpret the chalk behaviour. The significant modifications are the introduction of an elastic zone, the use of Young modulus dependence law with confining pressure and with the second invariant of deviatoric stress and the description of work hardening with confining pressure. These modifications give a good agreement between the experiments and the model.

## 1. INTRODUCTION

Peu d'études ont porté sur la rhéologie des craies, seuls quelques modèles d'écroutissage cinématique ont été présentés [1] [2]. Une telle roche présente un comportement particulier du fait de sa forte porosité : sous de faibles contraintes hydrostatiques (< 6 MPa), elle se comporte comme une roche fragile, sous de fortes contraintes hydrostatiques (> 30 MPa), elle se comporte comme un sol. Entre les deux zones, il y a destruction progressive de la structure de la roche, rendant incohérent les grains de calcite constituant la craie. La difficulté de modélisation réside dans le passage d'un comportement à l'autre.

Pour un certain nombre d'applications ne faisant pas intervenir de chargements cycliques, nous avons choisi de simuler le comportement de la craie par un modèle de Lade à deux surfaces [3]. Des modifications importantes vont être apportées pour traduire le comportement élastique et la destruction progressive de la structure s'accompagnant d'une diminution du volume des vides.

## 2. PARTIE EXPERIMENTALE

La craie étudiée est une craie du Nord de la France provenant de la carrière d'Haubourdin. C'est une craie sénonienne. Les échantillons utilisés dans les essais sont cylindriques ( $\varnothing$  110 mm, h 130 mm). Ils sont découpés et polis à partir des carottes prélevées in situ ... Ils ont été séchés à température de 100°C pendant 24 heures, puis saturés en alcool méthylique sous vide pendant 12 heures. L'alcool méthylique a été choisi afin d'éviter les processus de dissolution - cristallisation pendant la déformation.

### Essais de compression isotropes

Le dispositif et le montage expérimental sont représentés schématiquement sur la figure 1

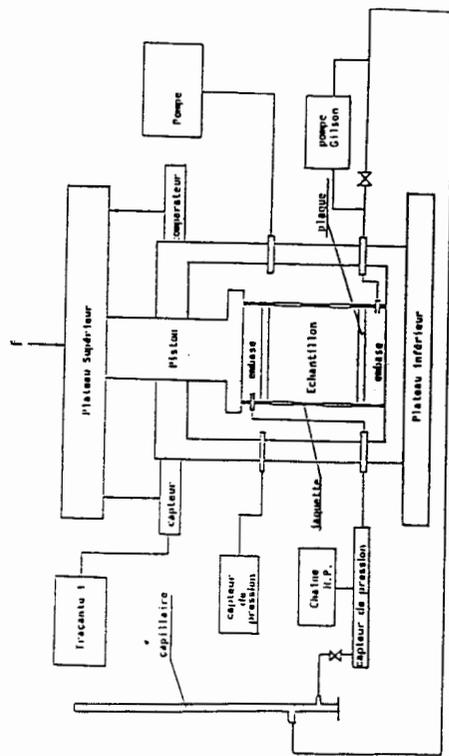


Figure 1

La pression hydrostatique mesurée par capteur a été régulée pendant les essais (vitesse de chargement). La variation du volume des vides a été calculée, en l'identifiant au volume du méthanol échappé de l'échantillon au cours du chargement, à partir de la variation du niveau du méthanol dans le capillaire. Nous avons effectué un certain nombre de cycles de décharge-recharge à différentes valeurs de la pression hydrostatique.

La figure 15 montre les résultats expérimentaux obtenus. Nous constatons que :  
 • la variation du volume est linéaire et élastique lorsque la pression hydrostatique est inférieure à une certaine valeur notée  $P_0^c$ , de l'ordre de 10 MPa ;  
 • la craie présente une contractance à la pression hydrostatique lorsque la pression hydrostatique dépasse la valeur limite  $P_0^c$  ;  
 • la valeur de  $P_0^c$  définit la limite élastique hydrostatique ;  
 • l'écroutissage contractant dépend de la pression hydrostatique.

### Essais de compression triaxiale conventionnels

Le même type d'échantillon et le même montage expérimental que pour les essais de compression isotrope ont été utilisés dans les essais de compression triaxiale (figure 1).

La force axiale a été appliquée par une presse asservie "Losenhausen" (vitesse  $2 \cdot 10^{-3}$  MPa/sec) le déplacement axial a été mesuré par un capteur de déplacement placé à l'extérieur.

Les différentes pressions de confinement appliquées ont été : 2, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50 MPa. Pour chaque pression de confinement, des cycles de décharge-recharge axial ont été également réalisés.

La figure 15 représente les courbes expérimentales obtenues au cours de ces essais. Nous pouvons y retirer les informations suivantes :

- Le comportement triaxial de la craie dépend fortement de la pression de confinement ; lorsque celle-ci est en-dessous de  $P_0^c$ , la craie présente une phase élastique linéaire au faible niveau de charge triaxiale ; cette phase élastique disparaît lorsque la pression de confinement dépasse  $P_0^c$  ;
- La contractance de la craie est autant plus importante que la pression de confinement est plus élevée ;
- Le module élastique de la craie dépend de la pression de confinement d'une part, et du niveau de contrainte déviatorique d'autre part.

## 3. UTILISATION DU MODELE DE LADE

### HYPOTHESES

Nous supposons que la craie étudiée est un matériau homogène, isotrope et élasto-plastique à l'écroutissage positif isotrope. Le modèle de Lade à deux surfaces de charge, développé sur une base expérimentale des sols, simule avec une très bonne précision la contractance plastique. Ce modèle a été retenu pour traduire le comportement rhéologique de la craie sous la condition de sollicitation quasi monotone et sans rotation des axes principaux. Le phénomène d'hystérésis et l'anisotropie éventuellement déduite de la préconsolidation n'ont pas été pris en compte. Nous avons choisi en outre le module de décharge-recharge axial et le module de compressibilité isotrope comme caractéristiques du matériau. Nous avons supposé enfin que la compressibilité du squelette de la craie est relativement négligeable par rapport à la variation du volume des vides, ce qui a pu être vérifié avec quelques pourcents d'erreur à partir de mesures extensométriques.

Le modèle retenu considère que la déformation totale est la somme de déformation élastique, plastique contractante, et plastique dilatante ; chaque compo-

sante est calculée séparément et montréeschématiquement sur la figure 2.

DEFORMATIONS ELASTIQUES

Comme le matériau est supposé homogène isotrope, la relation liant les déformations élastiques aux contraintes peut être décrite par la loi de Hooke générale aux modules de décharge-recharge  $E_{ur}$ , et le module de compressibilité isotrope  $K_{ur}$  :

(1) 
$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^c + de_{ij}^p$$

(2) 
$$de_{ij}^e = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{E_{ur}} - \frac{1}{3K_{ur}} \right) d\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_{ur}} - \frac{1}{3K_{ur}} \right) \text{trace } d\bar{\sigma}_{ij}$$

Le module de compressibilité isotrope est mesuré par des cycles de déchargement dans les essais de compression isotrope, la valeur de ce module dépend de la pression hydrostatique. Nous proposons que cette dépendance est traduite par la relation suivante :

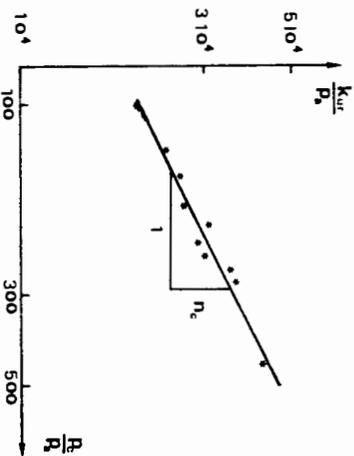
(3) 
$$K_{ur} = C_c \cdot P_a \cdot \left( \frac{I_1}{3P_a} \right)^{n_c}$$

$$K_{ur} = K, \quad \sigma_3 > P^o$$

$$K_{ur} = K, \quad \sigma_3 \leq P^o$$

avec : 
$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3P^c$$

Figure 3



de  $K_{ur}$  en fonction de  $P_c$  pour la craie étudiée.

$C_c, A_c$ , deux paramètres sans dimension du matériau.

La figure 3 représente la variation

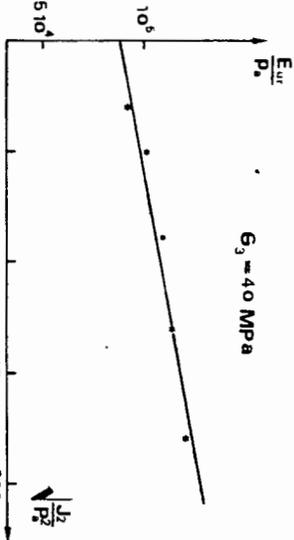
La craie présente un domaine purement élastique lorsque la pression de confinement est inférieure à la limite élastique isotrope. Dans ce domaine, le module de déchargement - rechargement  $E_{ur}$  s'identifie avec le module de Young classique constant  $E$ , et le module  $K_{ur}$  avec  $K$  constant.

Nous supposons que le module  $E_{ur}$  a une double dépendance, avec la pression de confinement et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes, soit :

(4) 
$$\text{Log} \left( \frac{E_{ur}}{P_a} \right) = \text{Log} \left( \frac{E_{ur}}{P_a} \right) + \frac{A}{1000} \sqrt{\frac{J_2}{P_a}}, \quad \sigma_3 > P^o$$

$$\text{Log} \left( \frac{E_{ur}}{P_a} \right) = \text{Log} \left( \frac{E}{P_a} \right) + \frac{A}{1000} \sqrt{\frac{J_2}{P_a}}, \quad \sigma_3 \leq P^o$$

Figure 4



avec :  $A$ , paramètre sans dimension  $J_2$ , deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes.

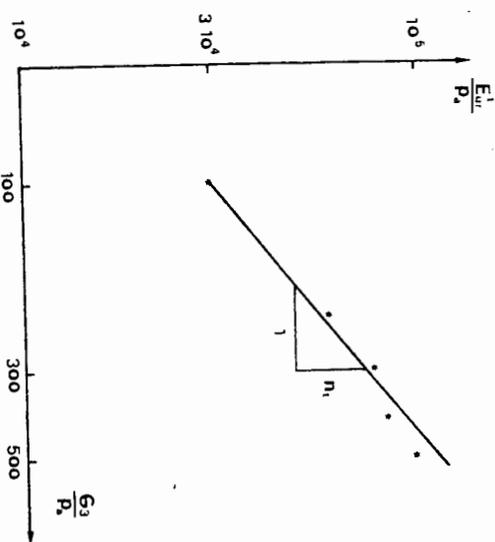
Dans cette relation,  $E_{ur}^t$  représente le module de déchargement-rechargement tangent, calculé comme valeur asymptotique de  $E_{ur}$  lorsque  $J_2$  tend vers zéro. Ce module tangent varie en fonction de la pression de confinement d'après la relation suivante :

(5) 
$$E_{ur}^t = C_t \cdot P_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^{n_t}$$

$$E_{ur}^t = E, \quad \sigma_3 > P^o$$

$$E_{ur}^t = E, \quad \sigma_3 \leq P^o$$

Figure 5



tion de  $J_2$  pour une pression de confinement donnée, et la variation de  $E_{ur}^t$  en fonction de  $\sigma_3$ .

avec  $C_t, n_t$ , deux paramètres sans dimension du matériau.

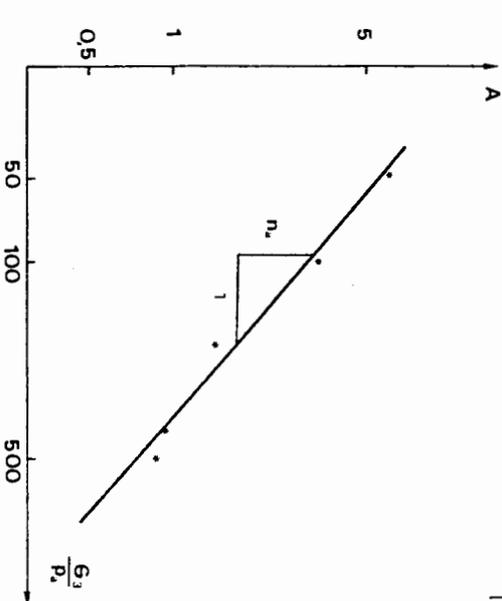
Les figures 4 et 5 représentent respectivement la variation de  $E_{ur}$  en fonction de  $P_c$  et la variation de  $E_{ur}^t$  en

Nous avons constaté que le paramètre  $A$  varie également en fonction de la pression de confinement et cette variation peut être traduite par la relation suivante :

(6) 
$$A = C_a \cdot \left( \frac{\sigma_3}{P_a} \right)^{n_a}$$

avec  $C_a, n_a$ , deux paramètres du matériau. La figure 6 montre le diagramme représentant cette variation.

Figure 6



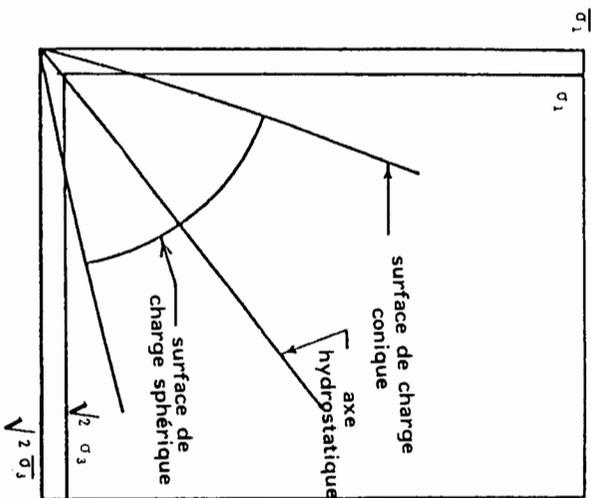


Figure 7

La craie représente une certaine résistance en traction, ce qui est une différence par rapport aux matériaux étudiés par Lade. Pour reprendre l'écriture mathématique des fonctions de charge et des potentiels plastiques, il est nécessaire de réaliser un changement de repère tel que |4| :

$$(7) \quad \overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + C_0 \cdot P_a \cdot \delta_{ij}$$

avec  $C_0$ , paramètre de résistance en traction simple. La fonction de charge dans ce repère s'écrit :

$$(8) \quad F_C = I_1^2 + 2I_2 - f_C = 0$$

avec  $I_1, I_2$ , premier et deuxième invariant du tenseur de contrainte exprimé dans le nouveau repère. La figure 7 représente la surface de charge retenue dans le plan tri-axial.

Pour ce comportement contractant, une loi d'écoulement associée a été utilisée pour le calcul des déformations plastiques contractantes.

- Le potentiel plastique s'identifie en conséquence en conséquence s'écrit :
- (9)  $G_C = F_C = I_1^2 + 2I_2 - f_C = 0$
  - qui permet le calcul des déformations
  - (10)  $de_{ij}^C = d\lambda_C \frac{\partial F_C}{\partial \sigma_{ij}}$

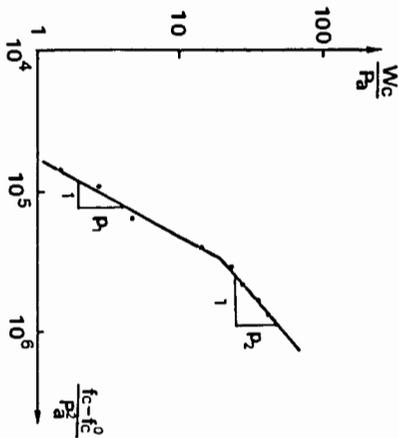


Figure 8

Après avoir introduit le domaine purement élastique, la loi d'écrouissage du type "work-hardening", proposée dans le modèle de Lade, doit s'écrire

$$(11) \quad W_C = C \cdot P_a \cdot \left( \frac{f_C - f_{C_0}}{P_a z} \right)^m$$

où  $f_{C_0}$  est la valeur initiale de  $f_C$  ; la valeur de  $f_{C_0}$  se calcule à partir de la limite  $C$  élastique isotrope  $P_0$ .  $W_C$  est l'énergie de déformation plastique contractante calculée par

$$W_C = \int \sigma_{ij} de_{ij}^C$$

Dans cette relation,  $c$  et  $p$  sont deux paramètres du matériau. L'étude expérimentale de la craie, nous montre que les valeurs de ces deux paramètres sont liées à la pression de confinement. Nous avons introduit un

paramètre noté  $f_C^t$  qui définit une zone dite de pression de confinement faible, et une autre zone dite de pression de confinement élevée. Dans chacune des deux zones,  $c$  et  $p$  prennent les valeurs constantes. Nous avons donc :

$$(12) \quad W_C = C_1 \cdot P_a \cdot \left( \frac{f_C - f_{C_0}^{P_1}}{P_a z} \right)^{m_1}, \quad f_C \leq f_C^t$$

$$W_C = C_2 \cdot P_a \cdot \left( \frac{f_C - f_{C_0}^{P_2}}{P_a z} \right)^{m_2}, \quad f_C > f_C^t$$

La figure 8 représente la variation de l'énergie de déformation plastique contractante  $W_C$ , en fonction du niveau de sollicitation  $f_C$  pour la craie étudiée. Les relations de 8 à 12 nous permettent le calcul des incréments de déformation plastique contractante :

$$(13) \quad (de_{ij}^C) = \frac{dW_C}{dF_C} \left( \frac{\partial F_C}{\partial \sigma_{ij}} \right), \quad F_C = 0 \text{ et } dF_C > 0 ;$$

$$de_{ij}^C = 0, \quad F_C < 0 \text{ ou } F_C = 0 \text{ et } dF_C < 0$$

avec :

$$(14) \quad dW_C = C_1 \cdot P_a \cdot P_1 \cdot \left( \frac{f_C - f_{C_0}^{P_1}}{P_a z} \right)^{p_1 - 1} \cdot d \left( \frac{f_C - f_{C_0}^{P_1}}{P_a z} \right), \quad f_C \leq f_C^t$$

$$dW_C = C_2 \cdot P_a \cdot P_2 \cdot \left( \frac{f_C - f_{C_0}^{P_2}}{P_a z} \right)^{p_2 - 1} \cdot d \left( \frac{f_C - f_{C_0}^{P_2}}{P_a z} \right), \quad f_C > f_C^t$$

DEFORMATIONS PLASTIQUES DILATANTES

Dans le nouveau repère défini précédemment, la fonction de charge s'écrit :

$$(15) \quad F_P = \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{P_a} \right)^m - f_P = 0$$

où  $f_P$  est une fonction représentant le degré d'écrouissage du matériau et dépendant de l'histoire de chargement. La figure 7 montre la surface de charge correspondant dans le plan  $(\sqrt{I_1}, \sqrt{I_3})$ . Nous supposons que la surface de rupture est la position ultime de la surface de charge, et que  $f_P$  prend sa valeur ultime notée  $f_{P_1}$  pour l'état de rupture. Le critère de rupture s'écrit donc :

$$(16) \quad \left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{P_a} \right)^m - f_{P_1} = 0$$

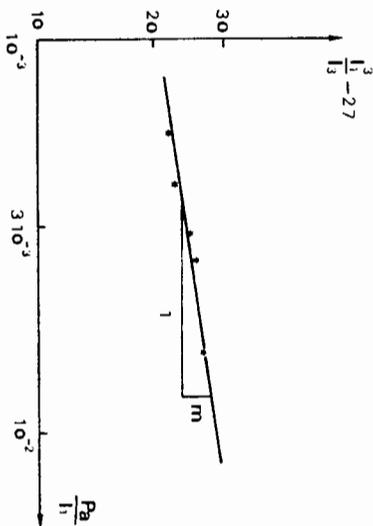


Figure 9

avec  $I_1$ , troisième invariant du tenseur de contrainte,  $n_1$ , paramètre de rupture,  $m$ , paramètre du matériau

La figure 9 représente le diagramme permettant la détermination des paramètres  $n_1$  et  $m$ .

Sur le contour du domaine élastique, la fonction d'écrouissage prend une valeur initiale notée  $n_0$ . L'étude expérimentale a montré que cette valeur initiale dépend de la pression de confine-

ment d'après la relation suivante :

$$(17) \quad n_0 = \lambda \left[ \frac{\sigma_3}{P_a} - \frac{P_0}{P_a} \right], \quad n_0 > 0$$

avec  $\lambda$ , paramètre du matériau. La figure 10 montre la variation de  $n_0$  en fonction de  $\sigma_3$ . Nous exprimons le potentiel plastique proposé par Lade dans le nouveau repère :

$$(18) \quad G_p = T_1^3 - (27 + n_2 \left(\frac{a}{P}\right)m) \cdot T_3 - g_p = 0$$

Dans cette expression,  $n_2$  est un paramètre du matériau et se calcule, dans un essai de compression triaxiale, par la formule suivante :

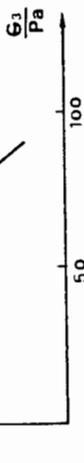


Figure 10

$$(19) \quad n_2 = \frac{3T_1^2 (1 + \xi P) - 27\sigma_3 (\sigma_1 + \xi P \sigma_3)}{\left(\frac{a}{T_1}\right)^m \left[ \frac{\sigma_3 (\sigma_1 + \xi P \sigma_3)}{P} - \frac{m \cdot (1 + \xi P) \cdot T_1^2}{f_p \cdot \left(\frac{a}{T_1}\right) + 27} \right]}$$

avec  $\xi P = -\frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} \frac{P}{a}$

D'après Lade, ce paramètre dépend du niveau de chargement  $f_p$  et de la pression de confinement :

$$(20) \quad n_2 = S \cdot f_p + R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_3}{P_a}} + t$$

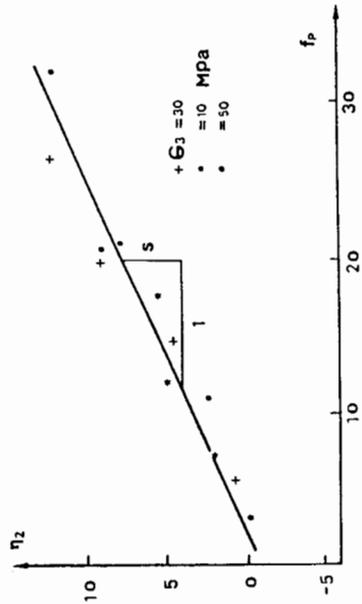


Figure 11

avec  $R, S, t$ , paramètres du matériau.

La figure 11 montre la variation de  $n_2$  en fonction de  $f_p$  pour des essais de compression triaxiale.

Nous avons retenu la loi d'écroutissage isotrope de Lade. En tenant compte de l'introduction du domaine élastique, cette loi s'exprime par :

$$(21) \quad f_p - n_0 = a \cdot e^{-b \cdot W_p} \left(\frac{P}{P_a}\right)^{1/q}, \quad q > 0$$

avec  $W_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$ , énergie de déformation plastique dilatante

La figure 12 représente la variation de  $W_p$  en fonction de  $f_p$  et  $\sigma_3$ . Les paramètres  $a, b$  et  $q$  déterminent la forme du diagramme représentant cette variation. D'après Lade, pour un essai de compression triaxiale, le paramètre  $q$  se calcule par la relation suivante [3] :

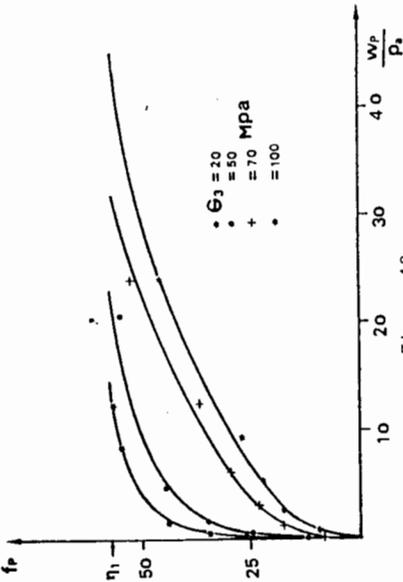


Figure 12

$$(22) \quad q = \frac{\text{Log} \left( \frac{W_p^{\text{peak}}}{W_p} \right) - \left( 1 - \frac{P}{W_p^{\text{peak}}} \right) \cdot \text{Log} e}{\text{Log} \left( \frac{n_1}{f_p} \right)}$$

Il est évident que le paramètre  $q$  dépend de la pression de confinement. L'étude expérimentale nous permet de supposer que cette dépendance se traduit par :

$$q = \alpha_1 + \beta_1 \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right), \quad \sigma_3 \leq P_0^c$$

(23)

$$q = \alpha_2 + \beta_2 \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right), \quad \sigma_3 > P_0^c$$

avec  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ , paramètres du matériau.

La figure 13 montre la variation de  $q$  en fonction de  $\sigma_3$ .

Les paramètres  $a$  et  $b$  se calculent, d'après Lade, par les relations suivantes :

$$a = n_1 \left( \frac{e \cdot P_a}{W_p^{\text{peak}}} \right)^{1/q}$$

(24)

$$b = \frac{1}{q \cdot W_p^{\text{Peak}}}$$

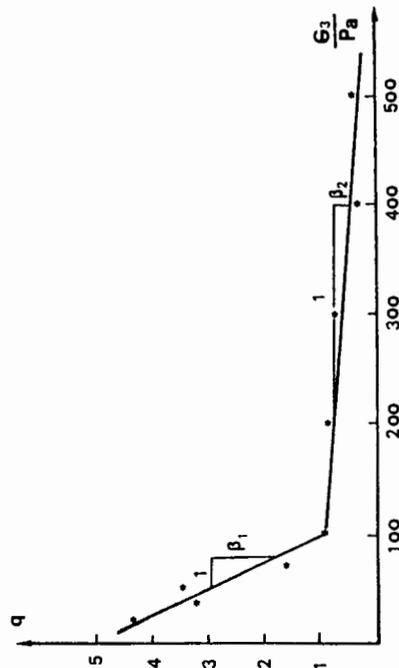


Figure 13

Dans les relations 22 et 23,  $W_p^{Peak}$  représente l'énergie de déformation plastique dilatante ultime à un état de rupture, la valeur de  $W_p^{Peak}$  varie en fonction de la pression de confinement :

$$(25) \quad W_p^{Peak} = P_1 \cdot P_a \cdot \left(\frac{G_3}{P}\right)^{\beta_1}$$

avec  $P_1, \beta_1$ , paramètres du matériau.

La figure 14 montre cette variation.

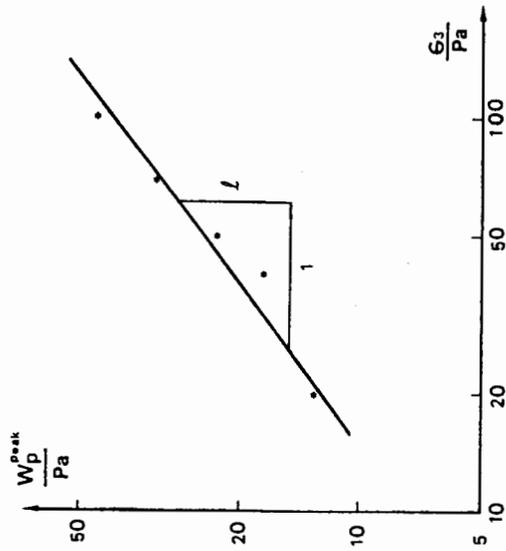


Figure 14

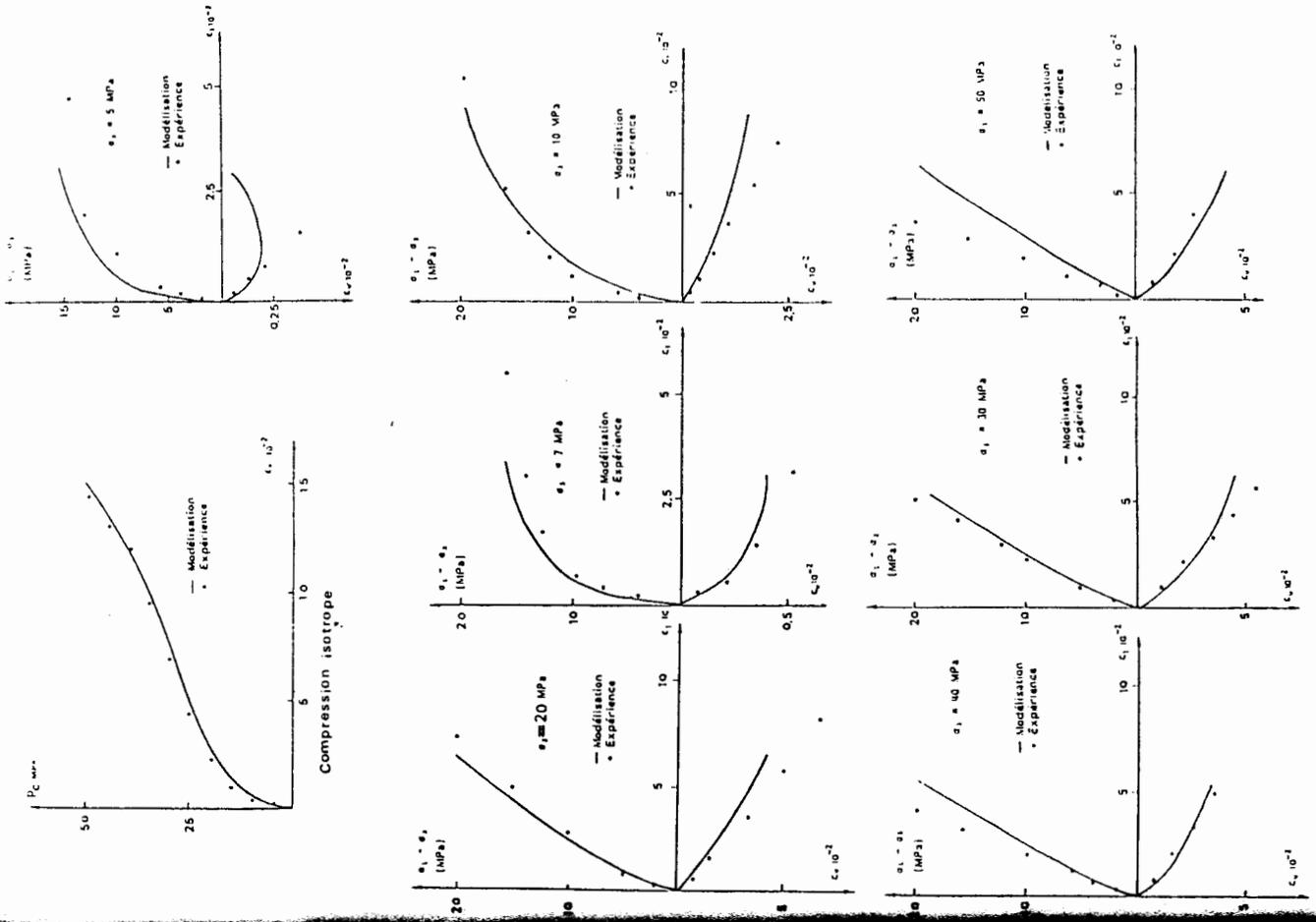


Figure 15

**COMPORTEMENT MECANIQUE DE SOLS ARGILEUX NATURELS EN RELATION  
 AVEC LEUR STRUCTURE : CAS DES ARGILES SENSIBLES DU CANADA**

RELATIONSHIP BETWEEN MICROSTRUCTURE AND MECHANICAL BEHAVIOUR  
 OF SOME NATURAL CLAYED SOILS, THE EASTERN CANADA SENSITIVE CLAYS

P. DELAGE

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sol  
 Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
 La Courtille - B.P. 105  
 93194 NOISY-LE-GRAND Cédex - FRANCE

RESUME

Les Argiles Sensibles du Canada ont la particularité de se liquéfier quand elles sont remaniées mécaniquement, ce qui se traduit in-situ par de nombreux glissements de terrains analogues à des coulées de boue. Cette propriété est attribuée par les géotechniciens à un effet de structuration.

On présente une étude de la microstructure de ces sols, effectuée en microscopie électronique à balayage et en porosimétrie au mercure, qui permet de distinguer deux structures types, correspondant respectivement aux sols moyennement sensibles (St = 30), et extra-sensibles (St > 500).

ABSTRACT

Eastern Canada Sensitive Clays are characterized by their tendency to liquify when mechanically remolded, whose consequence is the occurrence of numerous landslides, similar to mudslides. This property is related by geotechnicians to a structural effect.

The present work deals with a microstructural study of those soils, conducted both by scanning electron microscope and mercury intrusion pore size distribution measurements. The microstructural difference between medium quick clays (St = 30) and extra quick clays (St > 500) is evidenced.

En utilisant les relations précédentes, la théorie de plasticité nous permet le calcul des déformations plastiques dilatantes :

$$(26) \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{dW_p}{\sigma_{ij} \partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{p}{\sigma_{ij}} \quad , \quad F_p = 0 \quad \text{et} \quad d_{fp} F_p > 0$$

$$\text{avec} \quad dW_p = \frac{d_{fp} F_p}{(f_p - n_0) \left( \frac{1}{q} \cdot W_p - b \right)}$$

4. RÉSULTATS DE SIMULATION - CONCLUSION

Les essais de compression isotrope et triaxiale ont été simulés par le modèle retenu. La figure 15 représente les courbes théoriques et les valeurs expérimentales. Nous concluons :

- l'essai de compression isotrope est simulé par le modèle avec une très bonne précision,
  - pour les essais de compression triaxiale, le modèle donne de bons résultats pour une grande plage de pression de confinement ; mais une dilatance un peu trop importante est représentée par le modèle lorsque la pression de confinement est faible,
  - la contractance plastique est mieux simulée par le modèle que la dilatance plastique,
  - le modèle simule correctement la destruction de la structure de la craie. Ceci représente un développement très important des modèles rhéologiques existants qui ne sont valables que lorsque la pression de confinement est faible dans le cas des roches poreuses,
  - le modèle est applicable pour les chemins de sollicitation tridimensionnelle généraux bien que les paramètres ne soient déterminés qu'avec des essais de compression isotrope et triaxiale.
- L'étude sera poursuivie par l'application du modèle dans la recherche d'interaction fluide-solide de la craie et la validation du modèle dans des chemins de sollicitation complexe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] | J.M. DUNCAN et C.Y. CHANG - "Non linear analysis of stress and strain in soils", *J. of soil Mech. and Foundations Division, ASCE*, Vol. 96, n° SM5, sept. 1970, p. 1629-1653.
- [2] | WILLER T.W. et CHEATHAM J.R. J.B. (1972) - "A new yield condition and hardening rule for rocks", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 9, p. 453-474.
- [3] | LADE P.V. (1977) - "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", *Int. J. Solids structures*, vol. 13, p. 1019-1035.
- [4] | KIM M.K. et LADE P.V. (1984) - "Modelling rock strength in three dimensions", *Int. J. Rock, Mech. Min. Sci. et Geomech. Abstr.*, vol. 21, n° 1, p. 21-33.

## INTRODUCTION

L'étude des relations entre la microstructure des sols et les caractéristiques macroscopiques de leur comportement est particulièrement délicate dans le cas des sols argileux, du fait de la petite taille des particules élémentaires qui les constituent (< 2  $\mu$ m). Il est en effet difficile de les identifier granulométriquement et surtout minéralogiquement, et il n'est pas possible, comme dans le cas des sables, de négliger les interactions de surface par rapport aux forces de gravité. Or ces interactions dépendent de nombreux paramètres physico-chimiques, qui doivent en particulier intégrer la complexité des interactions eau-argile.

La Minéralogie a permis d'identifier l'organisation des différents types de molécules argileuses : dans la plupart des cas, il s'agit de feuillets de silicates d'aluminium hydratés, dont l'épaisseur est de 7 ou 10 Å. Ces molécules sont chargées électriquement, ce qui entraîne des actions de répulsion électrique qui peuvent être compensées, pour de faibles distances entre les feuillets, par des actions d'attraction de type Van der Waals. Les premières considérations concernant l'arrangement de particules argileuses débouchent de ces observations et sont de nature indirecte.

Plus récemment, le développement de la Microscopie Electronique à Balayage, joint à la mise au point de techniques de déshydratation permettant de mieux préserver la structure ont permis des observations directes sur divers types de sols argileux. Il a en particulier été montré que les premiers modèles de structure, découlant des analyses minéralogiques, étaient plutôt adaptés aux boues ; dans le cas des sols naturels, on n'a jamais observé de feuillets argileux intervenant individuellement, mais plutôt une tendance à s'agglomérer face-à-face pour former des plaquettes constituées de 10 à 100 feuillets ; ces plaquettes sont la plupart du temps regroupées en agrégats. On voit donc que pour faire le lien entre le feuillet et le sol considéré macroscopiquement, il est nécessaire de considérer différents niveaux de structure.

On présente ici le cas de sols réputés pour avoir un comportement géotechnique particulier, attribué par les géotechniciens à un phénomène de "structuration" : il s'agit des Argiles Sensibles de l'Est du Canada. Ces sols, qui forment des dépôts de 20 à 40 m d'épaisseur répartis principalement au Québec, le long du Saint-Laurent, et dans le Nord, sur le site des ouvrages hydroélectriques de la Baie James, ont la faculté de devenir plus ou moins liquides quand ils sont remaniés mécaniquement.

Cette propriété se traduit par le développement de glissements de terrains fréquents et dangereux, pouvant déstabiliser des étendues de plusieurs hectares situés généralement en bordure de rivières actives, en zone de faible pente (1 %). L'érosion engendre une première lentille de glissement qui liquéfie le sol déplacé et se propage ensuite. Le sol liquide emprunte alors le cours d'eau sur plusieurs centaines de mètres. Quand ils affectent des zones habitées, ces glissements deviennent catastrophiques, comme celui de Saint-Jean Vianney en 1972, qui engendra une quarantaine de victimes.

Les nombreuses études géotechniques menées depuis une quinzaine d'années n'ont pas permis de relier de façon satisfaisante l'ampleur de la sensibilité de ces argiles à des caractéristiques géotechniques classiques telles que granulométrie, limites d'Atterberg, minéralogie, salinité de l'eau interstitielle, ... On a donc entrepris d'aborder ce problème par l'identification de la micro-structure.

## ECHANTILLONS ETUDIÉS

Les Argiles sensibles se sont déposées il y a environ 10 000 ans, lors du retrait vers le Nord de la calotte glaciaire qui recouvrait le Canada à la dernière glaciation. Ce retrait s'est accompagné de l'envahissement de ces régions par la mer, et c'est dans un milieu généralement marin que s'est fait le dépôt. Le matériau est donc constitué d'une "farine de roche" provenant de l'abrasion

glaciaire et sa composition est analogue à celle de la roche-mère : les minéraux argileux sont l'illite et la chlorite, les non-argileux sont le quartz, des feldspaths, des amphiboles et des micas. Le dosage des non-argileux a montré que la part argileuse devrait toujours être inférieure à 30 % (1, 2). La teneur en eau de ces sols naturellement saturés varie entre 25 et 80 % et leur plasticité entre 10 et 40. Du fait du soulèvement isostatique postérieur au retrait glaciaire, ils ont subi un lessivage et la teneur en sel actuelle de leur eau interstitielle est généralement voisine de 1 g/l.

Les échantillons observés sont au nombre de dix, dont six proviennent de la Mer de Champlain, entre Montréal et Québec, (Saint-Marcel, Saint-Guillaume, Saint-Louis, Saint-Léon, Saint-Alban, Saint-Thuribe), un de la rive Nord du Saint-Laurent, proche de Baie Comeau (Outardes 2) et trois des sites de la Baie James (Grande Baleine, Broadback B2 et B6).

## EXPERIMENTATION

Un certain nombre de travaux ont déjà concerné la structure des Argiles Sensibles Canadiennes. Les premiers utilisateurs de la Microscopie Electronique à Balayage ont observé des échantillons séchés à l'air ou à l'étuve (3, 4, 5, 6). Le fort retrait volumique au séchage de ce type de sol entraîne de grandes modifications de structure, et il est nécessaire d'utiliser des méthodes plus élaborées. La technique la plus souvent retenue est la lyophilisation (freeze-drying), qui consiste à congeler l'échantillon, puis à le mettre sous vide ; la déshydratation se fait alors par sublimation, et il ne se développe pas de ménisques capillaires air-eau qui sont, dans le cas du séchage, responsables de fortes rétractions. Il a été montré de plus qu'il est nécessaire de procéder à une congélation extrêmement rapide, par immersion d'échantillons de petites tailles dans du fréon liquide à -145°C (7, 8, 9, 10, 11). Dans le cas des Argiles Sensibles, on a montré que cette méthode minimisait les perturbations et donnait un aperçu satisfaisant de la structure (12). Pour obtenir un plan d'observation de bonne qualité en Microscopie Electronique à Balayage, il est en outre nécessaire de pratiquer la fracture de l'échantillon congelé (13, 14, 15). Ainsi la glace maintient en place les particules, évitant arrachements et déplacements, et détermine un plan de fracture qui traverse les différents niveaux de la structure sans emprunter ses plans de faiblesse.

Dans ce travail, l'observation directe, mais qualitative et locale du MEB a été complétée à une mesure de la distribution de la taille des pores par injection de mercure, qui permet de compléter l'étude de la structure par des éléments quantitatifs et plus globaux, puisqu'ils concernent généralement un volume d'un centimètre cube de sol (16, 17, 18).

La mesure porosimétrique repose sur le fait que le mercure étant un liquide non mouillant, ne pénétrera que sous pression un milieu poreux vide de tout fluide. On enregistre donc, au cours d'accroissements incrémentsaux de pression, le volume pénétré à chaque incrément dans le milieu poreux, et la loi de Jurin permet de convertir ces pressions en rayons d'accès cylindriques équivalents ; la courbe obtenue donne une idée de la répartition de la taille des pores au sein du milieu.

## ETUDE MICROSTRUCTURALE

### Argile de Saint-Marcel

Il s'agit d'une argile moyennement sensible puisque sa sensibilité, égale au rapport de sa cohésion intacte sur sa cohésion remaniée vaut 19.

Les photos de la Figure 1 représentent deux grossissements d'un même plan vertical. On observe (photo a) une structure lâche et régulière en agrégats de diamètres compris entre 2 et 5  $\mu$ m. Ces agrégats sont constitués de plaquettes argileuses d'illite dont le diamètre varie entre 0,1 et 0,5  $\mu$ m. Les pores observés sont de deux types : des pores inter-agrégats organisés en un réseau poreux

régulier dont le diamètre moyen est de l'ordre de 1  $\mu\text{m}$  ; des pores intra-agrégats dont on peut estimer le diamètre moyen à environ 0,1  $\mu\text{m}$ . Les agrégats sont reliés les uns aux autres par des ponts de plaquettes qui traversent le réseau inter-agrégats. Des grains de minéraux non argileux de petite dimension plus ou moins tapissés d'argile sont intégrés dans cette structure. La photo b montre le détail d'un agrégat et de son interaction avec un grain voisin.

En porosimétrie (Figure 2), l'argile de Saint-Marcel est caractérisée par une courbe unimodale définissant une famille d'accès de pores bien classée autour d'un rayon moyen de 0,2  $\mu\text{m}$ . Cet aspect bien classé est à relier à l'allure régulière de la structure et du réseau poreux inter-agrégats. La valeur plus faible du rayon d'accès (0,21  $\mu\text{m}$ ) par rapport aux pores inter-agrégats observés en microscopie (rayon 0,5  $\mu\text{m}$ ) est attribuée au cloisonnement du réseau poreux par les ponts inter-agrégats, phénomène confirmé par la forte valeur de mercure piégé lors du retrait (12).

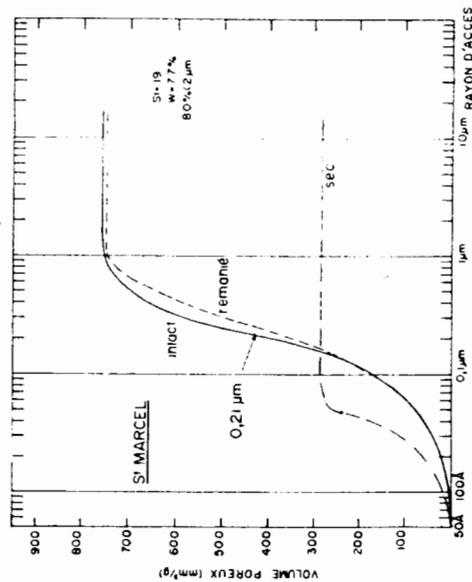


Fig. 2 - Porosimétrie de l'argile de Saint-Marcel

Fig. 2 - Pore size distribution of Saint-Marcel clay

Le remaniement entraîne un léger agrandissement des rayons d'accès, alors que la plus fine porosité reste identique. Il a été montré par ailleurs (18) que ceci correspondait à la non dispersion des agrégats lors du remaniement, et à la rupture d'un certain nombre de ponts inter-agrégats, qui permettent ainsi un accès plus large aux pores inter-agrégats. Le matériau remanié est donc constitué d'agréats et de grains tapissés d'argile, baignant dans l'eau inter-agrégats.

Le séchage a lieu avec une très forte réduction du volume poreux total (70 %), correspondant à la disparition des pores inter-agrégats ; les agrégats eux-mêmes se rétractent pour définir un rayon d'accès moyen de 0,05  $\mu\text{m}$ , correspondant aux pores plans existant entre les plaquettes d'illite accolées.

#### Argile de Grande Baleine

Les photos de la Figure 3 montrent l'allure de la structure de l'argile de Grande Baleine, qui a une sensibilité extrêmement forte (> 500) du fait que sa cohésion remaniée est quasi nulle. L'aspect général de la structure est beaucoup plus désordonné que dans le cas de Saint-Marcel, et on n'observe plus l'arrangement régulier en agrégats. Les grains assez anguleux de minéraux primaires



a)



b)

Fig. 1 - Observation au MEB de l'argile de Saint-Marcel

Fig. 1 - SEM observation of the Saint-Marcel clay

de dimension inférieure ou égale à  $2 \mu\text{m}$  ne sont plus inclus dans une organisation dominée par les agrégats argileux. Le tapage par les plaquettes semble moins marqué, et ces grains sont suffisamment nombreux pour être au contact les uns des autres, comme le montre la photo b. On observe néanmoins, inclus dans l'édifice, quelques agrégats argileux (b) Un certain nombre de pores de dimension avoisinant le micron sont situés entre ces grains, nous les appellerons pores inter-granulaires.

La courbe porosimétrique (Figure 4), d'allure différente de celle de Saint-Marcel, met en évidence une famille de pores mal classée, de rayons compris entre  $0,2$  et  $1 \mu\text{m}$ ; pour les plus petits pores, la courbe définit une famille mieux classée avec un point d'inflexion à  $0,17 \mu\text{m}$ . Ces pores moins bien classés sont associés aux pores intergranulaires observés en microscopie. La détection de cette famille en porosimétrie montre que ces grains sont en quantité suffisante pour que le réseau poreux intergranulaire soit interconnecté, et non masqué par la part argileuse.

La courbe de sol remanié a été obtenue après lyophilisation des gouttes du sol liquide. Le remaniement se traduit par un élargissement des rayons d'accès, et la porosité intergranulaire est encore visible.

Au séchage, la rétraction du volume poreux total est plus faible que précédemment ( $50\%$ ), et le rayon moyen d'accès passe de  $0,17 \mu\text{m}$  à  $0,12 \mu\text{m}$ . Cette plus faible rétraction est attribuée à la présence abondante de grains non argileux qui, lors du séchage, viennent au contact les uns des autres et gênent des accès plus larges que dans le cas d'une argille contenant plus de plaquettes argileuses.



a)



b)

Fig. 3 - Observation au MEB de l'argile de Grande Baleine

Fig. 3 - SEM observation of the Grande Baleine clay

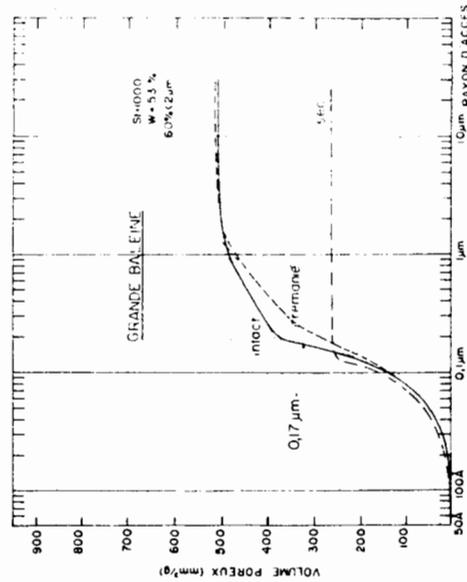


Fig. 4 - Courbe porosimétrique de l'argile de Grande Baleine

Fig. 4 - Pore size distribution curve of the Grande Baleine clay

Comparaison des deux structures, conséquence sur la sensibilité

La différence de structure entre les argiles de Saint-Marcel, de sensibilité moyenne, et de Grande Baleine, de très forte sensibilité, apparaît donc clairement. Dans le premier cas, l'arrangement des constituants est gouverné par la phase argileuse et sa tendance à s'organiser en agrégats régulièrement disposés. Le matériau remanié, constitué des mêmes agrégats non dispersés, a une cohésion régie par des interactions dues à la part argileuse qui ne disparaissent pas irréversiblement au remaniement. La cohésion remaniée n'est dans

ce cas pas nulle. Dans le second cas, on a mis en évidence le rôle de la part granulaire de dimension inférieure ou voisine de  $2 \mu\text{m}$ , qui est en quantité suffisante pour prendre une part prépondérante dans l'organisation des constituants, en formant un squelette au milieu duquel se répartissent les plaquettes argileuses. Le matériau remanié est principalement constitué de ces minéraux primaires dont l'interaction avec l'eau est négligeable, baignant dans l'eau intergranulaire, et formant un liquide de cohésion quasi-nulle, ce qui entraîne une très grande sensibilité.

Etant donné que la porosimétrie met clairement en évidence les rôles des phases argileuse et granulaire, il est intéressant de comparer les courbes obtenues sur les différents autres échantillons, en tenant compte de l'ampleur de leur sensibilité. C'est ce qui est fait aux Figures 5, 6 et 8.

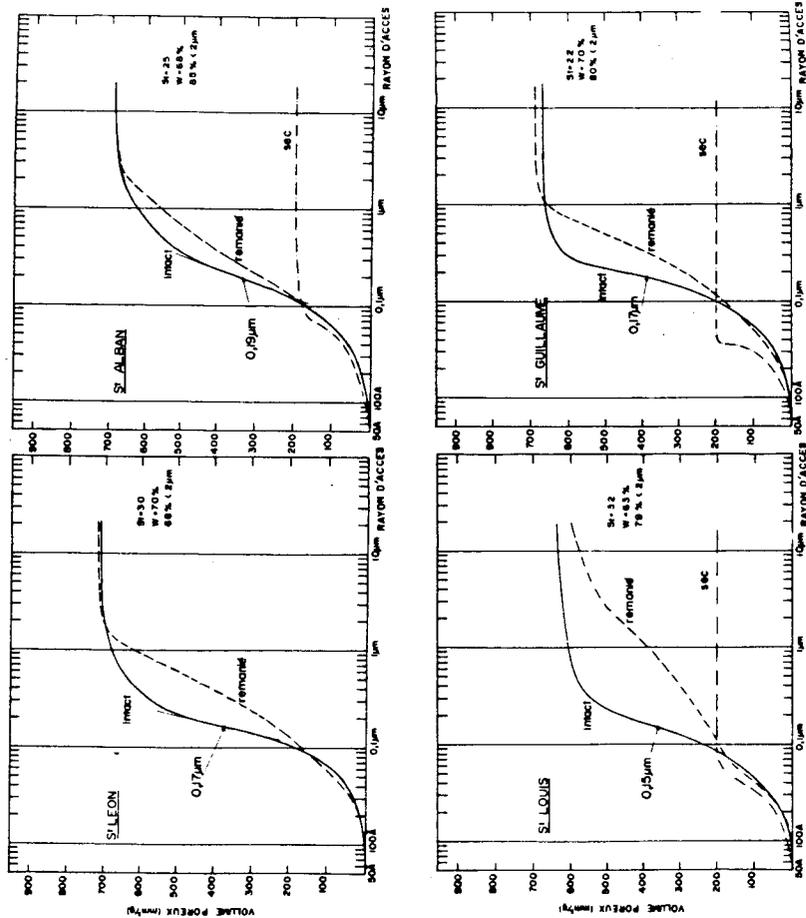


Fig. 5 - Courbes porosimétriques d'argiles de sensibilité moyenne, provenant de la Mer de Champlain

Fig. 5 - Pore size distribution curves of medium sensitivity Champlain clays

Les échantillons de la Figure 5 sont tous caractérisés par une forte proportion de particules de dimension inférieure à  $2 \mu\text{m}$  (entre 65 et  $80 \mu\text{m}$ ), leur teneur en eau élevée (entre 63 et 70 %), et des sensibilités moyennes (entre 22 et 32), et sont donc comparables à l'échantillon de Saint-Marcel. Cette analogie est confirmée par les courbes porosimétriques qui, comme celle de Saint-Marcel, sont unimodales, bien classées avec des valeurs moyennes de rayon d'accès le plus représentatif variant entre  $0,15 \mu\text{m}$  et  $0,19 \mu\text{m}$ . On a vérifié en microscopie (17) qu'il s'agit de structures en agrégats. Il faut remarquer une légère différence, sur les échantillons de Saint-Alban et de Saint-Léon, en ce qui concerne la courbe plus large des courbes aux alentours de  $1 \mu\text{m}$ , qui indique une présence légèrement plus marquée de pores de cette dimension. Cette caractéristique est probablement à relier à la granulométrie moins fine de ces échantillons avec, en particulier, la présence d'environ 10 % de particules de  $10 \mu\text{m}$  de diamètre dans le cas de Saint-Alban.

Cette tendance est particulièrement marquée dans le cas de l'Argile de Saint-Thuribe caractérisée granulométriquement par une forte proportion de grains de  $30 \mu\text{m}$  de diamètre, et dont on présente la courbe porosimétrique en Figure 6 et les photos en Figure 7. La microscopie permet clairement d'identifier les gros grains et l'interaction entre ces grains qui est gouvernée par la tendance de la phase argileuse à les tapisser et à les relier par une organisation en agrégats. La photo b, qui est un agrandissement de a, montre comment ces agrégats, dont le diamètre est voisin du micron, sont disposés entre deux gros grains. La courbe porosimétrique est unimodale, régulière, moins bien classée autour de  $0,18 \mu\text{m}$  que dans le cas de la Figure 5, et présente une courbe assez grande dans la zone  $0,3 \mu\text{m} - 1 \mu\text{m}$ . L'argile de Saint-Thuribe est le cas typique de l'interaction entre une famille de gros grains qui représente un pourcentage granulométrique de 60 %, et la phase argileuse qui tapisse et entoure ces grains.

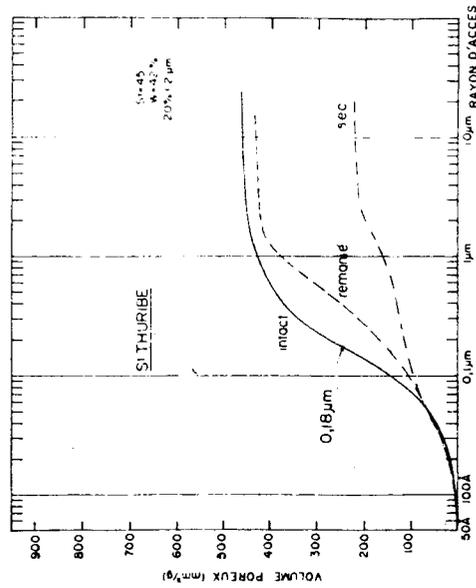


Fig. 6 - Courbe porosimétrique de l'Argile de Saint-Thuribe

Fig. 6 - Pore size distribution curve of the Saint-Thuribe clay

Les échantillons de la Figure 8 sont de très forte sensibilité, et ne proviennent pas de la Mer de Champlain. La porosimétrie met en évidence une famille de mal classée de gros pores analogues à ceux observés dans le cas de Grande Baie (Figure 4), et la microscopie (17) permet de vérifier qu'il s'agit de pores inter-granulaires, définis par les contours de grains non adhérents les uns aux autres, dans le cas de B6. peuvent être très fins. Il s'ensuit dans ce cas une valeur plus faible du point d'inflexion (0,094  $\mu\text{m}$ ), qui s'observe également sur Outardes.

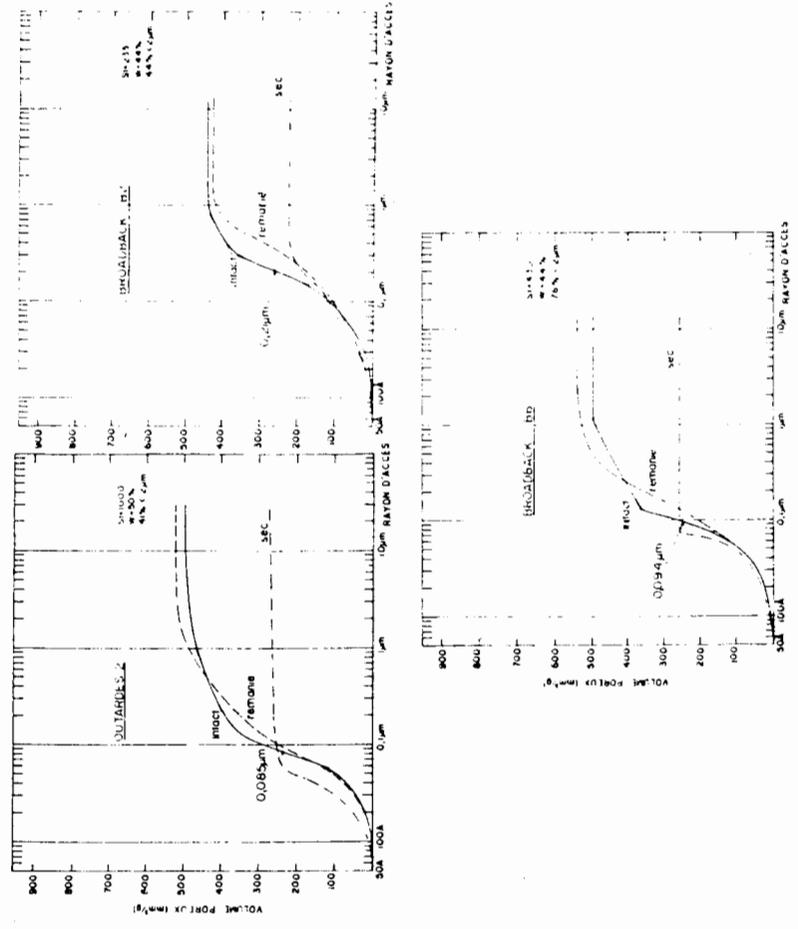


Fig. 8 - Courbes porosimétriques d'argiles extra sensibles



Fig. 7 - Observation au MEB de l'argile de Saint-Thuribe

## CONCLUSION

L'approche particulière d'étude de la structure utilisée dans ce travail qui consiste à coupler l'observation en microscopie électronique à balayage à la mesure de porosimétrie au mercure permet de faire une distinction entre la structure des argiles moyennement sensibles et extrêmement sensibles :

- Les sols de sensibilité moyenne possèdent dans leur fraction granulométrique inférieure à 2 µm une quantité d'argile suffisante pour développer une structure en agrégats à l'intérieur de laquelle sont incorporés les grains non argileux de minéraux primaires. Le sol remanié est constitué de ces mêmes agrégats non dispersés qui présentent des interactions de type argileux non complètement annulées par le remaniement. La cohésion remaniée n'est pas nulle et les sensibilités ne sont donc pas extrêmes.

- Les sols extra-sensibles présentent des structures beaucoup plus désordonnées influencées principalement par des grains non argileux qui peuvent être de taille inférieure à 2 µm. Les interactions existant entre ces grains à l'état intact, dont la nature est encore mal connue, sont détruites irréversiblement par le remaniement. Le sol remanié est donc constitué principalement de grains très fins et d'eau, et l'absence d'interaction eau-grain explique son caractère liquide. La cohésion remaniée nulle entraîne alors une sensibilité extrême.

Il va de soi qu'une compréhension complète du phénomène de sensibilité passe par la connaissance de la nature et de l'ampleur des interactions interparticulaires dans le sol intact. Néanmoins, la méthode proposée ici a permis d'appréhender un aspect du problème qui ne pouvait être perçu par les caractérisations géotechniques et minéralogiques classiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) FOSCAL-MELLA G., 1976. Analyses minéralogiques des argiles glaciaires. *Mémoire M.Sc.A., Ecole Polytechnique, Montréal, Québec.*
- (2) LOCAT J., LEFEBVRE G. and BALLIVY G., 1984. Mineralogy, chemistry and physical properties interrelationships of some sensitive clays from Eastern Canada. *Canadian Geotechnical Journal, Volume 21, 3, pp. 530-540.*
- (3) GILLOTT J.E., 1970. Fabric of Meda clay investigated by optical, electron optical and x-ray diffraction methods. *Engineering Geology, Volume 4, 2, pp. 133-153.*
- (4) TOVEY N.K., 1971. A selection of scanning electron micrographs of clays. *IVED/C Soils/TR5a, University of Cambridge, Department of Engineering.*
- (5) BARDEN L., 1972. The relation of soil structure to the engineering geology of clay soil. *Quarterly Journal of Engineering Geology, Volume 5, pp. 85-102.*
- (6) COLLINS K. and MCGOWN A., 1974. The form and function of microfabric features in a variety of natural soils. *Géotechnique, 24, pp. 233-254.*
- (7) GILLOTT J.E., 1973. Methods of sample preparation for microstructural analysis of soil. *Proceedings of the Fourth International Working-Meeting in Soil Micromorphology, Kingston, Ontario, pp. 143-164.*
- (8) GILLOTT J.E., 1976. Importance of specimen preparation in microscopy. *American Society for Testing Materials, Special Technical Publication 599, pp. 289-307.*
- (9) TOVEY N.K., WONG K.Y., 1973. The preparation of soils and other geological materials for the scanning electron microscope. *Proceedings of the International Symposium on Soil Structure, Gothenburg, Sweden, pp. 59-67.*
- (10) SMART P., 1973. Electron microscope methods in soil micromorphology. In *Soil Microscopy, Proceedings of the Fourth International Working-Meeting in Soil Micromorphology, Kingston, Ontario, Edited by G.K. Rutherford.*

- (11) TESSIER D., BERRIER J., 1978. Observations d'argiles hydratées en microscopie électronique à balayage. Importance et choix de la technique de préparation. *Proceedings of the 5th International Working-Meeting on Soil Micromorphology, Granada, pp. 117-135.*
- (12) DELAGE P., PELLERIN F.M., 1984. Influence de la lyophilisation sur la structure d'une argile sensible du Québec. *Clay Minerals, 19, pp. 151-160.*
- (13) TESSIER D., QUIRK J.P., 1979. Sur l'apport de la microscopie électronique dans la connaissance du gonflement des matériaux argileux. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 288, Ser. D, pp. 1375-1378.*
- (14) GILLOTT J.E., 1979. Fabric, composition and properties of sensitive soils from Canada, Alaska and Norway. *Engineering Geology, 14, pp. 149-172.*
- (15) DELAGE P., TESSIER D. et MARCEL-AUDIGUIER M., 1982. Use of the cryoscan apparatus for observation of freeze-fractured planes of a sensitive Quebec clay in scanning electron microscopy. *Canadian Geotechnical Journal, 19, pp. 111-114.*
- (16) DIAMOND S., 1971. Microstructure and pore structure of impact-compacted clays. *Clays and Clay Minerals, 19, p. 239.*
- (17) DELAGE P., 1979. Etude du milieu poreux et de la texture d'argiles sensibles du Québec. *Thèse Docteur-Ingénieur, C.G.I., Ecole des Mines Paris.*
- (18) DELAGE P., LEFEBVRE G., 1984. Study of the structure of a sensitive plain clay and of its evolution during consolidation. *Canadian Geotechnical Journal, 21, 1, pp. 21-35.*

ooOoo

LE "RADIOUCISSEMENT" DU BETON EST-IL UN PHENOMENE RHEOLOGIQUE ?  
IS SOFTENING OF CONCRETE A RHEOLOGICAL PHENOMENON ?

J.P. TORRENTI  
LSG - ENTPE -  
rue M. Audin - 69120 VAULX EN VELIN

(Ce texte doit beaucoup à une remarque faite par le professeur HARBIS, lors du Colloque International "Béton sous Sollicitations Multiaxiales", Toulouse 1984, au sujet du radoucissement (12))

RESUME

De nombreux modèles de comportement du béton simulent son comportement post pic en introduisant un radoucissement dans la relation contrainte-déformation.

Or, des essais très simples en compression et traction simple montrent que dans la partie post pic, la mesure des déformations n'était plus possible, seule celle des déplacements étant réaliste. Le radoucissement apparaît alors comme une instabilité de comportement.

Il n'est donc pas possible de simuler le comportement d'une structure où les déformations sont localisées dans des bandes de cisaillement, à l'aide d'une loi appliquée de façon homogène à ces structures.

Ainsi, même si le radoucissement est bien une caractéristique rhéologique du béton, nous proposons plutôt d'utiliser des modèles plus simples associés à un critère de localisation qui fera bifurquer le modèle vers le radoucissement.

ABSTRACT

Many concrete constitutive equations include a softening branch in the stress-strain relation.

But very simple tests show that after the stress peak strain measurement is no more possible, and that only displacement measurement is available because of localization of strains in shear bands.

Therefore it is preferable to add to a simple behaviour model a localization criterion which induces softening.

1 - INTRODUCTION

Connaitre la charge que peut encore supporter une structure en béton lorsqu'en certaines zones de cette structure la contrainte maximale est dépassée est très important pour sa conception.

Pour cela, de nombreux auteurs de lois de comportement du béton (cf. 1, 2, 3 par exemple), essaient de simuler son comportement post pic en introduisant un radoucissement ("softening" en anglais) dans la relation contrainte-déformation (cf. fig. 1).

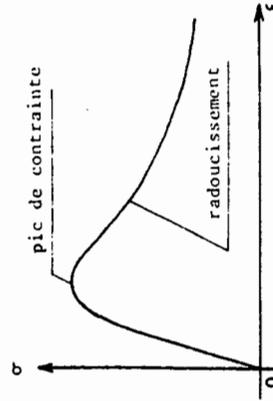


Figure 1 : Courbe type contrainte déformation avec branche radoucissante

Or, si d'un point de vue théorique, on peut concevoir ce phénomène, et si le problème mathématique n'est pas insurmontable, le point de vue de l'expérimentateur est différent. En effet, celui-ci ne peut pas garantir, dans la partie post pic, des champs de contraintes et déformations homogènes. L'apparition de plans de rupture très localisés en est une preuve concrète (sans jeu de mots).

Remarque : une visualisation de ces localisations a été faite en Mécanique des Sols par DESRUÉS (4). Celui-ci a constaté l'apparition des localisations avant le pic ! Néanmoins, ici, afin de ne pas compliquer le problème, nous ne considérerons que la partie post pic. (On admettra, faute de mieux pour l'instant, que la localisation avant le pic n'a que des effets secondaires.)

## 11 - INTERPRETATION DES ESSAIS

Le problème posé est donc : Peut-on interpréter en contraintes et déformations les résultats expérimentaux post pic ? Nous allons montrer sur deux exemples la difficulté du problème.

### a) Essais de compression simple sur des éprouvettes d'élançement variable

Afin de tester l'influence de l'élançement sur les résultats qu'il obtenait, VAN MIER (5) fit des essais de compression simple sur des éprouvettes prismatiques de section 100 cm<sup>2</sup> et de hauteurs respectives : 5, 10 et 20 cm (soit un élançement variant de 0,5 à 2). Si l'on analyse les résultats obtenus en contrainte déformation (fig. 2), on note une grande différence dans les comportements post pics :

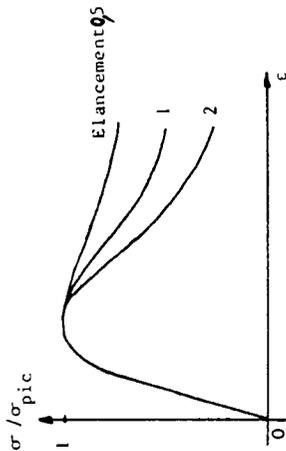


Figure 2 : Influence de l'élançement sur les courbes contraintes déformations en compression simple

Comme les déformations étaient calculées à partir des déplacements des plateaux d'appuis, VAN MIER a également eu l'idée de tracer, pour la partie post pic, les courbes (contrainte/contrainte pic) fonction du déplacement (fig. 3). Et dans ces axes les courbes sont pratiquement confondues !

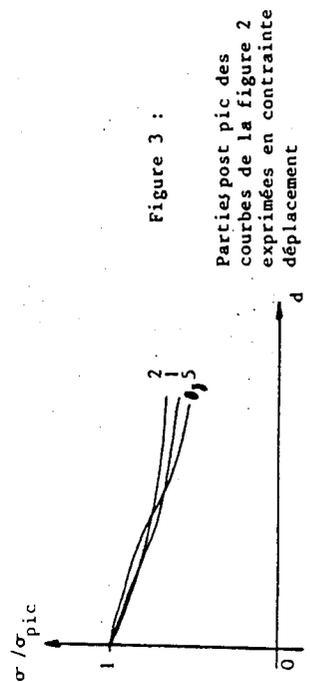
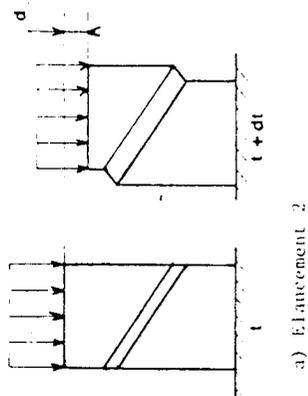


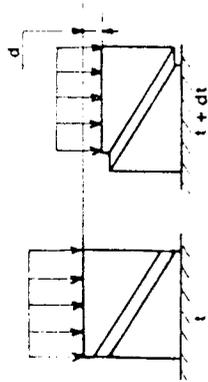
Figure 3 :

Parties post pic des courbes de la figure 2 exprimées en contrainte déplacement

Ceci peut s'expliquer en tenant compte de l'apparition de plans de rupture lorsqu'il y a localisation des déformations en bandes de cisaillement (fig. 4) :



a) Elançement 2



b) Elançement 1

Figure 4 : Interprétation des essais de compression simple grâce aux plans de rupture

Nous voyons, grâce à cette interprétation, que, à vitesse de déplacement égale, on a le même déplacement pour les deux éprouvettes. Si, ensuite, nous calculons les déformations post pic, nous avons :

$$\xi_a = d/2 l$$

$$\xi_b = d/l$$

On retrouve ainsi les différences observées à la figure 2, entre les pentes des courbes contraintes déformations.

Remarquons qu'en diminuant l'élançement des échantillons on peut espérer arriver à obtenir des déformations homogènes en empêchant la localisation de se produire ou du moins en la retardant.

Le comportement observé est alors bien intrinsèque au matériau. Simplement pour le béton la difficulté est grande d'effectuer des essais homogènes, tout d'abord parce que le béton est un matériau très hétérogène et aussi du fait du fretage d'autant plus important que l'on réduit l'élançement, et qui lui empêche d'avoir des champs homogènes et favorise la localisation.

#### b) Essais de traction simple

Le phénomène de localisation (qui pour le béton aboutit à l'apparition de plans de rupture) se retrouve aussi en traction simple. On peut à cet égard effectuer une expérience très significative : on soumet une éprouvette de béton à de la traction simple en mesurant les allongements sur diverses parties de l'éprouvette (fig. 5).

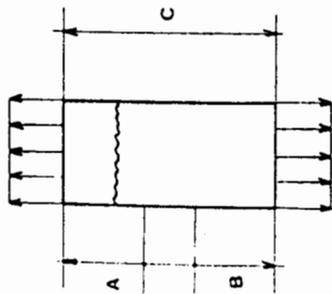


Figure 5 : Essai de traction simple

La rupture survenant par exemple dans la partie h-07e de l'éprouvette (mesure A), si l'on trace les différentes courbes contraintes déformations, ces dernières étant déduites des allongements, on obtient les résultats suivants (fig. 6) :

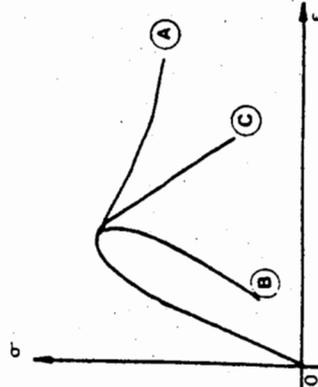


Figure 6 : Influence des bases de mesure sur la courbe contrainte déformation en traction simple

Cette expérience met clairement en évidence le fait qu'après le pic, l'homogénéité du champ de déformation, au moins, n'est plus vérifiée. L'interprétation post pic de ces essais directement par une loi rhéologique nous apparaît donc comme difficile. Il faut donc adjoindre aux modèles constitutifs quelque chose qui rende compte de la localisation, et c'est ce que nous allons développer maintenant :

### III - CRITERE DE LOCALISATION - INSTABILITE DE LA LOI DE COMPORTEMENT

Les travaux de RUDNICKI et RICE (6,7) ont montré qu'on pouvait associer à la loi de comportement un critère de localisation. Lorsque le critère est atteint, il y a bifurcation dans le comportement du matériau et localisation des déformations en bandes de cisaillement.

Le critère varie suivant la loi de comportement utilisée (cf. DESRUES (4)). En supposant (cf. DARVE (8)) que ce qui se passe dans la bande de cisaillement au moment de sa formation n'est qu'une perturbation par rapport au reste de l'éprouvette et, dans le cas d'un modèle incrémental non linéaire s'écrivant :

$$\delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \delta \epsilon_{kl}$$

le critère de localisation sera :

$$\det (\tau_i C_{ijkl} \tau_j) = 0$$

Lorsque ce critère est atteint, il y a apparition dans le matériau d'une bande de cisaillement de normale sortante  $\vec{n}$ . On n'est plus alors en présence d'un milieu continu. De ce fait, on ne peut plus parler de déformations au sens de la MMC. C'est pourquoi il nous semble que les résultats expérimentaux post pics devraient être exprimés en charge déplacement.

Les travaux de PREVOST (9), sur un modèle élasto plastique appliqué au cas du sable, montrent que l'utilisation d'un critère de localisation est possible par la méthode des éléments finis. Une remarque à ce propos : pour obtenir numériquement la localisation, PREVOST est obligé d'introduire dans son maillage des éléments hétérogènes. Ceci est parfaitement en accord avec les constatations expérimentales de DESRUES, qui introduisait dans son milieu un élément très hétérogène. (En fait, si le milieu était parfaitement homogène et symétrique ainsi que les conditions aux limites, on ne devrait pas voir se développer des bandes de cisaillement, ou alors une infinité).

#### IV - CONCLUSIONS

Nous avons donc vu que le radoucissement (ou plutôt ce que l'on interprète comme tel) correspond plus à une instabilité du matériau qu'à une propriété intrinsèque (exactement comme le flambage des poteaux), et qu'un critère simple pouvait rendre compte de cette instabilité.

Le problème des essais a aussi été abordé et nous avons montré que ceux-ci devaient être interprétés en déplacement plutôt qu'en déformation.

Un problème restant en suspens est donc : S'il n'y avait pas bifurcation, comment se comporterait le béton ? Nous avons en effet trois comportements homogènes possibles (fig. 7) :

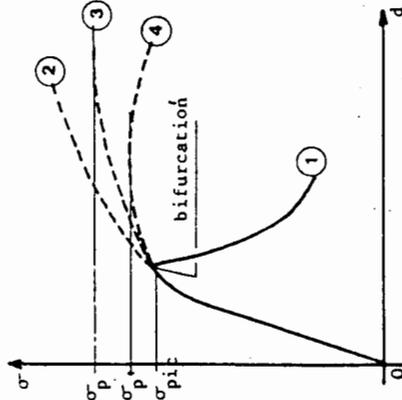


Figure 7 : Les comportements post pic

#### 1) Essai non homogène (localisation)

Essais homogènes :

- 2) avec écrouissage
- 3) plastique parfait
- 4) avec radoucissement

HABIB a montré (12), et cela se conçoit aisément, que le comportement écrouissant était incompatible avec l'apparition de localisations. Restent donc deux comportements post-pic possibles.

On peut pour des raisons de simplification choisir la plasticité parfaite comme comportement asymptotique du béton (10). La résistance ultime du béton n'est pas alors la contrainte au pic mais  $\sigma_p$ , valeur de l'asymptote de plasticité. La différence entre les deux dépendant des conditions d'essais : dimension de l'échantillon, hétérogénéité du matériau, conditions aux limites, etc... La valeur de  $\sigma_p$ , qui est intrinsèque car ne dépendant pas de la bifurcation, est alors obtenue en calant le modèle de comportement sur la partie pré-pic des essais.

Il en est de même pour les modèles avec radoucissement,  $\sigma_p$  étant supérieur à  $\sigma_{pic}$ . Et il est vraisemblable que pour un matériau endommageable comme le béton le radoucissement est bien une caractéristique rhéologique du matériau.

Néanmoins, il nous semble préférable d'utiliser des modèles de comportement plus simples (par exemple asymptotiquement plastiques purs) associés à un critère de localisation plutôt qu'une problématique qui incluant le radoucissement beaucoup plus difficile à utiliser dans une étude de structure par la méthode des éléments finis.

#### BIBLIOGRAPHIE

- 1) S. H. AHMAD, S. P. SHAH : "Orthotropic model for complete stress-strain curves of concrete under multiaxial stresses" - International Conference on Concrete Under Multiaxial Conditions - Colloque RILEM - Toulouse 1984.
- 2) D. J. HAN, W. F. CHEN : "On constitutive modeling of concrete materials" - International Conference on Concrete under Multiaxial Conditions - Colloque RILEM - Toulouse 1984.
- 3) Z. P. BAZANI : "Advanced Topics in Inelasticity and failure of concrete" - Cours ENFC.
- 4) J. DESRUES : "Naissance des bandes de cisaillement dans les milieux granulaires : expérience et théorie" - Ecole d'Hiver de Rhéologie des Géomatériaux - Aussois 1984.
- 5) J. VAN MIER : "Strain Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions" - Thèse de docteur ingénieur - Technische Hogeschool Eindhoven - 1984.
- 6) RUDNICKI, RICE : "Conditions for the localisation of deformation in pressure sensitive dilatant materials" - J. Mech. Phys. Solids - Vol. 23 - 1975 - pp. 371-394.
- 7) J. R. RICE : "The localisation of plastic deformation" - Theoretical and Applied Mechanics - Proc. - 14th IUTAM Congress - Delft, Netherlands - North Holland Publishing co. - 1976 - pp. 207-220.

8) F. DARVE : "An incrementally non linear constitutive law of the second order and its application to localisation" - International Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials - Tucson - 1983.

9) J. H. PREVOST, J. R. HUGUES : "Finite Element Solution of Elastic Plastic Boundary Value Problems" - Journal of Applied Mech. - 1981 - Vol. 48 - pp. 69-74.

10) J. C. ROBINET, J. M. TORRENTI : "Prédiction du comportement du béton sous sollicitations multiaxiales par un modèle incrémental non linéaire" - International Conference on Concrete under Multiaxial Conditions - Colloque RILEM - Toulouse 1984.

11) P. HABIB : "Quelques remarques relatives à la modélisation du radoucissement" - International Conference on Concrete under Multiaxial Conditions - Colloque RILEM - Toulouse 1984.

12) P. HABIB : "Les surfaces de glissement en mécanique des sols" - Revue Française de Géotechnique - n° 27 - 1984.

### LOIS D'ÉCOULEMENT ET ENDOMMAGEMENT DES ACIERS DANS LE DOMAINE DES TEMPÉRATURES MOYENNES.

FLOW LAWS AND DAMAGE OF STEELS IN THE RANGE OF WARM CONDITIONS

J.C. GELIN

Laboratoire de Génie Mécanique -  
GRECO Grandes Déformations et Endommagement  
Université de Valenciennes  
59326 VALENCIENNES

#### RESUME

Les propriétés rhéologiques des aciers entre 300°C et 750°C sont assez peu connues, en particulier peu d'analyses existent en ce qui concerne le type de loi d'écoulement à adopter et le comportement vis à vis de l'endomagement de rupture ductile. Une étude expérimentale conduite sur les aciers 304L et XC38, nous permet d'évaluer l'importance du facteur température sur la loi d'écoulement, par l'intermédiaire de deux essais, l'essai de traction d'éprouvettes axisymétriques entaillées et l'essai de compression. Une loi de comportement est proposée qui relie la contrainte d'écoulement à la déformation et à la vitesse de déformation, en faisant intervenir explicitement la température. La rupture ductile est étudiée de manière expérimentale et théorique, elle est représentée par un modèle macroscopique continu établi à partir du passage microscopique-macroscopique sur un agrégat contenant des vides ou cavités. Les résultats théoriques obtenus sont en bon accord avec l'expérimentation et permettent d'apporter des renseignements quand à la rupture ductile dans le domaine des températures moyennes.

#### ABSTRACT

The material behaviour of steels in the range between 300°C and 750°C is not very well known, few analyses are devoted to the influence of damage on flow stress relations. An experimental study conducted on 304L and 1038 steels allow us to evaluate the importance of temperature on the flow stress-strain law, in using the notched tensile test of rounds bars, and the upset-test of axisymmetric specimens. A stress-strain relationship is proposed that relates the current yield stress to the effective strain, effective strain rate, with an explicit dependence on the temperature. The ductile damage and fracture are studied from the experimental results obtained in tensile and upsetting. A continuous model is established on the basis of microscopic-macroscopic relations on an aggregate containing voids. The theoretical results obtained are in good agreement with experimental ones and allow us to characterize the ductile fracture in warm conditions.

## 1 - INTRODUCTION

Dans le domaine des températures ambiantes les aciers de construction mécanique sont assez peu sensibles aux effets de fluage, cependant quand la température augmente, tout en étant inférieure ou de l'ordre de la température de fusion, ils sont sensibles à la vitesse de déformation. Ceci provient du fait que l'écoulement plastique du métal est dû principalement au mouvement des dislocations, contrôlé par une variété d'obstacles microstructuraux, beaucoup de ces obstacles sont thermiquement activables, et donnent donc lieu à un accroissement de la dépendance du seuil de plasticité vis à vis de la température.

La sensibilité à la vitesse dépend de manière critique de la microstructure du matériau considéré. Les matériaux à structure cubique centrée sont typiquement très sensibles à la vitesse de déformation, tandis que les matériaux de type cubique faces centrées le sont beaucoup moins. Bien que ces matériaux (C.F.C) soient moins sensibles on note généralement un accroissement très important de la limite d'écoulement quand la vitesse de déformation dépasse  $10^{-2}$  s<sup>-1</sup>, ou bien une diminution importante quand la température dépasse  $T_c/2$ .

La plupart des informations connues aujourd'hui concernant l'effet de la température et de la vitesse de déformation proviennent d'essais uniaxiaux de traction ou de compression. Si ces essais sont insuffisants pour rendre compte de comportements particuliers [1] et pour tracer la surface de charge dans l'espace des contraintes, ils sont par contre suffisants pour fournir des informations quant à l'influence de la vitesse de déformation et de la température sur la courbe d'écrouissage-adoucissement du matériau considéré.

Après une brève présentation des équations constitutives généralement utilisées pour la description des comportements élasto-viscoplastiques avec effets de la température, nous décrivons quelques lois d'écoulement utilisables lorsque l'on veut tenir compte des effets thermiques. Une loi puissance décrivant l'effet de la vitesse et de la température est notamment proposée. Nous décrivons les dispositifs expérimentaux utilisés pour l'identification du modèle présenté, ceux-ci sont constitués par un dispositif de chauffage des éprouvettes par passage direct de courant avec régulation automatique de température. Des résultats expérimentaux sont également donnés concernant l'endommagement de rupture ductile dans le domaine  $300 < \theta < 750^\circ\text{C}$ , ces résultats sont qualitatifs et quantitatifs. Enfin, compte tenu de ces résultats, nous présentons un modèle, cohérent avec les équations constitutives du matériau élasto-viscoplastique et capable de donner des indications quant à l'influence de la température sur la rupture par déchirure ductile.

## 2 - EQUATIONS CONSTITUTIVES ET LOIS D'ECOULEMENT

Les équations constitutives sont proposées en considérant qu'il y a additivité entre la partie élastique et la partie viscoplastique du tenseur des taux de déformation D, soit :

$$(1) \quad D = D^E + D^P$$

La loi d'écoulement viscoplastique est choisie sous la forme :

$$(2) \quad D^P = \dot{\gamma}^P N$$

où  $\dot{\gamma}^P$  est une fonction des variables d'état définissant le système à l'instant t

$$(3) \quad \dot{\gamma}^P = f(\bar{\sigma}, \alpha, \theta, s) > 0 \text{ et } f(0, \alpha_m, \theta, s) = 0,$$

avec  $\bar{\sigma} = (\frac{1}{2} \sigma' : \sigma')^{1/2}$  et  $\sigma_m = \text{tr } \sigma / 3$ ,  $\theta$  température absolue et s représente la résistance du matériau vis à vis de l'écroulement plastique [2].

La direction de l'écoulement plastique est donnée par N, tel que :

$$(4) \quad N = \frac{\dot{\sigma}}{2J'(\sigma)} + \frac{2}{3} I$$

où  $\beta$  est un terme de dilatance dépendant des variables d'état :

$$(5) \quad \beta = \beta(\bar{\sigma}, \alpha_m, \theta, s).$$

L'équation d'évolution pour les contraintes est donnée par :

$$(6) \quad \dot{\bar{\sigma}} = L : D^E - \theta \pi$$

où L est le tenseur d'élasticité (du 4ème ordre) et  $\dot{\bar{\sigma}}$  la dérivée de Jaumann de  $\bar{\sigma}$ .

$$(7) \quad L = 2\mu(\theta)I + (K(\theta) - 2/3\lambda(\theta)) I \otimes I$$

et  $\pi = 3K\alpha I$ ,  $\alpha$  coefficient de dilatation thermique fonction de  $\theta$ ,  $\alpha = \alpha(\theta)$

Les équations d'évolution pour les variables internes sont données par :

$$(8) \quad \dot{s} = h\dot{\gamma}^P - r$$

où  $h = h(\bar{\sigma}, \alpha_m, \theta, s)$

et  $r = r(\theta, s)$

est le taux de restauration statique de r.

Une forme de loi d'évolution pour  $\dot{\gamma}^P$  avec effets de la température a été proposée dans [3] :

$$(10) \quad \dot{\gamma}^P = f(\bar{\sigma}, \alpha_m, \theta, s) = A \exp(-Q/R\theta) [(\dot{\sigma}/s)(1 + \alpha_m \alpha_m)]^{1/m}$$

où A est un facteur statique,  $\alpha_m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse, Q/R est une constante caractéristique de la loi d'Arrhenius,  $\alpha$  est un facteur caractérisant la sensibilité à la pression de l'écoulement plastique,  $\alpha=0$  dans le cas où cette sensibilité n'existe pas.

Si toutefois la température varie assez peu autour d'une température de référence on pourra écrire [4] :

$$(11) \quad \bar{\sigma} = K(\dot{\gamma}^P)^{1/m} (\exp \frac{+Q}{R\theta})^m$$

qui se déduit facilement de la relation ci-dessus quand  $\alpha = 0$  et s proportionnel à  $(\dot{\gamma}^P)^{1/m}$ ,  $\dot{\gamma}^P = \dot{\gamma}^P dt$ .

Le développement limité de la relation (11) au voisinage de  $\theta_0$  permet d'écrire :

$$(12) \quad \bar{\sigma} = K(\dot{\gamma}^P)^{1/m} (\dot{\gamma}^P)^m (\xi)^p$$

où  $\xi = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}$  et p coefficient de sensibilité à la température.

Cette relation ne peut être appliquée que si  $|\frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}| < 5\%$  environ, nous cherchons donc à identifier celle-ci par divers essais mécaniques, notamment l'essai de compression.

### 3 - DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX

L'identification des relations précédemment présentées peut se faire dans la mesure où l'on dispose d'un certain nombre de relevés ( $\sigma_p, \sigma, \sigma_p, \sigma_p$ ) pour différentes températures, autour d'une même température de référence ou bien au voisinage de plusieurs températures de référence.

Pour réaliser les essais nous utilisons un dispositif de chauffage par conduction adapté au cas de l'essai de traction et de l'essai de compression, la figure 1 présente d'ailleurs le principe du dispositif de chauffage

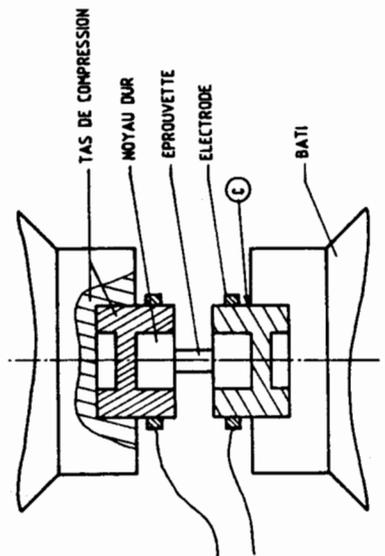


Fig. 1 - Schéma de principe du chauffage par effet Joule pour l'essai de compression.

Ce dispositif comprend un générateur de courant haute intensité (2000A) débitant par l'intermédiaire de câbles de fortes sections le courant dans l'échantillon sous faible tension ( $U \approx 2$  à  $3V$ ).

Un radiothermomètre permet la mesure de la température sur la surface de l'échantillon et une boucle de régulation de type P.I.D permet le réglage du courant de sortie au niveau du générateur de courant pour l'obtention d'une température déterminée. A titre d'exemple nous relations sur la figure 2 la température relevée au radiothermomètre sur la partie équatoriale de l'éprouvette, au droit des tas de compression et sur la surface externe de l'outillage pour un courant nominal de 600A et un acier de type XC38. Nous constatons que celle-ci se stabilise aux alentours de  $450^\circ$  après un temps de chauffe de 120s.

La température au niveau de l'interface est d'environ  $50^\circ C$  inférieure à celle dans l'éprouvette alors que la température dans l'électrode est d'environ  $120^\circ C$ .

Pour ce qui est de la traction, le principe utilisé est le même que celui utilisé ci-dessus, l'échantillon est chauffé par passage direct de courant. La figure 3 donne la répartition de température mesurée expérimentalement pour un échantillon de traction lisse de diamètre 8mm et de longueur 90mm. Pour un courant nominal de 600A la température atteint  $1100^\circ C$  après 145s, ce qui est tout à fait satisfaisant pour le système de chauffage par conduction.

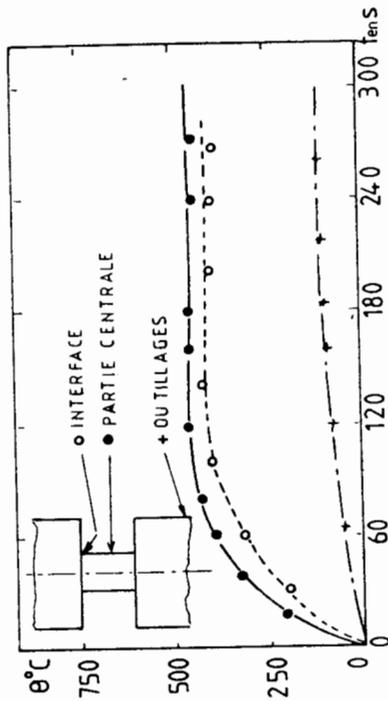


Fig. 2 - Distribution de température dans le cas de l'essai de compression.

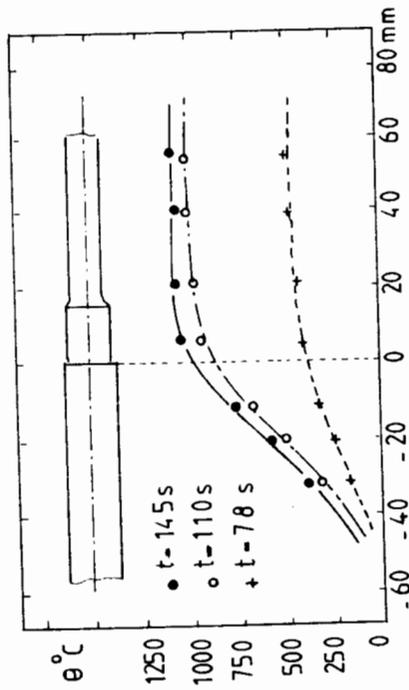


Fig. 3 - Distribution de température dans le cas de l'essai de traction.

Par rapport aux méthodes plus traditionnelles le présent dispositif présente les avantages suivants :

- le temps de montée en température est assez faible, de l'ordre de 1 à 3mn pour atteindre le domaine  $300^\circ C < \theta < 750^\circ$ ,
- le régime stationnaire de température peut être maintenu avec précision, le temps de réponse du régulateur étant d'environ 1s.
- l'accessibilité à l'échantillon est conservée ce qui permet une instrumentation beaucoup plus aisée que dans un four.
- le temps de montage et démontage de l'éprouvette est très rapide, ce qui permet de réaliser rapidement l'identification d'un matériau à une température donnée.

#### 4 - RESULTATS CONCERNANT LES LOIS D'ECOULEMENT

Nous présentons ci-après quelques uns des résultats obtenus par essai de compression, figure 4, sur les nuances 304L et XC38. Les éprouvettes sont des cylindres de diamètre initial 10mm et de hauteur initiale 15mm [6]

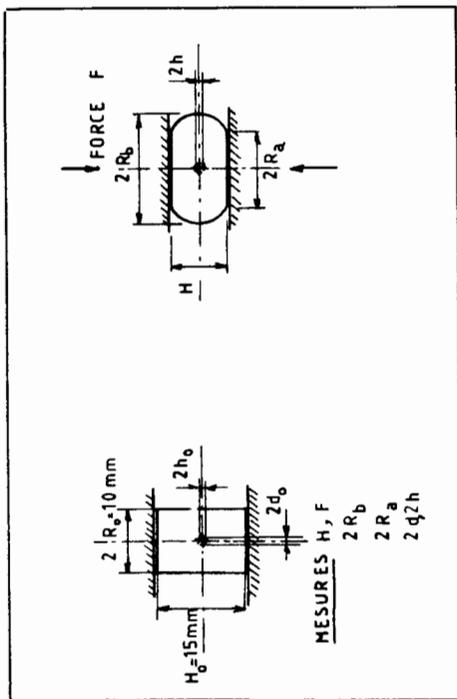


Fig. 4 - Géométrie et mesures effectuées en compression

L'enregistrement en continu des courbes (F, ΔH) ainsi que la mesure des rayons maximum et minimum de l'éprouvette, et des quantités h et d permettent de déterminer les caractéristiques macroscopiques de l'écoulement viscoplastique au sein de l'échantillon, ainsi que les grandeurs locales au niveau équatorial de l'éprouvette, où précisément se produit la déchirure ductile.

Les compositions chimiques des aciers étudiés sont données dans les tableaux 1 et 2, ces aciers sont utilisés dans un état recuit normalisé et la grosseur de grain est normale (taille ISO 8-9).

Eléments	C	S	Mn	Si	P	Sn	Al
Composition	19	20	1000	510	35	13	191

Tableau 1 - Composition chimique en 10<sup>-3</sup>% pondéral de la nuance 304L

Elément's	C	S	Mn	Si	P	Pb	Se	Al
Composition	400	75	651	241	12	15	20	31

Tableau 2 - Composition chimique en 10<sup>-3</sup>% pondéral de la nuance XC38

Les résultats concernant les paramètres d'identification des matériaux ci-dessus ont été obtenus suivant la procédure décrite précédemment, en utilisant la méthode classique pour l'identification de l'écrouissage et des essais à deux vitesses de déformation différentes à température constante, ou bien à deux températures différentes à vitesse de déformation constante.

Les résultats obtenus pour l'acier inoxydable 304L sont résumés sur la figure 5. Nous constatons immédiatement une influence très sensible de la température sur la loi d'écoulement dans le domaine 300°C < θ < 700°C. En effet à 450°C le caractère est à écrouissage positif très nettement marqué, tandis qu'à 700°C il y a radoucissement du matériau avec la déformation et écrouissage négatif. Le tableau 3 précise les valeurs obtenues pour les paramètres de la loi (12) après identification.

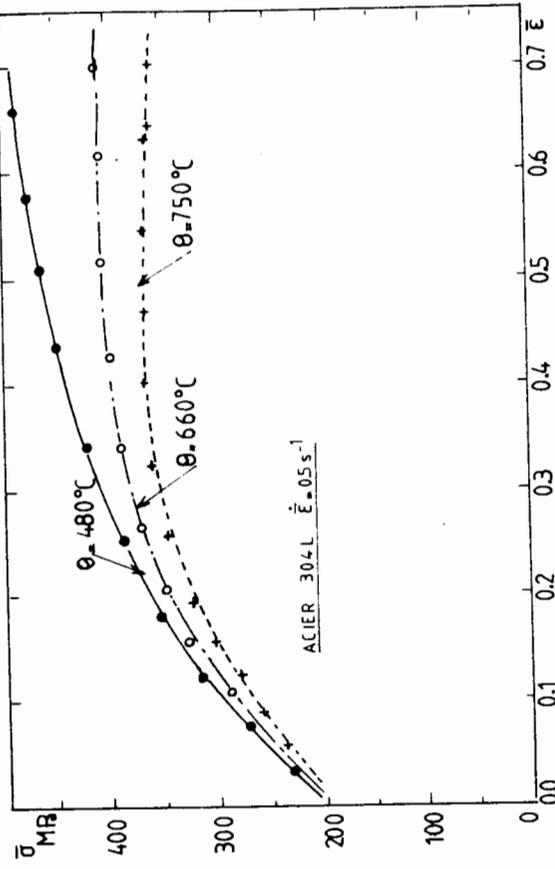


Fig. 5 - Lois d'écoulement de l'acier 304L pour différentes températures

Température de référence	K MPa	n	m	p	Domaine de validité
480°C	572.3	0.30	0.012	-4.6	0.12 < ε̇ < 0.67
660°C	449.9	0.04	0.035	-4.2	0.18 < ε̇ < 0.67
750°C	382.6	-0.04	0.062	-3.5	0.25 < ε̇ < 0.67

Tableau 3 - Paramètres d'identification de la nuance 304L (ε̇ = 0.05 s<sup>-1</sup>)

La figure 6 présente les courbes de comportement obtenues pour l'acier XC38 pour trois températures de référence (480°C, 660°C, 750°C).

### 5 - ENDOMMAGEMENT DE RUPTURE DUCTILE

Des résultats en microscopie électronique nous ont montré que les faciès de rupture obtenus dans le domaine considéré de température présentent un caractère ductile très nettement marqué. La rupture intergranulaire à caractère ductile n'apparaissant pas dans cette gamme de température pour les matériaux et les vitesses de déformation considérés, on peut donc utiliser pour caractériser la rupture les mêmes méthodes qu'à température ambiante.

Nous avons donc tenté de généraliser au cas des températures moyennes les diagrammes de ductilité ou courbes intrinsèques de coalescence obtenus pour le domaine des températures ambiantes [8].

Nous utilisons pour cela les résultats procurés par l'essai de compression et les résultats procurés par les essais de traction sur éprouvettes axisymétriques avec entailles circulaires. Celles-ci sont instrumentées avec un extensomètre axial (longueur de base 36mm) et un extensomètre radial mesurant simultanément la variation de longueur de base et la variation de diamètre de l'éprouvette. Le diamètre des éprouvettes à fond d'entaille est 10mm et le diamètre du fût 18mm, les rayons d'entaille sont respectivement 2,4 et 10mm. La figure 7 présente une schématisation de l'éprouvette avec son instrumentation.

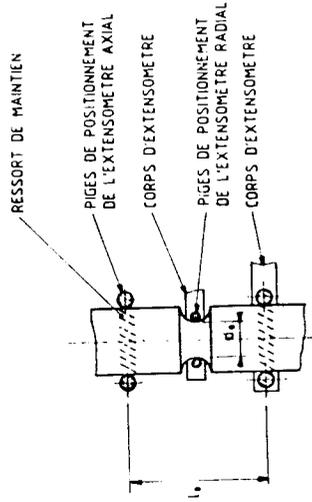


Fig. 7 - Instrumentation de l'éprouvette de traction à entaille circulaire

Les résultats procurés par un tel essai sont principalement la courbe de chargement en fonction du déplacement axial ou radial, un calcul approché permet d'en déduire la déformation effective moyenne dans la section minimale

$$\epsilon_m = 2\ln \frac{a_0}{a} \quad \text{ou} \quad \epsilon_m = \frac{a_0 - a}{a_0} \quad \text{ou} \quad \epsilon_m = \frac{a_0 - a}{a_0} \quad \text{ou} \quad \epsilon_m = \frac{a_0 - a}{a_0} \quad \text{ou} \quad \epsilon_m = \frac{a_0 - a}{a_0}$$

à fond d'entaille  
L'approximation de Davidenkov et Spridonova permet de déduire le rapport de contrainte moyenne  $\sigma_m / \sigma_{eq} = 1/3 + a/2R$ , où R est le rayon d'entaille

le,  $\sigma_m = \text{tr}(\sigma) / 3$ ,  $\sigma$  la contrainte effective de Von Mises.  
Un calcul par éléments finis en grandes déformations élasto-plastiques peut être effectué pour affiner les précédentes approximations, cependant un tel calcul n'est pas nécessaire en première approximation.

5.1. Résultats  
Les résultats sont exprimés en termes de déformation effective locale à la rupture en fonction du taux de contrainte moyenne local à la rupture. En effet de nombreux auteurs ont constaté qu'une telle représentation pouvait constituer une représentation intrinsèque cohérente du seuil de coalescence de rupture ductile [8]. La figure 8 donne ce type de représentation pour l'acier XC38.

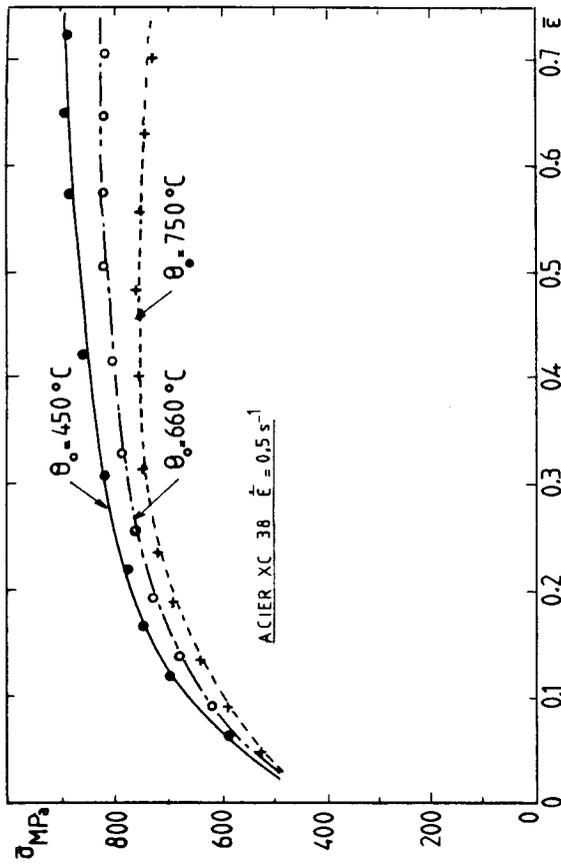


Fig. 6 - Lois d'écoulement de l'acier XC38 pour différentes valeurs de température

Le tableau 4 résume les valeurs obtenues pour les paramètres caractéristiques de la nuance XC38. Celles-ci sont en bon accord avec les résultats trouvés par d'autres auteurs [7].

Température de référence	K	n	m	P	Domaine de validité
450°C	936.2	0.12	0.012	-4.6	$0.14 < \dot{\epsilon} < 0.65$
650°C	872.3	0.09	0.035	-4.2	$0.14 < \dot{\epsilon} < 0.65$
750°C	741.6	-0.02	0.098	-4.05	

Tableau 4 - Paramètres d'identification de la nuance XC38 ( $\dot{\epsilon} = 0.5 s^{-1}$ )

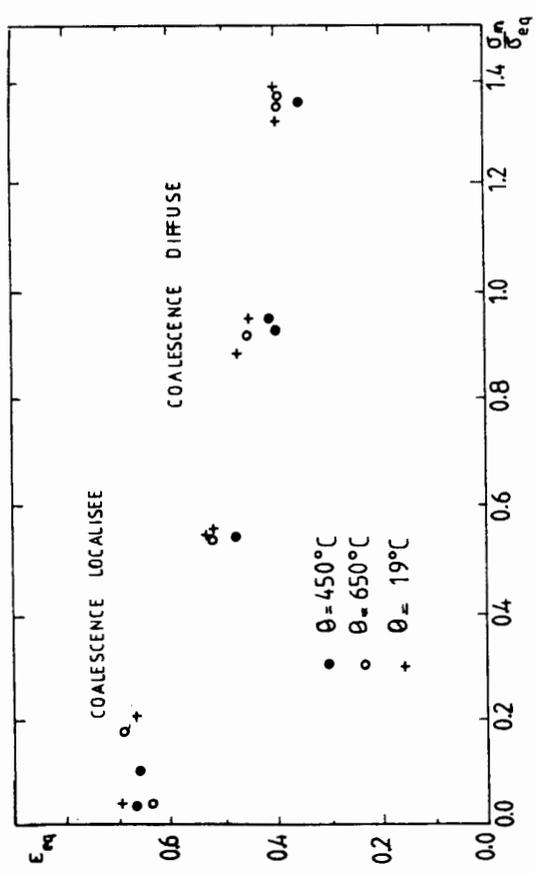


Fig. 8 - Courbes intrinsèques de ductilité pour la nuance XC38, correspondant à deux températures de référence.

Nous pouvons constater que lorsque la température augmente, et pour un même rapport de contrainte moyenne  $\sigma/\sigma_0$ , la déformation locale à rupture décroît sensiblement dans le cas de jets de contrainte moyenne correspondant à la compression, pour une température de 450°C. Quand la température vaut 650°C cette déformation locale est sensiblement de niveau identique à celle obtenue à température ambiante. Pour les points représentatifs des essais de traction entaillée ( $\sigma_m/\sigma_0 > 0.5$ ) nous constatons des phénomènes similaires, cependant, dans ce cas les courbes  $\sigma^* = f(\sigma_m/\sigma_0)$  présentent des pentes de même signe, alors que ce n'est pas le cas pour les points représentatifs des essais de compression.

5.2. Modélisation  
La modélisation de l'endommagement de rupture ductile peut être obtenue par généralisation des résultats connus à température ambiante. En particulier considérons la fonction seuil de plasticité du type Gurson-Tvergaard, obtenue à partir d'un agrégat contenant une cavité croissante de manière sphérique [9-10]:

$$(13a) \quad F_c(\sigma, q_0, f_v) = 3J_1(\sigma)/\sigma_0^2 + [2f_v q_1 \text{ch}(\frac{J_1(\sigma)}{2\sigma_0}) - (1+q_3 f_v^2)]$$

où  $f_v$  est la fraction volumique de cavités,  $q_1$  et  $q_3$  sont des constantes, et  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement. La généralisation au cas où l'on tient compte de la température s'écrit simplement, comme le suggère [12]

$$(13b) \quad F_c(\sigma, \sigma_0(\theta), f_v) = 3J_1(\sigma)/\sigma_0(\theta)^2 + [2f_v q_1 \text{ch}(\frac{J_1(\sigma)}{\sigma_0(\theta)}) - (1+q_3 f_v^2)]$$

si l'on suppose que la température influe seulement sur les propriétés rhéologiques de la matrice.

Cette représentation permet de déterminer l'évolution de la fraction volumique  $f_v$  en fonction de la déformation en écrivant simplement la condition de consistance de l'écoulement plastique.

$$(14) \quad \begin{aligned} F_c < 0 \text{ et } \dot{F}_c < 0 \Rightarrow D^P = 0 \text{ et } \dot{f}_v = 0 \\ F_c = 0 \text{ et } \dot{F}_c = 0 \Rightarrow D^P = \Lambda \frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \text{ et } \dot{f}_v = (1-f_v) \Lambda \frac{\partial F_c}{\partial J_1(\sigma)} \end{aligned}$$

Pour représenter les 3 stades de l'endommagement de rupture ductile, nous introduisons respectivement, une vitesse de cavitation dans le matériau correspondant à la décohésion autour des inclusions, une vitesse de cavitation correspondant à la croissance et une vitesse de cavitation correspondant à la coalescence de rupture ductile.

La décohésion est gérée par un critère de type seuil, dépendant essentiellement de l'état de contrainte [11]:

$$(15) \quad \begin{aligned} \text{si } \Sigma_M + \kappa(\theta) (\sigma_{eq} - \sigma_y(\theta)) < \sigma_c(\theta) &= (f_v) \text{ décohésion} = 0, \\ \text{si } \Sigma_M + \kappa(\theta) (\sigma_{eq} - \sigma_y(\theta)) &= \sigma_c(\theta) = \text{il y a décohésion,} \end{aligned}$$

( $\Sigma_M$  est la plus grande contrainte principale,  $\kappa(\theta)$  un coefficient dépendant de la température et  $\sigma_y(\theta)$  la limite élastique qui est également fonction de la température).

Le taux de croissance des cavités se déduit simplement des relations (14).

Nous avons proposé [13] une forme générale pour le taux de croissance des cavités dû à la coalescence de rupture ductile, et pouvons appliquer la même méthodologie quand il y a influence de la température.

Considérons que les courbes décrites figure 8 soient représentées par une forme de type :

$$(16) \quad F_c = K_1 \exp(K_2 \frac{J_1(\sigma)}{\sigma_0}) + \theta(f_v) (\sigma_c - \bar{\sigma}^P) = 0$$

La forme ci-dessus définit le seuil de coalescence,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\theta_c$  sont des constantes à déterminer expérimentalement.

L'influence de la température qui modifie le seuil de coalescence de rupture ductile peut être modélisée par :

$$(17) \quad F_c = K_1(\theta) \exp(K_2 \frac{J_1(\sigma)}{\sigma_0(\theta)}) + \theta(f_v) (\sigma_c(\theta) - \bar{\sigma}^P) = 0$$

Si l'on suppose que la forme ci-dessus définit un pseudo-potentiel on peut en déduire la vitesse de coalescence telle que  $\dot{F}_c = 0$

$$(18) \quad \dot{f}_c = A \sigma_m \dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}_0 \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont à déterminer.}$$

Le comportement du matériau est donc entièrement déterminé au cours de l'endommagement de rupture ductile par les relations :

a) avant décohésion,

$$f_v = 0 \text{ et } \dot{f}_v = f_{v0}$$

b) pendant la croissance des cavités,

$$\dot{f}_v = (1-f_v) \Lambda \frac{\partial F_c}{\partial J_1}$$

c) pendant la coalescence des cavités

$$\dot{f}_v = (1-f_v) \Lambda \frac{\partial F}{\partial l} + f_c$$

Les relations ci-dessus sont facilement assimilables en termes du modèle constitutif viscoplastique, présenté au paragraphe 2, en effet

$$(19) \quad \dot{D}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \Lambda \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \right)$$

se met aisément sous la forme (2), et l'équivalence de la puissance dissipée dans la matrice et dans l'agrégat permet d'écrire :

$$(20) \quad \sigma : \dot{D}^p = (1-f_v) \dot{\sigma} \dot{\gamma}^p$$

soit

$$(21) \quad \Lambda = (1-f_v) \dot{\sigma} \dot{\gamma}^p (\sigma) = (1-f_v) K(\dot{\gamma}^p)^{n-1} (\dot{\epsilon})^p (\sigma) \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^{m+1}$$

Les résultats donnés figures 6 et 8 pour l'acier XC38 nous ont permis de réaliser une application numérique des relations ci-dessus, dans le cas de la traction d'éprouvettes à entaille circulaire, pour les éprouvettes présentées figure 7, en considérant une approximation de type Davidenko et Spidonova pour le calcul des contraintes. La fraction volumique initiale est choisie égale à  $2,3 \cdot 10^{-3}$  et la nucléation survient au moment de la plastification de l'entaille de l'éprouvette. Nous admettons qu'il y a rupture quand  $f_v = 0,2$ , ce qui semble une valeur maximum. La figure 9 présente les déformations effectives locales à la rupture calculées par le modèle ci-dessus, pour 2 températures 450 et 660°C. Un accord correct se dégage après confrontation des résultats avec les résultats expérimentaux.

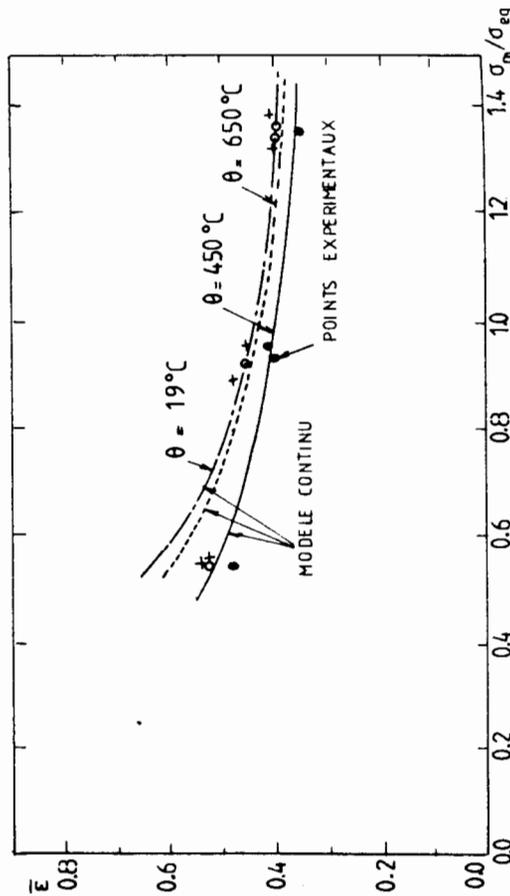


Fig. 9 - Déformations effectives locales obtenues par le modèle d'endommagement et corrélations avec l'expérimentation.

## 6 - CONCLUSIONS

Les résultats expérimentaux présentés et l'identification des paramètres matériels à partir de ces résultats permet de représenter le comportement des aciers dans le domaine des températures moyennes, pour des vitesses de déformation restant faibles. La loi d'écroutissage viscosité multipliative avec effets thermiques décrit bien le comportement des aciers autour d'une température de référence, et la relation proposée peut donc être appliquée pour le calcul numérique, par exemple en mise en forme des métaux. En ce qui concerne l'endommagement de rupture ductile dans le domaine des températures moyennes, nos observations nous permettent d'affirmer que celui-ci se produit par fissuration ductile, et la description de l'endommagement par croissance de cavités reste donc valable. Nous avons proposé une généralisation du modèle de Gurson aux effets de la température et les premiers résultats sont encourageants, pour ce qui concerne des essais de traction avec éprouvettes à entailles circulaires.

## REFERENCES

- [1] S.S. HECKER - Experimental studies of yield phenomena in biaxially loaded materials. Constitutive equations in viscoplasticity : computational and engineering aspects A.S.M.E., New-York, 1976.
- [2] L. ANAND, A. LUSH, M.F. BRICENO, D.M. PARKS - A time integration procedure for a set of internal variable type elasto-viscoplastic constitutive equations Report of Research in Mechanics of Material, M.I.T. Cambridge, U.S.A., 1985.
- [3] L. ANAND - Constitutive equations for the rate dependant deformation of metals J. of Eng. Mat. Tech., 104 (1982) 12-17.
- [4] J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE - Mécanique des matériaux solides Ed. DUNOD, Paris 1985.
- [5] J.C. GELIN, J. OUDIN, Y. RAVAILARD - Utilisation de l'effet Joule pour le chauffage des éprouvettes de traction et de compression R.P.M., 1 (1984) 99-104.
- [6] J.C. GELIN, J. OUDIN, Y. RAVAILARD, A. MOISAN - New upsetting and tensile testing procedures for metals in warm or hot forging conditions. Annals of the C.I.R.P., 33/1 (1984) 155-159.
- [7] T. ALTAN, F.W. FULGER - Flow stress of metals and its applications in metal forming analyses. J. of Eng. for Ind., (1973) 1009-1019.
- [8] J.C. GELIN, J. OUDIN, Y. RAVAILARD - Influence de quelques paramètres métallurgiques sur la rupture ductile des aciers à bas et moyen carbone. Mém. Et. Scient. Rev. Met., Avril 1984, 169-179.
- [9] A.L. GURSON - Continuum theory of ductile fracture by void nucleation and growth : Part 1 - Yield criteria and flow rules for porous media. J. of Eng. Mat. Tech., (1977) 3-15.
- [10] V. TVERGAARD - Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. Int. Jour. Fracture, 17 (1981) 389-407.

### ENDOMMAGEMENT DE PLASTICITE

DUCTILE DAMAGE

T. GUENNOUNI

Ecole Centrale des Arts et Manufactures  
Laboratoire Matériaux  
92290 CHATENAY-MALABRY, France

#### RESUME

On propose un modèle d'endommagement de plasticité basé sur les observations expérimentales et compatible avec la thermodynamique des processus irréversibles. Nous introduisons la notion de domaine de plasticité-endommagement et nous montrons l'importance de la prise en compte du couplage écrouissage-endommagement. Par homogénéisation d'un matériau élastoplastique de VON-MISES à écrouissage isotrope linéaire contenant des cavités, nous retrouvons qualitativement les modèles de croissance du dommage de LEMAITRE et RICE et TRACEY.

#### ABSTRACT

A new model of ductile damage based on experimental data and compatible with thermodynamics of irreversible processes is proposed in this paper. A single function describing the evolution of plastic strain, hardening and damage is introduced and we show that the interaction between damage and hardening must be taken into account. The evolution of damage of LEMAITRE and RICE and TRACEY models can be deduced using homogenization techniques applied to VON MISES near isotropic hardening materials containing voids.

Communication au Groupe Français de Rhéologie le 27 novembre 1985  
Texte final modifié et accepté le 14 août 1986

[11] F.M. BEREMIN - Cavity formation from inclusions in ductile fracture of A508 steel  
Met. Trans. A, 12A (1981) 723-731.

[12] A. NEEDLEMAN, V. TVERGAARD - Material strain-rate sensitivity in round tensile bar. In plastic instability.  
Ed. by J. SALENCON, Paris 1985.

[13] J.C. GELIN - Modèles numériques et expérimentaux en grandes déformations plastiques et endommagement de rupture ductile.  
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI, 1985.

### 1. INTRODUCTION

Les modèles usuels d'endommagement de plasticité (1), (2), (3), reposent sur deux hypothèses fondamentales :  
 - Pas d'interaction entre l'élasticité et l'érouissage. Ceci est incompatible avec certains résultats expérimentaux (4), (5), (6) (voir aussi figure 1) qui montrent une influence non négligeable de l'érouissage sur les caractéristiques élastiques du matériau.

- Pas d'interaction entre érouissage et endommagement. Cette question est examinée au paragraphe 3.

Le but de cet article est d'évaluer le couplage érouissage endommagement et de proposer un nouveau modèle d'endommagement de plasticité conforme aux constatations expérimentales et la thermodynamique des processus irréversibles (T.P.I.).

### 2. NOTATIONS - RAPPELS SUR LA T.P.I.

Nous considérons un milieu continu élastoplastique endommageable en évolution quasi statique et isotherme. On fait l'hypothèse des petites perturbations et on suppose que l'énergie libre est fonction du tenseur des déformations élastiques  $\epsilon^e$ , de la variable d'érouissage  $\alpha$  et de la variable d'endommagement  $D$ . On suppose que la variable d'endommagement est scalaire (endommagement isotrope). La dissipation intrinsèque s'écrit (7) :

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\epsilon}^e + A \dot{\alpha} + F \dot{D} \geq 0$$

$$\text{avec (1) } \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} ; A = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} ; F = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$$

où  $\dot{\epsilon}^e$  représente le tenseur du taux des déformations plastiques,  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy,  $A$  et  $F$  les forces thermodynamiques respectivement d'érouissage et d'endommagement. Les relations (1) constituent les lois d'état.

En supposant qu'il existe  $\psi$  dit pseudo-potentiel de dissipation, convexe positif nul en zéro (8), les lois complémentaires sont données par :

$$(2) \quad (\dot{\epsilon}^e, \dot{\alpha}, \dot{D}) \in \partial \psi(\sigma, A, F)$$

où  $\partial$  désigne le symbole du sous gradient.

Les différents modèles d'endommagement de plasticité diffèrent par le choix des potentiels thermodynamique  $\psi$  et  $\phi$ .

### 3. CHOIX DE L'ENERGIE LIBRE $\psi$

Les observations expérimentales sur les alliages métalliques montrent que les caractéristiques élastiques dépendent de leur état d'endommagement et d'érouissage (6), (1). Un choix conforme à ces constatations est

$$\rho \psi(\epsilon^e, D, \alpha) = \frac{1}{2} A_0(D, \alpha) \epsilon^e : \epsilon^e + \mathcal{G}(D, \alpha)$$

où  $A$  représente le tenseur des rigidités élastiques.

Les deux termes dans l'expression de l'énergie libre représentent respectivement l'énergie élastique et l'énergie emmagasinée dans le matériau sous forme de contraintes résiduelles et de défauts (dislocations, microfissures, etc).

Les relations (1) donnent alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= A_0(D, \alpha) \epsilon^e \\ A &= -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial \alpha} \epsilon^e : \epsilon^e \\ F &= -\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial D} = \frac{1}{2} \frac{\partial A_0}{\partial D} \epsilon^e : \epsilon^e \end{aligned} \right.$$

L'hypothèse classique de découplage érouissage endommagement conduit à supposer :

$$\mathcal{G}(D, \alpha) = \mathcal{G}_1(D) + \mathcal{G}_2(\alpha)$$

Dans ce cas la force d'endommagement  $F$  se réduit à un "taux de relaxation" de l'énergie par rapport à la variable d'endommagement.

Afin d'examiner la validité de cette hypothèse, les vérifications expérimentales étant difficiles, nous allons construire par homogénéisation, l'énergie libre du matériau homogène équivalent d'un matériau élasto plastique érouissable (ou élasto plastique parfait) contenant des cavités. L'énergie libre du matériau homogène équivalent est donnée par le processus des moyennes (9)

$$F \psi = \frac{1}{V(x)} \int_{V(x)} \rho_0 \psi_0 = \langle \rho_0 \psi_0 \rangle$$

où  $V(x)$  représente le volume représentatif (ou cellule de base) et  $\psi_0, \rho_0$  désignent respectivement l'énergie libre et la masse volumique du matériau sain.

Dans le cas général, cette homogénéisation conduit à un matériau standard avec une infinité de variables internes. Afin d'avoir une expression plus explicite de l'énergie libre  $\psi$  et d'évaluer l'interaction érouissage endommagement, nous considérons comme volume représentatif une sphère creuse, soumise sur son rayon extérieur  $b$  à une pression isotrope (figure 1). Ceci revient à attribuer l'essentiel de la croissance de l'endommagement à la contrainte moyenne. On suppose que le matériau constituant la sphère obéit au critère de VON-MISES avec érouissage isotrope linéaire (figure 2).

La résolution de ce problème est effectué en annexe.

Les grandeurs macroscopiques sont définies par :

$$\begin{aligned} \text{contrainte macroscopique : } \Sigma &= \langle \sigma \rangle_{V(x)} \\ \text{déformation macroscopique : } E &= \frac{1}{V(x)} \int_{V(x)} u, n \, d\Gamma \\ \text{énergie libre macroscopique : } \psi &= \langle \rho_0 \psi_0 \rangle_{V(x)} \end{aligned}$$

qui valent dans le cas présent :

$$\Sigma_{rr} = P \quad \text{autres} \quad \Sigma_{ij} = 0$$

$$(3) \quad E_{rr} = 3 \frac{U_r(b)}{b}$$

où  $U_r$  représente le déplacement radial.

Trois cas sont à distinguer :

1er cas :  $P \leq \frac{2}{3} \sigma_0 (1-f) = P_{min}$ ,  $f$  représentant la porosité et  $\sigma_0$  la contrainte d'écoulement en traction du matériau.

La sphère est alors entièrement élastique,  $E_{rr}$  est linéaire par rapport à  $P$  et vaut :

$$E_{rr} = \frac{P}{K(f)}$$

$$\text{avec} \quad K(f) = \frac{1}{4} \frac{\rho_0 K_0 (1-f)}{\rho_0 + \frac{3}{4} K_0 f}$$

où  $K_0$  et  $M_0$  représentant respectivement le module de compressibilité et de cisaillement du matériau vierge. Le paramètre  $K(f)$  correspond au module de compressibilité du matériau endommagé. On peut définir alors un paramètre d'endommagement  $D$  par  $K(f) = K_0 (1-D)$

L'évolution de  $D$  en fonction de la porosité est donnée sur la figure 3 pour un coefficient de poisson pris égal à 0,3. Cette évolution est pratiquement linéaire pour la gamme des porosités rencontrées en pratique.

2ème cas :  $P_{min} \leq P \leq P_{max}$ , avec :

$$P_{max} = \frac{2}{3} \sigma_0 (1 - k_0 f \cdot f^{-1}) + \frac{2}{3} \sigma_0 (f^{-1} - 1)$$

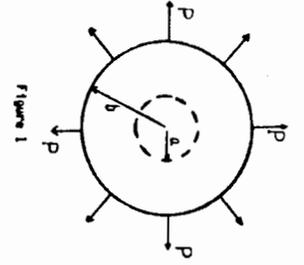


Figure 1

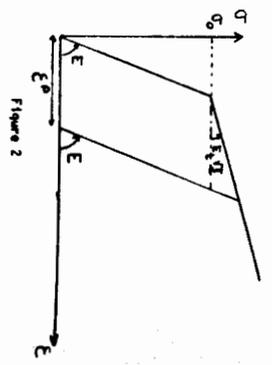


Figure 2

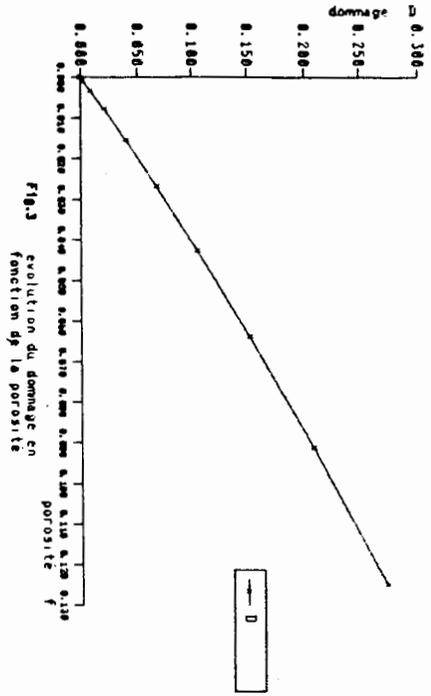


Fig.3 evolution du dommage en fonction de la porosité

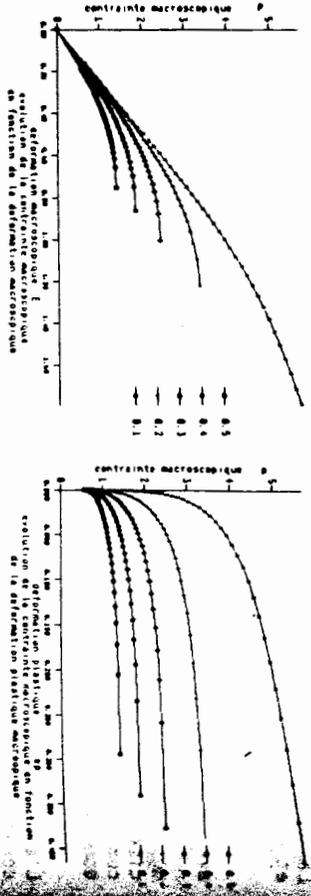


Figure.4

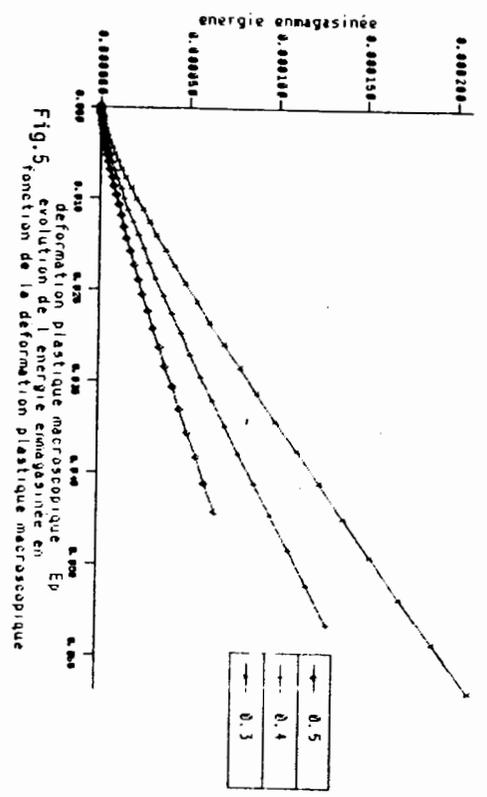


Fig.5 evolution de l'energie enmagasinée en fonction de la déformation plastique macroscopique

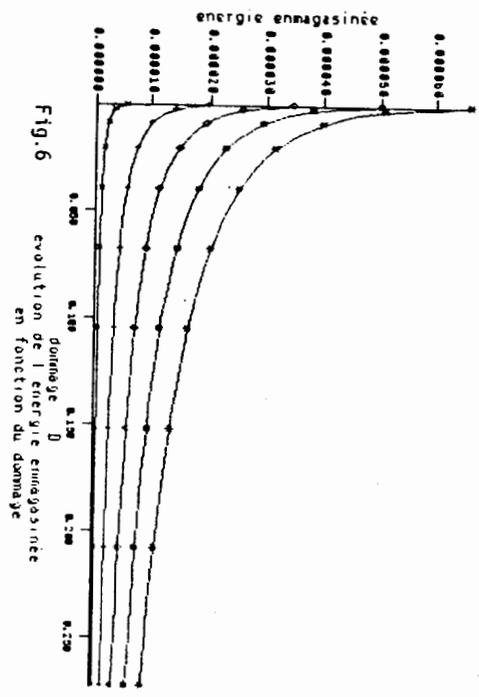


Fig.6 evolution de l'energie enmagasinée en fonction du dommage

$$C_0 = \frac{6 \mu_0 K_0}{6 \mu_0 K_0 + E_L(3K_0 + 4\mu_0)}$$

On distingue alors une zone plastique de rayon C et une zone élastique. Les déformations élastiques et plastiques sont données par :

$$E^e = \frac{P}{K(\rho)}$$

$$E^p = E - \frac{P}{K(\rho)} = \frac{3 \nu_L(b)}{b} - \frac{P}{K(\rho)}$$

qui valent :  $E^p = -\frac{C_0(3K_0 + 4\mu_0)}{2 K_0 \mu_0} f(\log \theta + \frac{1}{3}(1-\theta^3))$

en posant  $\theta = \frac{C}{a}$

3ème cas :  $\rho \gg r_{max}$ , la sphère est entièrement plastifiée. Dans le cas d'un matériau élastoplastique parfait ( $E_L = 0$ ), on atteint la charge limite de la structure.

Les courbes d'évolution de la pression en fonction des déformations totale et plastique macroscopiques sont données sur la figure 3.

L'énergie libre macroscopique s'écrit :

$$\Psi = \frac{1}{2} \frac{P^2}{K(\rho)} + Q(D, E^p)$$

L'expression de q est donnée en annexe.

Le premier terme représente l'énergie élastique du matériau homogène équivalent et le second l'énergie emmagasinée dans la sphère sous forme de contraintes résiduelles.

Les courbes d'évolution de l'énergie emmagasinée en fonction de la déformation plastique pour différentes valeurs de  $\rho_0$  sont données sur la figure 5. On constate que cette énergie dépend très fortement de la porosité. Ceci est confirmé par l'examen de la figure 6 où l'énergie emmagasinée est représentée en fonction de la variable d'endommagement D à déformation plastique macroscopique constante. On constate une décroissance exponentielle de celle-ci en fonction du dommage.

Sur la figure 7, nous donnons la variation de q pour différentes valeurs du module d'écroutissage  $E_L/\sigma_0$ . Comme prévu, cette énergie est croissante avec ce rapport.

L'hypothèse classique de découplage écroutissage endommagement (2) (3) conduit à supposer

$$q(D, E^p) = q_1(D) + q_2(E^p)$$

A endommagement constant, cette hypothèse prévoit des courbes d'évolution de l'énergie emmagasinée en fonction de la déformation plastique identiques à une translation près !

#### 4. CONSTRUCTION DU PSEUDO-POTENTIEL DE DISSIPATION

Les résultats expérimentaux sur les alliages métalliques montrent :

- l'existence d'un seuil de plasticité (apparition des déformations plastiques) et d'un seuil d'endommagement (apparition de microvoides et microfissures) les deux seuils pouvant éventuellement coïncider (cas des matériaux poreux).
- qu'au delà du seuil d'endommagement, les taux des déformations plastiques et d'endommagement D sont simultanément non nuls soit simultanément nuls. Ceci se traduit par la condition :

$$\dot{E}^p = 0 \iff \dot{D} = 0$$

Cette dernière condition n'est pas vérifiée pour les modèles usuels de plasticité endommagement.

Ces conditions conduisent à prendre pour  $\Psi$  :

$$\Psi = \text{indicateur d'un convexe C défini par : } \left\{ \begin{array}{l} C = \{ (\sigma, A, F); f(\sigma, A, F) \leq 0 \} \end{array} \right.$$

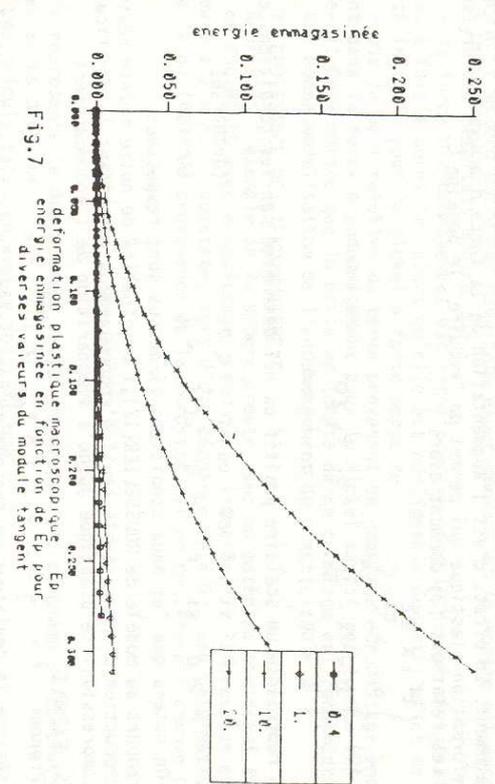


Fig. 7

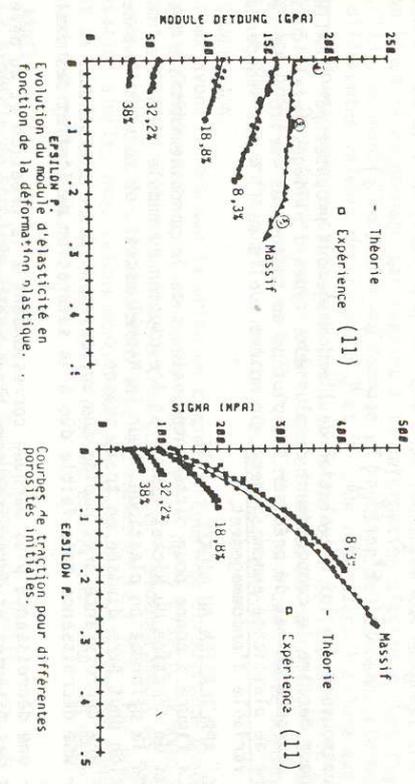


Fig. 8

- ① Phase de mouvement et multiplication des dislocations
- ② Phase de saturation
- ③ phase de développement de l'endommagement

avec  $F_1 = F - F_0$ ,  $F_0$  designant la force seuil d'endommagement et  $(F_0)^n$  la partie positive de l'argument.

C.5' Interprète comme étant le domaine de plasticité du matériau sain non endommagé. Dans cas  $F = 0$ , on retrouve le domaine de plasticité du matériau sain non endommagé. L'introduction d'une fonction de la forme (4) permet de se passer de l'effort de déformation. En effet, c'est l'augmentation de la force d'endommagement  $F$  avec la déformation plastique qui permet de "réduire" le domaine C.

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \\ \dot{D} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial F} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } F_1 \geq 0 \\ \text{si } F_1 < 0 \end{cases}$$

où  $\lambda$  représente un scalaire positif ou nul déterminé par les conditions classiques :

$$\lambda = 0 \quad \text{si } f < 0 \quad \text{ou si } \dot{f} < 0 \quad (\text{décharge})$$

$$\lambda \geq 0 \quad \text{si } f = 0 \quad \text{et } \dot{f} = 0 \quad (\text{charge})$$

On notera que les deux conditions ci-dessus sont respectées.

Par rapport au modèle de ROUSSELLIER(12), l'originalité de notre modèle réside dans l'introduction d'une variable-seuil d'endommagement permettant la vérification de l'incompressibilité plastique jusqu'à l'apparition de l'endommagement.

5. EXEMPLE

Prenons  $f = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} + A + \frac{B}{m_1} (F_1)^{m_1} - k$

où S désigne le déviateur du tenseur de contraintes, k la limite en cisssion simple du matériau,  $B = 0$  correspond au modèle classique d'un matériau de VON MISES avec écrouissage isotrope. Les relations (5) donnent :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \\ \dot{D} = \lambda \beta (F_1)^{m_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \\ \dot{D} = \lambda \beta (F_1)^{m_1} \end{cases}$$

soit :

Nous retrouvons une loi d'évolution de l'endommagement proposée par LEMAITRE (3) pour décrire le comportement de plusieurs types d'alliages métalliques. Notre approche permet de préciser l'évolution de toutes les variables et celui du domaine de plasticité endommagé. On notera que le seuil k est indépendant de la variable d'endommagement.

6. APPLICATION AU NICKEL FRITTE

La figure 3 donne pour différentes valeurs de la porosité initiale les courbes de traction du Nickel fritté et l'évolution du module d'YOUNG en fonction de la déformation plastique. Pour le Nickel massif, on constate que cette évolution peut être divisée en trois phases :

- une décroissance très rapide due au mouvement des dislocations
- une décroissance très faible due à la saturation de l'effet des dislocations.

- une décroissance plus marquée correspondant à la création et au développement des fissures et de cavités dans l'échantillon (endommagement).

Dans le cas du Nickel poreux ces trois phases sont confondues. Il est à noter que les tailles de grain des différents nickels frités utilisés sont différentes. Ceci explique que la courbe de traction à 8% de porosité initiale est au-dessus de celle du Nickel massif. On remarque que les pentes des courbes de traction du dommage en fonction de la déformation plastique sont pratiquement les mêmes.

Le modèle utilisé pour ce Nickel correspond à celui de l'exemple X avec une fonction de couplage écrouissage endommagement de la forme :

$$g(\lambda, D) = \lambda (1 - \beta D)^{m_1}$$

et des caractéristiques élastiques linéaires par rapport aux variables d'endommagement et d'écrouissage. Le comportement du Nickel poreux a été déduit de celui du Nickel massif en tenant compte de la porosité initiale et de la taille de grain. L'accord entre les résultats expérimentaux et le modèle est excellent. L'analyse des résultats montre que :

- la force d'endommagement est significative pour le Nickel massif et le Nickel à faible porosité, alors qu'elle est négligeable devant l'effet de la porosité initiale pour le Nickel à forte porosité.
- que la part relative du terme provenant du couplage écrouissage endommagement dans la force d'endommagement pour le Nickel massif représente 97% de celle-ci. Ceci montre que la prise en compte de ce couplage est fondamentale pour une bonne modélisation de l'endommagement de plasticité.

7. CROISSANCE DE L'ENDOMMAGEMENT

Reprenons l'exemple de la sphère creuse avec un matériau obeissant au critère de VON-MISES avec écrouissage isotrope linéaire. Si la pression est supérieure à  $p_{min}$ , il subsiste, lors d'une décharge ( $p = 0$ ), une déformation résiduelle du trou. La croissance de la porosité qui en résulte est donnée par :

$$\Delta F = \frac{1}{3} \int_{r=a}^{r=b} v_r(r) \cdot dr$$

$$\Delta F = \frac{1}{3} v_r(b) \frac{a^2}{b^3}$$

soit  $\Delta F$  représente le déplacement radial correspondant au champ de contrainte résiduel après décharge.

Les calculs faits en annexe montrent que :

$$\Delta F = \frac{1}{3} \frac{a^2}{b^3}$$

L'évolution du dommage est donc linéaire par rapport à la déformation plastique moyenne, la pente étant indépendante de la porosité initiale et du module d'écrouissage. Ce résultat explique l'invariance de la pente des courbes d'évolution du module d'YOUNG en fonction de la déformation plastique. Celui-ci est en accord avec de nombreuses observations expérimentales qui montrent une évolution linéaire du dommage par rapport à la déformation plastique. Les figures (9), (10), donnent l'évolution du dommage en fonction de la contrainte moyenne pour différentes valeurs des rapports  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a}{b_0}$ . On remarquera l'allure exponentielle du dommage en fonction de  $p$  lorsqu'on s'approche de la plasticité parfaite ( $E = 0$ ). On retrouve ainsi l'effet exponentiel de la contrainte moyenne sur le dommage prévu par le modèle de RICE et TRACEY (10). A contrainte moyenne constante, le dommage croît quand le module d'écrouissage décroît.

CONCLUSION

Nous avons montré que la prise en compte du couplage écrouissage endommagement était fondamentale pour une bonne modélisation de la plasticité avec endommagement. Nous avons donné un modèle très général de l'endommagement de plasticité compatible avec les observations expérimentales et la T.P.I.. Par une homogénéisation simple, nous avons montré que les modèles d'évolution de l'endommagement de LEMAITRE et de RICE et TRACEY étaient équivalents pour les matériaux faiblement écrouissables.

ANNEXE

La symétrie du problème impose que les déplacements ( $u_r, u_\theta, u_\phi$ ) et le tenseur des contraintes ne dépendent que du rayon et vérifient :

$$\begin{cases} u_\theta = u_\phi = 0 \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\phi} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{\phi r} = 0 \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} \end{cases}$$

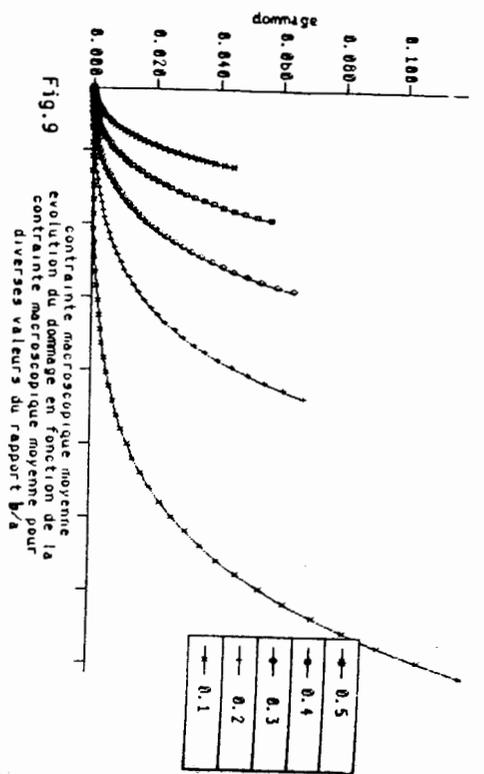


Fig. 9  
contrainte macroscopique moyenne  
évolution du dommage en fonction de la  
contrainte macroscopique moyenne pour  
diverses valeurs du rapport b/a

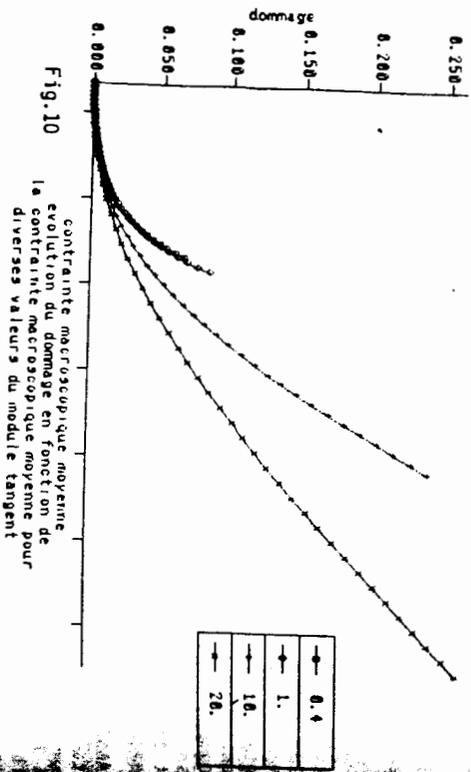


Fig. 10  
contrainte macroscopique moyenne  
évolution du dommage en fonction de  
la contrainte macroscopique moyenne pour  
diverses valeurs du module tangent

Les equations d'équilibre se réduisent à :

trois cas sont à distinguer :  
1er cas :  $p \leq \frac{2}{3} \sigma_0 (1-f)$ , la sphère est complètement élastique et la solution d'un tel problème est classique :

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{p}{3K_0(1-f)} \quad C_2 = \frac{p a^3}{7K_0(1-f)}$$

$K_0$  et  $\mu_0$  étant les modules respectivement de compressibilité et de cisaillement et  $f$  la porosité.  
La déformation totale macroscopique est donnée par :

$$E_{rr} = \frac{1}{V} \int_{r=b}^a u_r(b) b^2 \sin \varphi \, d\varphi \, db$$

qui vaut puisque  $u_r(b)$  est constant :  $E_{rr} = \frac{3}{b} u_r(b)$

soit  $E_{rr} = C_1 + \frac{C_2}{b^3} = \frac{p}{K(f)}$

avec  $K(f) = \frac{4 \mu_0 K_0 (1-f)}{4 \mu_0 + 3 K_0 f}$

La variable d'endommagement  $D$  vaut :

$$D = \frac{13K_0 \cdot 4 \mu_0 f}{13K_0 + 4 \mu_0 f}$$

2eme cas :  $\frac{4 \mu_0 + 3 K_0 f}{3} p \leq \frac{2 \sigma_0}{3} (1-f) \log f \cdot f^{-2} + \frac{2 \sigma_0}{3} (f^{-2} - 1)$

avec  $C_0 = \frac{6 K_0 \mu_0 \sigma_0}{6 K_0 \mu_0 + E_c (3 K_0 + 4 \mu_0)}$

il existe une région plastique de rayon  $c \leq b$  et une zone élastique.  
- zone élastique : la solution s'écrit :

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}$$

en exprimant la condition  $\sigma_{rr} = \bar{P}$  et que le critère est atteint pour  $r = c$

$$C_2 = \frac{\sigma_c c^3}{6 \mu_0} \quad C_1 = \frac{(P \cdot \frac{2}{3} \sigma_c b^3 f)}{3 K_0}$$

avec  $\theta_0 = \frac{c}{a}$

- zone plastique : dans cette zone le critère est atteint partout. Nous

avons :  $\frac{1}{2} (\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{\varphi\varphi}^2) = \frac{\sigma_0^2}{3} + E_c$

soit (1)  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_0 + \sqrt{3} E_c \alpha$

Les déformations plastiques sont données par :

$$\begin{cases} \epsilon_{rr}^p = \frac{\sigma_0 + \sqrt{3} E_c \alpha}{2 \sqrt{3} \sigma_0} \\ \epsilon_{\theta\theta}^p = \alpha \end{cases}$$

soit (2)  $\epsilon_{rr}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \alpha$  ,  $\epsilon_{\theta\theta}^p = \epsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha$

Par ailleurs:  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\mu_0 (\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{rr}^p + \epsilon_{rr}^p - \epsilon_{rr})$   
 soit (3)  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\mu_0 (\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^p)$

Cette relation jointe à (1) donne :

(4)  $\alpha = \frac{2\mu_0 (\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{rr}) - \sigma_{\theta\theta}}{2(\mu_0 + E_1) \sqrt{3}}$

en injectant les relations (3), (4) dans l'équation d'équilibre on trouve :

En intégrant cette relation et en prenant en compte la relation :

$\sigma_{rr} = \mu_0 (\epsilon_{rr} + 2\epsilon_{\theta\theta}) + 2\mu_0 (\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^p)$   
 on obtient que le déplacement radial  $u_r$  s'écrit :

$u_r = \frac{2C_0}{3K_0} r \log \frac{r}{a} + \frac{B}{r^2}$  avec  $C_0 = \frac{6\mu_0 K_0 C_0}{6\mu_0 K_0 + E_1 (3K_0 + 4\mu_0)}$

d et B sont deux constantes arbitraires à déterminer.

La constante d est déterminée en écrivant que  $\sigma_{rr}=0$  pour  $r = a$  soit :

(5)  $u_r = \frac{2C_0}{3K_0} r \log \frac{r}{a} + \frac{B}{r^2} \left( \frac{4\mu_0 E_1}{2\mu_0 + E_1} r + 3K_0 \frac{a^3}{r^3} \right)$

Nous avons alors :

(6)  $\sigma_{rr} = 2C_0 \log \frac{r}{a} - \frac{4\mu_0 E_1}{3\mu_0 + E_1} B a^{-3} \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$

(7)  $\sigma_{\theta\theta} = 2C_0 \log \frac{r}{a} + \frac{4\mu_0 E_1}{3\mu_0 + E_1} B a^{-3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) + C_0$

en exprimant que le critère est atteint pour  $r = c$  nous avons :

soit  $\frac{2}{3} \left( \frac{4\mu_0 E_1}{3\mu_0 + E_1} \right) \frac{B}{c^3} + C_0 = \sigma_0$   
 $B = \frac{3}{2} (\sigma_0 - C_0) \frac{c^3 (3\mu_0 + E_1)}{4\mu_0 E_1}$

et par suite :

$\sigma_{rr} = 2C_0 \log \frac{r}{a} - \frac{2}{3} (\sigma_0 - C_0) \theta_0^3 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right)$   
 $\sigma_{\theta\theta} = 2C_0 \log \frac{r}{a} + \frac{2}{3} (\sigma_0 - C_0) \theta_0^3 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right)$

en posant  $\theta_0 = \frac{c}{a}$

Le rayon de la zone plastique est obtenue en écrivant la continuité du déplacement radial : on obtient en prenant en compte toutes les expressions dominantes constantes d'intégration :

(8)  $P = 2C_0 (\log \theta_0 + \frac{1}{3} (1 - \theta_0^3)) + \frac{2\sigma_0}{3} \theta_0^3 (1 - \frac{1}{3})$

équation qu'on a résolu numériquement en prenant un algorithme de de NEWTON. 3ème cas :  $P \geq P_{max}$  la sphère est entièrement plastifiée, les relations (6), (7) demeurent valables, il suffit de déterminer la constante B en exprimant que  $\sigma_{rr} = P$  pour  $r = b$

La déformation totale macroscopique s'écrit :

$\epsilon_{rr}^p = \frac{3}{2} \frac{u_r(b)}{b} = \frac{3}{2} \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{\sqrt{3}} \right)$   
 en tenant compte des expressions de  $C_1$  et  $C_2$  nous avons :

La déformation plastique macroscopique est donnée par :

$\epsilon_{rr}^p = \frac{P}{\mu_0} - \frac{P}{\mu_0 \sqrt{3}}$

soit :  $\epsilon_{rr}^p = \frac{4(3K_0 + 4\mu_0)}{18K_0\mu_0} \left( -\frac{2}{3} P + 2\sigma_0 \theta_0^3 \right)$   
 soit en prenant en compte la relation (8)

(9)  $\epsilon_{rr}^p = -\frac{2(3K_0 + 4\mu_0) C_0}{4K_0\mu_0(1 - \frac{1}{3})} (\log \theta_0 + \frac{1}{3} (1 - \theta_0^3))$

Calcul de l'énergie libre  $\Psi$  : l'énergie libre  $\Psi_0$  s'écrit :

$\Psi_0 = \frac{1}{2} A_1 \epsilon_1^2 + \frac{1}{2} \epsilon_2^2$   
 $\Psi_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} \epsilon_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} E_1 \epsilon_{rr}^2$

ou encore :  $\Psi_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{rr} \epsilon_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}) - \frac{1}{2} (\sigma_{rr} \epsilon_{rr}^p + 2\sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}^p) + \frac{1}{2} E_1 \epsilon_{rr}^2$

en joignant (4), (2) à cette relation on obtient :

$\Psi_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_0} [\sigma_{rr} \epsilon_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta}] - \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{rr}^p)^2 - \sigma_{\theta\theta}^2}{2E_1} \theta_0^2$

soit  $2\rho\Psi = \rho E_{rr} + \frac{\rho}{E_1} \int_1^{\theta_0} (\sigma_{rr} - \sigma_{rr}^p)^2 - \sigma_{\theta\theta}^2 \theta_0^2 d\theta$

en posant  $u = \frac{\rho}{E_1}$

après intégration en prenant en compte les relations (6), (7), nous avons :

$2\rho\Psi = \rho E + \frac{\rho C_0}{3} \int_1^{\theta_0} (2\theta_0^3 \sigma_0 (1 - \log \theta_0) + \frac{C_0}{3} (\theta_0^3 - 1) - \frac{\theta_0^6 - 1}{3} \sigma_0) + \frac{1}{2} \rho E_{rr}^p$

L'énergie emmagasinée est donnée par :

$Q = \rho\Psi - \frac{1}{2} \rho (E_{rr} E_{rr}^p)$

Calcul de la croissance de la porosité : après décharge, quand P est supérieur à  $2\sigma_0 (1 - \frac{1}{3})$ , il est facile de montrer qu'il subsiste un champ de déplacement radial donné par :

$u_r = A_1 r \log \frac{r}{a} + A_2 r^2 + \frac{A_3 a^3}{r^2}$  S,  $r \leq c$

avec  $A_1 = \frac{4\mu_0 (\sigma_0 - C_0)}{E_1 (3K_0 + 4\mu_0)}$

en exprimant que  $\sigma_{rr}=0$  pour  $r = a$  et  $\sigma_{rr} = 0$  pour  $r = b$  nous avons :

(10)  $(3K_0 A_1) - 4\mu_0 A_2 - \frac{4\mu_0}{E_1} (\sigma_0 - C_0) \theta_0^3 = 0$

et (11)  $3K_0 C_1 - 4\mu_0 C_2 = 0$

en écrivant les conditions de continuité de  $\sigma_{rr}$  et  $u_r$  pour  $r=c$  en prenant en compte (10), (11) nous obtenons les équations :

$3A_2 \theta_0^3 - A_1 = \frac{3C_2}{E_1}$   
 $A_1 \log \theta_0 + \left( \frac{4\mu_0}{3K_0} + \theta_0^3 \right) A_2 + \frac{4\mu_0 (\sigma_0 - C_0)}{3E_1 E_1} \theta_0^3 = C_1 + \frac{C_2}{E_1}$

qui donnent (12)  $A_2 = \frac{3(C_1 C_2 - \sigma_0)}{(3K_0 + 4\mu_0) (1 - \frac{1}{3})} (K_0 \log \theta_0 + \frac{1}{3} (3K_0 + 4\mu_0) f - (3K_0 + 4\mu_0) \theta_0^3)$

l'accroissement de la porosité s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{V} \int_{r=0}^a v(r) a^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi$$

soit :

$$\Delta f = \frac{3v_0^2}{b^2} v_r(a)$$

soit encore :

$$\Delta f = 2f (A_2 + A_3)$$

qui donne en la joignant à (10) et (11) :

$$\Delta f = \frac{2(C_0 - C_0^0) f}{E \epsilon (1-f)} \left( \log \theta_0 + \frac{1}{2} (1 - \theta_0^2) \right)$$

en remarquant que  $C_0 - C_0^0 = - \frac{(3\nu_0 + 1)\mu_0 E}{6\nu_0 \nu_0 + \nu_0(3\nu_0 + 4)\mu_0} = - \frac{C_0(3\nu_0 + 4)\mu_0}{6\nu_0 \nu_0} E$

nous avons :

$$\Delta f = - \frac{f(3\nu_0 + 4)\mu_0}{2\nu_0 \nu_0 (1-f)} C_0 \left( \log \theta_0 + \frac{1}{2} (1 - \theta_0^2) \right)$$

qui par comparaison avec (9) donne :

$$\Delta f = E_r^p$$

**BIBLIOGRAPHIE**

- (1) LEMAITRE-CHABOCHE, Journal de Mécanique appliquée, Vol. 12, n°3 (1978)
- (2) CORDEBOIS, SIDOROFF, Journal de Mécanique théorique et appliquée, numéro spécial (1982)
- (3) LEMAITRE, Trans ASME, Journal of Engineering materials and technology, 1984 (à paraître)
- (4) FILLIUEL, Jisllocations, Pergamon Press, 1964
- (5) ESHELBY, Phil. Mag. 40 (1949)
- (6) NABORRO, Adv. Physics 1, 271, (1952)
- (7) GERMAIN, Mécanique des Milieux continus, Masson, Paris, (1973)
- (8) HALPHEN, NGUYEN, Journal de Mécanique, Vol. 14, n° 1, (1975)
- (9) GERMAIN, NGUYEN, SUQUET, Transaction of ASME, Journal of applied mechanics Vol. 50, décembre 1983
- (10) RICE et TRACEY, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 17, pp. 201-217, (1969)
- (11) BOMPARD, Thèse de Doctorat d'Etat, U.T.C. (1986) (à paraître)
- (12) ROUSSELIER G., Three Dimensional constitutive Relations and Ductile Fracture pp. 331-355, NEMAT-NASSER eds, North Holland Company, 1981.

**DETERMINATION EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT ELASTIQUE TANGENT A L'ORIGINE : APPLICATIONS AUX METAUX**

EXPERIMENTAL DETERMINATION OF THE ELASTIC BEHAVIOR TANGENTIAL AT THE ORIGIN : APPLICATIONS TO METALS

S. HAN et B. WACK

Institut de Mécanique de Grenoble  
B.P. 68  
38402 SAINT-MARTIN D'HERES Cédex

**RESUME**

Des essais de sollicitations cycliques en traction-compression et en torsion alternée ont été effectués avec un acier inoxydable ICL 167 SPH et un superalliage INCO 718. L'analyse des résultats a montré le bien-fondé de certaines hypothèses du schéma de comportement à mémoire discrète. Le comportement élastique, première approximation du comportement réel du métal, est un comportement tangent à l'origine des branches de la sollicitation. Aucune limite élastique, en tant que frontière entre un domaine élastique et un domaine plastique, ne peut être déterminée dans la plage des contraintes utile à l'ingénieur. L'analyse des phénomènes microstructuraux associés ne montre aucune contradiction avec les propriétés du schéma de comportement à mémoire discrète.

**ABSTRACT**

Push-pull tests and cyclic torsion tests were done with a stainless steel ICL 167 SPH and a superalloy INCO 718. The analysis of the results shows that some hypotheses of the discrete memory constitutive scheme are well founded. The elastic behavior, first approximation of the real material behavior, is a behavior tangent to the loading branches at their origin. No yield limit, in the sense of a boundary between an elastic and a plastic domain, can be determined in the range of stress useful for engineers. The analysis of the associated microstructural phenomena does not show any contradiction with the properties of the discrete memory constitutive scheme.

1) INTRODUCTION

A la suite d'une nouvelle proposition destinée à la description du comportement des matériaux solides (1), une comparaison précise entre des résultats expérimentaux et des prévisions théoriques apparaît très souhaitable. Cette démarche classique est ici d'autant plus nécessaire que la proposition fait appel à des concepts non classiques dans le domaine du comportement et va donc à l'encontre de beaucoup d'idées reçues et admises sans discussion.

Le comportement réel des métaux fait intervenir un grand nombre de phénomènes physiques, comme l'hystérésis, le durcissement, l'adoucissement, la viscosité. Une analyse des résultats expérimentaux en sollicitation cyclique met en évidence le rôle essentiel joué par l'hystérésis mécanique, liée au phénomène de frottement solide. Les autres phénomènes doivent alors être considérés comme des phénomènes secondaires, apportant des modifications au phénomène principal d'hystérésis mécanique (2,3).

Un modèle symbolique et heuristique du comportement d'hystérésis pure est constitué par les modèles rhéologiques à ressorts et frotteurs. Le modèle qui se rapproche le plus de la réalité est celui constitué par une suite infinie de couples ressort-frotteur montés en série et à seul de glissement continuellement réparé (4). La description de ce comportement d'hystérésis pure introduit la notion importante de mémoire discrète des instants d'inversion du passé de la sollicitation. Ainsi la contrainte apparaît par le terme  $\Delta\sigma = \sigma - R\sigma$ , où la contrainte de référence  $R\sigma$  est une fonctionnelle de la sollicitation, constante par morceau ; à cette fonctionnelle est associée la notion toute aussi importante de puissance réversible :

$$\Pi = (\sigma - R\sigma) \dot{\sigma}$$

où  $\dot{\sigma}$  est la vitesse de déformation (1 à 3). Finalement le comportement est décrit par un schéma comportant trois parties essentielles :

- a) une équation de comportement ou apparaissent des fonctionnelles comme argument : contrainte de référence  $R\sigma$ , coefficient d'homothétie de Masing  $\omega$  ;
- b) un critère d'inversion pour déterminer les instants d'inversion ; ce critère n'est autre que l'expression du second principe de la thermodynamique.
- c) un algorithme de gestion qui permet de définir à tout instant les valeurs actuelles des fonctionnelles.

Un matériau réel pour lequel cette manière de décrire le comportement est applicable aurait les caractéristiques suivantes : la déformation est irréversible dès le début de la sollicitation et il n'est pas nécessaire d'introduire une notion de domaine élastique et de domaine plastique avec une frontière bien définie ; les propriétés du matériau sont restaurées après chaque inversion. Il en découle qu'un comportement élastique, première approximation du comportement réel, peut être défini : c'est un comportement tangent à l'origine de chaque branche de chargement.

Nous essayerons de mettre en évidence ces caractéristiques par une analyse quantitative de résultats expérimentaux. De plus, pour confirmer le bien-fondé du schéma de comportement une tentative d'application des propriétés mises en évidence à l'échelle macroscopique sera effectuée qualitativement à partir de phénomènes définis à une échelle microstructurale.

2) LA METHODE EXPERIMENTALE

Nous rappelons brièvement la méthode expérimentale mise en oeuvre pour l'obtention des résultats ; une description détaillée est donnée dans (5) et (6). Les résultats expérimentaux ont été obtenus avec des échantillons tubulaires sollicités en traction-compression et en torsion alternée à l'aide d'une machine d'essai électro-hydraulique à deux boucles d'asservissement et à deux vérins indépendants. Deux matériaux ont été testés. L'acier inoxydable ICI 167 SPH fait partie de la famille des aciers AISI 316 L ; il est utilisé dans l'industrie des réacteurs nucléaires pour sa bonne résistance à la corrosion et au fluage à haute température de service d'environ 550°C. Le superalliage INCO 718 est à base de nickel ; il est utilisé dans l'industrie des turbines de l'aéronautique.

présente une forte résistance aux hautes températures de service de l'ordre de 1000°C.

Tous les essais sont contrôlés en déformation à une vitesse d'environ 3.10<sup>-5</sup> s<sup>-1</sup>. La constance de la vitesse et sa faible valeur permettent de minimiser les effets visqueux et de considérer que le comportement réel est un comportement non visqueux. Les essais sont effectués à la température ambiante et les déformations du tube sont obtenues à l'aide d'une rosette de jauges de déformation collées sur la paroi cylindrique extérieure du tube.

Les déformations mesurées par les jauges ne sont pas rigoureusement identiques aux composantes d'un tenseur de déformation ; la distinction est importante dans l'interprétation complète de l'essai de torsion. Pour rester homogène avec d'autres publications nous utiliserons donc la dénomination  $\lambda_{z\theta}$  pour les mesures par jauges. Les effets principaux en petites déformations, seuls envisagés ici, sont peu différents des composantes du tenseur de Green-Lagrange, rapporté à la configuration initiale. En utilisant un système de coordonnées cylindriques, rayon  $\rho$ , angle  $\theta$  et position axiale  $z$ , une rosette à trois jauges permet de déterminer les trois composantes  $\lambda_{zz}$ ,  $\lambda_{\theta\theta}$  et  $\lambda_{z\theta}$ .

La contrainte de cisaillement est définie en supposant le tube suffisamment fin pour qu'une valeur moyenne ait un sens et la contrainte axiale est corrigée de la déformation du tube ; on a :

$$\sigma_{zz} = \frac{F_z}{\pi R^2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\theta z} = \langle \sigma_{\theta z} \rangle \approx \frac{3}{2\pi R^2} R_3^2 - R_1^2$$

où  $F_z$  est la force axiale,  $C$  le couple. So la section initiale,  $R_e$  et  $R_u$  respectivement les rayons extérieur et intérieur du tube.

Les mesures sont enregistrées sous forme digitale, ce qui présente l'avantage de pouvoir aisément traiter les données après essai. Les résultats sont séparés par branches, et analysés dans l'espace  $\Delta\sigma$  et  $\Delta\lambda$  tel que :

$$\Delta\sigma = \sigma - R\sigma \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \lambda - R\lambda$$

où  $R\sigma$ ,  $R\lambda$  sont les coordonnées de l'état de référence de la branche. Avec les sollicitations simples utilisées ici (fig. 1 et 6) l'état de référence correspond dans la plupart des cas au point d'inversion du début de la branche. Comme ce point ne correspond pas systématiquement à un point de mesure, les valeurs de  $R\sigma$  et  $R\lambda$  sont celles du premier point de mesure juste après l'inversion ; compte tenu de la fréquence d'acquisition cette différence n'introduit pas d'erreur appréciable ; en effet chaque branche est définie par 50 à 100 points de mesure et l'intervalle de déformation entre deux points successifs est inférieur à 10<sup>-4</sup>. A l'exception des résultats relatifs aux pentes des courbes, tous les graphiques présentés plus loin sont obtenus en traçant la ligne brisée joignant les points expérimentaux.

Pour définir les pentes des courbes expérimentales une technique de lissage par spline sous tension a été mise en oeuvre. La tension de la spline est ajustée à l'aide d'un coefficient dont la valeur permet de balayer le champ d'application compris entre une interpolation stricte et la droite des moindres carrés. Pour chaque essai la valeur du coefficient est ajustée de façon à obtenir la solution la plus proche de l'interpolation, tel que les oscillations de la courbe due à la dispersion expérimentale des points de mesure disparaissent. Ainsi la courbe ajustée est toujours comprise dans la bande d'incertitude expérimentale ; celle-ci est de 0,2 Mpa. Trois types de tangente ont été définies, à savoir le module  $M_e$  et le coefficient  $C_y$  pour les essais de traction-compression et le module  $M_\lambda$  pour les essais de torsion alternée, tel que :

$$M_e = \frac{d \Delta \sigma_{zz}}{d \Delta \lambda_{zz}} \quad \text{et} \quad C_y = - \frac{d \Delta \lambda_{\theta\theta}}{d \Delta \lambda_{zz}}$$

$$M_\lambda = \frac{1}{2} \frac{d \Delta \sigma_{zz}}{d \Delta \lambda_{z\theta}}$$

La précision de détermination des pentes peut être caractérisée par l'influence du coefficient d'ajustement autour de la valeur retenue ; ainsi l'erreur relative sur les modules  $M_e$  et  $M_\lambda$  est inférieure à  $\pm 0,7\%$  et celle sur le coefficient  $C_y$  est inférieure à  $\pm 0,5\%$ .

3) LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

a) Acier inoxydable

Le résultat classique d'un essai de traction-compression cyclique est indiqué sur la figure 1a. Pour les petits cycles l'évolution de la différence de contrainte  $\Delta\sigma_{zz}$  et du module  $M_E$  est donnée sur la figure 2a pour tout l'intervalle de déformation 0 - 1,5 % et sur la figure 2b pour le début de l'intervalle 0 - 0,2 %.

On constate que le début de toutes les branches  $\Delta\sigma_{zz}$  est identique, ce qui est confirmé par la valeur constante du module  $M_E$  à l'origine ; la dispersion dans la zone quasi-plastique, pour  $\Delta\lambda_{zz}$  supérieur à 1 % est dû au phénomène de consolidation qui est important pour ce type de matériau. L'évolution du module est caractérisée d'une part par une valeur identique pour le début de chaque branche, comme mentionné plus haut, et d'autre part par l'absence de discontinuité de la courbe aussi bien que de sa dérivée. Le début de l'évolution de  $M_E$  est parabolique avec une tangente à l'origine parallèle à l'axe des déformations ; ainsi dans cette région la courbe de charge est bien représentée par un polynôme du 3ème degré :

$$(1) \quad \Delta\sigma_{zz} = E \cdot \Delta\lambda_{zz} - k \cdot \Delta\lambda_{zz}^3$$

où la constante E est la limite de  $M_E$  pour  $\Delta\lambda_{zz}$  tendant vers zéro et k est une constante positive. Comme nous le verrons plus loin E a le sens du module d'YOUNG d'un comportement élastique. Le long d'une branche la variation de  $M_E$  est assez rapide ; en effet pour une déformation de 0,2 % la valeur du module  $M_E$  ne représente plus que 10 % de la valeur initiale E pour la branche de première charge et 60 % de la valeur initiale pour les autres branches.

Malgré la présence du phénomène de consolidation nous pouvons constater que la règle d'homothétie de Masing s'applique assez bien ; en effet si on transforme la courbe de 1ère charge  $\Delta\sigma_{zz}(\Delta\lambda_{zz})$  par une homothétie de rapport 2 et centrée à l'origine celle-ci rejoint le groupe des autres branches et en prend la première place (fig. 2a). De même une transformation par affinité parallèle à l'axe des déformations place la courbe  $M_E(\Delta\lambda_{zz})$  de la branche de 1ère charge dans le groupe des autres courbes.

L'évolution de la déformation circconférentielle  $\Delta\lambda_{\theta\theta}$  montre que toutes les branches sont pratiquement identiques malgré la présence du phénomène de consolidation (fig. 1b et 3). On note par contre l'existence d'un phénomène de rochet dans la direction négative (fig. 1b) ; ce rochet a toujours été mis en évidence par tous les essais de traction-compression et semble être indépendant de la hauteur de la partie cylindrique de l'éprouvette (5). Malheureusement aucune explication satisfaisante ne peut être donnée actuellement ; une série d'essais systématiques est probablement nécessaire pour expliquer ce rochet.

Le coefficient  $C\psi$  évolue d'une façon continue entre une valeur d'environ 0,28 juste après une inversion et une valeur comprise entre 0,44 et 0,48 dans la zone quasi-plastique (fig. 3). Le début des courbes  $C\psi(\Delta\lambda_{zz})$  est d'aspect parabolique, avec une tangente parallèle à l'axe des déformations.

Les résultats obtenus avec les essais de torsion alternée montrent les mêmes caractéristiques que celles des essais de traction-compression (fig. 4). Les courbes de charge sont continues au moins jusqu'au 3ème ordre. La pente des inversions est la même malgré le phénomène de consolidation et quelque soit l'amplitude des cycles. La règle d'homothétie de Masing s'applique. Le début des branches  $\Delta\sigma_{zz}(\Delta\lambda_{zz})$  peut aussi être représenté par une équation du même type (1).

On constate donc que le comportement élastique, première approximation du comportement réel du matériau, peut être défini comme un comportement tangent à l'origine des branches. Dans ce cas les coefficients élastiques sont les valeurs initiales des pentes définies précédemment :

$$\lim_{\Delta\lambda_{zz} \rightarrow 0} M_E = E \quad ; \quad \lim_{\Delta\lambda_{zz} \rightarrow 0} C\psi = \nu \quad ; \quad \lim_{\Delta\lambda_{zz} \rightarrow 0} M_{\mu} = \mu$$

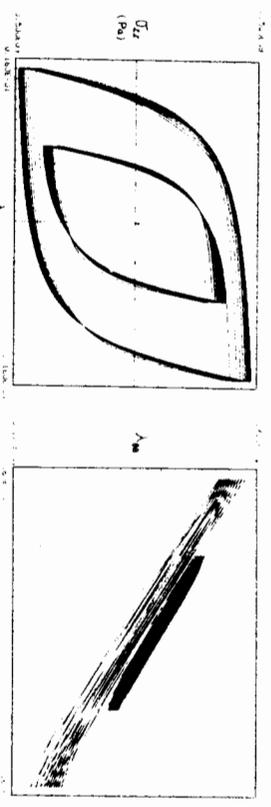


Fig. 1 Essai de traction-compression - Acier inoxydable.

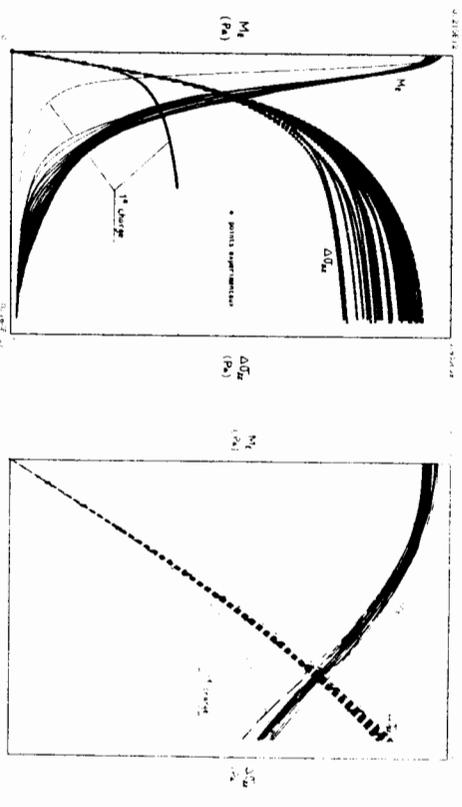


Fig. 2 Essai de traction-compression - Différence de contrainte  $\Delta\sigma_{zz}$  et module  $M_E$  - Intervalle de déformation axiale : 0 - 1,6 % (a.) et 0 - 0,2 % (b.) - Acier inoxydable.

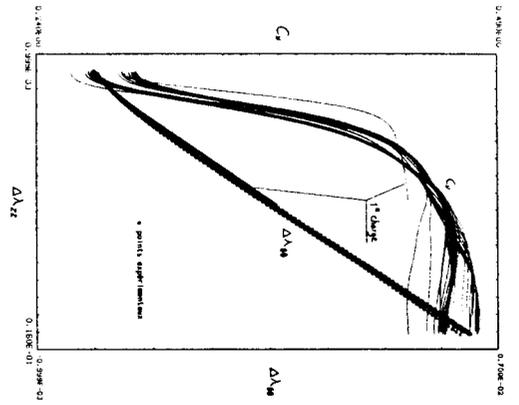


Fig. 3 Essai de traction-compression - Différence de déformation  $\Delta X_{\theta\theta}$  et coefficient  $C_{\theta}$  - Acier inoxydable.

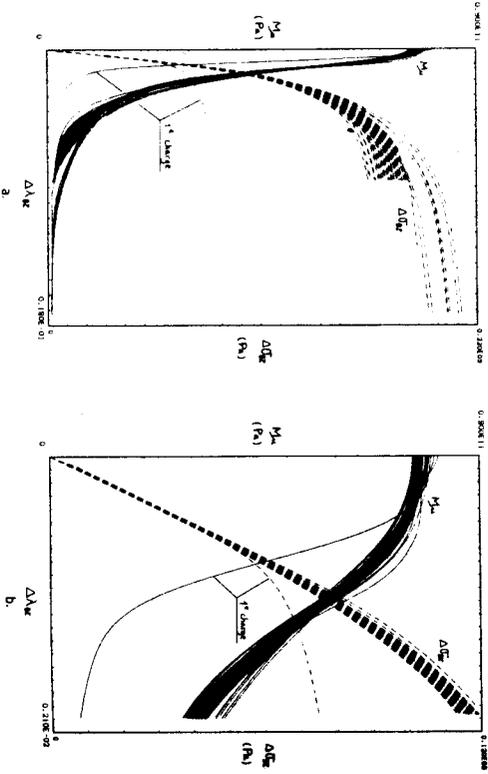


Fig. 4 Essais de torsion alternée - Différence de contrainte  $\Delta \sigma_{\theta z}$  et module  $M_{\theta}$   
 - Intervalle de déformation : 0 - 1,8 % (a.) et 0 - 0,2 % (b.)  
 - Acier inoxydable.

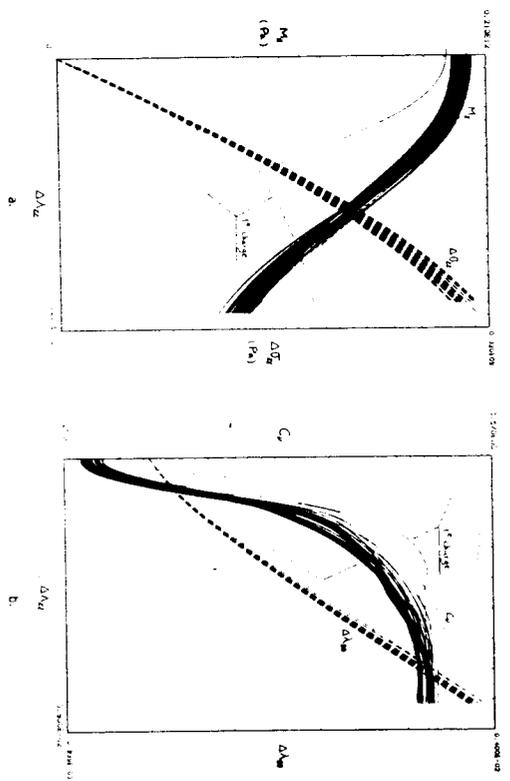


Fig. 5 Essai combiné de traction-torsion - Module  $M_{\theta}$  (a.), coefficient  $C_{\theta}$  (b.) et module  $M_{\mu}$  (c.) - Acier inoxydable

où  $E$ ,  $\nu$  et  $\mu$  sont respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement. L'ensemble des résultats précédents et des résultats complémentaires de (5) donne les valeurs moyennes suivantes pour l'acier inoxydable :

$$E = 199 \pm 2 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,280 \pm 0,015$$

$$\mu = 77,6 \pm 1,1 \text{ GPa}$$

Ces trois valeurs sont obtenues indépendamment les unes des autres et doivent être compatibles ; on peut calculer par exemple une valeur du module de cisaillement  $\mu^*$  à partir de deux autres grandeurs :

$$\mu^* = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77,7 \text{ GPa}$$

et on vérifie bien que cette valeur calculée est incluse dans l'intervalle de dispersion expérimentale de la valeur mesurée.

Pour confirmer cette notion de comportement élastique tangent un essai proportionnel de traction-compression et de torsion alternée a été effectué (fig. 5). Les résultats obtenus montrent les mêmes caractéristiques que celles des essais simples et les valeurs initiales des pentes donnent les mêmes valeurs que les précédentes.

On note toutefois que la valeur finale atteinte par  $C \nu$  dans la zone quasi-plastique dépasse nettement la valeur 0,5, alors que pour les essais de traction-compression simple le coefficient  $C \nu$  est toujours inférieur à cette valeur (fig. 3 et 8). En effet pour l'essai simple on peut supposer l'homogénéité de l'état de contrainte et de déformation dans la section annulaire et l'égalité entre les déformations radiale  $\lambda_{\rho\rho}$  et circonférentielle  $\lambda_{\theta\theta}$ . Avec l'hypothèse des petites déformations, le taux de variation relative de volume par branche s'écrit alors :

$$(2) \quad \frac{d\Delta V}{dE} = (1 - 2C\nu) \frac{d\Delta\lambda_{xz}}{dE}$$

Donc, dans le cas d'essais de traction-compression, le coefficient  $C \nu$  peut s'interpréter, pour l'analyse des variations de volume, comme le coefficient de Poisson de l'élasticité infinitésimale. Ainsi au cours d'un essai cyclique le taux de variation relative de volume est maximum après une inversion dans la zone quasi-élastique et tend vers zéro dans la zone quasi-plastique. Par contre pour un essai combiné de traction et de torsion l'égalité entre les déformations radiale et circonférentielle n'existe plus et, pour un taux de variation relative de volume nul, une valeur de  $C \nu$  supérieure à 0,5 est théoriquement possible (5).

b) Superaillage

Les résultats de l'essai de traction-compression obtenus avec le superaillage sont notablement différents (fig. 6) : les courbes de charge ont une importante partie quasi-linéaire ; la déformation circonférentielle décrit un cycle plus large et met aussi en évidence le phénomène de rochet négatif (la légère dissymétrie est probablement due à un moins bon alignement de l'éprouvette). Ce matériau montre essentiellement un phénomène d'adoucissement, après un petit durcissement pendant les premiers cycles (5, 6).

Après le lissage des résultats expérimentaux, on constate que le module  $M_E$  a aussi une évolution très continue, avec une variation lente au début (fig. 7). Par contre les courbes se séparent en deux groupes bien distincts dans l'intervalle 0 - 0,5 % : le groupe supérieur correspond aux branches dont l'état de référence est en compression et le groupe inférieur correspond aux branches dont l'état de référence est en traction. La courbe de 1ère charge indique une valeur initiale de  $M_E$  identique à celle du groupe des branches dont l'origine est en compression. Ce résultat pourra s'expliquer, à l'aide d'une analyse de phénomènes microstructuraux, par une influence de l'état de contrainte. Avec l'acier inoxydable cette influence n'a pas été décelée du fait que le niveau atteint par les contraintes est trois fois plus faible qu'avec le superaillage.

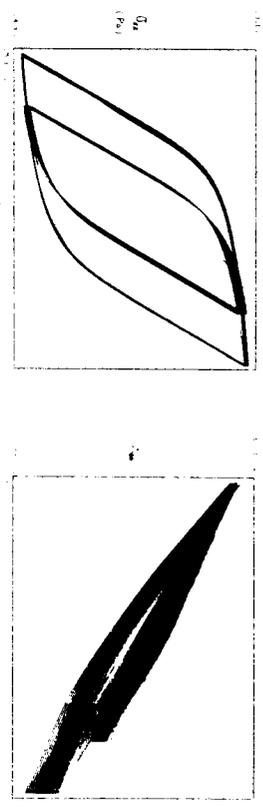


Fig. 6 Essai de traction-compression - Superaillage.

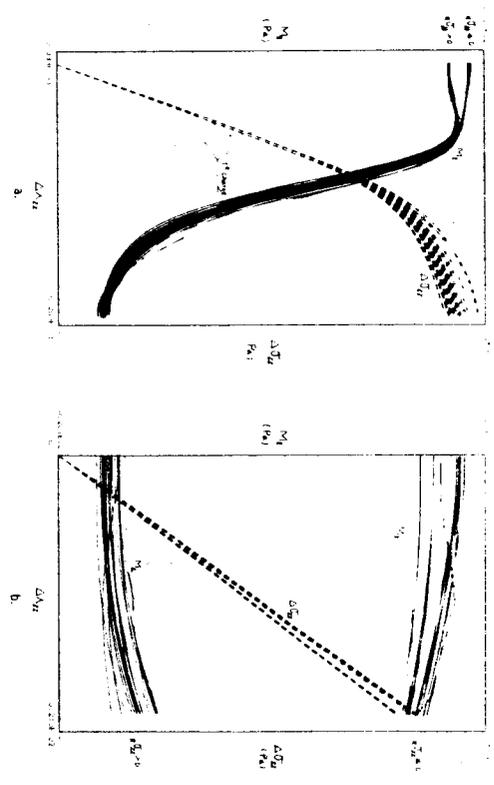


Fig. 7 Essai de traction-compression - Différence de contrainte  $\Delta\lambda_{xz}$  et module  $M_E$   
 - Intervalle de déformation : 0 - 2 % (a.) et 0 - 0,2 % (b.)  
 - Superaillage

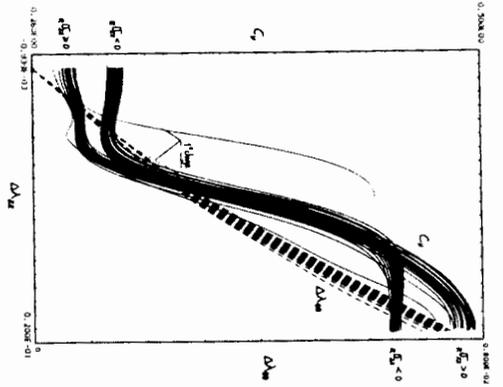


Fig. 8 Essai de traction-compression - Différence de déformation  $\Delta\lambda_{00}$  et coefficient  $C$  - Superalloyage.

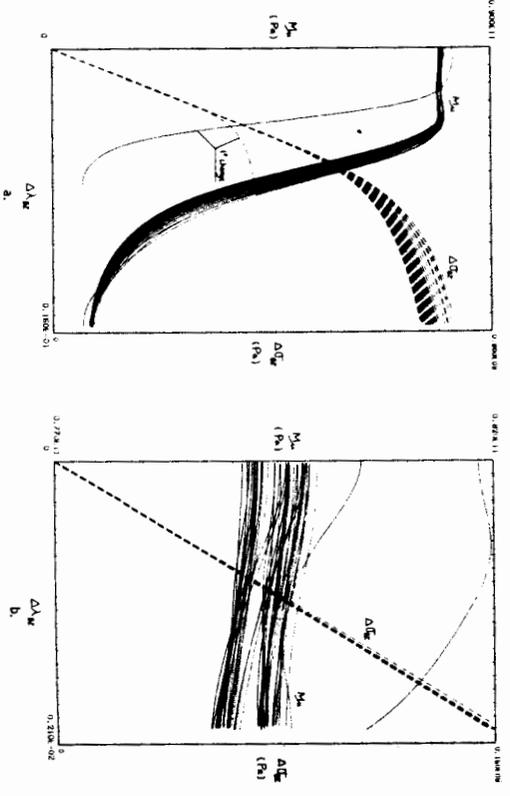


Fig. 9 Essai de torsion alternée - Différence de contrainte  $\Delta\sigma_{ma}$  et module  $M_m$  - Intervalle de déformation : 0 - 1,6 % (a.) et 0 - 0,2 % (b.) - Superalloyage.

La variation du coefficient  $C$   $\gamma$  met aussi en évidence une nette séparation des résultats en deux groupes, non seulement dans la partie quasi-élastique, mais aussi dans la partie quasi-plastique (fig. 8) : pour les branches dont l'état de référence est en traction le coefficient  $C$   $\gamma$  varie de 0,28 à 0,49 et pour les branches dont l'état de référence est en compression la variation s'effectue de 0,30 à 0,45. Ainsi un état quasi-plastique en compression ne manifeste pratiquement pas de variation de volume, alors qu'un état quasi-plastique en traction donne lieu à une variation de volume nettement non nulle.

Les résultats d'un essai de torsion alternée simple sont donnés sur la figure 9. Toutes les branches, à l'exception de celle de 1ère charge, indiquent une variation identique du module  $M_m$   $\gamma$  conformément aux matériaux isotropes. L'évolution est du même type que celle des branches de l'essai de traction-compression dont l'origine est en traction. Par contre la courbe de 1ère charge a une évolution identique à celle de  $M_m$  des branches débutant en compression.

TABEAU 1

état	contrainte (Mpa)	E (Gpa) (mes.)	$\gamma$ (mes.)	$\mu$ (Gpa)		$\lambda$ (Gpa) (cal.)
				(mes.)	(cal.)	
A	0	212.7	0.283	81.8	82.9	108.1
B	+ 1140	202.7 $\pm$ 0.5	0.278 $\pm$ 0.005	/	79.3	99.3
C	- 1250	212.7 $\pm$ 0.8	0.305 $\pm$ 0.005	/	81.5	127.5
D	$\pm$ 700	/	/	79.5 $\pm$ 0.4	/	/

L'ensemble des valeurs caractérisant le comportement élastique tangent du superalloyage est résumé dans le tableau 1 ; l'intervalle d'erreur indiqué est celui déterminé par la dispersion des valeurs de toutes les branches. Pour l'état neutre nous ne disposons que d'une seule valeur expérimentale ; nous vérifions qu'à une précision relative de 1,3 %, les trois valeurs sont compatibles, puisque la valeur calculée  $\mu^*$  est égale à 82,9 GPa. Une modélisation de ces résultats sera proposée plus loin, après l'analyse des phénomènes à l'échelle microstructurale.

4) LES PHENOMENES MICROSTRUCTURAUX ASSOCIES

Pour faciliter la comparaison entre les résultats obtenus à l'échelle macroscopique et les phénomènes microstructuraux associés, considérons d'abord le cas de l'acier inoxydable qui est plus simple que celui du superalloyage.

a) Irréversibilité immédiate de la déformation

Les résultats expérimentaux obtenus indiquent que l'acier inoxydable manifeste des déformations irréversibles immédiatement après une inversion, c'est à dire après une variation de contrainte de quelques MPa, compte tenu de la précision de nos essais (fig. 2 et 4). Ce phénomène peut s'expliquer en considérant le mouvement des dislocations à l'intérieur des grains du matériau polycristallin.

Le réseau cristallin de chaque grain à une orientation quelconque par rapport à la sollicitation. Il est donc possible d'imaginer qu'il existe des grains "sensibles", compte tenu de leur orientation et de leur forme, dans lesquels une dislocation préexistante peut se désancrer pour une faible variation de la

sollicitation ; la déformation devient irréversible. Au fur et à mesure que la sollicitation augmente d'autres dislocations situées dans les mêmes grains ou dans des grains d'orientation voisine vont se désancrer, puis de nouvelles boucles de dislocations vont se créer, par le mécanisme des sources de Frank-Read par exemple (7). La progressivité de ce phénomène se traduit par la courbe arrondie mise en évidence à l'échelle microscopique.

En toute rigueur on pourrait concevoir un seul de contrainte au-dessous duquel aucune dislocation ne se désancrer et qui définirait donc la limite de dessous de laquelle les déformations sont réversibles. Mais comme nous allons le voir cette limite est très faible et sans commune mesure avec la valeur de la limite élastique utilisée dans les lois élasto-plastiques classiques (8, p. 177). Il y a quinze ans, Vellaital (9) affirmait déjà nettement dans l'introduction de son article : "It is well known that high sensitivity stresses measurements or dislocation etch-pit techniques can detect small plastic strains well below the macroscopic yield stress in many metals and alloys". En effet, de nombreuses mesures ont été effectuées sur le cuivre, qui pour nous, présente l'intérêt d'avoir une structure cubique face centrée comme l'acier inoxydable ; pour des monocristaux ou des polycristaux de cuivre divers auteurs ont pu mettre en évidence des mouvements irréversibles de dislocations à partir d'une contrainte de flexion de l'ordre de  $g/mm^2$ , soit environ  $1/10$  MPa (par ex. 9, 10). Cette valeur est de l'ordre du millième de la résistance limite. Enfin, citons Argon et Brydges (11) qui définissent, pour le monocristal de cuivre, une limite élastique à  $7 g/mm^2$  et une contrainte de multiplication, au delà de laquelle les dislocations se multiplient, de l'ordre de  $20 g/mm^2$ . Tous ces résultats sont actuellement confirmés par l'observation in situ du mouvement des dislocations sous microscope électronique. A titre d'exemple, on peut se reporter aux observations de Fujita et de ses collaborateurs (12).

Ainsi on constate que l'analyse des phénomènes microstructuraux faite par les métallogristes confirme et explique le fait que la déformation a un caractère irréversible pour une faible variation de la contrainte appliquée.

#### b) Restauration des propriétés après inversion

Nous avons vu au cours de sollicitations cycliques que le comportement local juste après une inversion est un comportement élastique qui reste identique à lui-même quelque soit l'amplitude des cycles et malgré une variation de la contrainte en fin de cycle d'environ 40 % due au phénomène d'écroutissage. Le caractère intrigant de cette restauration des propriétés du matériau après inversion est aussi confirmé par une analyse à l'échelle microstructurale : le comportement élastique en question est celui du polycristal défini avec sa structure initiale, ses défauts et ses imperfections et son réseau de dislocations préexistants.

Considérons ce qui se passe autour d'une inversion. Juste avant l'inversion, il existe une certaine dynamique des dislocations avec en particulier des dislocations qui se désancrent dans une zone d'un joint de grain, traversent le grain et s'implantent soit sur des barrières dans le grain, soit sur une zone opposée du joint. Lorsque la sollicitation s'inverse, toute cette dynamique a tendance à s'inverser et les dislocations ont tendance à repartir en sens contraire (12). Donc, pendant un court instant, la vitesse des dislocations s'annule et la rigidité du polycristal est celle qu'il possède en l'absence de désancrage de dislocation. Cette rigidité initiale est évidemment indépendante de l'amplitude des cycles. Par contre son indépendance en fonction de la densité des dislocations est moins évidente. Entre l'état initial et un état consolidé de 40% l'augmentation de densité est d'environ  $10^3 cm/cm^3$  et concerne essentiellement les dislocations immobiles qui constituent la grande partie des obstacles aux dislocations mobiles. Or un calcul d'ordre de grandeur montre qu'une variation de densité de  $10^3 cm/cm^3$  ne concerne qu'un très petit nombre d'atomes par rapport au nombre total d'atomes du polycristal. De ce fait la forte augmentation de la densité des dislocations immobiles a une influence sur la rigidité du polycristal qui n'est pas décelable à la précision de nos mesures.

#### c) Le cas du superalliage

Les résultats obtenus avec le superalliage sont plus compliqués qu'avec l'acier inoxydable : d'une part les coefficients élastiques ne sont pas constants et semblent dépendre de l'état de contrainte et d'autre part la variation des modules tangents près de l'origine n'a pas toujours l'allure parabolique de l'acier inoxydable.

La dépendance des modules élastiques par rapport à l'état de contrainte est bien connue des acousticiens qui ont mis en évidence des variations de la vitesse de transmission des ondes sous divers états de contrainte (13). L'origine de ce phénomène peut s'expliquer intuitivement à partir de l'équilibre entre les forces d'attraction et de répulsion qui s'exercent entre deux atomes. La force résultante  $F$  varie en fonction de la distance  $d$  suivant le diagramme classique de la figure 10 (14) ; la rigidité du système des deux atomes est proportionnelle à la pente de la courbe  $F(d)$ .

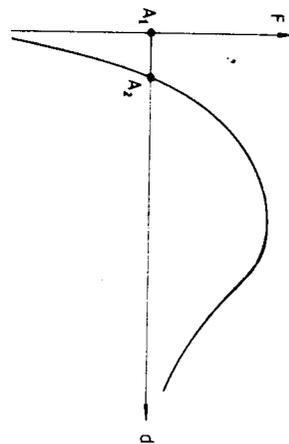


Fig. 10 Diagramme d'interaction atomique.

Pour l'acier inoxydable, compte tenu de la précision de nos essais, l'intervalle de contrainte exploré n'est pas assez important pour mettre en évidence une variation du module. Par contre pour le superalliage, comme le niveau de contrainte est trois fois plus élevé, la variation du module est sensible.

L'application de la variation de  $M_E$  et  $M_M$  près de l'origine peut alors s'expliquer aisément. Lorsqu'une inversion a lieu dans un état de contrainte de traction élevée, le module tangent est faible. Après inversion, la contrainte diminue et la rigidité du matériau est le résultat de deux phénomènes qui s'opposent : diminution de la rigidité due à l'augmentation des dislocations et augmentation de la rigidité due à l'augmentation de celle du cristal par diminution de contrainte ; la combinaison de ces deux phénomènes donne la forme caractéristique sinusoïdale des courbes de la figure 7. Lorsque l'inversion se produit pour un état de contrainte en compression et que la contrainte augmente, les deux phénomènes jouent dans le même sens et donnent une allure parabolique à la courbe  $M_E(\Delta\sigma)$  comme pour l'acier inoxydable. Lorsque le phénomène de diminution de la rigidité due aux mouvements de dislocation est prépondérant les deux faisceaux de courbe se rejoignent. Dans le cadre de cette explication, le pseudo-plateau de la courbe  $M_M$  (fig. 9) doit être interprété comme une partie sinusoïdale très aplatie ; cette courbe rejoint bien la courbe affine dans une rapport 2 de la courbe de lère charge.

L'analyse des phénomènes microstructuraux permet donc de justifier aussi l'existence d'un comportement élastique tangent pour le superalliage, les

coefficients de ce comportement étant fonction de l'état de contrainte. On choisit de modéliser cette dépendance en donnant une expression analytique des coefficients de Lamé en fonction des invariants de la contrainte. Pour le coefficient  $\lambda$  une dépendance du seul invariant  $I_1$  est suffisante ; par contre pour le coefficient  $\mu$  il est nécessaire d'utiliser le 2ème invariant  $I_2$  et le 3ème invariant  $I_3$  du déviateur de contrainte, en introduisant la phase  $\mathcal{F}$ . Une bonne représentation des résultats dont on dispose (tableau 1) est donnée par :

$$\lambda = \lambda_0 \exp\left(-\frac{I_1}{P_0}\right)^{n_0} \quad \mu = \mu_0 - c_1 \Pi \bar{\sigma} (1 + \cos 3\mathcal{F})^{n_1}$$

Avec les valeurs suivantes des coefficients on vérifie que le modèle reproduit bien les allures des évolutions de  $M_E$ ,  $M_{\mu}$ , et  $C_{\mathcal{V}}$  (5, 6) :

$$\lambda_0 = 108,1 \text{ GPa} \quad P_0 = 2,40 \cdot 10^3 \quad n_0 = 3$$

A titre d'exemple, on trouvera à la figure 11 le résultat de la modélisation du module  $M_E$  de l'essai de traction-compression de la figure 7.

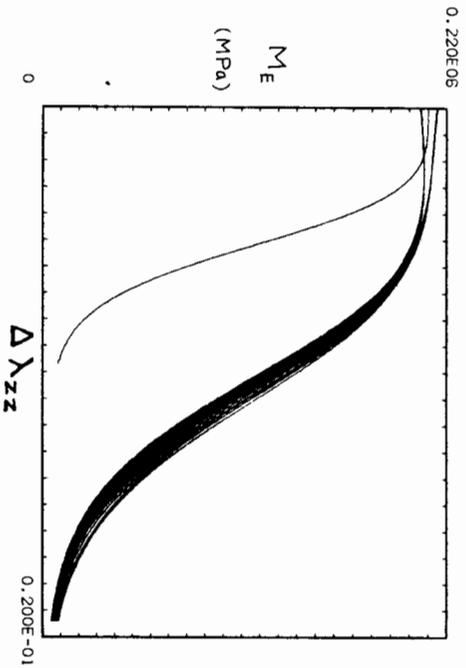


Fig. 11 Modélisation de l'essai de traction-compression - Variation du module  $M_E$  - Superalloyage.

#### 5) REMARQUES A TITRE DE CONCLUSION

L'analyse des résultats met bien en évidence le fait que le comportement élastique, première approximation du comportement réel du métal, est un comportement tangent à l'origine des branches de chargement. En particulier on constate l'absence de frontière bien caractérisée entre un domaine élastique et un domaine plastique du moins à la précision de nos mesures qui est de l'ordre de 1/1000 de la charge limite. De ce fait la définition d'une limite élastique, utile à l'ingénieur, ne peut s'effectuer que par le biais d'une convention. En conséquence l'utilisation de cette convention ne peut se justifier que pour satisfaire de façon simple à des besoins techniques immédiats.

L'analyse des phénomènes microstructuraux, associés à nos résultats à l'échelle microscopique, n'a mis en évidence aucune contradiction avec les hypothèses fondamentales du schéma de comportement. Les progrès récents réalisés en microscopie électronique devraient permettre maintenant des comparaisons quantitatives plus précises ; celles-ci seront très utiles pour le développement du schéma de comportement à mémoire discrète.

#### REFERENCES

- (1) GUELIN P., "Remarque sur l'hystérésis mécanique - I. Les bases d'un schéma thermomécanique à structure héréditaire". J. de Mécanique, vol. 19, n° 2, pp. 217-247, 1980.
- (2) MACK B., TERRIEZ J.M., GUELIN P., "A hereditary type, discrete memory, constitutive equation with applications to simple geometries". Acta Mechanica 50, p. 9-p. 37, 1983.
- (3) BOUSSERRIE J.M., GUELIN P., TERRIEZ J.M., MACK B., "Applications of a hereditary constitutive law of discrete memory type", J.E.M.T., vol. 105, pp. 155-161, 1983.
- (4) PERSOZ B., "Modèle non linéaires". La Rhéologie, Paris, pp. 23-71, 1969.
- (5) HAN S., "Le comportement d'hystérésis des solides et sa description par un schéma à mémoire discrète : le cas des aciers inoxydables". Thèse de doctorat-ès-sciences, University of Grenoble, Fr. 1985.
- (6) HAN S., MACK B., "Discrete memory description of strain hardening and softening with application to stainless steel and superalloy". Res Mechanica (to appear 1985).
- (7) ADDA Y., DUPUY J.M., PHILIBERT J., QUERE Y., "Éléments de métallurgie physique", éd. Commissariat à l'Énergie Atomique, 1978.
- (8) LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., "Mécanique des matériaux solides", Dunod éd., p. 177, 1985.
- (9) VELLAIKAL G., "Some observation on microyielding in copper polycrystals". Acta Metallurgica, vol. 17, pp. 1145-1154, 1969.
- (10) YOUNG F.W., "On the yield stress of copper crystals". J. of Applied Physics vol. 33, n° 3, pp. 963-969, 1962.
- (11) ARGON A.S., BRIDGES W.T., "Deformation of Copper in easy glide". The philosophical Magazine, vol. 18, n° 154, pp. 817-837, 1968.
- (12) FUJITA H., "Behaviors of individual dislocation in Cu-9 at % Al alloys under reverse stress". J. of the Physical Society of Japan, vol. 38, n° 5, pp. 1342-1348, 1975.
- (13) TAKAHASHI S. et al., "Change of the ultrasonic characteristic with stress in some steels and aluminum alloys". J. of Materials Science, vol. 13, pp. 843-850, 1978.
- (14) KIITTEL C., "Introduction to solid state physics". John Wiley & Sons, Inc. pp. 86-98, 1976.

#### REMERCIEMENTS

Ce travail a été financé en partie par la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, par le Centre National de la Recherche Scientifique (contrat G.R.E.C.O. "Grandes Déformations et endommagement") et par le Ministère de la Recherche et de la Technologie (contrat G.I.S. "Rupture à chaud").



MELANGE SIMPLE DANS DES ECOULEMENTS DE FLUIDES NEWTONIENS  
EXTENSIVEMIXING IN SOME NEWTONIAN FLOWS

A. POITOU, Y. DEMAY\*, J.F. AGASSANT

Centre de Mise en Forme des Matériaux, UA CNRS 852

Ecole des Mines de Paris

Sophia Antipolis

06560 VALBONNE - France

\* Université de Nice

Département de Mathématiques Appliquées,  
Parc Valrose  
06000 NICE

RESUME

Nous présentons un modèle qui quantifie l'efficacité mécanique de la dispersion réalisée dans un écoulement défini par la donnée du vecteur vitesse en chaque point. Nous définissons d'abord une variable locale, directement reliée aux exposants caractéristiques de Liapounov, et qui met en valeur la grande efficacité des écoulements chaotiques. Nous proposons ensuite une méthode globale de comparaison de différents systèmes, que nous appliquons à une classe particulière d'écoulements newtoniens bidimensionnels incompressibles, et qui ne sont donc pas chaotiques. Dans cet exemple, pour une puissance dissipée et un volume à mélanger constants, lorsque l'on change la géométrie du système on augmente la qualité de la dispersion dans une partie du produit mais on la diminue ailleurs. Un cisaillement simple est ainsi assez peu efficace, mais c'est le seul écoulement qui réalise une dispersion parfaitement uniforme.

ABSTRACT

A mechanical approach allows to quantify the mixing efficiency in a flow defined by the velocity vector at each point. At first we define a local variable directly linked up to Characteristic Liapounov Exponents which brings to the fore the great efficiency of chaotic motions. We then propose a global comparison method which we could apply to a particular class of newtonian two-dimensional incompressible flows which are thus not chaotic. In these examples, for specified volume and dissipated power, when one changes the geometry of the system, the scattering quality increases in a part of the bulk but decreases in an other part. Thus, a simple shear is rather not efficient but it is the only one flow that realizes a perfectly homogeneous scattering.

Communication au Groupe français de Rhéologie, le 28 Novembre 1985

INTRODUCTION :

De nombreux secteurs industriels, confrontés à la nécessité d'obtenir de bons mélanges, éprouvent actuellement le besoin d'une approche scientifique de la dispersion en milieu visqueux. Ceci concerne notamment l'industrie des polymères avec les alliages et les mélanges polymère-charge (exemple : mélanges de polyoléfines ou polybutadiènes + noir de carbone).

Les phénomènes mis en jeu lors de l'élaboration de tels produits sont de nature très diverse. Il existe ainsi des améliorations d'ordre chimique ou physico-chimique qui favorisent la dispersion (utilisation d'agents compatibilisants, de copolymères par exemple). Cependant tous les dispositifs permettant de réaliser des mélanges ne sont pas équivalents pour une composition chimique fixée. Il est donc intéressant d'étudier un modèle mécanique qui rende compte de leur efficacité.

Ce modèle définit tout d'abord une variable locale de la dispersion. En étudiant ensuite la fonction de répartition spatiale de cette variable, nous pouvons comparer des systèmes à puissance dissipée et volume constants. Nous avons ainsi étudié 3 exemples bidimensionnels d'écoulements newtoniens pour lesquels il existe une solution analytique exacte ou approchée du champ de vitesse.

1. LE MODELE MECANIQUE

1.1. Définition d'une variable locale de la dispersion

Ce modèle apporte une réponse à la question suivante :

Etant donné un écoulement caractérisé par la vitesse du (ou des) fluide(s) en tout point, comment caractériser le pouvoir dispersif de cet écoulement ?

Pour cela, on quantifie la distance qui sépare à l'instant "t" 2 points initialement voisins (1).

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{M_t}{M_0}$$



Figure 1 : les variables du problème.

On note (voir figure 1) :

$$x = OM \quad x' = OM' \quad x_0 = OM_0 \quad x'_0 = OM'_0$$

$e_0$  et  $e$  sont les 2 vecteurs unitaires

$$e_0 = M_0M'_0 / |M_0M'_0| \quad \text{et} \quad e = M'M' / |M'M'|$$

En variables de Lagrange

$$x = \phi (x_u, t) \quad \text{avec} \quad x_u = \phi (x_u, u)$$

Soit :  $\vec{E} = \text{grad } \phi$

au premier ordre en  $M_0, M_0'$

$$M_0' = \vec{E} M_0 M_0' \quad (1)$$

$$\lambda = \lim_{M_0' \rightarrow M_0} \frac{M_0' - M_0}{M_0' - M_0} = \vec{E} M_0 \quad (11)$$

donc

Il est important de noter la dépendance de  $\lambda$  en  $M_0$  car la dispersion ne s'effectue pas de la même façon dans toutes les directions.

1.2. Equations d'évolution, calcul de  $\lambda$  à partir du champ de vitesse

Pour calculer  $\lambda$  simplement, à partir de la connaissance de la vitesse  $u(x, t)$  en chaque point, nous écrivons 3 équations d'évolution vérifiées par  $x, m$  et  $\lambda$ .

Equation d'évolution de  $\lambda$  :

$$\lambda = \vec{E} M_0 \quad 1/2$$

Or

$$\vec{E} M_0 = (F M_0 \cdot \vec{E} M_0)$$

donc

$$\frac{d}{dt} \vec{E} M_0 = m \cdot \frac{dF}{dt} M_0$$

$$\text{et : } \frac{d}{dt} (F) = \frac{d}{dt} [\text{grad}_{x_u} \phi (x_u, t)] = \text{grad}_{x_u} \frac{d}{dt} \phi (x_u, t)$$

$$= \text{grad}_{x_u} [u(x, t)] = \text{grad}_{x_u} [u(\phi(x_u, t), t)]$$

$$= \text{grad}_{x_u} [u(x, t)] \quad \text{grad}_{x_u} \phi(x_u, t)$$

On note de façon classique :

$$L = \text{grad}_{x_u} u \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2} [t_L + L]$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt} (F) = L F \quad (III)$$

$$\text{et : } \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = L m \quad (IV)$$

Mais (IV) ne fait pas intervenir la partie antisymétrique de  $L$  donc :

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = D m \quad (V)$$

Equation d'évolution de  $m$  :

$$\lambda m = F m_0$$

$$\lambda \frac{d m}{dt} + \frac{d\lambda}{dt} m = \frac{dF}{dt} m_0$$

$$= \lambda L m \quad (\text{d'après (III)})$$

$$\text{donc} \quad \frac{d m}{dt} = L m - \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} m$$

ou encore, d'après (V) :

$$\frac{d m}{dt} = L m - (D m \cdot m) \quad (VI)$$

Equation d'évolution de  $x$  :

C'est trivialement

$$\frac{d x}{dt} = u(x, t) \quad (VII)$$

Calcul de  $\lambda$

Le calcul de  $\lambda$  se résume ainsi à la résolution d'un système de 7 équations différentielles à 7 inconnues (VII, VI et V)

$$\begin{cases} \dot{x} = u(x, t) \\ \dot{m} = L m - (D m \cdot m) \\ \dot{\lambda} = \lambda D m \cdot m \end{cases} \quad (VIII)$$

L'intégration numérique du système VIII est simple (par un schéma de Runge et Kutta d'ordre 4) et permet de définir les variables  $x, m$  et  $\lambda$  à l'instant "t" en fonction des valeurs initiales  $x_0, m_0$  et de  $\lambda_0$  qui vaut 1.

1.3. Les différentes situations possibles :

Exposants caractéristiques de Lisspounov :

Pour définir différents types d'écoulements, il est utile de s'abstraire de la dépendance de  $\lambda$  en  $m_0$  et  $t$ .

$$\text{Soit } \chi(x_0, m_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \lambda$$

$\chi$  est l'exposant caractéristique de Lisspounov en  $(x_0, m_0)$

On montre (2) que  $\chi$  ne prend que des valeurs discrètes.

On définit ensuite le plus grand exposant caractéristique de Lisspounov

$$\chi(x_0) = \max_{m_0} \chi(x_0, m_0)$$

Il y a alors 2 situations très différentes

Divergence exponentielle de trajectoires voisines :

Ce sont les écoulements pour lesquels  $\chi(x_0)$  est strictement positif. Un écoulement confiné de ce type est par définition chaotique. Ce type d'écoulements est très étudié dans d'autres domaines scientifiques (astrophysique, mathématiques etc...). Dans ce cas la dépendance de  $\lambda$  est exponentielle en fonction du temps (deux trajectoires voisines divergent exponentiellement)

Divergence linéaire de trajectoires voisines :

C'est le cas dans lequel  $\chi(x_0)$  est nul.

La première situation est évidemment préférable pour assurer une bonne dispersion ; cependant une grande classe d'écoulements rencontrés en machine est du 2ème type. En effet, un écoulement incompressible bidimensionnel et stationnaire est hamiltonien (la fonction de courant se conserve le long d'une trajectoire). C'est donc un système à 1 degré de liberté qui, intégrable (3), n'est nul part chaotique. Nous étudions par la suite uniquement ce type d'écoulement.

1.4. Comparaison globale de deux écoulements confinés :

Pour pouvoir les comparer entre eux nous ne considérerons que des dispositifs mélangeant un même volume V de matière et dissipant une puissance donnée P. Il est alors possible de déterminer la fonction de répartition A des valeurs de  $\lambda$  définie par

proportion de matière pour laquelle  $\lambda$  est compris entre  $\lambda_0$  et  $\lambda_0 + d\lambda$  en tout point.

$$A(\lambda_0)d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + d\lambda} A(\lambda) d\lambda$$

Une primitive de A fournit également des renseignements intéressants.

Ainsi :  $C(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\infty} A(\lambda) d\lambda$  est la proportion de matière pour laquelle  $\lambda$  est supérieur à  $\lambda_0$ .

La connaissance de A et C permet comme nous le montrons sur l'exemple qui suit de comparer différents écoulements pour différentes valeurs de  $m_0$  et  $\nu$ .

II. EXEMPLES D'APPLICATION

II.1. Elongation plane

Cet écoulement est souvent cité pour sa grande efficacité ( $\lambda$ ). C'est la raison pour laquelle nous l'étudions ici. Nous insistons cependant sur le fait que l'on ne peut réaliser d'écoulement confiné à taux d'élongation constant

$$\begin{cases} u = \dot{\alpha} x \\ v = -\dot{\alpha} y \end{cases}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} e\dot{\alpha}t & 0 \\ 0 & e^{-\dot{\alpha}t} \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda = \text{tr} \mu_0 \mathbf{1} = \sqrt{\frac{2}{m_0} e^{2\dot{\alpha}t} + \frac{2}{m_0} e^{-2\dot{\alpha}t}}$$

donc :

$$\chi(x_0) = \text{Cte} = |\alpha| > 0$$

Mais l'écoulement n'étant pas confiné, il n'est pas chaotique.

II.2. Cisaillement simple

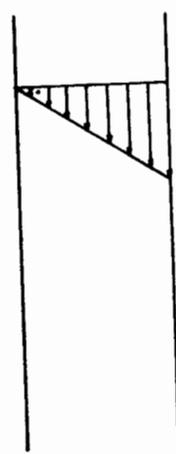


Figure 2 : Ecoulement entre plaques parallèles

$$\begin{cases} u = \dot{\gamma} y \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dot{\gamma} y t + x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} & \dot{\gamma} t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \text{tr} \mu_0 \mathbf{1} = \sqrt{(m_1 \nu + m_2 \nu \dot{\gamma} t)^2 + m_2^2}$$

et

L'écoulement n'est pas non plus confiné mais, la vitesse étant périodique de période quelconque, on peut l'étudier sur n'importe quelle période et imaginer que le fluide sortait à droite réapparaît à gauche. On se ramène ainsi au cas cité plus haut d'un écoulement confiné incompressible bidimensionnel. Il n'est donc pas étonnant que :

$$\chi(x_0) = 0 \text{ partout.}$$

II.3. Ecoulement entre un fond et une surface supérieure animée d'une vitesse V :

Détermination du champ de vitesse

Pour généraliser l'exemple précédent nous considérons l'écoulement entre une plaque supérieure animée d'une vitesse V et une surface inférieure immobile, périodique de période L.

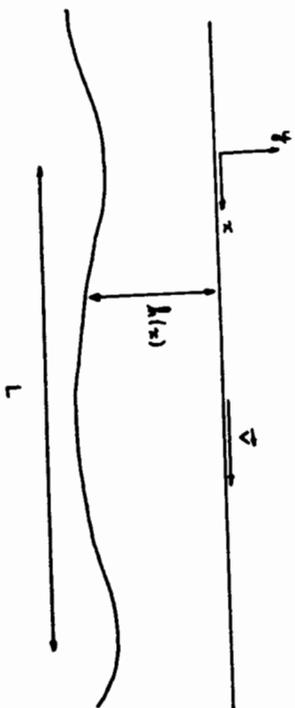


Figure 3

Le nombre de Reynolds d'un polymère fondu étant faible, on peut négliger les termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes qui s'écrivent alors :

$$\eta \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (IX)$$

$$\eta \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (X)$$

avec  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Si  $h(x)$  est faible il est possible de faire les approximations dites de la lubrification hydrodynamique :

L'équation (IX) donne, en négligeant  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  devant  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\eta \Delta u = \eta \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y (y+h) + \frac{V}{h} (y+h)$$

La conservation de la masse s'écrit :

$$Q = \int u \, dy = \text{Cte}$$

Soit  $h$ , la hauteur pour laquelle  $dp/dx = 0$

$$u = V \left[ \frac{3}{2} \frac{y}{h} \left( \frac{y}{h} + 1 \right) \left( 1 - \frac{h}{h} \right) + \frac{y}{h} + 1 \right]$$

donc :  $\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{6\eta}{h^2} \left( 1 - \frac{h}{h} \right) V$

et  $p = \int_0^x \frac{6\eta}{h^2} \left( 1 - \frac{h}{h} \right) dx + \text{Cte}$

La solution périodique correspond à une valeur de la pression telle que :

$$\int_0^L \frac{1}{h^2} \left( 1 - \frac{h}{h} \right) dx = 0$$

Ce qui permet de calculer  $h$  :

$$h = \frac{\int_0^L dx/h^2}{\int_0^L dx/h^3}$$

On calcule  $v$  par la relation d'incompressibilité :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

Le résultat s'écrit finalement :

$$u = V \left[ \frac{3}{2} \frac{y}{h} \left( \frac{y}{h} + 1 \right) \left( 1 - \frac{h}{h} \right) + \frac{y}{h} + 1 \right]$$

$$v = - \frac{V}{h} \frac{dh}{dx} \left[ \frac{3}{2} \frac{h^2}{h} - 2 \right] \left( \frac{y^3}{h^3} + \frac{y^2}{h^2} \right)$$

avec  $h = \frac{\int_0^L dx/h^2}{\int_0^L dx/h^3}$

Résultats et interprétation :

Nous avons étudié cette classe d'écoulement dans le cas particulier a)

$$h(x) = a + e \cos 2\pi x/L \quad \text{avec } L = 2\pi$$

Un cas limite est atteint avec  $e = 0$  (cisaillement simple).

Nous considérons l'écoulement sur une période ( $2\pi$ ) de telle sorte qu'il devient confiné si l'on imagine que le fluide sortent à droite réapparaît à gauche.

Le volume de ce système est "L.e". Nous avons fixé  $a = 0.5$  pour que les approximations de la lubrification hydrodynamique restent valables

$$e \ll a \ll L$$

Pour chaque valeur de  $e$ , nous fixons ensuite la valeur de la vitesse d'entraînement de telle sorte que la puissance dissipée soit constante dans l'écoulement (figure 4).

Nous avons ainsi étudié 3 géométries différentes :

$$(S1) \quad e = 1/9 \quad (S2) \quad e = 2/9 \quad (S3) \quad e = 3/9 = 1/3$$

Pour les géométries (S2) et (S3) l'écoulement présente des recirculations. (figures 5 & 7).

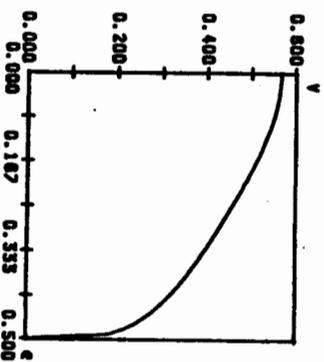


Figure 4 : Vitesse de la plaque supérieure.



Figure 5 : Lignes de courant pour la géométrie S1.

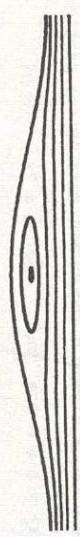


Figure 6 : Lignes de courant pour la géométrie S2.



Figure 7 : Lignes de courant pour la géométrie S3.

Par la méthode présentée plus haut nous calculons  $\lambda$  numériquement. Les figures 8 à 10 montrent  $\lambda$  au point (0 ; -0,5) en fonction du temps pour S3 et différentes valeurs de  $\alpha$  (sachant que  $m\omega = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ).

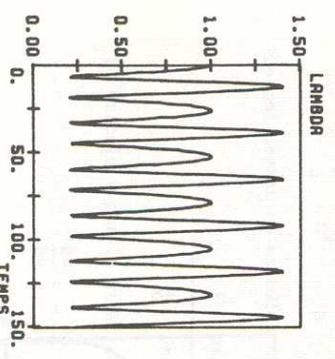


Figure 8 :  $\alpha = 0$

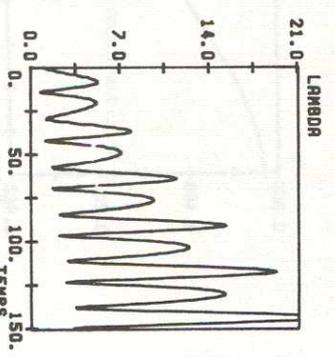


Figure 9 :  $\alpha = \pi/4$

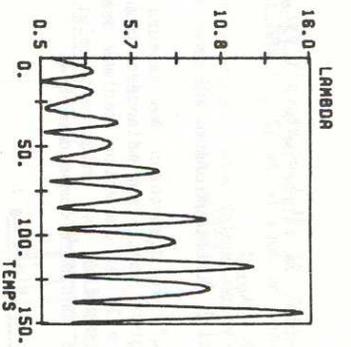


Figure 10 :  $\alpha = \pi/2$

La figure 8 montre l'évolution de  $\lambda$  pour  $\alpha = 0$ . Ceci revient à étudier la distance qui sépare deux particules infiniment proches sur une même trajectoire. Dans ce cas particulier  $\lambda$  est une fonction périodique du temps. Les figures 9 et 10 montrent l'évolution de  $\lambda$  pour  $\alpha = \pi/4$  et  $\alpha = \pi/2$ . On a alors :  $\lambda = 0(t)$  ( $\alpha < \lambda < \beta t$   $\alpha > 0, \beta > 0$ ).

La connaissance de  $\lambda$  en chaque point permet ensuite de construire A et C en fonction de  $\lambda$ . Les figures 11 et 12 montrent A et C pour une valeur de  $t_0$  fixée (15s) et  $\alpha = \pi/2$ .

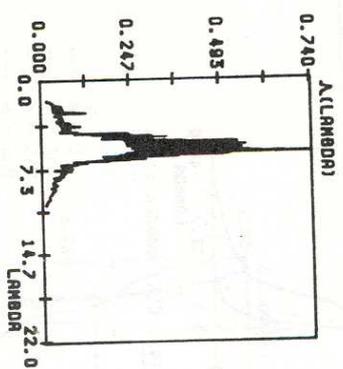


Figure 11a : A( $\lambda$ ) pour  $e = 0,11$

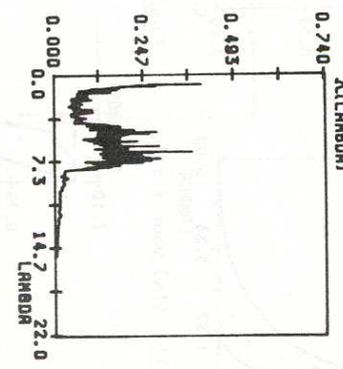


Figure 11b : A( $\lambda$ ) pour  $e = 0,22$

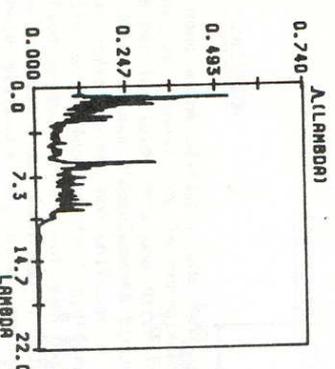


Figure 11c : A( $\lambda$ ) pour  $e = 0,33$

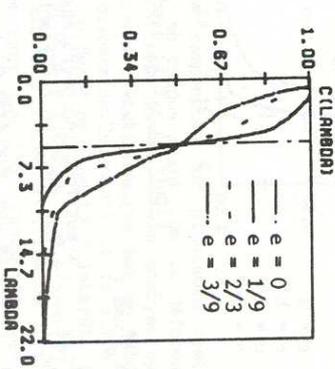


Figure 12 : C( $\lambda$ ) pour  $\alpha = \pi/2$

Interprétation :

Pour un cisaillement simple, la valeur de  $\lambda = \lambda_{cis}$  est constante dans tout l'écoulement donc :

$$\begin{aligned} \lambda_{cis}(\lambda) &= \delta (\lambda - \lambda_{cis}) \\ C_{cis}(\lambda) &= 1 - \gamma (\lambda - \lambda_{cis}) \end{aligned}$$

où  $\delta$  et  $\gamma$  sont respectivement les distributions de Dirac et Heavyside

Lorsque l'on augmente "e", la dispersion des valeurs de  $\lambda$  s'accroît ; c'est-à-dire que certaines régions sont mieux mélangées, d'autres moins bien.

Un remarque sur la figure 12 que la valeur médiane des valeurs de  $\lambda$  est égale à  $\lambda_{cis}$ . Cependant, ce résultat est uniquement celui d'une expérience numérique et ne peut donc être considéré comme démontré.

Influence de la direction initiale  $\theta_0$  :

$\alpha$  influe beaucoup sur la valeur de  $\lambda$ . Cependant, même dans le cas dégénéré où  $\alpha$  est nul, les positions relatives des courbes restent les mêmes (figures 13 à 15).

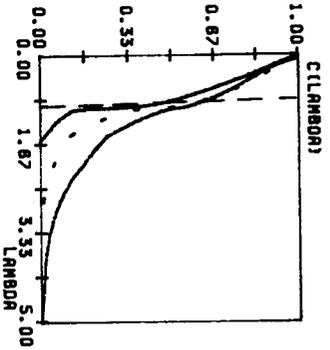


Figure 13 : C( $\lambda$ ) pour  $\alpha = 0$

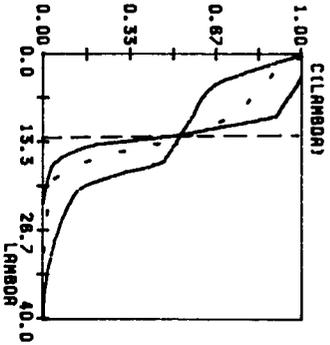


Figure 14 : C( $\lambda$ ) pour  $\alpha = \pi/4$

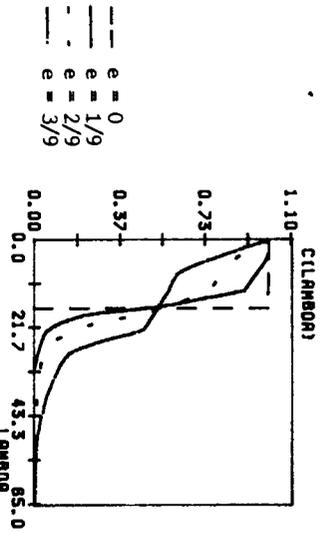


Figure 15 : C( $\lambda$ ) avec  $\alpha = \pi/2$

Dans ces 3 cas :

si  $\lambda < \lambda_{cis}$   $\lambda$  est fonction décroissante de e  
si  $\lambda > \lambda_{cis}$   $\lambda$  est fonction croissante de e.

Le cas  $\alpha = 0$  est le cas dégénéré où  $\lambda_{cis} = 1$

Influence de  $t_0$  :

Comme on le voit sur les figures 16 à 18, le rôle de  $t_0$  est d'augmenter les écarts entre les situations 51, 52 et 53 tout en conservant les positions relatives des courbes.

On remarque ainsi que la plus grande valeur de  $\lambda$  pour 53 est 3,5 fois supérieure à  $\lambda_{cis}$  au bout de 15s mais devient 8 fois supérieure au bout d'une minute.

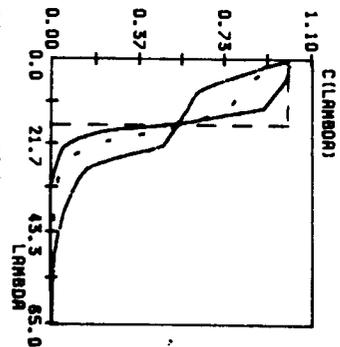


Figure 16 : C( $\lambda$ ) avec  $t_0 = 15$  s

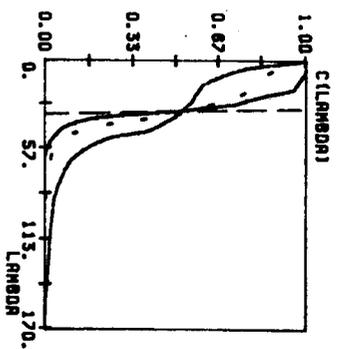


Figure 17 : C( $\lambda$ ) avec  $t_0 = 30$  s

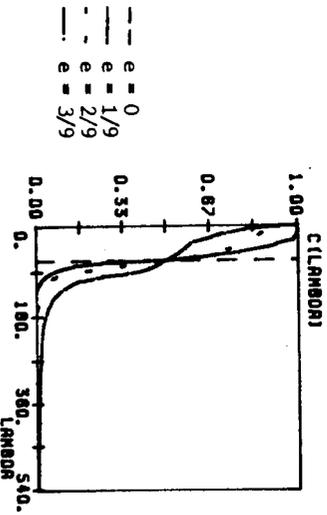


Figure 18 : C( $\lambda$ ) avec  $t_0 = 60$  s

CONCLUSION

Nous avons développé une méthode de comparaison de plusieurs systèmes mécaniques à partir de la connaissance, en chaque point, de la déformation subie par le fluide dans une direction initiale donnée. Cette analyse appliquée à une classe d'écoulements bidimensionnels stationnaires met en évidence le caractère souvent non uniforme de la dispersion. Cependant la relative simplicité de ces écoulements ( systèmes à un degré de liberté ) interdit l'apparition de mouvements chaotiques qui sont plus efficaces. Une situation plus riche sera celle des écoulements bidimensionnels instationnaires ou tridimensionnels stationnaires, plus proches de ceux que l'on rencontre dans des mélangeurs de type malaxeurs internes ou extrudeuses divisés.

Enfin cet exemple permet de comprendre le rôle particulier de la puissance dissipée dans un écoulement pour y assurer une bonne dispersion. Dans l'industrie du caoutchouc, il est courant de contrôler un procédé en vérifiant que cette puissance est maximale. Or, sur l'exemple proposé, on voit qu'il est possible d'obtenir des déformations  $\lambda$  qui varient de plusieurs ordres de grandeur pour une dissipation visqueuse fixée. Si l'augmentation de la puissance dissipée dans une géométrie donnée assure une meilleur dispersion, la détermination d'une géométrie plus adaptée peut aussi elle-même avoir une influence déterminante. On comprend ainsi l'importance économique d'utiliser un système qui exploite avec le meilleur rendement possible l'énergie fournie.

#### BIBLIOGRAPHIE

- (1) J.M. OTTINO, Chem. Eng. Sci., **25**, 1377 (1980).
- (2) C. FRUESCHLE, Journal de Mécanique théorique et appliquée, 101 (1984)
- (3) M. HENON, Les Houches (1981).
- (4) L. ERWIN ; F. MOKHARIAN, Polym. Eng. Sci., **23**, 49.

40 ans du Groupe Français de Rhéologie - Progrès récents -  
CR 20e Coll G.F.R., Paris, Nov 1985 G.F.R. et L.M.P. 1987

#### ETUDE DU COMPORTEMENT DE L'AMIDON EN PHASE FONDUE A L'AIDE D'UN RHEOMETRE A PRE-CISSAILLEMENT : LE "RHEOPLAST"

STUDY OF THE BEHAVIOUR OF MOLTEN STARCH USING A RHEOMETER WITH PRESHEARING : THE "RHEOPLAST"

B. VERGNES, J.P. VILLEMAIRE, P. COLONNA\*, J. TAYEB\*

Centre de Mise en Forme des Matériaux, UA CNRS 852  
Ecole des Mines de Paris, Sophia-Antipolis  
06560 VALBONNE - France

\* INRA, Centre de Recherches Agroalimentaires  
Laboratoire de Biochimie et Technologie des Glucides  
Rue de la Géraudière  
44072 NANTES - France

#### RESUME

Dans l'industrie alimentaire, l'amidon natif est souvent transformé par des traitements de type thermique, dont l'un, la cuisson-extrusion, est directement issu des procédés de mise en forme des matières plastiques. Pour améliorer ce procédé et résoudre les nombreux problèmes rencontrés, la connaissance du comportement de l'amidon peu hydraté en phase fondue est indispensable. L'utilisation du "Rheoplast", rhéomètre à pré-cisaillement permettant de fondre le matériau dans des conditions thermomécaniques parfaitement définies, nous a permis d'effectuer cette étude sous deux aspects différents :

- mesure de la viscosité du produit fondu: entre  $10^2$  et  $10^3$  s<sup>-1</sup>, l'amidon présente un comportement pseudoplastique, faiblement thermodépendant, avec une influence marquée de la teneur en eau.
- étude de la transformation macromoléculaire: lorsque l'amidon est soumis à un traitement thermomécanique donné, il subit une dégradation macromoléculaire, lui conférant certaines propriétés fonctionnelles (solubilité, organisation cristalline...). Nous avons montré que cette dégradation dépendait de l'intensité du traitement thermomécanique, qui pouvait elle-même être caractérisée par l'énergie mécanique apportée au produit pendant le traitement.

#### ABSTRACT

In the food industry, native starch is modified by extrusion-cooking, using twin-screw extruders. To improve this process, it is necessary to know the behaviour of the molten starch in low hydrated phase. This study was undertaken from two points of view, using a pre-shearing rheometer, called "Rheoplast", which permits to subject the material to a well defined thermomechanical treatment. Between  $10^2$  and  $10^3$  s<sup>-1</sup>, the molten starch exhibits a pseudoplastic behaviour, with a dependence on the temperature and on the water content. During the treatment, starch macromolecules are degraded, leading to functional properties (solubility, digestibility...). It was demonstrated that the level of degradation is depending on the intensity of the treatment, which may be correlated to the energy imparted to the material.

L'amidon est un constituant de base dans certains produits alimentaires destinés à l'homme et aux animaux. Il est formé d'un mélange de deux homopolymères de glucose, l'amylose (linéaire) et l'amylopectine (ramifiée). Ces deux macromolécules sont organisées à l'état natif en entités granulaires (5 à 50  $\mu$ ) semi-rétractibles. Depuis une dizaine d'années s'est développé le procédé de cuisson-extrusion: à l'intérieur d'une extrudeuse monovis ou bi-vis, le matériau est soumis à un traitement thermomécanique intense, qui va permettre de le fondre, de le transformer et d'obtenir en fin de compte un produit aux caractéristiques fonctionnelles et nutritionnelles nouvelles ou améliorées (1), (2). Les applications industrielles les plus connues sont d'une part la fabrication de produits finis expansés (pains plats, snacks apéritifs...), d'autre part de matériaux très solubles (farines infantiles, soupes...).

Ce procédé de cuisson-extrusion est encore très mal connu d'un point de vue scientifique. Outre la complexité des écoulements dans une extrudeuse, une des causes majeures en est la méconnaissance du comportement de l'amidon au cours du procédé. En effet, si l'on connaît bien les phénomènes de gélification (3) ou le comportement de l'amidon en phase très hydratée (plus de 50% d'eau) (4), on sait peu de choses sur ce qui se passe lorsque la teneur en eau est réduite; les actions thermomécaniques conduisent à la destruction de la structure granulaire de l'amidon et à l'obtention d'une phase fondue homogène (5), dont les propriétés seront déterminantes sur le procédé.

Pour étudier l'amidon en phase fondue, il est donc nécessaire de disposer d'un appareil capable de le soumettre à un traitement thermomécanique important. On peut penser, comme l'a fait Yacou (6), installer un capillaire à la sortie d'une extrudeuse, mais le traitement subi antérieurement par le matériau est alors très difficile à évaluer. Pour cette raison, nous avons préféré utiliser un rhéomètre spécifique, développé au CEMEF depuis plusieurs années pour l'étude des matières thermoplastiques: le "Rhéoplast" (7), (8).

Nous avons entrepris l'étude du comportement de l'amidon en phase fondue sous deux aspects:

- pour un traitement thermomécanique donné, nous avons effectué des mesures de viscosité, en fonction de la teneur en eau et de la température.
- nous avons étudié les relations entre le traitement thermomécanique imposé au produit et la transformation en résultant, c'est-à-dire le niveau de dégradation macromoléculaire.

PRESENTATION DU "RHEOPLAST":

L'appareil est schématisé à la figure 1. Il est constitué par un système de Couette, dans lequel s'opère le traitement thermomécanique qui permet la fusion du matériau, et d'un système capillaire en série, qui permet de mesurer la viscosité du produit.

Un cycle de traitement ou de mesure s'effectue de la manière suivante: l'amidon natif, situé dans la trémie d'alimentation 1, descend par gravité dans la chambre de cisaillement 5 lorsque le piston annulaire 2 est en position haute. Ce piston 2 redescend ensuite pour compacter légèrement le produit et faire en sorte qu'il occupe tout le volume de la chambre 5. Le piston central 3 est alors mis en rotation à une vitesse déterminée, pendant un temps déterminé. La matière contenue dans la chambre est alors fondue, à la fois grâce à l'énergie mécanique créée par le cisaillement et à l'apport thermique fourni par la régulation du fourreau 4, thermostaté par circulation d'un fluide caloporteur. Une fois le traitement terminé, la rotation du piston central est stoppée et celui-ci remonte légèrement pour ouvrir la passagère de sa partie inférieure; le piston annulaire 2 permet de transférer la matière de la chambre de cisaillement 5 dans le pot d'injection 6. Lorsque celui-ci est plein (son volume correspond au volume de la chambre), le piston central 3 est descendu à vitesse uniforme pour forcer la matière à travers le capillaire 8.

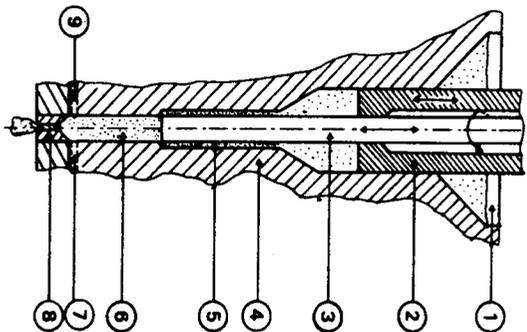


Fig. 1

En mesurant le débit (vitesse de descente du piston 3) et la pression grâce au capteur 7, nous pouvons avoir accès à la viscosité du produit. A la sortie du capillaire, l'échantillon est recueilli afin d'être analysé ultérieurement.

Le principal avantage du "Rhéoplast" est de soumettre le matériau à un traitement très proche de celui rencontré sur une machine industrielle, mais qui est ici parfaitement caractérisé:

- le cisaillement est déterminé par la vitesse de rotation 9 du piston central. Compte tenu des dimensions de la chambre (diamètre fourreau: 21 mm, diamètre piston central: 16 mm, longueur de la zone: 8,5 cm), il peut être considéré comme quasi-uniforme. Nous avons utilisé des vitesses variant entre 200 et 700 t/mn, ce qui correspond à des cisaillements de 75 à 250  $s^{-1}$ .
- la température est contrôlée par une circulation de fluide caloporteur à l'intérieur du fourreau. Elle est mesurée à la base du pot d'injection, grâce au thermocouple 9 en contact avec la matière fondue.
- le temps de cisaillement correspond au temps de rotation du piston central. Nous avons travaillé pour cette étude entre 5 et 60 secondes.

MESURES DE LA VISCOSITE DE L'AMIDON EN PHASE FONDUE:

Le substrat que nous avons choisi d'étudier est un amidon de maïs de type normal (24% d'amylose), commercialisé par Roquette Frères (Lestrem). Dans un premier temps, nous avons fixé un traitement thermomécanique (400 t/mn pendant 40 secondes) et avons mesuré la viscosité en fonction:

- de la température: 110, 150 et 170  $^{\circ}C$
  - de la quantité d'eau rajoutée à l'amidon natif: 10, 20 et 30 % en poids
- Nous avons ensuite étudié l'influence du traitement thermomécanique à 110 et 150  $^{\circ}C$  en imposant:
- un traitement "doux": 200 t/mn pendant 20 secondes
  - un traitement "sévère": 600 t/mn pendant 60 secondes.

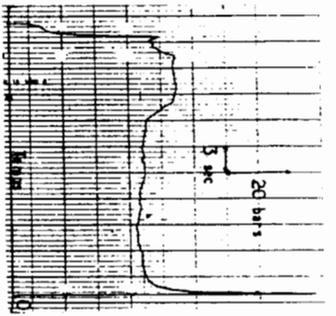


Fig. 2: exemple d'enregistrement de pression; vitesse de descente du piston 0,12 cm/s

Une des principales difficultés rencontrées lors de ces mesures est la reproductibilité: en effet, l'amidon natif est un produit hydrophyle dont le mélange avec l'eau ne conduit pas à des préparations systématiquement homogènes. De plus, le fait de travailler à température supérieure à 100 °C en présence d'eau provoque en sortie de capillaire une expansion brutale du produit, due à la vaporisation de l'eau, qui peut dans certains cas perturber la mesure. La figure 2 montre un enregistrement typique de l'évolution de la pression au cours de la mesure: la surpression initiale est causée par l'expulsion de la matière résiduelle du cycle de mesure précédent qui était demeurée dans le capillaire. On a ensuite une stabilisation et un plateau, plus ou moins clairement définis suivant la vitesse de descente du piston. Enfin, la remontée finale peut être attribuée au fait que l'extrémité inférieure du piston se rapproche du capteur de pression. Compte tenu de la dispersion relative d'une mesure à l'autre, il était difficile d'envisager d'effectuer les corrections de Bagley sur la pression d'entrée. Pour minimiser l'erreur commise, nous avons choisi de faire l'ensemble des mesures avec un capillaire de rapport L/D important, en l'occurrence 16,6 (L = 5 cm, D = 3 mm). Nous avons par contre effectué les corrections de Rabinovitch. Pour tracer une courbe de viscosité, nous disposons pour chaque valeur du cisaillement (c'est-à-dire pour chaque vitesse de descente du piston) d'un nombre de points expérimentaux variant entre deux et une dizaine. Un traitement informatique à partir d'une méthode des moindres carrés permet de lisser la courbe brute obtenue. Dans la quasi totalité des cas, ce lissage aboutit à une droite, donc à un comportement pseudo-plastique du matériau. Les figures 3 à 7 montrent, pour le traitement intermédiaire (400 secondes à 400 t/mn), les influences respectives de la teneur en eau et de la température.

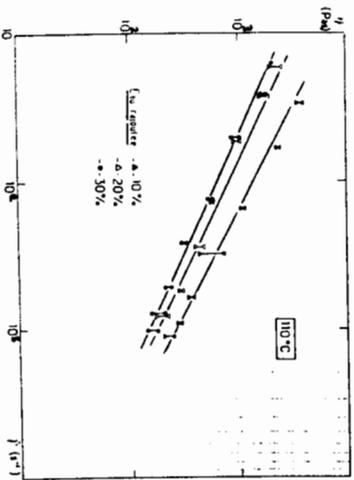


Fig. 3

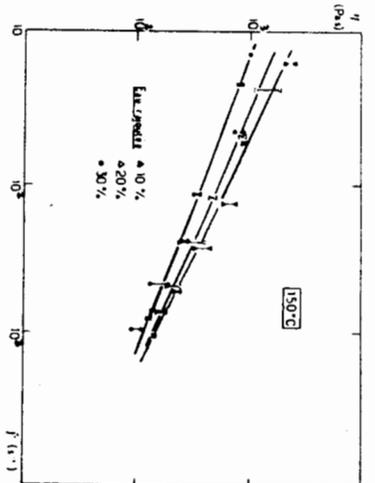


Fig. 4

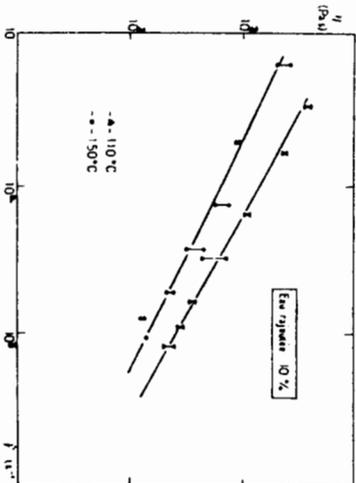


Fig. 5

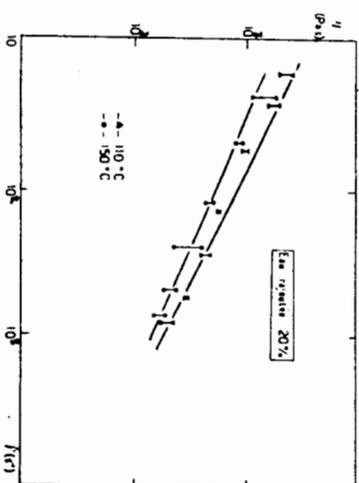


Fig. 6

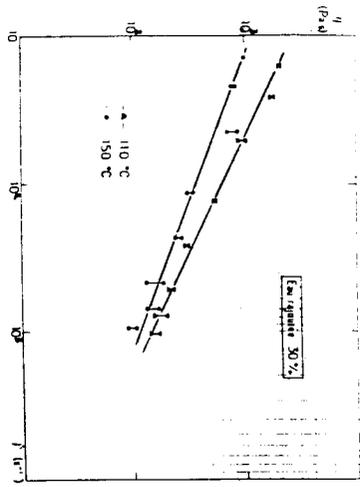


Fig. 7

Dans tous les cas, l'évolution de la viscosité en fonction du cisaillement peut se mettre sous la forme:

$$\eta = K \dot{\gamma}^{m-1}$$

La viscosité diminue lorsque la température et la teneur en eau augmentent. Si l'on s'intéresse aux évolutions des paramètres m et K de la loi-puis-sance, on s'aperçoit que l'on peut découpler l'influence de l'eau et celle de la température pour la consistance K (figures 8 et 9), alors que ce n'est pas le cas pour l'indice de pseudoplasticité m (figures 10 et 11).

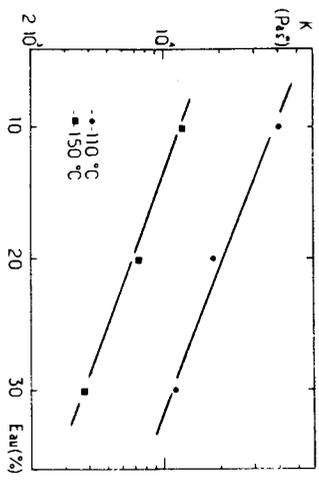


Fig. 8

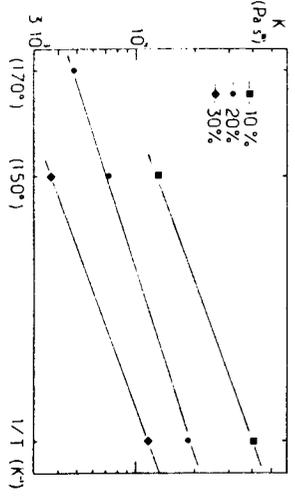


Fig. 9

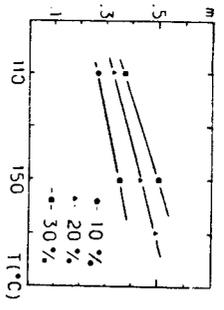


Fig. 10

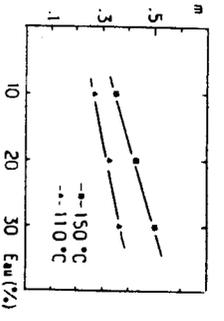


Fig. 11

Pour un amidon et un traitement donnés, si l'on appelle MC la quantité d'eau rajoutée (en % du poids d'amidon natif), la consistance K peut s'exprimer par:

$$K = K_u e^{E/R (1/T - 1/T_0)} e^{-\alpha MC} \quad (1)$$

avec, dans le cas présenté ici:

$$\begin{aligned} E/R &= 4650 \text{ K} \\ \alpha &= 6,2 \\ K_u &= 210 \text{ 000 Pa s à } T_0 = 353 \text{ K} \end{aligned}$$

Pour l'indice de pseudoplasticité m, on ne peut plus découpler les influences de l'eau et de la température, mais on peut toutefois donner une formulation approchée, du type:

$$m(T, MC) = \alpha_1 T + \alpha_2 MC + \alpha_3 I \quad (2)$$

avec ici:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1,95 \cdot 10^{-3} \quad (\text{pour } T \text{ exprimé en } ^\circ\text{C et } MC \text{ en } \%) \\ \alpha_2 &= -0,188 \\ \alpha_3 &= 6,25 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Pour un traitement donné, la viscosité peut donc se mettre sous la forme:

$$\eta = K_u e^{E/R(1/T - 1/T_0)} e^{-\alpha MC} \dot{\gamma}^m \quad (3)$$

où m(T, MC) est donné par la formule (2)

Ce résultat est à rapprocher de celui formulé par Yacu (5), qui propose pour un amidon de blé une expression de la forme:

$$\eta = \eta_0 e^{-a_1 MC} e^{-bI} e^{-a_2 F} \dot{\gamma}^{-n}$$

(F est la teneur en matières grasses, qui n'a pas été étudiée dans notre cas) Pour Yacu, l'indice de pseudoplasticité n ne dépend pas de la température ou de la teneur en eau, mais plutôt du passé thermomécanique du matériau avant son passage dans le capillaire. Ayant effectué ses mesures en sortie d'extrudeuse, il n'a malheureusement pas pu développer clairement cette notion. Par contre, en utilisant le "Rindoplast", nous pouvons définir très précisément ce traitement: les figures 12 et 13 montrent l'influence de trois types de traitements thermomécaniques sur la viscosité, à deux températures différentes. On constate qu'il existe un effet de diminution de la viscosité avec l'intensité du traitement. Cet effet est différent suivant la température. Par contre, il semble n'y avoir que très peu d'influence sur la valeur de m (les courbes restent parallèles): dans la formule (3), seul K\_u va être modifié par le traitement imposé au matériau. Pour essayer d'expliquer ces résultats, il est donc important de pouvoir faire le lien entre traitement thermomécanique et transformation macromoléculaire du matériau.

INFLUENCE DU TRAITEMENT THERMOMECHANIQUE SUR LA DEGRADATION MACROMOLECULAIRE DE L'AMIDON:

Des analyses effectuées sur des échantillons prélevés sur une extrudeuse bi-vis avaient montré que la transformation de l'amidon dans la machine était accompagnée d'une dégradation macromoléculaire, que l'on pouvait mettre en évidence par des mesures de GPC ou de viscosité intrinsèque (5). Pour approfondir et quantifier ce phénomène, nous avons utilisé le "Rhéoplast" pour soumettre un amidon à différents traitements thermomécaniques:

- vitesses de rotation de 200 à 700 t/mn
- temps de rotation de 5 à 60 secondes
- températures de 140 à 180 °C

Après le traitement, l'amidon est expulsé à travers le même capillaire à la vitesse constante de 1 cm/s et recueilli pour être analysé. Nous avons quantifié le niveau de dégradation par des mesures de GPC, de viscosité intrinsèque et de solubilité aqueuse.

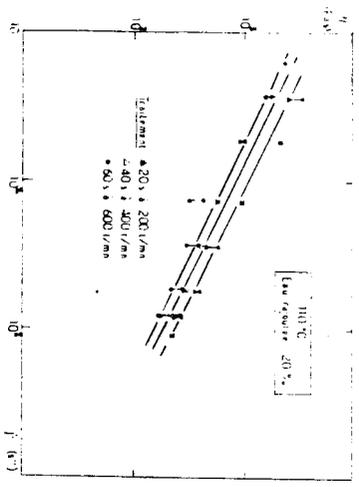


Fig. 12

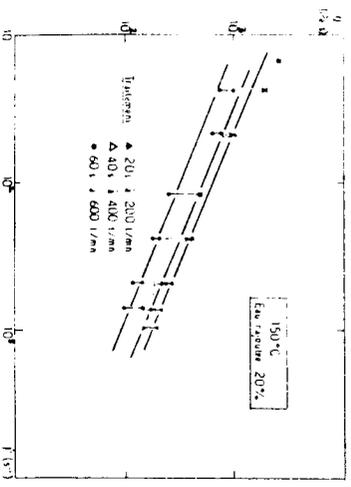


Fig. 13

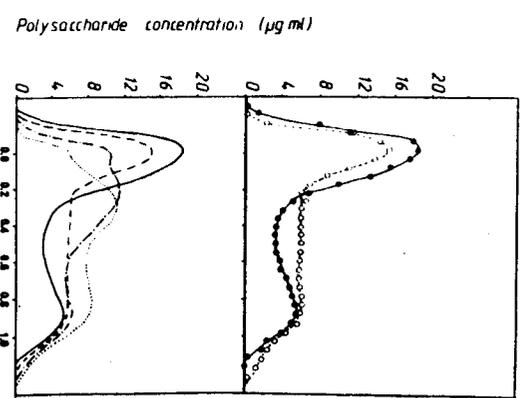


Fig. 14

Le haut de la figure 14 présente les chromatogrammes d'un amidon natif et d'un amidon traité sur "Rhéoplast". Ils mettent en évidence la dégradation macromoléculaire des deux composants de l'amidon, l'amylopectine (1er pic) et l'amylose (2ème pic).  
La figure du bas montre que cette dégradation dépend du traitement subi, mais il semble difficile de discerner les effets réels de traitements dont les paramètres sont très différents. On peut par contre dire que la dégradation augmente avec la vitesse de rotation, le temps de rotation et la température (Figures 15 et 16).

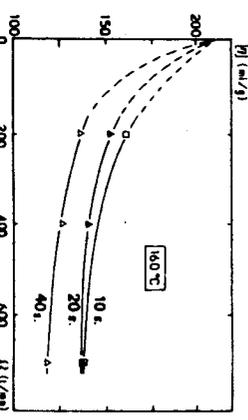


Fig. 15: évolution de la viscosité intrinsèque

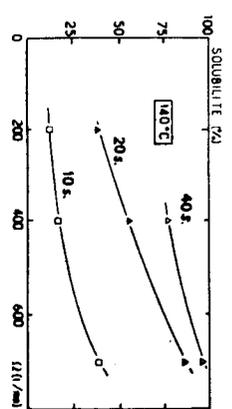


Fig. 16: évolution de la solubilité dans l'eau

Pour mieux quantifier la notion de "adéviriter" du traitement thermomécanique, nous avons essayé de définir un paramètre global que l'on pourrait relier au niveau de dégradation résultant: il s'agit de la quantité d'énergie méca-

que fournie au matériau pendant le traitement. Pour calculer cette énergie, nous supposons que deux phases successives ont lieu dans le "Rhéoplast":

- une fusion (passage de la structure granulaire de l'amidon natif à une phase fondue homogène) par conduction thermique et cisaillement
- un cisaillement en phase fondue, entraînant la dégradation macromoléculaire.

La fusion est modélisée de façon analogue à la fusion d'un thermoplastique dans une extrudeuse, par croissance d'une couche liquide à partir du piston central en rotation. On a ainsi accès au temps de fusion, puis l'on calcule l'énergie mécanique apportée au matériau durant le temps restant (9). On obtient finalement:

$$\dot{W} = \frac{mK}{(b/a)^2 - 1} \left[ \frac{2}{m} \right]^{m+1} \frac{1}{\left[ \frac{b}{a} \right]^{2/m} - 1} \frac{1}{Q^{m+1} \Delta t}$$

avec: a,b: rayons du piston central et du fourreau  
 m,K: paramètres de la loi-puissance  
 Q: vitesse de rotation du piston central  
 Δt: temps de traitement effectif (temps total - temps de fusion)

Ce paramètre permet de classer entre eux des traitements dont les caractéristiques sont très différentes. Il est bien représentatif de la "sévérité" de ces traitements, car il rend bien compte de l'évolution des paramètres caractérisant la dégradation, comme la viscosité intrinsèque (figure 17) ou la solubilité aqueuse (figure 18).

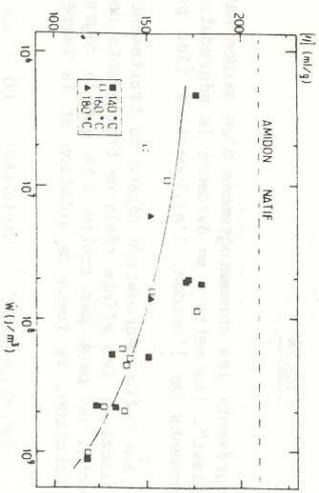


Fig. 17

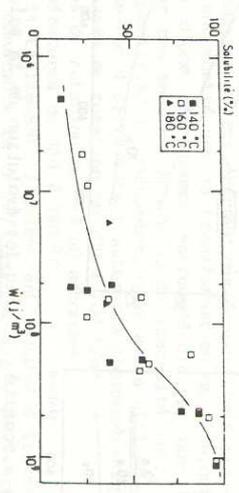


Fig. 18

Si nous revenons maintenant à l'influence du traitement thermomécanique sur la viscosité (figures 12 et 13), nous constatons que:

- à 110°C, la consistance K évolue faiblement lorsqu'on passe d'un traitement "doux" à un traitement "sévère".
- à 150°C, la consistance évolue peu entre les traitements "doux" et "intermédiaire", et beaucoup plus entre les traitements "intermédiaire" et "sévère".

Si nous traçons l'évolution de la consistance K en fonction du paramètre énergétique  $\dot{W}$  pour ces deux températures (figure 19), nous constatons que la diminution de la consistance (donc de la viscosité) commence à être sensible pour une énergie fournie supérieure à 10<sup>8</sup> J/m<sup>3</sup>. La courbe d'évolution de la solubilité, tracée au-dessus, montre que c'est à partir du même seuil que la solubilité (donc la dégradation) se met à augmenter.

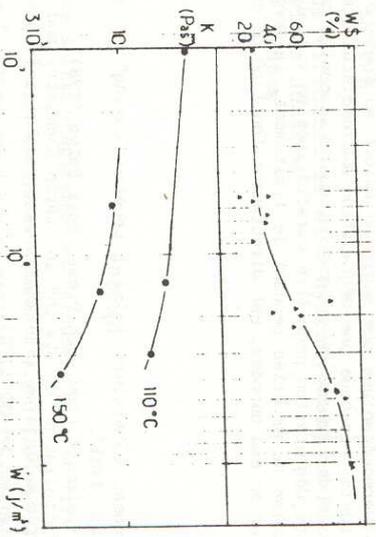


Fig. 19

On peut donc faire l'hypothèse que le paramètre K<sub>0</sub> de la loi de viscosité décrite par la formule (3) est uniquement fonction de l'état macromoléculaire du matériau et peut être définie par une relation du type K<sub>0</sub>(W), comme celle présentée à la figure 20. Des expérimentations complémentaires sont actuellement en cours pour confirmer cette hypothèse.

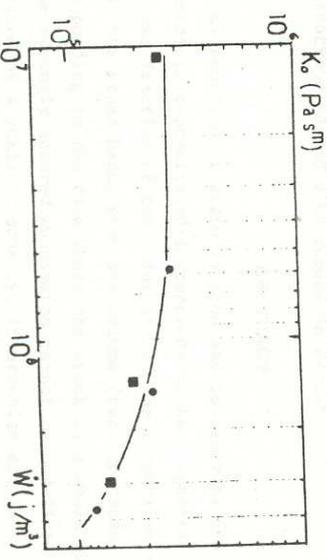


Fig. 20

CONCLUSIONS:

L'utilisation d'un rhéomètre à pré-cisaillement, permettant de fondre un matériau dans des conditions thermomécaniques parfaitement déterminées, puis d'effectuer une mesure de rhéologie capillaire, nous a permis de mieux appréhender le comportement de l'amidon fondu en phase peu hydratée.

L'évolution de la viscosité peut être décrite par une loi-puissance, dans laquelle vont intervenir la température, la teneur en eau et le traitement thermomécanique subi avant la mesure:

$$\eta = K_0(W) e^{E/R(1/T - 1/T_0)} e^{-\alpha MC} |\dot{\gamma}|^{n(T, MC)-1}$$

Le traitement thermomécanique que subit un amidon au cours d'une opération de cuisson-extrusion provoque une dégradation macromoléculaire, que l'on peut estimer à partir de mesures de solubilité ou de viscosité intrinsèque. L'importance de cette dégradation peut être caractérisée en calculant l'énergie mécanique transmise au matériau pendant le traitement. La constance, à température et teneur en eau données, est directement fonction de ce paramètre énergétique

BIBLIOGRAPHIE:

- (1) P.Linko, P.Colonna, C.Mercier; "HISI Extrusion-Cooking" in Adv. Cereal Sci. Technol., 4, 145 (1981)
- (2) J.M.Harper; Extrusion of Food, CRC Press, Boca Raton (1981)
- (3) H.W.Leach; "Gelatinization of Starch" in Starch Chemistry and Technology, R.L.Whistler and E.F.Paschall Eds., Academic Press, New-York (1965)
- (4) J.L.Dublier; Stärke, 33 415 (1981)
- (5) P.Colonna, J.P.Melcion, B.Vergnes, C.Mercier; J. Cereal Sci., 1, 115 (1983)
- (6) M.A.Yacu; "Modelling a Twin-Screw Corotating Extruder" in Thermal Processing and Quality of Food, P.Zeuthen et al. Eds., Elsevier, Amsterdam (1983)
- (7) J.P.Villemaire, J.F.Agassant; Polym. Proc. Eng., 3, 223 (1984)
- (8) J.P.Villemaire, J.F.Agassant; "Influence of Shear and Thermal History on Melt Rheology of PVC" in Interrelations between Processing, Structure and Properties of Polymeric Materials, J.C.Sefaris and R.S.Theocaris Eds., Elsevier, Amsterdam (1984)
- (9) B.Vergnes, J.P.Villemaire, P.Colonna, J.Tayed; soumis pour publication dans J. Food Sci.

20 ans du Groupe Français de Rhéologie - Progrès récents -  
CR 20e Coll G.F.R., Paris, Nov 1985 G.F.R. et L.M.P. 1987

**RHEOLOGIE ET STRUCTURE DES SUSPENSIONS CONCENTREES DE SPHERES DURES**  
THE RHEOLOGY AND THE STRUCTURE OF CONCENTRATED SUSPENSIONS OF  
HARD SPHERES

P. MILLS, P. SNABRE

Laboratoire de Biorhéologie et d'Hydrodynamiques Physico-chimiques  
LA 343 - 2, Place Jussieu  
75005 PARIS - France

RESUME

Une équation d'état rhéologique est proposée pour décrire le comportement de suspensions concentrées isotropes et anisotropes de sphères dures. On montre qu'au-dessous d'une fraction volumique de particules de l'ordre de .2, la suspension peut être considérée comme isotrope. Par contre, quand la fraction volumique tend vers une valeur critique  $\phi_i^*$  correspondant au cas où l'implémentation des sphères dans son ensemble est "isostatique" ( $\phi_i^* = 4/7$ ) la suspension fortement cisailée ne peut plus être modélisée comme un fluide isotrope caractérisé par une viscosité scalaire. Si on tient compte du mouvement brownien la transition structure isotrope-structure anisotrope dépend d'un nombre de Peclet.

ABSTRACT

A rheological equation of state is proposed to describe the behaviour of isotropic and anisotropic concentrated suspensions of hard spheres. It is pointed out that below a volume fraction of the order of .2, the suspension can be considered as isotropic. On the other hand, when the volume fraction tends to a critical value  $\phi_i^*$  corresponding to the case where the stack as a whole is "isostatic" ( $\phi_i^* = 4/7$ ), the strongly sheared suspension cannot be modeled as an isotropic fluid characterized by a scalar viscosity. If brownian motion is taken into account the transition isotropic structure-anisotropic structure depends on a Peclet number.

Communication au Groupe Français de Rhéologie le 28 novembre 1985

Le calcul de la viscosité effective d'une suspension est un des plus anciens et connus des problèmes de la mécanique des fluides. Du travail qu'EINSTEIN présente comme thèse en 1905 /1/ jusqu'à celui de BATCHELOR et GREEN en 1972 /2/, plus d'un demi siècle s'est écoulé. Les articles de BATCHELOR /3/, BRENNER /4/, JEFFREY et ACRIVOS /5/ et RUSSEL /6/ fournissent une revue assez complète des travaux tant expérimentaux que théoriques dans ce domaine.

Si nous considérons les résultats expérimentaux concernant la viscosité relative de suspensions concentrées de sphères dures exprimées en fonction de la fraction volumique de la phase solide, il est surprenant de constater que l'ensemble des points représentatifs ressemble à un nuage au lieu d'une courbe bien définie, en particulier aux fortes fractions volumiques. Deux questions se posent : tout d'abord : pourquoi un tel aspect diffus des résultats expérimentaux ? Ensuite, même s'il est possible de considérer les suspensions comme des fluides homogènes et de leur attribuer les propriétés rhéologiques des fluides, peuvent-elles être décrites grâce à une viscosité scalaire? C'est le propos de cet article d'essayer de répondre à ces questions.

Dans une première partie, nous considérons une suspension isotrope de sphères dures. La condition d'isotropie est remplie quand les vitesses de déformation sont faibles et quand la suspension n'est pas trop concentrée : la limite de validité de cette condition dépend d'un nombre de Péclet ( $Pe = \mu a^3 \dot{\gamma} / kT$ ). Le calcul de l'énergie dissipée dans le fluide suspendant dépend de la microstructure à travers une concentration d'empilement  $\phi_1$ .

Dans une deuxième partie, nous montrons que lorsque la fraction volumique croît jusqu'à la concentration d'empilement  $\phi^*$ , une anisotropie induite par l'écoulement caractérise la microstructure. De larges fluctuations spatiales caractérisées par une microstructure locale anisotrope peuvent apparaître. Cette transition entre un état isotrope et un état anisotrope dépend du type d'interaction entre particules. Bien que les interactions de type colloïdale (DLVO, stérique, aggrégation par pontage, par déplétion...) soient extrêmement importantes dans l'étude rhéologique des suspensions de particules de taille submicrométrique, ce travail se limite à l'introduction des interactions hydrodynamiques et browniennes. La transition entre l'état isotrope et l'état anisotrope est décrite par une simple équation de bilan.

Pour nous résumer, certains résultats de géométrie statistique jouent un rôle prédominant dans notre modèle. Par voie de conséquence, le mouvement brownien peut être introduit ensuite comme un facteur d'"isotropisation" de la microstructure en compétition avec la convection qui tend à générer l'anisotropie. Ce point de vue a quelque analogie avec la conjecture de BERNAL dans son papier sur les liquides purs /7/. De plus, les interactions browniennes entre particules, du type répulsives, peuvent être traduites phénoménologiquement comme une légère correction de la fraction volumique ou de la concentration d'empilement.

#### I - LA VISCOSITE APPARENTE D'UNE SUSPENSION DE SPHERES DURES.

Deux méthodes ont été proposées dans le passé pour calculer la viscosité apparente de suspensions très diluées. La première, introduite par EINSTEIN consiste à évaluer l'énergie dissipée dans la suspension par unité de temps et par unité de volume à celle dissipée dans un fluide de viscosité apparente  $\mu$ . La seconde, introduite par BATCHELOR conduit à une relation entre les moyennes spatiales du tenseur des contraintes et de celui des déformations.

Jusqu'à présent, les suspensions concentrées ont été décrites avec plus ou moins de succès par des formules empiriques contenant un ou plusieurs paramètres libres qui doivent être déterminés expérimentalement ; comme il est souligné dans /5/, de telles formules sont plus utiles pour classer les résultats que pour les prédire.

Nous nous intéressons tout d'abord à une suspension de sphères dures, statiquement homogène, isotrope. Il a été suggéré par DE GENNES /8/ que les amas dynamiques induits par les interactions hydrodynamiques entre particules présentent une similitude avec les amas de percolation. Dans un précédent article /9/, l'un de nous a généralisé cette conjecture aux amas formés à des fractions volumiques au delà de la concentration critique de percolation  $\phi_p$ .

Notre propos est d'estimer l'énergie dissipée dans une cellule élémentaire contenant plusieurs des particules avoisinantes d'un amas transitoire. Le champ de cisaillement au sein de la suspension est défini par  $u_y = 0$ ;  $u_x = \dot{\gamma} y$ .

Nous considérons une cellule sphérique où les particules sphériques de rayon  $a$  sont réparties de façon isotrope autour d'une particule centrale. Les particules extérieures à la particule centrale sont supposées être entourées d'une coquille sphérique de fluide d'épaisseur  $e_1 a$ . Soit  $\phi_0^*$  la fraction volumique d'empilement des sphères incluant les particules et les coquilles de fluide ci-dessus définies. La distance entre la sphère centrale et l'empilement qui l'entoure est  $2e_0 a$  (Figure 1). Les valeurs de  $e_1$  et  $e_0$  ne sont pas indépendantes mais sont soumises à la condition :

$$\phi = \phi_0^* \frac{1}{(1 + e_1)^3 (1 + e_0)} \quad (1)$$

où  $\phi$  est la fraction volumique des particules dans la suspension.

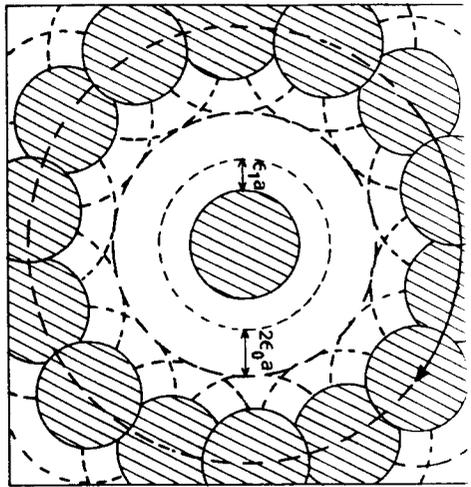


Figure 1

Cellule isotrope transitoire correspondant à un nombre de Peclet  $P_e = \frac{\mu(\phi) a^3 \dot{\gamma}}{kT} \ll 1$ .

[Transient isotropic cell corresponding to a Peclet number  $P_e = \frac{\mu(\phi) a^3 \dot{\gamma}}{kT} \ll 1$ ].

La microstructure étant considérée comme isotrope, nous évaluons maintenant le gradient de vitesse dans le fluide suspendant moyenné sur le volume d'une cellule élémentaire, soit  $\langle \dot{\gamma} \rangle$  :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle = \frac{1 + \epsilon_0 + \epsilon_1}{\epsilon_0 + \epsilon_1} \dot{\gamma} \quad (2)$$

où  $\dot{\gamma}$  est le cisaillement apparent dans tout le volume de la suspension. Nous pouvons donc éliminer la quantité  $\epsilon_0$  entre les équations (1) et (2) :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle = \frac{\dot{\gamma}}{1 - \frac{\phi}{\phi_0} (1 + \epsilon_1)^2} \quad (3)$$

L'énergie dissipée  $W_D$  par unité de volume et par unité de temps dans la suspension est celle dissipée dans le fluide suspendant :

$$W_D = \mu_0 [ \langle \dot{\gamma} \rangle ]^2 (1 - \phi) = \frac{\mu_0 (1 - \phi) \dot{\gamma}^2}{[1 - \frac{\phi}{\phi_0} (1 + \epsilon_1)^2]^2} \quad (4)$$

où  $\mu_0$  est la viscosité du fluide suspendant.

Nous supposons maintenant que l'énergie dissipée obéit à un principe de dissipation minimale dans chaque cellule élémentaire. Le principe de dissipation extrême pour le taux d'énergie dissipée est bien établi pour les suspensions homogènes isotropes dans le cas des écoulements rampants /10/. Nous citerons une utilisation de ce principe dans le cas particulier d'un écoulement dans les tubes cylindriques par QUEMADA /11/.

L'application de ce principe à la formulation du taux d'énergie dissipée exprimée dans l'équation (4) doit être associée avec une relation exprimant une contrainte pour la quantité :

$$\phi^* = \frac{\phi_0}{(1 + \epsilon_1)^2}$$

$$\text{Soit } \phi^* \leq \phi_1^* \quad (5)$$

où  $\phi_1^*$  est la borne supérieure de la fraction volumique compatible avec l'écoulement d'une suspension isotrope. Dans un article très intéressant /12/, DIXMIER prédit, grâce à des arguments de géométrie statistique, parmi l'ensemble des emplacements stables (c'est à dire interdisant l'écoulement des sphères) l'existence d'un emplacement de concentration minimum  $\phi_1^* = 4/7$ . Cet emplacement est appelé isostatique. Selon DIXMIER, la coordonnée lui correspondant serait égale à  $z^* = 6$ . La valeur critique  $\phi_1^*$  pour une suspension isotrope correspond au seuil de transition entre état fluide et état solide.

Finalement le taux d'énergie dissipée est :

$$W_D = \frac{\mu_0 \dot{\gamma}^2 (1 - \phi)}{(1 - \frac{\phi}{\phi_1^*})^2} \quad (6)$$

On en déduit immédiatement l'expression de la viscosité apparente :

$$\mu = \mu_0 \frac{1 - \phi}{(1 - \frac{\phi}{\phi_1^*})^2} \quad (7)$$

expression dont la forme générale avait déjà été proposée par un des auteurs dans /9/.

Nous remarquons qu'un développement de l'équation (7) en fonction de la fraction volumique conduit à :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 2,5\phi + 5,7\phi^2 + O(\phi^3)$$

Nous pouvons anticiper la discussion de la deuxième partie de ce papier en discutant les conditions physiques nécessaires pour pouvoir considérer la suspension comme isotrope. Dès que la suspension s'écoule, les fonctions de distribution de paires radiales et angulaires ne sont plus isotropes /13/. Mais pour de très faibles taux de cisaillement, le flux de diffusion thermique des particules est susceptible de remplir les régions déplétées. Ainsi, l'expression de la viscosité donnée dans // n'est valable que dans le domaine des faibles taux de cisaillement.

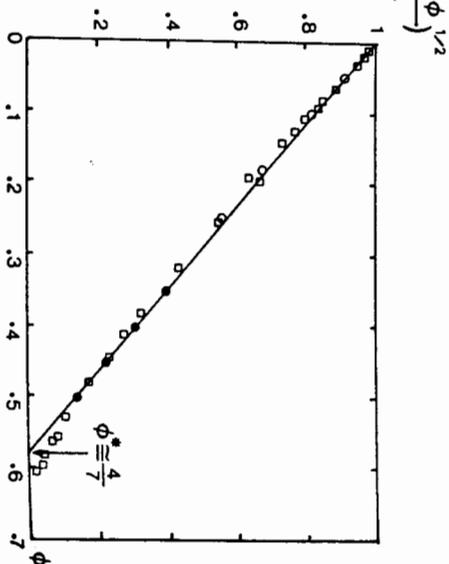
L'expression (7) peut être mise sous une autre forme :

$$\gamma = \left( \frac{1 - \phi}{\mu_r} \right)^{1/2} = 1 - \frac{\phi}{\phi_1^*} \quad (8)$$

La figure 2 permet de comparer les résultats expérimentaux (lorsque  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ) de différents auteurs et l'expression théorique (8). On constate que l'accord est excellent jusqu'à la concentration  $\phi = 0,53$  ; au delà, les points expérimentaux correspondraient à des concentrations d'empilement supérieures à  $\phi_1^*$ . Nous pensons que cette divergence est due au fait qu'il est très difficile de réaliser une distribution parfaitement aléatoire des sphères au voisinage de telles concentrations.

Figure 2 : Comparaison entre la courbe théorique (en trait plein) donnée par l'équation (8) et les résultats expérimentaux de KRIEGER ●, MARON ○, et de KRUIFF □

[Figure 2 : The theoretical curve given by equation (8) (full line) is compared to experimental data from KRIEGER ●, MARON ○ and de KRUIFF □.]



De nombreuses expériences /16, 17, 18/ ont mis en évidence le comportement non-newtonien des suspensions de particules browniennes et plus précisément le caractère rhéofluidifiant de ces suspensions dans le cas où seul le mouvement brownien et les interactions hydrodynamiques sont pris en compte : lorsqu'il y a compétition entre interactions répulsives et attractives, une instabilité allée à un comportement rhéopaisissant peut apparaître aux forts taux de cisaillement /14/.

Pour rendre compte du caractère rhéofluidifiant, nous proposons le modèle suivant : quand la fraction volumique  $\phi$  est augmentée jusqu'à la fraction critique  $\phi_1^*$  correspondant à une transition analogue à la transition de phase liquide-solide, de larges fluctuations de particules ordonnées peuvent apparaître dans la suspension en écoulement. Nous considérons deux ensembles distincts de particules : celles qui appartiennent à des amas transitoires anisotropes dont la fraction relative est  $n_a$  et celles appartenant aux microstructures transitoires isotropes. Les échanges dynamiques entre ces deux phases sont caractérisés par deux temps. Soient  $\tau_1$  le temps d'"isotropisation" des structures ordonnées et  $\tau_a$  le temps de formation de structures ordonnées anisotropes.

$\tau_1$  est le temps de diffusion d'une particule sur une distance de l'ordre du rayon  $a$  d'une particule élémentaire :

$$\tau_1 = a \frac{\mu(\phi)a}{kT} \quad (8)$$

où  $\mu(\phi)$  est la viscosité effective autour de la particule.

$\tau_a$  est proportionnel à l'inverse du taux de cisaillement :

$$\tau_a = \alpha_2 \dot{\gamma}^{-1} \quad (9)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des constantes.

Nous décrivons ces processus par une équation de bilan très simple gouvernant les taux d'échange entre les deux phases.

$$\frac{dn_a}{dt} = (n_0 - n_a) \tau_a^{-1} - n_a \tau_1^{-1} \quad (10)$$

où  $n_0$  est la fraction relative des particules appartenant à des structures anisotropes à un taux de cisaillement infini.

res cisailée qu'une surface plane ou courbe pouvait induire dans son voisinage immédiat un ordre qui se propage sur une longue distance /15/. Ici, ce phénomène est généralisé à toute structure ordonnée qui stimule la formation de structures semblables dans son voisinage. La fraction  $n_0$  dépend alors de la fraction volumique par l'intermédiaire de la coordonnée moyenne  $z$ . Soit  $z^*$  la coordonnée maximale correspondant à une distribution aléatoire ( $\phi = \phi_1^*$ ) d'une suspension fluide. Toute particule de coordonnée  $z$  supérieure à  $z^*$  doit appartenir à une structure ordonnée sinon il pourrait exister localement des domaines où la viscosité serait infinie.

En conséquence, on peut supposer que la fraction  $n_0$  varie comme :

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{z}{z^*} & ; & & z \leq z^* & ; & \phi \leq \phi_1^* \\ n_0 &= 1 & ; & & z > z^* & ; & \phi > \phi_1^* \end{aligned}$$

Certains arguments reposant sur la structure d'une suspension concentrée développée dans /9/ conduisent à évaluer  $z$  en fonction de la concentration et d'une dimension fractale  $D$  caractérisant la structure des amas transitoires ;

$$n_0 = \frac{z}{z^*} = \frac{(\frac{\phi}{\phi_1^*})^{\frac{1}{3-D}}}{\phi_1^*} \quad (11)$$

Pour des cisaillements très grands ( $Pe \gg 1$ ) et des concentrations supérieures à .55, il a été démontré par des expériences de diffraction de la lumière /14/ que la suspension était complètement structurée en couches (Figure 3). L'empilement maximum d'une telle suspension autorisant un écoulement dans six directions est

$$\phi_a^* = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = .67$$

Au delà de cet empilement la suspension devient solide pour des raisons de géométrie. A l'empilement anisotrope  $\phi_a^*$  correspond la viscosité  $\mu_a$  atteinte pour les très grands nombres de Peclet :

$$\mu_a = \frac{\mu_0(1-\phi)}{(1-\phi/\phi_a^*)^2}$$

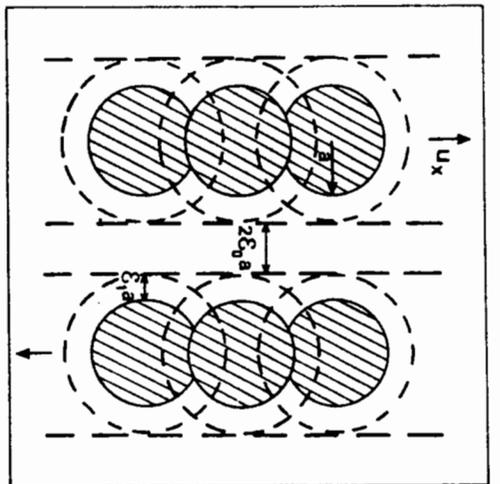


Figure 3 : Cellule transitoire anisotrope correspondant à  $Pe \gg 1$ .

[Figure 3 : Transient anisotropic cell corresponding to  $Pe \gg 1$ ].

### III - LA VISCOSITE APPARENTE D'UNE SUSPENSION DE SPHERES DURES BROMIENNES.

La solution stationnaire pour la quantité  $n_a$  peut être déduite de l'équation (10) :

$$n_a = \frac{n_0}{1 + \theta} \quad (12)$$

où  $\theta$  est déduit des équations (8) et (9) :

$$\theta = \frac{\tau_a}{\tau_a} = \alpha \frac{\mu(\phi)_a^{\frac{3}{2}} \dot{\gamma}}{kT}$$

Le taux d'énergie dissipée dans la suspension est calculé comme la somme de l'énergie moyenne dissipée dans les structures isotropes et les structures anisotropes. Soient  $\dot{\gamma}_i$  et  $\dot{\gamma}_a$  les taux de cisaillement dans ces deux types de structures et  $\mu_i$  et  $\mu_a$  les viscosités leur correspondant. Soit  $\mu$  la viscosité apparente de la suspension, la continuité des contraintes entraîne :

$$\mu \dot{\gamma} = \mu_i \dot{\gamma}_i = \mu_a \dot{\gamma}_a \quad (13)$$

$\gamma_i$  et  $\gamma_a$  grâce à (13) :

$$\langle W_D \rangle = \mu \gamma^2 (1-\phi) = \left[ \frac{(1-\mu_a)^2 \mu_a}{\mu_i} + \frac{\mu_a}{\mu} \right] \mu^2 \gamma^2 (1-\phi)$$

On en déduit immédiatement la viscosité apparente  $\mu$  :

$$\mu = \left[ \frac{1-\mu_a}{\mu_i} + \frac{\mu_a}{\mu} \right]^{-1} \quad (14)$$

$$\text{avec } \mu_i = \frac{\mu_0(1-\phi)}{[1-\phi/\phi_a^*]^2} ; \quad \mu_a = \frac{\mu_0(1-\phi)}{[1-\phi/\phi_a^*]^2}$$

La viscosité apparente donnée par l'équation (14) a été comparée aux résultats de KRIEGER sur la figure 4.

Pour conclure, nous insisterons sur le fait que la viscosité d'une suspension de sphères browniennes n'a la même signification physique que le coefficient de transport défini pour les liquides purs qu'à faible concentration et pour un nombre de Peclet inférieur à l'unité. Pour des suspensions concentrées et un grand nombre de Peclet, la microstructure devient anisotrope et la viscosité apparente dépend de l'écoulement imposé.

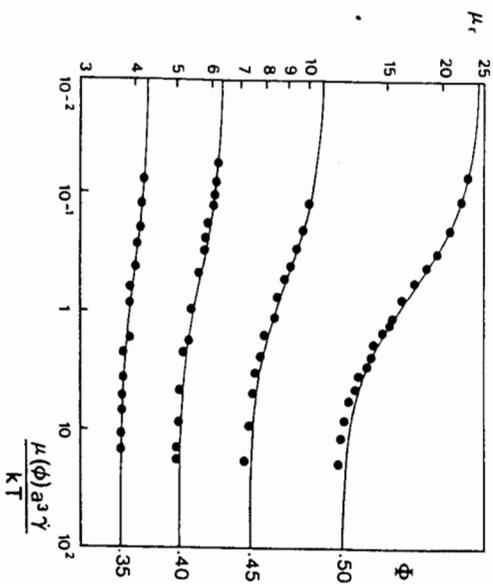


Figure 4 : Viscosité apparente d'une suspension Brownienne en fonction du nombre de Peclet  $P_e = \frac{\mu(\phi)a^3\gamma}{kT}$  (eq.14) comparée aux résultats expérimentaux de KRIEGER /16/.  
[Figure 4 : Apparent viscosity of a brownian suspension as a function of the Peclet number  $P_e = \frac{\mu(\phi)a^3\gamma}{kT}$  (eq.14) compared to experimental data from KRIEGER /16/].

#### References

- /1/ EINSTEIN A., Ann.Phys.Leipzig, 19 (1906) 289 and ibid 34 (1911) 591.
- /2/ BATCHELOR G.K. and GREEN J.T., J.Fluid.Mech. 56 (1972) 401.
- /3/ BATCHELOR G.K., Ann. Rev.Fluid Mech. 6 (1974) 227.
- /4/ BRENNER H,Int.J.Multiph.Flow 1 (1974) 195.
- /5/ JEFFREY D.J. and ACRIVOS A., AICHE.J. 22 (1976) 417.
- /6/ RUSSEL W.B., J.Rheol. 24 (1980) 287.
- /7/ BERNAL J.D., Proc.Roy.Soc. A 280 (1964) 299.
- /8/ De GENNES P.G., J.Physique 40 (1979) 783.
- /9/ MILLS P., J.Physique Lett. 46 (1985) L301.
- /10/ KELLER B., RUBENFELD L., MOLYNEUX J., J.Fluid Mech. 30 (1967) 97.
- /11/ QUEMADA D., Rheol.Acta. 16 (1977) 82.
- /12/ DIXMIER M., J.Physique 39 (1978) 873.
- /13/ BOSSIS G., BRADY J., J.Chem.Phys. 80 (10) (1984) 5141.
- /14/ HOFFMAN R.L., Trans.Soc.Rheol. 16 (1972) 155.
- /15/ MILLS P., not published.
- /16/ KRIEGER I.M., Adv. Colloid.Interface Sci. 3 (1972) 111.
- /17/ MARON S.H. and LEVY-PASCAL A., J. Colloid Sci. 10 (1955) 494.
- /18/ de KRUIJF C.G., VAN IERSEL E.M.F., VRIJ A. and RUSSEL W.B., J. Chem. Phys. 83 (1985) 4717.

UNE NOUVELLE APPROCHE DE THERMODYNAMIQUE MACROSCOPIQUE POUR LA  
RHÉOLOGIE DES MATÉRIAUX A RÉPONSE DIFFÉRÉE : LE FORMALISME PAR  
VARIABLES NATURELLES

A NEW APPROACH OF MACROSCOPIC THERMODYNAMICS FOR THE RHEOLOGY  
OF TIME-DELAYED MATERIALS: THE FORMALISM BY NATURAL VARIABLES

C. HUERT

Ecole Nationale des Ponts-et-Chaussées  
Centre d'Enseignement et de Recherches en Analyse des Matériaux  
CERAM-ENPC, La Courtille, BP 105  
93194 NOISY LE GRAND Cédex

RÉSUMÉ

On développe quelques aspects d'un nouveau formalisme proposé récemment par l'auteur pour l'étude en variables macroscopiques des corps à réponse différée. Ce formalisme repose sur la considération d'un ensemble d'équations universelles comprenant, outre les lois de conservation de la thermomécanique classique, l'équation du bilan entropique. L'entropie massique est retenue, en plus de la déformation et de l'énergie interne massique, pour former avec elles une combinaison de variables thermodynamiques indépendantes, dénommée la combinaison naturelle. Les variables dépendantes sont alors la contrainte, la température, le courant de chaleur et le débit massique de la production d'entropie. On fait passer sur cette dernière l'irrégularité de CLAUSIUS classique.

Une propriété fondamentale de ce formalisme est que, dans les lois du comportement thermorhéologique reliant la contrainte et la température à la combinaison naturelle de variables indépendantes, les fonctionnelles de prolongation (au sens de COLEMAN) sont nécessairement nulles. Il devient alors possible d'exprimer ces lois de comportement par des équations du type différentiel au sens de RIVLIN-NOLL-TRUESDELL, i.e. ne faisant intervenir, dans l'expression des variables dépendantes, que des valeurs actuelles des variables indépendantes et de leurs dérivées temporelles et/ou gradients de différents ordres. Cette propriété s'étend à d'autres combinaisons complètes de variables indépendantes, déduites de la combinaison naturelle par des transformations appropriées. Ce formalisme permet donc d'éviter le recours à l'utilisation de fonctionnelles temporelles de l'histoire antérieure, ce que l'on vérifie sur des exemples de la viscoélasticité classique, dont un est étudié ici en détail.

Communication au Groupe Français de Rhéologie le 28 novembre 1985

ABSTRACT

We develop here a few aspects of a new formalism that we have proposed recently for the study in macroscopic variables of bodies with delayed response. This formalism lies on the consideration of a set of universal equations including the balance equation for the entropy in addition to the conservation equations used as field equations in classical thermomechanics. The entropy density is retained, in addition to the strain and to the internal energy density, to form with those a set of independent thermodynamic variables. We have called it the natural set. The dependent variables are then the stress, the temperature, the heat current vector and the rate of the production of entropy. The latter is submitted to the classical CLAUSIUS inequality.

A fundamental property of this formalism is that the continuation functionals in COLEMAN sense are necessarily equal to zero. It becomes then possible to express the constitutive equations by laws that are of the differential type in the sense of RIVLIN-NOLL-TRUESDELL. That is, only present values of the independent variables and of their time derivatives or gradients are involved in the constitutive equations as arguments of ordinary functions. This property extends to other completed sets of independent variables, derived from the natural set through appropriate transformations. This allows to avoid the use of functionals of the previous history. This can be verified on examples of classical viscoelasticity, one of which is studied here in details.

1. INTRODUCTION

Dans les approches classiques, les lois de comportement des matériaux à réponse différée se traitent, suivant le type de variables que l'on prend en considération, par deux méthodes distinctes. La première, qui n'utilise que des variables macroscopiques, consiste à exprimer les variables dépendantes sous forme de fonctionnelles de l'histoire antérieure d'un jeu de variables (généralement la déformation et la température) prises comme variables indépendantes.

La seconde consiste à remplacer ces fonctionnelles par des fonctions des valeurs actuelles des mêmes variables et de leurs dérivées temporelles, ainsi que des valeurs actuelles d'un certain nombre de variables supplémentaires appelées variables internes ou cachées. Nous avons discuté en [1] [2] certains aspects de ces formalismes classiques. Nous avons introduit récemment, [2] [3] [4] [5] [6], un nouveau formalisme qui n'utilise que des variables macroscopiques, mais permet cependant d'éviter le recours aux fonctionnelles. Nous développons ici certains aspects de ce formalisme que, pour les raisons qui ont été exposées en [3], nous avons nommé formalisme par variables naturelles. Nous insistons sur une propriété fondamentale de ce formalisme : la nullité de la fonctionnelle de prolongation. Nous donnons également quelques exemples simples correspondant à des modèles rhéologiques classiques dont un, le modèle de MAXWELL, est étudié en détail.

EXPRESSION D'UNE DÉPENDANCE PAR RAPPORT A UN ENSEMBLE  
DE DEUX VARIABLES ET NOTATIONS

$$(1.1) \quad \sigma = \underline{g}(a, b)$$

$$(1.2) \quad \sigma = \underline{g}(a, b, \dot{a}, \dot{b}, \dots, a^{(n)}, b^{(n)}; H^-(a, b))$$

avec

$$(1.3) \quad H^-(a, b) = \left\{ \begin{array}{l} a(\tau), b(\tau) \mid -\infty < \tau < t \\ \vdots \\ a(\tau); b(\tau) \end{array} \right\}_{\tau=-\infty}^{\tau=-\infty}$$

et

$\sigma, a, b$  : valeurs actuelles à l'instant  $t$

$\dot{a}, \dot{b}, \dots, a^{(n)}$  : dérivées temporelles actuelles de  $a$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

$\rho$  : masse volumique

$\tau = 1/\rho$  : volume massique

$v$  : vitesse de point matériel

$\sigma$  : tenseur contrainte

$F$  : densité des forces de volume

$u$  : énergie interne massique locale

$e$  : tenseur déformation

$r$  : densité volumique des apports extérieurs d'énergie non mécanique

$q$  : vecteur courant de chaleur

$s$  : entropie massique locale

$\dot{e}$  : débit massique de la production d'entropie

$T$  : température absolue

2. NOTION DE FONCTIONNELLE DE PROLONGATION

Etant donné l'importance de cette notion pour la suite, rappelons tout d'abord la définition de la fonctionnelle de prolongation au sens classique de COLEMAN [7] telle qu'elle a été utilisée par exemple par TRUESDELL [8], DAY [9] et MANDEL [10] [11].

Considérons le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  comme fonctionnelle  $\underline{\sigma}$  de deux variables  $a$  et  $b$ . Nous utiliserons les notations précisées au Tableau 1 pour expliciter la forme prise par la dépendance de  $\underline{\sigma}$  par rapport à ses arguments. On distinguera ainsi les dépendances par rapport aux valeurs actuelles des arguments (ici  $a$  et  $b$ ), par rapport à celles de leurs dérivées temporelles à droite (ici  $\dot{a}^{(k)}$  et  $\dot{b}^{(k)}$ ) jusqu'à un certain ordre  $n$ , et par rapport à l'histoire antérieure notée  $H^-(a, b)$  jusqu'à l'instant  $t^-$ .

La fonctionnelle de prolongation  $\underline{\sigma}_b^a$  apparaît dans la forme explicite (Eq. (2.1) du Tableau 2) de la dérivée temporelle  $\dot{\underline{\sigma}}$  de  $\underline{\sigma}$ . Elle exprime la vitesse de variation de  $\underline{\sigma}$  lorsque les valeurs actuelles  $a$  et  $b$  sont fixées à partir d'un certain instant  $t^-$ , et donc aussi celles de toutes leurs dérivées temporelles ( $\dot{a}, \dot{b}$  à  $a^{(n)}, b^{(n)}$ ). Cette fonctionnelle de prolongation exprime donc la propriété de certains matériaux d'avoir une réponse différée en contrainte lorsqu'on fixe les arguments  $a$  et  $b$ . Un exemple est fourni par le cas de la viscoélasticité linéaire classique (Eq. (2.5) du Tableau 2, où  $\dot{\epsilon}$  est la déformation et  $\tau$  la fonction relaxation).

Pour un même jeu  $(a, b)$  de variables indépendantes, certains matériaux pourront posséder une réponse différée, et donc une fonctionnelle de prolongation. C'est le cas pour le modèle de MAXWELL isotherme en prenant pour  $a$  la déformation et pour  $b$  la température  $T$  (constante). D'autres matériaux seront dépourvus d'une telle réponse différée dans ce jeu de variable. Ceci correspond, à la classe des comportements qu'en [1] nous avons nommés markoviens. Pour les matériaux ainsi dépourvus d'une telle réponse différée, la fonctionnelle de prolongation est nulle. Un exemple classique est fourni par le modèle de KELVIN isotherme, pour lequel la contrainte dépend de  $\epsilon$  et  $\dot{\epsilon}$  actuels, mais pas de l'histoire antérieure (Eq. (2.7) du Tableau 2). Ce modèle est dépourvu de réponse différée (sa relaxation est instantanée, cf. [1]). En conséquence, sa fonctionnelle de prolongation  $\underline{\sigma}_b^a$  est nulle (par contre sa duale  $\underline{\epsilon}_a^b$  ne le sera pas).

TABLÉAU 2

FONCTIONNELLE DE PROLONGATION

$$(2.11) \quad \sigma = \frac{\partial Q}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial Q}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{a}} \ddot{a} + \dots + \frac{\partial Q}{\partial \dot{a} \dot{b}}$$

a et b fixés  $\forall t > t_0 \Rightarrow$

$$(2.22) \quad \dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{a} \dot{b}} \quad \forall t > t_0$$

$\dot{\sigma}_{ab}$  : fonctionnelle de prolongation

Exemple : Viscoélasticité linéaire isotherme

$$(2.33) \quad \sigma = \int_0^t r(t-u) d\epsilon(u) = \underline{g} \quad [ \epsilon, \underline{H}^{-1}(\epsilon) ]$$

$$(2.4) \quad \dot{\sigma} = r(0) \dot{\epsilon} + \int_0^t \frac{\partial r(t-u)}{\partial t} d\epsilon(u) \\ = r(0) \dot{\epsilon} + \dot{\sigma}_{\epsilon}$$

$$(2.5) \quad \dot{\sigma}_{\epsilon} = \int_0^t \frac{\partial r(t-u)}{\partial t} d\epsilon(u) \quad (\text{fonctionnelle de prolongation})$$

$$(2.6) \quad \dot{\epsilon} = 0 \quad \forall t > t_0 \Rightarrow \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{\epsilon} \quad \forall t > t_0$$

Contreexemple : Modèle de KELVIN isotherme (comportement markovien au sens de (1)).

$$(2.7) \quad \sigma = G\epsilon + \eta \dot{\epsilon} \Rightarrow$$

$$(2.8) \quad \dot{\sigma} = G \dot{\epsilon} + \eta \ddot{\epsilon} \quad ; \quad \dot{\sigma}_{\epsilon} = 0$$

3. LES BILANS DE LA THERMOMÉCANIQUE : DÉFINITION DU FORMALISME PAR VARIABLES NATURELLES

Dans l'approche classique de la thermomécanique, le système d'équations locales pris en considération est formé de quatre équations universelles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. On y ajoute des équations de comportement ainsi que des conditions initiales et aux limites.

On fait passer sur l'ensemble l'inégalité de CLAUSIUS classique exprimant le caractère non-négatif du débit de la production d'entropie. Après l'élimination des apports de chaleur entre l'équation de conservation de l'énergie et l'équation locale d'un bilan (non conservatif) de l'entropie, bilan non explicitement utilisé par ailleurs, on met classiquement cette inégalité sous la forme dite de CLAUSIUS-DUHEM, utilisée pour obtenir des restrictions dans les formes possibles des lois de comportement.

Dans notre formalisme par variables naturelles, nous avons proposé au contraire d'inclure explicitement le bilan entropique dans le système des équations locales de champ à résoudre. L'ensemble des variables thermomécaniques (y compris la température) apparaît alors explicitement dans l'ensemble des équations universelles, avant même qu'on soit passé à l'écriture des lois de comportement caractérisant le ou les matériau(x) considéré(s). Dans ce formalisme, le débit de la production massique d'entropie doit aussi être considéré comme une variable du problème à résoudre. Sur cette variable, pose l'inégalité de CLAUSIUS classique. Le système des relations universelles de la thermomécanique dans notre formalisme par variables naturelles (en abrégé "formalisme VARNAV") est présenté sur le Tableau 3. Les notations sont celles, classiques, que nous avons utilisées en [12] dans notre étude des matériaux hétérogènes. L'équation (3.9) rappelle la forme, classique, de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM, qui reste inchangée dans le nouveau formalisme.

4. LOIS DE COMPORTEMENT DU FORMALISME VARNAV

Dans l'approche de la thermomécanique classique, il est possible de relier la combinaison des variables indépendantes, prises en argument des fonctions ou fonctionnelles entrant dans l'expression des lois de comportement, aux équations universelles de conservation. Ceci apparaît

TABLEAU 3  
RELATIONS UNIVERSELLES DU FORMALISME VARNAT

<u>Bilans</u>	
(3.1)	$\rho \dot{t} = \text{div } v$ (masse)
(3.2)	$\rho \dot{v} = f + \text{div } \sigma$ (quantité de mouvement)
(3.3)	$\sigma^T = \sigma$ (moment cinétique)
(3.4)	$\rho \dot{u} = \sigma \dots \dot{\epsilon} + r - \text{div } q$ (énergie)
(3.5)	$\rho \dot{s} = \rho \xi + \frac{r}{T} - \text{div } \frac{q}{T}$ (entropie)
<u>Inégalité de CLAUSIUS</u>	
(3.6)	$\xi > 0$ dans tout processus thermodynamiquement admissible
soit plus précisément :	
(3.7)	$\xi > 0$ dans tout processus irréversible
(3.8)	$\xi = 0$ dans tout processus réversible et à l'équilibre.
<u>Inégalité de CLAUSIUS-DUHEM</u>	
(3.9)	$\xi = \dot{s} - \frac{1}{T} \dot{u} + \frac{q}{\rho T} \dots \dot{\epsilon} + q \cdot \text{grad } \frac{1}{T} > 0$
avec	
- produit tensoriel contracté une fois	
- produit tensoriel contracté deux fois.	

bien dans la représentation entropique (cf. [13] [7] [1]) où les variables indépendantes sont (outre la masse volumique  $\rho$  ou son inverse le volume massique  $\tau$  associés à la conservation de la masse) la déformation (partie symétrique du gradient des déplacements) que l'on peut associer à la conservation de quantité de mouvement (3 degrés de liberté en translation), et l'énergie interne  $u$ , que l'on associe naturellement à la conservation de l'énergie.

En formalisme VARNAT, on dispose d'un bilan supplémentaire : le bilan entropique. Ceci conduit à ajouter  $s$ , l'entropie massique locale à la combinaison classique  $(\tau, \epsilon, u)$  de variables indépendantes. On obtient ainsi la combinaison fondamentale  $(\tau, \epsilon, u, s)$  du formalisme VARNAT. Nous l'avons nommée combinaison naturelle de variables indépendantes, pour des raisons qui sont maintenant évidentes : chacune d'elle est associée à l'un des 4 bilans universels non dégénérés. Ici, le moment cinétique ne fournit que le cas dégénéré de la symétrie du tenseur contrainte du fait que nous considérons des milieux non polaires. Il n'en serait plus de même en théorie micropolaire. Au moins une variable supplémentaire, correspondant aux degrés de liberté interne en rotation, devrait alors être introduite.

Les variables dépendantes VARNAT qui s'introduisent dans le formalisme sont alors la contrainte  $\sigma$ , le vecteur courant de chaleur  $q$ , la température  $T$  et le débit massique  $\xi$  de la création d'entropie. Pour un matériau particulier donné, la forme précise des équations de comportement correspondante pourra a priori faire apparaître, par rapport à chacune des variables indépendantes  $(\tau, \epsilon, u, s)$ , les diverses formes de dépendance par rapport aux valeurs actuelles de ces variables et de leurs dérivées temporelles, ainsi que par rapport à leurs histoires antérieures, telles qu'elles ont été explicitées sur le Tableau 1 sur des variables  $a$  et  $b$  non spécifiées.

On pourra de même expliciter leur dérivée temporelle première, et introduire a priori leurs fonctionnelles de prolongation.

Par exemple, pour la contrainte, on introduira a priori la fonctionnelle de prolongation  $\hat{\sigma}_{\tau; u, s}$ .

Pour un système fermé,  $\tau$  se déduit d'une valeur de référence  $\tau_0$  (par exemple initiale) jouant le rôle d'un paramètre, et de la déformation  $\epsilon$  (dont la trace exprime la variation de volume par rapport à l'état de référence). Les variables indépendantes se réduisent alors à  $(\epsilon, u, s)$  et la fonctionnelle de prolongation correspondante s'écrit  $\hat{\sigma}_{\epsilon; u, s}$ .

Cependant, nous avons montré, grâce à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEN rappelée dans l'Eg. (3.9) du Tableau 3, que nécessairement la fonctionnelle de prolongation  $\sigma_{\epsilon, u, s}$  est nulle. Cette propriété fondamentale résulte du fait que, s'il en était autrement, on aurait un processus irréversible ( la relaxation adiabatique différée) qui se ferait sans production d'entropie (puisque aussi isentropique par hypothèse), ce qui contredirait la forme précise (3.7) du 2e principe pour les processus irréversibles.

Il en résulte que, contrairement au formalisme classique, on peut dans le formalisme VARNAT envisager de prendre des lois de comportement de type markovien (cf. l'exemple du modèle de Kelvin rappelé plus haut) pour exprimer des comportements à réponse différée dans l'expérience de relaxation adiabatique.

Les diverses formes que l'on peut donner à l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEN par des substitutions entre variables dépendantes et variables indépendantes permet de transférer cette propriété fondamentale aux lois de comportements résultant d'autres choix des variables indépendantes, déduites des variables de la combinaison naturelle par les transformations de Legendre classiques. Elles pourront ainsi faire intervenir des fonctions de MASSIEU au sens de [13], ou les fonctions thermodynamiques classiques que sont l'énergie libre, l'enthalpie et l'enthalpie libre (cf. [4], [6]). Dans la suite nous allons considérer un cas faisant intervenir l'énergie libre qui, dans les expériences isothermes, se prête à une interprétation physique concrète.

#### 5. LA COMBINAISON (E, T, f) ET LE CAS ISOTHERME

Considérons la combinaison de variables indépendantes (E, T, f) où, par rapport à la combinaison naturelle (E, u, s), la température T remplace u et l'énergie libre massique f remplace l'entropie massique s. La puissance mécanique dissipée D définie par (4.1), est soumise, d'après (3.9) à la relation universelle (4.2) (Tableau 4). En outre, on doit la considérer comme strictement positive dans toute évolution irréversible (Inéquation (4.5)). L'introduction de l'énergie libre f (Eg. (4.4)), transformée de Legendre de u par rapport à T, permet de la mettre sous la forme (4.3).

Pour la contrainte, la loi de comportement a priori sera, en variables (E, T, f) donnée par (4.6). La propriété fondamentale indique alors que

TABLEAU 4

#### EXPRESSION VARNAT DE LA CONTRAINTE DANS LA COMBINAISON (E, T, f)

Expressions de la puissance mécanique dissipée :

$$(4.1) \quad D = T \left( \dot{\epsilon} - q \cdot \text{grad} \frac{1}{T} \right) \quad (\text{définition})$$

$$(4.2) \quad D = - \left( \dot{u} - T \dot{s} - \sigma \dots \dot{\epsilon} \right) \quad (\text{bilan entropique})$$

$$(4.3) \quad D = - \left( \dot{f} + s \dot{T} - \sigma \dots \dot{\epsilon} \right)$$

avec

$$(4.4) \quad f = u - Ts \quad (\text{Energie libre})$$

$$(4.5) \quad D > 0 \quad \forall \text{ évolution irréversible} \quad (2^e \text{ Principe})$$

Loi de comportement a priori en combinaison (E, T, f).

$$(4.6) \quad \sigma = \sigma(E, T, f)$$

Propriété fondamentale

$$(4.7) \quad \sigma_{E, T, f} = 0$$

Loi de comportement en variables explicites (markovienne)

$$(4.8) \quad \sigma = \sigma(E, T, f, \dot{\epsilon}, \dot{T}, \dot{f}, \dots, \epsilon^{(n)}, T^{(n)}, f^{(n)}).$$

La fonctionnelle de prolongation  $\sigma^* \epsilon T f$  est nulle (Eq. (4.7)). Ceci peut s'établir directement puisque, s'il en était autrement, on aurait une relaxation différée isotherme ( $\dot{\epsilon} = \dot{T} = 0$ ) qui, étant aussi iso-énergie libre par hypothèse ( $\dot{f} = 0$ ) se ferait à  $D = 0$  d'après (4.3).

Ceci est impossible dès que l'on admet qu'une relaxation différée isotherme ( $\dot{\epsilon} = \dot{T} = 0$ ), si elle a réellement lieu, s'accompagne nécessairement de dissipation d'énergie. Par contre, si on fait l'hypothèse supplémentaire  $\dot{f} = 0$ , les mécanismes internes à l'origine de la relaxation différée se trouvent bloqués et la contrainte n'évolue plus. Ceci correspond bien à  $\sigma^* \epsilon T f = 0$  (la relaxation isotherme différée cesse dès que, en outre, on fixe l'énergie libre à sa valeur atteinte à un certain instant). On a alors simultanément  $\dot{\sigma} = 0$  et  $D = 0$ , ce qui est compatible et correspond (après relaxation instantanée éventuelle dont nous avons montré en [1] qu'elle se fait sans dissipation d'énergie) à la situation de l'équilibre figé (par blocage des mécanismes d'évolution interne).

Dans le cas isotherme,  $T$  n'est plus qu'un paramètre maintenu constant, et ses dérivées temporelles, restant nulles constamment, n'apparaissent plus. C'est le cas que nous considérons dans l'exemple qui suit.

6. EXEMPLE : LE MODELE DE MAXWELL UNIDIMENSIONNEL

Considérons, comme cas d'application le plus simple, le modèle rhéologique classique qu'est le modèle de MAXWELL unidimensionnel en évolution isotherme (Tableau 5).

L'expression par fonctionnelle linéaire (intégrale simple) qu'a  $\sigma$  dans le formalisme classique est rappelée en (5.1), tandis que (5.2) et (5.3) font apparaître les expressions particulières qu'ont dans ce cas, en fonction de  $\sigma$ , l'énergie libre  $f$  et la dissipation isotherme  $D$ .

Les lois de comportement correspondantes du formalisme VARNAT sont fournies en (5.4). On constate que, pour le MAXWELL unidimensionnel,  $\sigma$  est bien une fonction ordinaire des valeurs actuelles de  $f$ ,  $\dot{f}$  et  $\dot{\epsilon}$ . Quant à la dissipation isotherme  $D$ , elle est ici fonction de  $f$  seule (Eq. (5.5)). Les deux grandeurs  $\sigma$  et  $D$  jouissent donc bien de la propriété fondamentale prédite par la théorie générale : leurs fonctionnelles de prolongation sont nulles. En outre, elles sont bien du type markovien considéré en conséquence comme envisageable pour les matériaux dont la réponse instantanée ne dépend pas de l'histoire

TABLEAU 5

MODELE DE MAXWELL ISOTHERME UNIDIMENSIONNEL

Expressions classiques pour la contrainte et la dissipation :

(5.1)  $\sigma = G \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau}} d\epsilon(t')$  ;  $\tau = \frac{\eta}{G}$

(5.2)  $f = \frac{1}{2G} \sigma^2$

(5.3)  $D = \frac{1}{\eta} \sigma^2$

Lois de comportement VARNAT isotherme.

(5.4)  $\sigma = \frac{2 G f}{f + 2 \frac{G}{\eta} f} \dot{\epsilon}$

(5.5)  $D = 2 \frac{G}{\eta} f$

Preuve

(5.6)  $\frac{1}{G} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = \dot{\epsilon} \rightarrow \frac{1}{G} \sigma \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma^2 = \dot{f} + 2 \frac{G}{\eta} f$

par (cf. (5.2))

(5.7)  $\sigma^2 = 2Gf$  ;  $\sigma \dot{\sigma} = G \dot{f}$

$\rightarrow$  (5.6) et (5.5) par (5.3) (5.2) et :

(5.8)  $\sigma = \frac{\sigma^2}{\sigma \dot{\sigma}} \dot{\epsilon}$

antérieure (bien que leurs réponses différées aux expériences classiques en dépendent).

Sur la forme (5.3), le milieu purement visqueux (amortisseur pur) apparaît comme le cas particulier où  $\dot{f}$  reste constamment nul dans les transformations isothermes. Ceci correspond à la propriété classique des modèles mécaniques des comportements rhéologiques : la variation de l'énergie libre est l'énergie contenue dans les ressorts. Si cette dernière est nulle (ici ressort parfaitement rigide, i.e. milieu purement dissipatif), l'énergie libre reste constante, et la totalité de l'énergie mécanique fournie est, par l'intermédiaire de l'appareillage assurant l'isothermie, évacuée sous forme de chaleur restituée à l'extérieur.

Dans le cas non dégénéré, on constate que la puissance calorifique à évacuer à chaque instant pour maintenir l'isothermie est proportionnelle à  $\dot{f}$ , et donc à l'énergie de déformation subsistant dans le ressort tant que celui-ci n'est pas totalement relaxé.

La preuve des équations (5.3) et (5.4) s'établit facilement en partant de l'équation différentielle classique du modèle MAXWELL, dont la multiplication par  $\sigma$  fournit une expression de  $\sigma \cdot \dot{\sigma}$  en fonction de  $\dot{f}$  et  $\dot{f}$  seuls.

L'utilisation de (5.2), (5.3) et (5.8) fournit alors les expressions (5.4) et (5.5) annoncées.

## 7. CONCLUSION

L'exemple simple précédant montre que la classe des comportements à réponse différée représentables en formalisme VARNAV par des équations markoviennes n'est pas vide.

En fait nous avons pu montrer que d'autres exemples de comportements viscoélastiques représentables par des modèles mécaniques classiques possèdent également,  $\gamma$  compris dans des cas tri-dimensionnels, les propriétés annoncées [14]\*.

Plus curieusement, nous avons pu montrer également, sur des exemples simples, que les modèles d'élastoplasticité homologues de ces modèles viscoélastiques après remplacement des amortisseurs visqueux par des

\* Postérieurement à ce Colloque, nous avons pu montrer [15] qu'un modèle de MAXWELL généralisé comprenant  $N$  éléments en parallèle est markovien VARNAV avec des dérivées temporelles sur  $\epsilon$  et  $\dot{f}$  jusqu'à l'ordre  $n = 2N-1$ .

patins à seuil plastique jouissent également des propriétés prédites par la théorie générale. Il existe donc des cas où l'hypothèse restrictive que nous avons faite sur le comportement instantané peut être levée.

On notera que, l'énergie libre n'étant pas directement observable de l'extérieur dans un modèle de type boîte noire (par exemple le MAXWELL est contenu dans un carter opaque), on peut lui conférer le statut de variable interne, et ce bien qu'elle soit considérée comme une grandeur microscopique dans les formalismes classiques. Le bilan entropique (ou la relation universelle de la puissance dissipée que l'on en déduit) peut alors, après substitution des lois de comportement VARNAV explicites  $\sigma$  et  $D$ , être considérées comme l'équation cinétique, ou d'évolution, ou complémentaire, associées à cette variable interne, et qui, comme pour tout formalisme à variables internes, est nécessaire à la détermination complète du comportement.

L'avantage ici est qu'on n'a pas d'hypothèse particulière à faire sur la forme de cette équation d'évolution. Mais l'énergie libre se définit à partir de l'entropie, qui est ainsi la variable interne associée à la combinaison naturelle  $(\epsilon, u, s)$  du formalisme VARNAV.

On rejoint ici peut-être le point de vue qu'avait CLAUSTRUS en définissant le terme même d'entropie à partir des mots grecs  $\epsilon$  (dans, en dedans, interne) et  $\tau$   $\rho$   $\sigma$   $\tau$   $\eta$  (transformation) pour désigner ce qu'il appelait auparavant contenu de transformation (interne) [16].

Sur ces exemples, le formalisme encore récent ainsi introduit apparaît cohérent. Un travail important reste à faire pour vérifier s'il constitue réellement un progrès, c'est à dire s'il peut se montrer, au moins dans certains cas, réellement plus efficace que les formalismes classiques actuellement connus.

Le fait que ces derniers se heurtent dans divers cas à de sévères limitations dès que les modèles de comportement à considérer ne sont pas très simples, fait penser que cela pourra effectivement être le cas. On peut en particulier envisager que des expressions assez simples permettent de rendre compte de comportements d'expression très complexe dans le formalisme classique. Le fait d'éliminer les termes de mémoire peut également se révéler très intéressant sur le plan du calcul numérique, où les problèmes d'encombrement mémoire et temps de calcul posés par les matériaux qui, tels le béton, ont une mémoire très longue peuvent se révéler dirimants.

1. C. HUET. Sur la notion d'état local en Rhéologie. Comptes-Rendus du 12e Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie "Thermodynamique des comportements rhéologiques", Paris, Déc. 1978. Sciences et Techniques de l'Armement, 53, 210, 611-652 (1979).
2. C. HUET. Topics in Thermodynamics of rheological behaviours. Conférence invitée à la 1ère conférence des Rhéologues Européens, GRAZ, 1982. Rheol. Acta, 21, 360-365 (1982).
3. C. HUET. Thermodynamique des comportements rhéologiques en variables naturelles. Rheol. Acta, 22, 245-259 (1983).
4. C. HUET. Macroscopic rheology without functionals : the natural variables formalism. In B. MENA et Alti. Proc. IX Int'l Congress on Rheology, Acapulco, 1984. Mexico University Press (1984).
5. C. HUET. A new formalism for the thermodynamics of rheological behaviours in macroscopic variables : the natural variables formalism (submitted for publication).
6. C. HUET. Changing the set of variables in the natural variables formalism for thermodynamics of rheological behaviour (submitted for publication).
7. B. N. COLEMAN. Thermodynamics of materials with memory. Archives for Rat. Mech. Anal., 17, 1-46 (1964).
8. C. TRUESDELL, W. NOLL. The non linear field theories of mechanics. In S. FLÜGGE - Encyclopedia of physics, III/3, Springer-Verlag, Berlin (1965).
9. N. A. DAY. The thermodynamics of simple materials with fading memory. Springer-Verlag, Berlin (1972).
10. J. MANDEL. Application de la thermodynamique aux milieux viscoélastiques à élasticité nulle ou restreinte. Comptes rendus Ac. Sc., Paris, 264, 133-134 (16 Janvier 1967)
11. J. MANDEL. Introduction à la mécanique des milieux continus déformables. Polish Academy of Sciences. P.N.N., Varsovie (1974).
12. C. HUET. Remarques sur la procédure d'assimilation d'un matériau hétérogène à un milieu continu équivalent. In C. HUET et A. ZAOURI, Comportements rhéologiques et structure des matériaux. C.R. du 15e Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie, Déc. 1980. Presses de l'E.N.P.C., Paris (1981).
13. H. B. CALLEN. Thermodynamics. John Wiley and Sons, New-York (1966).
14. C. HUET. Résultats non publiés (1984, 1985).
15. C. HUET. Résultat non publié (1986).
16. R. CLAUSSUS. Théorie Mécanique de la Chaleur. Mémoire IV, Trad. Française par F. FOLIE, Lacroix, Paris (1865).

## DEUXIEME JOURNEE

## QUATRIEME SESSION

**MODELE DE COMPORTEMENT MECANIQUE DU VENTRICULE GAUCHE ET RHEOLOGIE DU MYOCARDE**

A MODEL FOR THE MECHANICAL BEHAVIOUR OF THE LEFT VENTRICLE AND THE RHEOLOGY OF MYOCARDIUM

A. MOUTTAHAR\*, C. ODDOU\*\*

\* Laboratoire de Mécanique  
 Université Toulouse III  
 \*\* Laboratoire de Mécanique Physique  
 Université Paris XII

**RESUME**

L'objectif de cette étude est d'analyser le comportement mécanique du ventricule gauche durant tout le cycle cardiaque. Un modèle analytique est proposé, tenant compte de la nature biphasique "fibreuse-fluide" du myocarde, où la structure ventriculaire est représentée par une coque épaisse de géométrie ellipsoïdale. Les contraintes pariétales et les déformations de la structure sont calculées à partir des données de pression cavitaire.

**ABSTRACT**

The objective of this study is to analyse the mechanical behaviour of the left ventricle, during the overall cardiac cycle. A model is proposed which take into account the biphasic "fibrous-fluid" nature of the myocardium, where the ventricular structure is represented by a thick ellipsoidal shell. The wall stresses and structure deformations are computed from the intraventricular pressure data.

**1. INTRODUCTION**

Parmi les nombreux modèles mécaniques qui ont été proposés pour approcher le comportement mécanique du ventricule gauche (V.G.), on distingue en gros trois groupes /1/. D'abord les modèles assimilant le V.G. à des coques minces ou épaisses, isotropes et soumises à des pressions intracavitaires, ont permis une première quantification des contraintes pariétales, essentiellement durant la diastole où la paroi peut-être considérée comme passive /2,3,4/, mais de telles modélisations restent insuffisantes pour comprendre l'influence des différents paramètres rhéologiques, particulièrement pendant la phase active du cycle cardiaque.

Le développement de la technologie des calculateurs numériques a avantagé l'application des méthodes d'analyse aux éléments finis de structure dans le domaine biomédical. A partir de l'imagerie médicale et des relevés de pression intraventriculaire, ces méthodes permettent une meilleure connaissance des effets d'inhomogénéité et d'anisotropie de la paroi ventriculaire /5,6,7/.

Enfin, les travaux de Streeter /8/ sur la nature fibreuse du myocarde ont ouvert la voie ces dernières années à une première génération de modèles analytiques tenant compte de la nature anisotrope de la paroi du V.G. /9,10,11,12/. Ces modèles sont basés sur des structures de géométrie cylindrique dont la paroi est constituée de fibres baignant dans un fluide non-visqueux et d'orientation variable de l'endocarde à l'épicarde. Dans cette optique, il est proposé un modèle, biphasique fibreux, dont la géométrie est limitée par deux ellipsoïdes confocaux (endocarde et épicarde): l'épaisseur pariétale est maximale dans la zone équatoriale et décroît environ de moitié à la pointe. La loi de répartition des fibres dans la paroi utilisée est basée sur les données anatomiques de Streeter /8/. Dans cette première approche, on adoptera une loi rhéologique linéaire des fibres et on considèrera que la stimulation de toutes les fibres est simultanée.

**II. FORMULATION MATHEMATIQUE DU MODELE**

**1. Géométrie**

La paroi ventriculaire gauche est modélisée par une coque épaisse comprise entre deux ellipsoïdes confocaux. Les calculs sont développés dans un système de coordonnées elliptiques  $(\xi, \eta, \theta)$ , lié à cette géométrie, est défini par:

$$\begin{cases} x = c \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \cdot \cos \theta \\ y = c \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \cdot \sin \theta \\ z = c \cdot \xi \cdot \eta \end{cases} \quad (1)$$

où c est la distance focale ( $c^2 = a^2 - b^2$ ) avec a et b respectivement les longueurs des demi-axe majeur et mineur)  
 Les coefficients de Lamé relativement à ce changement de système sont donnés par les relations:

$$h_\xi = \sqrt{\xi^2 - \eta^2} / \xi^2 - 1; \quad h_\eta = \sqrt{\xi^2 - \eta^2} / 1 - \eta^2; \quad h_\theta = \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{1 - \eta^2}$$

L'endocarde est représenté par la surface ellipsoïdale  $\xi = \xi_1$  et l'épicarde par la surface  $\xi = \xi_2$ . L'épaisseur dans la zone équatoriale du V.G. est maximale et diminue de cette zone à la pointe du V.G. environ de moitié.

On considère une troncature supérieure par une surface hyperboloïde  $S_1$  ( $\eta = \eta_1$ ) correspondant à la surface basale sous les orifices mitral et aortique, et une seconde troncature par une surface hyperboloïde  $S_2$  ( $\eta = \eta_2$ ) entourant l'apex du V.G. sur laquelle les fibres myocardiques s'accrochent,

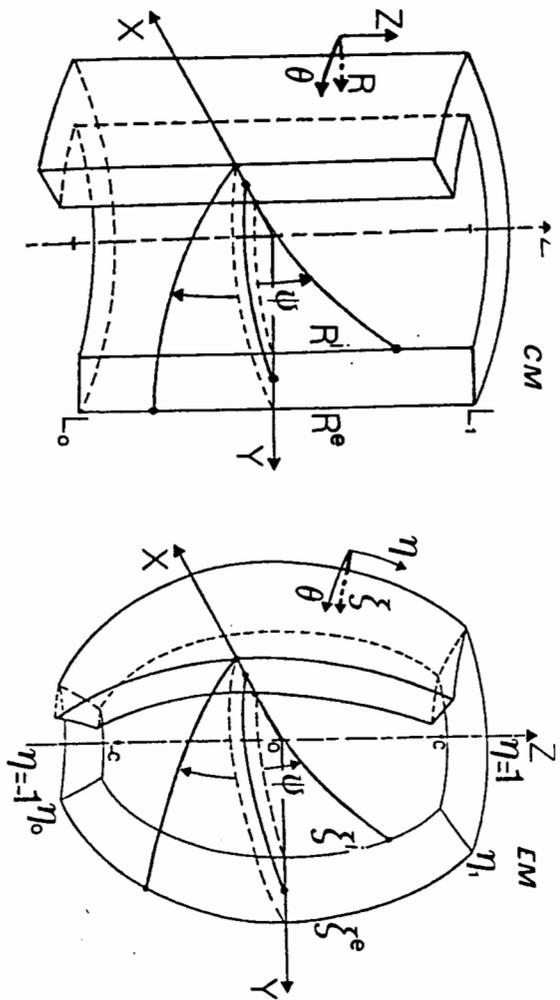


Fig. 1: Modèles de la structure ventriculaire gauche.  
 -CM: Coque épaisse cylindrique,  
 -EM: Coque épaisse ellipsoïdale.

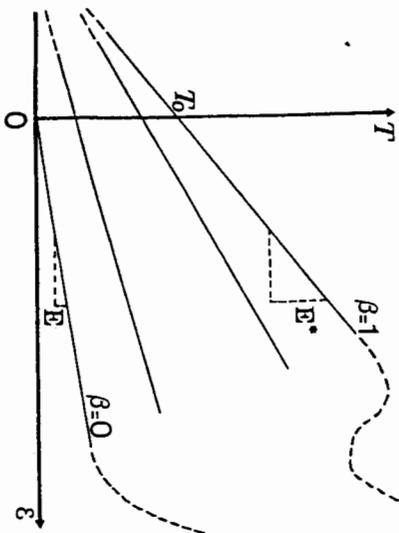


Fig. 2: Loi rhéologique de la fibre.

cette surface sera libre de se déplacer le long du grand axe et de tourner autour (fig.1).

## 2. Orientation des fibres

Sur chaque couche ellipsoïdale (surface repérée par  $\xi$  fixé), les fibres gardent la même orientation: ainsi l'angle de la fibre, noté par  $\psi$ , par rapport à la direction circonferentielle  $\vec{e}_\theta$  dépend seulement de la coordonnée radiale  $\xi$ . Le vecteur unitaire  $\vec{T}$  tangent à la fibre est située dans le plan  $(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\theta)$  est donnée par la relation:

$$\vec{T} = \alpha_1 \vec{e}_\eta + \alpha_2 \vec{e}_\theta \quad (2)$$

où  $\alpha = \sin \psi$  et  $\alpha = \cos \psi$

L'angle  $\psi(\xi)$  varie d'environ  $70^\circ$  (à l'endocarde  $\xi^i$ ) à  $-70^\circ$  (à l'épicarde  $\xi^e$ ). Pour approcher la loi d'orientation des fibres dans la paroi, on utilise les données anatomiques de Streeter /8/.

## 3. Tenseur des contraintes

Dans cette étude, on suppose que la paroi est un milieu continu biphasique, constitué uniquement de fibres solides et d'une matrice fluide incompressible dans laquelle baignent ces fibres. Dès lors, les effets de cisaillement entre fibres ne sont pas pris en compte. La paroi myocardique est considérée comme incompressible. A partir de ces hypothèses, nous pouvons stipuler que le tenseur des contraintes pariétales est composé du tenseur isotrope  $-p\mathbf{I}$  (où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  $p$  est la pression hydrostatique), et d'autre part du tenseur anisotrope  $T\vec{T}\vec{T}$  (où  $\vec{T}$  est la réaction des fibres  $T$  dans leur direction  $\vec{T}$  (où  $\otimes$  est le produit dérivé par la relation:

$$\vec{Q} = -p\mathbf{I} + T\vec{T}\vec{T} \quad (3)$$

En négligeant les forces de gravitation et les effets d'accélération, on obtient la relation intrinsèque d'équilibre local:

$$-\nabla p + \vec{T} \nabla (T\vec{T}) + T\vec{T} \nabla \vec{T} = \vec{0} \quad (4)$$

## 4. Champs de déplacement

Le myocarde étant considéré comme incompressible et d'autre part en négligeant les variations du volume sanguin contenu dans le lit vasculaire myocardique, le vecteur déplacement  $\vec{U}$  ( $U_\xi, U_\eta, U_\theta$ ) doit vérifier, dans le cadre de la théorie de petites déformations, l'équation:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (5)$$

La donnée du vecteur déplacement  $\vec{U}$  permet le calcul du tenseur de déformation  $\vec{\epsilon}$  et par conséquent la déformation de la fibre  $\epsilon$  par la relation:

$$\epsilon = \vec{T} \vec{\epsilon} \vec{T} \quad (6)$$

5. Micro-rhéologie de la fibre  
 Dans cette première approximation, où les effets dynamiques sont négligés, on adopte une loi rhéologique linéaire de la fibre analogue à celle proposée par Chadwick /11/, donnée par relation:

$$T = ((1-\beta) \cdot E + \beta \cdot E^*) \cdot \epsilon + \beta \cdot T_0 \quad (7)$$

où  $E^*$  est le module d'élasticité à l'état d'activation maximale,  $E$  est le module d'élasticité à l'état passif,  $T_0$  est la tension isométrique maximale (que peut délivrer la fibre à déformation nulle) et  $\beta(t)$  est une fonction d'activation (dépendant du temps) caractérisant l'état d'activation de la fibre et variant entre la valeur 0 (état passif) et la valeur 1 (état actif) (Fig.2).

Cette loi est relativement bien vérifiée sur le muscle papillaire de coeur perfusé et isolé pour des déformations pouvant aller jusqu'à 20%. Elle ne tient pas compte des vitesses de raccourcissement et d'élongation de la fibre.

### III. RESOLUTION

De l'équation (5), on en déduit la forme possible du champs de déplacement ( $U_\xi$ ,  $U_\eta$ ,  $U_\theta$ ) où les composantes radiale  $U_\xi$ , longitudinale  $U_\eta$  et circonférentielle  $U_\theta$  sont données sous la forme suivante:

$$U_\xi = U_\xi(\xi, \eta; A(t), B(t)) \quad (8a)$$

$$U_\eta = U_\eta(\xi, \eta; A(t), B(t)) \quad (8b)$$

$$U_\theta = U_\theta(\xi, \eta; \theta(t)) \quad (8c)$$

Les composantes  $U_\xi$  et  $U_\eta$  dépendent de  $\xi, \eta$  et des deux coefficients temporels  $A(t)$  et  $B(t)$ , caractérisant respectivement le changement du volume cavitaire et la distance focale, définis par:

$$A(t) = 3 \cdot (V(t) - V_0) / 4 \cdot \pi \cdot V_0 \cdot c_0^3 \quad (9a)$$

$$B(t) = (c(t) - c_0) / c_0 \quad (9b)$$

où  $V_0$  et  $c_0$  sont respectivement le volume cavitaire et la distance focale à un instant  $t_0$ , et  $V_0$  et  $c_0$  correspondent à la configuration de référence.

La composante  $U_\theta$  dépend du coefficient temporel  $\theta(t)$  caractérisant la torsion du V.G. autour du grand axe au cours du cycle cardiaque. Elle est nulle sur la surface de troncation supérieure ( $\eta = \eta_0$ ).

En vertu de la relation (6), la déformation de la fibre dépend linéairement des trois coefficients  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $\theta(t)$ .

En projetant dans le système de coordonnées  $(\xi, \eta, \theta)$  l'équation (4), on obtient trois équations d'équilibre local:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -T \cdot \left( \frac{\cos^2 \psi \cdot \xi}{\xi^2 - 1} + \frac{\sin^2 \psi \cdot \xi}{\xi^2 - \eta^2} \right) \quad (10a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -T \cdot \frac{2 \eta}{h_\theta} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_\xi \cdot h_\theta^2 \cdot T \right) = 0 \quad (10c)$$

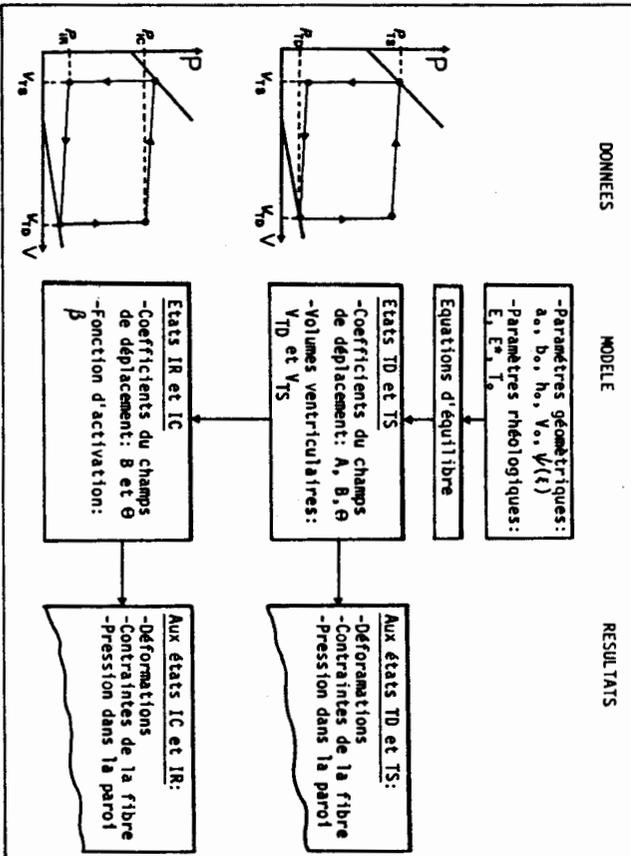


Fig.3: Organigramme de calcul

-Paramètres rhéologiques de la fibre: E=2.5x10 <sup>4</sup> Pa; E*=2.5x10 <sup>5</sup> Pa; T <sub>0</sub> =5x10 <sup>-4</sup> Pa	
-Paramètres géométriques de référence:	
CM	EM
α·R <sup>1</sup> /R <sup>0</sup> =1.6	a <sub>0</sub> =2.3 cm
R <sup>1</sup> =1.3 cm	b <sub>0</sub> =1.3 cm
V <sub>0</sub> =24.4 ml	h <sub>0</sub> =.78 cm
-Paramètres hémodynamiques:	
P <sub>ID</sub> =10 mmHg; P <sub>IC</sub> =80 mmHg; P <sub>IS</sub> =85 mmHg; P <sub>IR</sub> =15 mmHg	

Table 1

L'équation (10a) montre que le gradient de pression (suivant la direction radiale) dans la paroi dépend de la tension de la fibre et de ses courbures dans les directions longitudinale et circonférentielle. La pression transmurale à l'épicarde est égale à la pression cavitaire  $P_c$ , en supposant que la pression à l'épicarde est nulle. Par intégration sur toute la paroi de l'équation (10a), on obtient la relation:

$$P_c = \int_{\xi^*}^{\xi^1} T(\xi, 0) \cdot \left( \frac{\cos^2 \psi \cdot \xi}{\xi^2 - 1} + \frac{\sin^2 \psi}{\xi} \right) d\xi \quad (11)$$

Contrairement au modèle cylindrique /11/, la tension de la fibre (et par conséquent la pression intramyocardique) varie dans la direction longitudinale. La tension  $T$  et la pression  $P$  dans la paroi, à une altitude quelconque  $\eta$ , peuvent être exprimées en fonction de la tension  $T(\xi, 0)$  à l'épicarde, à l'aide des équations (10b) et (10c). La loi d'orientation des fibres est bien définie dans différentes zones du V.G./8/, sauf à la pointe du V.G. où les fibres prennent des angulations "mal ordonnées", rendant cette zone plus rigide.

La surface hyperboloïde  $S_0$  ( $\eta = \eta_0$ ) de tronçature entourant l'apex (Fig. 1) n'étant soumise à aucune force ni moment extérieur, on obtient alors deux relations exprimant l'équilibre global de cette surface.

La résolution du problème, indiquée par l'organigramme de calculs (Fig. 3) pour les valeurs hypothétiques des différents paramètres (table (1)), consiste à déterminer les coefficients  $A, B, \Theta, \beta$  aux différents instants, pour des pressions cavitaires données, à partir des équations d'équilibre global et des relations (9a et 11).

#### RESULTATS

La Fig. 4, donnant le cycle pression-volume calculé dans ces conditions, montre que le volume télé-diastolique obtenu par le modèle cylindrique (CM) est supérieur à celui obtenu par le modèle ellipsoïdal (EM).

La Fig. 5 donne l'évolution globale de la structure ellipsoïdale durant le cycle cardiaque:

- 1- Pendant la phase de remplissage (phase 4-1) le diamètre intérieur croît plus que le diamètre extérieur: par conséquent, l'épaisseur pariétale diminue linéairement avec l'augmentation du volume cavitaire. On obtient le contraire durant la phase d'éjection (phase 2-3).
- 2- L'excentricité de la structure ellipsoïdale varie linéairement avec le volume durant les phases de remplissage (phase 4-1) et d'éjection (phase 2-3). La contraction isovolumique est accompagnée d'une élliptisation de la structure. Cette élliptisation continue pendant l'éjection. Durant la relaxation isovolumique, l'excentricité diminue, la structure tend donc à se sphériser. Enfin, durant la phase d'éjection, l'excentricité continue à diminuer.

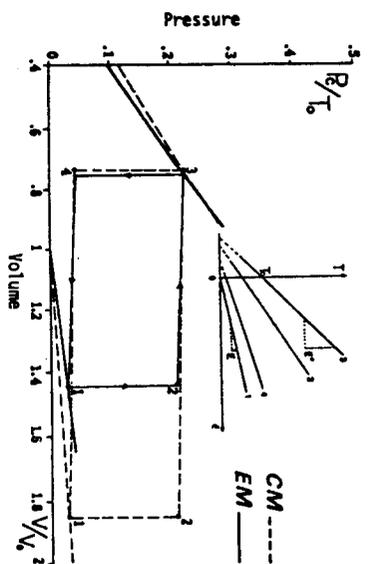


Fig. 4: Relation pression-volume obtenue à partir des modèles cylindrique (CM) et ellipsoïdal (EM).

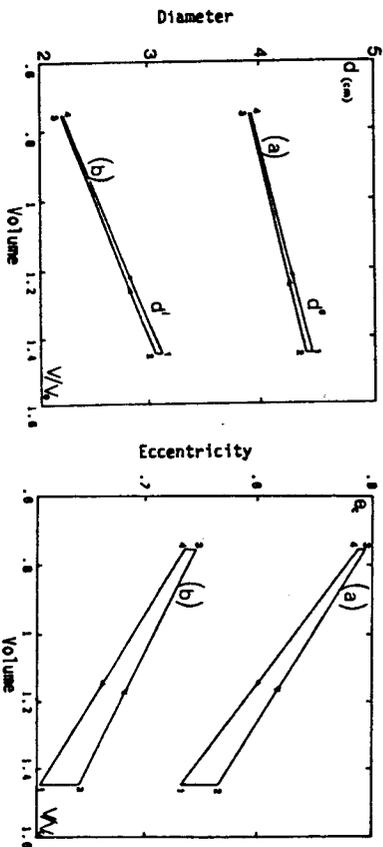


Fig. 5: A- Relation diamètre extérieur-volume (a) et diamètre intérieur-volume (b).  
B- Relation excentricité-volume de la couche intérieure (a) et de la couche extérieure (b).

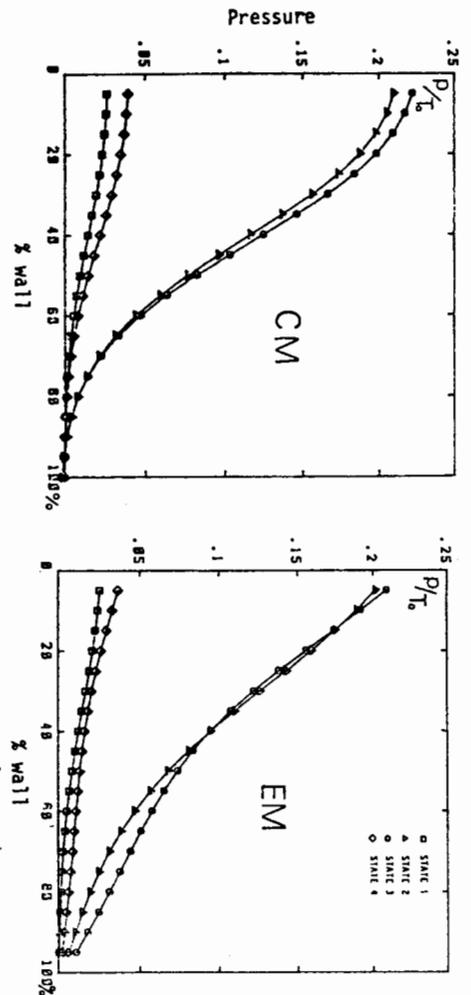


Fig. 6: Répartition de la pression intramurale à travers la paroi, à différents instants du cycle cardiaque, pour les modèles cylindrique (CM) et ellipsoïdal (EM).

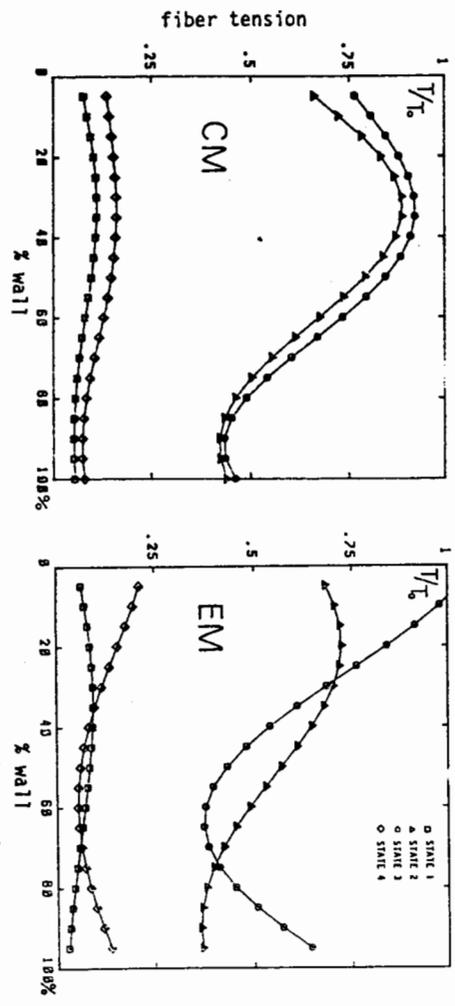


Fig. 7: Répartition de la tension des fibres à travers la paroi, pour les modèles cylindriques (CM) et ellipsoïdal (EM).

Ces résultats concernant la déformation globale de la structure paraissent en harmonie avec les mesures expérimentales obtenues par des techniques ultrasonores /13/.

Actuellement, il n'existe pas de moyens fiables pour mesurer directement les contraintes pariétales. Les différentes méthodologies utilisées pour la quantification de la pression intramyocardique donnent une surestimation de cette pression /14/. La Fig. 6 montre que la pression dans la paroi, pour les deux structures étudiées, décroît de la pression intraventriculaire (à l'endocarde) à une pression nulle (à l'épicarde); le gradient de pression n'est légèrement plus important pour le modèle ellipsoïdal, surtout pour les états 3 et 4; ceci a une grande influence sur la répartition de la tension des fibres dans la paroi (Fig. 7).

REFERENCES

- 1- F.C.P. YIN, Ventricular wall stress. *Cir. Res.* 1981; 49, p829-842.
- 2- D.N. GHISTA and H. SANDLER, An elastic-viscoelastic model for the shape and forces in the left ventricle. *J. Biomech.* 1969; 2, p35-47.
- 3- H. L. FALSETTI, R.E. MATES, G. GANT, D.G. GREENE and I.L. BUNNELL, Left ventricular wall stress calculated from one-plane angiography. *Cir. Res.* 1970; 26, p71-83.
- 4- I. MIRSKEY, Left ventricular stresses in the intact human heart. *Biophys. J.* 1969; 9, p189-208.
- 5- S.C. PANDA and R. NATARAJAN, Finite-element method of stress analysis in the human left ventricular layered wall structure. *Med. and Biol. Eng. and Comp.* 1977; 15, p67-71.
- 6- I. MIRSKEY, Effects of the anisotropy and non-homogeneity of left ventricular stresses in the intact heart. *Bull. Math. Biophys.* 1973; 32, p197-213.
- 7- M.S. HAMID and D.N. GHISTA, Finite element analysis of human cardiac structures. In *Finite Element Methods in Engineering* Proceedings of the International Conference on Finite Element Methods in Engineering; Ed. by V.A. Pulmano, A.P. Kaballa; University of New South Wales 1974, p1-12.
- 8- D.D. STREETER, H.M. SPONITZ, D.P. PATEL, J. ROSS and E.H. SONNENBLICK, Fiber orientation in the canine ventricle during diastole and systole. *Cir. Res.* 1969; 14, p339-347.
- 9- T.S. FELT, Diastolic pressure-volume relations and distribution of pressure and fiber extension across the wall of a model left ventricle. *Biophys. J.* 1979; 28, p143-166.
- 10- T. ARTS, R.S. RENEMAN and P.C. VEENSTRA, A model of the mechanics of the left ventricle. *Ann. Biomed. Eng.* 1979; 7, p299-318.
- 11- R.S. CHADWICK, Mechanics of the left ventricle. *Biophys. J.* 1983; 39, p279-288.
- 12- A. TOZEREN, Static analysis of the left ventricle. *J. of Biomed. Eng.* 1983; 105, p39-46.
- 13- C.O. OLSEN, J.S. RANKIN, C.E. ARENTZEN, M.S. RING, P.A. MCHALE and R.W. ANDERSON, The deformational characteristics of the left ventricle in the conscious dog. *Circ. Res.* 1981; 49, p843-855.
- 14- D. NEMATZADEM, J.C. ROSE, Th. SCHRUYER, H.K. HUANG and P.A. KOT, Analysis of methodology for measurement of intramyocardial pressure. *Basic Res. in Cardiol.* 1984; 79, p86-97.

**RHEOLOGIE DES LIGAMENTS : VERS UN CAHIER DES CHARGES POUR LA REALISATION DES PROTHESES**

**THE RHEOLOGICAL PROPERTIES OF LIGAMENTS : TOWARDS A SPECIFICATIONS SHEET TO BUILD ARTIFICIAL IMPLANTS**

A. BABA AHMED, J. FRISMAND, D. GEIGER

Laboratoire de Mécanique Physique  
Université PARIS XII  
Avenue du Général de Gaulle  
94101 CRETEIL

La connaissance approfondie des propriétés rhéologiques des ligaments est d'un intérêt fondamental pour concevoir et réaliser des prothèses satisfaisantes.

Dans le but de mesurer les caractéristiques mécaniques de ces tissus, nous avons effectué, d'une part, des tests quasi-statiques de traction uniaxiale, à partir desquels on détermine le module de Young, la limite élastique, la zone de linéarité et la contrainte à la rupture, et, d'autre part, des tests de relaxation qui nous permettent de mesurer l'évolution de la contrainte en fonction du temps, et de déterminer la relation contrainte-déformation élastique.

Le problème majeur rencontré dans tous ces tests est la mesure des elongations: difficultés dues à la morphologie des échantillons ainsi qu'à la liaison ligament-machine. Pour cela, nous avons mis au point un système optique sans contact qui nous permet d'évaluer les déformations de la structure entre différents repères placés le long du ligament, évitant ainsi les erreurs dues à la liaison ligament-machine (glissement, effets de pincement...).

**ABSTRACT**

The well knowledge of the rheological properties of the ligaments is of fundamental interest, to design and build artificial implants.

With the aim of measuring the mechanical characteristics of these tissues, bone-ligaments-bone specimen as well as packets of ligaments fibers, have been tested in a classical uniaxial traction. From the experimental results (load-deformation), we evaluate the Young modulus, the elastic zone, the elastic limit and the stress to failure. Some others, have been tested in a uniaxial relaxation test, and from the results, we determine the time-dependant of the stress and the elastic response.

An optical system were used to measure the tensile strain between the lines marked among the ligaments. The advantages of using this system are:

- no contact with the specimen to measure the tensile strain,
- no contribution of ligaments slippage at the clamps is present which normally contributes to errors for strain measurements.

Communication au Groupe Français de Rhéologie le 28 novembre 1985

Les ligaments que nous avons testés dans le cadre de cette étude ont été prélevés sur quatre sujets décédés, âgés de 55 à 85 ans, de pathologie antérieure inconnue; nous avons ainsi obtenu huit ligaments croisés antérieurs (LCA) et huit croisés postérieurs (LCP). Les genoux ont été congelés en entier, puis dégelés et disséqués soigneusement avant chaque test. Les ligaments obtenus sont scellés par leurs insertions osseuses avec du méthacrylate dans des socles en durallumin; ceux-ci sont ensuite fixés soit sur une machine de traction (ULLOYD T 2001), soit sur une machine de test en relaxation; ces deux machines sont toutes deux munies de mors spéciaux orientables, rendant ainsi possible l'orientation de l'ensemble os-ligament-os de telle façon qu'on ait l'axe de la plupart des fibres parallèle à la direction de traction. L'échantillon est placé, dans les deux cas, dans un bain de sérum physiologique, réglé à 37°C, et filtré en permanence pour conserver la limpidité du milieu. Les forces exercées sur l'échantillon sont mesurées à l'aide de capteurs de force; pour les déplacements, en plus de l'enregistrement des déplacements relatifs de ses extrémités, on a mis au point un système optique qui nous permet de déterminer les déformations entre différents repères placés le long du ligament. Ces repères sont constitués de fils de suture transfixants.

Pour les tests en traction simple, la chaîne de mesure optique de déformation se compose d'une caméra vidéo restituant sur moniteur une image qui est ensuite numérisée. Sur cette image, on choisit alors une ligne de mesure, les déplacements des repères sur cette ligne sont enregistrés à la cadence de quatre acquisitions par seconde, puis restitués sur Apple II (figure 1) (1).

Pour les tests en relaxation, la mesure des déformations entre deux repères placés le long du ligament est déterminée à partir d'un capteur opto-électronique (2). Les signaux provenant de ce capteur et du capteur de force sont amplifiés puis numérisés, une seule commande déclenchant le vérin et la numérisation. Le traitement mathématique est effectué à l'aide d'un micro-ordinateur Apple II après numérisation sur douze bits de chacun des deux signaux par un convertisseur analogique numérique (figure 2).

**RESULTS ET INTERPRETATION**

Pour chacun des échantillons fixé à la machine selon une orientation physiologique, on effectue d'abord une dizaine de cycles de préconditionnement à faible déformation (1 à 2%). On observe une légère diminution de la contrainte maximale pendant les premiers cycles, mais la stabilité est immédiate après; ceci peut être dû à un réarrangement graduel des fibres internes du matériau. Les phénomènes tant macroscopiques que microscopiques

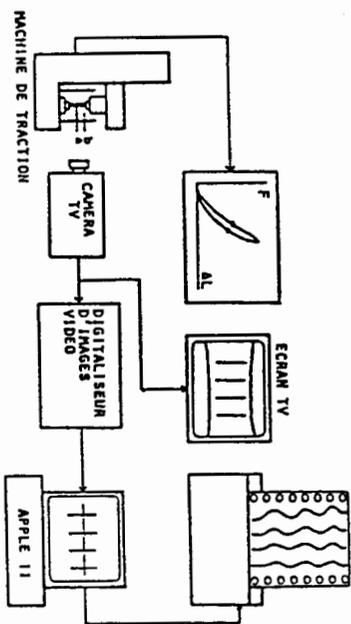


Fig. 1: Système de saisie et d'analyse des données.

- a: échantillon
- b: sérum physiologique

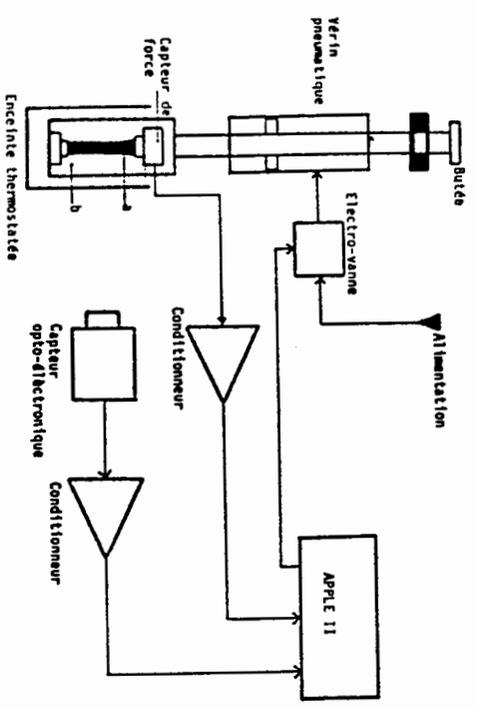


Fig. 2: Schéma synoptique du banc de mesure en relaxation.

- a: échantillon
- b: sérum physiologique

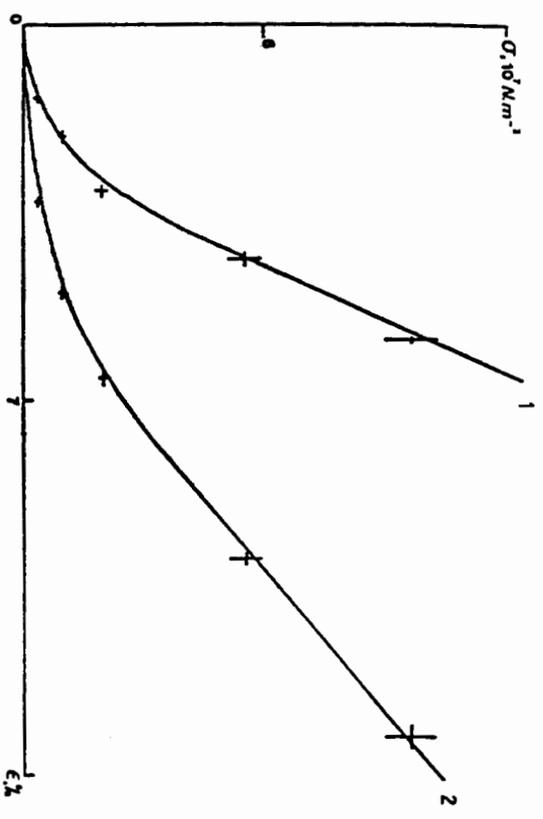


Fig. 3: Réponse élastique d'un LCP humain,  $S_0 = 8,4 \text{ mm}^2$ .

- 1 - Entre les repères médians.  
 $\mu = 14,46 \text{ mm}$ ,  $s = 0,09 \text{ mm}$ ,  $b = 30,36 \cdot 10^6 \text{ dan/m}^2$ .
- 2 - Entre les insertions osseuses.  
 $\mu = 31,47 \text{ mm}$ ,  $s = 0,41 \text{ mm}$ ,  $b = 12,05 \cdot 10^6 \text{ dan/m}^2$ .

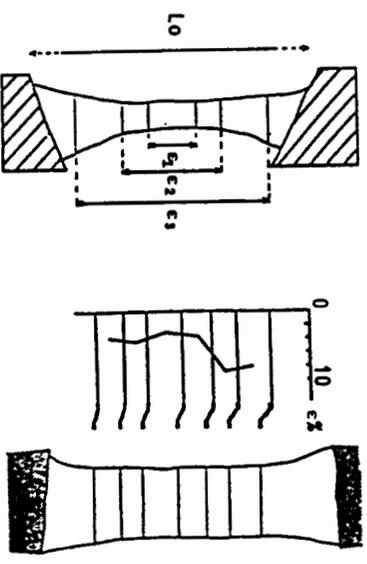


Fig. 4 a: LCA muni de ses repères.

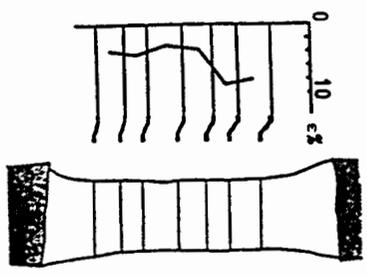


Fig. 4 b: Variation des déformations le long d'un échantillon.

encore discutés (3).

Aux vitesses disponibles comprises entre 1 et 1000mm/mn pour les essais en traction, nous n'avons pas obtenu de différences significatives dans les résultats; il faut toutefois remarquer que ces vitesses sont faibles, eu égard à celles subies par le ligament en cas de traumatisme.

En essai de relaxation, la force maximale atteinte par notre dispositif est de l'ordre de 200 dan, la course du vérin est limitée par un jeu de butées mécaniques à 50 mm, la vitesse maximale d'élongation est de .5 m/s, le temps d'établissement de la force est de l'ordre de 20 ms (retard dû aux pertes de charge dans les circuits d'air comprimé, aux temps d'ouverture électronique des valves, à l'inertie du piston et de la tige du vérin ainsi qu'aux frottements solides). La représentation de la réponse élastique (figure 3) a été obtenue, compte tenu des réserves concernant la vitesse finie de déformation, en approxinant la réponse élastique par la force maximale mesurée à des temps très courts.

Le modèle structural de Decraemer, développé pour décrire le comportement mécanique des membranes tympaniques en liaison avec leur structure, peut être appliqué au tissu ligamentaire dont la structure est de type composite fibreuse. Dans ce modèle, seule la contribution des fibres supposées parallèles est prise en compte (4). Les non-linéarités de la réponse mécanique sont décrites en utilisant une description statistique de la répartition des longueurs initiales des fibres autour d'une valeur moyenne  $\mu$  avec un écart type  $s$ . La relation contraainte Lagrangienne- allongement s'écrit:

$$\sigma(t) = \frac{N S k}{A_0 \sqrt{2\pi} s} \int_{l_0}^1 \frac{1-l^2}{l^3} \exp\left(-\frac{(\mu-l)^2}{2s^2}\right) dl$$

avec N: nombre de fibres, k: coefficient d'élasticité de chacune des fibres, S: section d'une fibre (la même pour toutes les fibres), et  $A_0$ : la section moyenne de l'échantillon.

Cette expression théorique dépend de paramètres ayant une signification physique traduisant des longueurs pour  $\mu$  et  $s$  et un module d'élasticité effectif  $Nsk/A_0$  que l'on note  $b$ .

Pour déterminer ces grandeurs qui caractérisent le matériau, on choisit une longueur initiale de l'échantillon  $l_0$  tel qu'on ait  $F(l_0) = 0$ ; cette condition est satisfaisante pour  $l_0 = \mu - 4s$ ; la relation contraainte déformation pour de grandes déformations ( $l_0 > \mu + 2s$ ) s'écrit alors sous la forme d'une fonction linéaire:

$$\sigma(l) = \frac{b}{\mu} l - b$$

Il est donc possible de déterminer les paramètres donnant une idée de la structure du tissu dans le cadre des hypothèses de départ (figure 3).

La longueur totale du ligament, mesurée entre les insertions osseuses est variable de par la morphologie du ligament et difficile à estimer (figure 4a). Notre méthode optique nous montre, sur des repères médians, que les déformations sont environ la moitié de celles obtenues pour le ligament total (figure 3). Et on a remarqué que, plus on s'éloigne du centre et plus l'allongement relatif augmente. La partie centrale du ligament semble donc plus raide que les parties distales, ce qui a été confirmé par d'autres auteurs (5), (6).

En fait, la mesure des allongements entre plusieurs repères

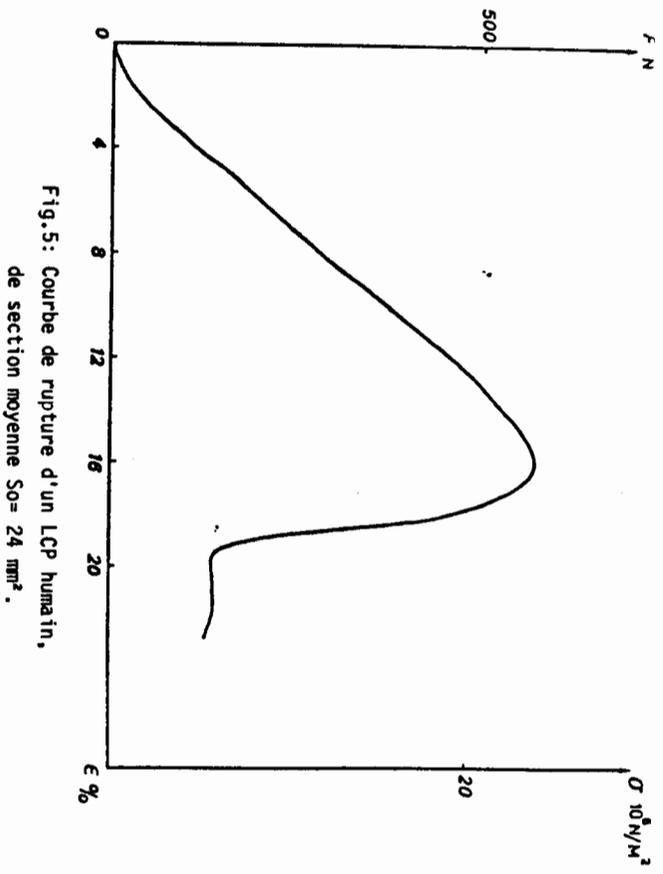


Fig.5: Courbe de rupture d'un LCP humain, de section moyenne  $S_0 = 24 \text{ mm}^2$ .

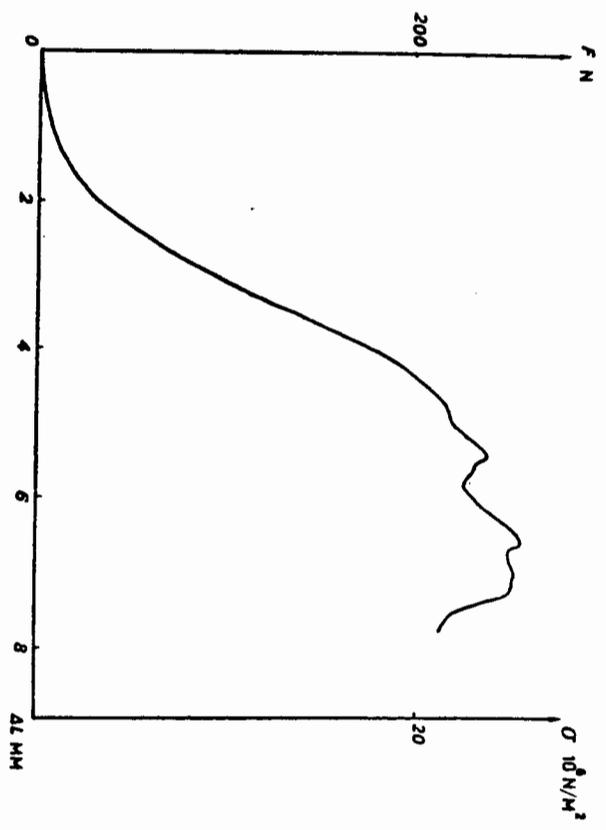


Fig.6: Courbe de rupture d'un LCP humain, de section moyenne  $S_0 = 10 \text{ mm}^2$ .

peuvent être entièrement dues aux erreurs (7) (figure 4b). Cette hétérogénéité doit correspondre à la structure complexe du ligament, à l'implantation des fibres concernées par le passage transfixant des fils de suture et à l'irrégularité de la section. On obtient en conséquence, une certaine dispersion dans les résultats obtenus.

La valeur de la contrainte au sens de Lagrange est donnée à partir de la force mesurée par le capteur de force en considérant que celle-ci est la même à tous les niveaux du ligament, et que la section utile est celle mesurée dans la partie médiane à l'aide d'un appareil spécifique (8).

L'essai de rupture d'un ligament entier scellé par ses insertions osseuses entraîne une fracture du spongieux, plus fragile; ceci traduit les problèmes d'ancrage des ligaments prothétiques. Nous avons également effectué des essais de rupture sur des ligaments de diamètre réduit (paquet de fibres) qui ont montré deux aspects de courbe: rupture totale de toutes les fibres en un temps (figure 5), ou rupture en deux temps avec tension de nouvelles fibres et perte plus faible (figure 6). Dans la plupart des cas, la rupture s'est produite dans les parties distales du ligament, près de son insertion osseuse.

Au total, les valeurs obtenues pour ces ligaments agés sont données dans le tableau 1 et les valeurs moyennes dans tableau 2.

### CONCLUSION

La structure complexe et le caractère visco-élastique non-linéaire de ces tissus sont mis en évidence par les courbes contrainte-déformation obtenues sous différentes sollicitations. Ceci laisse prévoir que les réponses mécaniques correspondent à des changements de la structure de ces matériaux durant la sollicitation et montre ainsi l'intérêt de prendre en compte le rôle de chacun de leurs constituants. L'étape ultérieure consisterait à expliquer ce comportement en appliquant la théorie de la poroélasticité. Cette approche consisterait à considérer le ligament, ainsi que d'autres tissus biologiques, comme étant un milieu diphasique constitué d'une part d'une phase solide (fibres de collagènes), et d'autre part d'une phase liquide. Cette étude, qui a déjà été effectuée pour d'autres matériaux biologiques comme le cartilage articulaire (9), pourrait nous renseigner sur d'autres paramètres mécaniques, tels que la perméabilité, la porosité..., et leur influence sur les lois de comportement de ces tissus.

En physiologie, les mouvements habituels doivent se situer dans la première partie exponentielle des courbes contrainte-déformation et entraînent d'importants allongements pour de faibles efforts.

Les prothèses ligamentaires doivent présenter des propriétés mécaniques appropriées, avec des grandeurs mécaniques semblables à celles du ligament, une longueur initiale bien choisie et un ancrage dans les parties osseuses correctement étudié.

Enfin, la méthode optique utilisée ici pour la détermination des déformations des ligaments semble plus précise que les méthodes utilisées précédemment.

### BIBLIOGRAPHIE

(1) AZOUANI A., GEIGER D. Méthode de mesure des déformations

pariétales d'une structurenelle sphéroïde pulsanse. Application aux explorations fonctionnelles cardiaques. A paraitre, I.T.B.M (1986).

(2) GEIGER D., FRISMAND J., PELISSE M., MARIE F., COMENCHAIL J.C. Capteur de déformation et de déplacement sans contact utilisant un réseau linéaire à transfert de charges. Revue Pratique de Contrôle Industrielle, Vol.13, pp 35-48, (1984).

(3) VIIDIK A. (1973) Int. rev. Connective tissues. Res. Academic, New York, Vol 6.

(4) DECRAMER M.F., and Al. An elastic stress-strain relation for soft biological tissues based on a structural model. J. Biomechanics Vol.13, pp. 463-468. (1980).

(5) ZERNICKE R.F., and Al. (1984) Strain topography of human tendon and fascia. J. Bio. Eng. Vol.106 pp 177-180.

(6) MOO S.L.Y., and Al. Measurement of mechanical properties of ligament substance from a bone-ligament-bone preparation. J. Orthop. Res. Vol.1, pp. 22-29, (1983).

(7) NOYES P.R., and Al. Biomechanical analysis of human ligament grafts used in knee-ligament repairs and reconstructions. J.B.J.S. 66 A, pp. 334-352, (1984).

(8) BUTLER D.L., and Al. Effects of structure and strain measurement technique on the material properties of young human tendons and fascia. J. Biomech. Vol. 17, pp. 579-596, (1984).

(9) RENAUDEAUX J.P. Des propriétés hydromécaniques du cartilage articulaire, en vue d'une meilleure compréhension de la lubrification des articulations. Université Paris VI. Thèse de doctorat es sciences physiques, soutenue le 25 octobre 1985.

E,MPa	LIGAMENT CROISE POSTERIEUR			LIGAMENT CROISE ANTERIEUR		
	$\epsilon_{1,1}\%$	$\epsilon_{r,1}\%$	or,MPa	E,MPa	$\epsilon_{1,1}\%$	$\epsilon_{r,1}\%$
400	4	15	37	650		8
280	4	9.5	18	320		26
180	8	17.5	8	250	5	14
280	2.5			260	3	17
190	5	21	30	180	4	23
190	5	20	18	100	6	8
180	4.5	17	20	155		30
250	5		20			

Tableau 1: module d'YOUNG,début de zone de linéaire, allongement et contrainte à la rupture (partie médiane des ligaments).

So,mm <sup>2</sup>	E,MPa	E',MPa	$\epsilon_{1,1}\%$	$\epsilon'_{1,1}\%$	$\epsilon_{r,1}\%$	$\epsilon'_{r,1}\%$	or,MPa	Fr,N
LCA 30	125	255	9.4	4.7	30	15	23	700-1150
LCP 50								1100-1900

Tableau 2: section, module d'YOUNG, début zone linéaire, allongement, contrainte, et force de rupture. Les valeurs marquées (\*) concernent la partie médiane du ligament.

**RHEOMETRE APPLICABLE A L'ETUDE DE SUBSTANCES ELASTOTHIXOTROPES**

**A RHEOMETER FOR STUDYING ELASTO-THIXOTROPIC FLUIDS**

M. KRATZ\*, J.M. ZAHM\*\*, J.P. ARNOULD\*, J. DIDELON\*, D. QUEMADA\*\*\*,  
 C. DUVIVIER\*\*\*\*

\* INSERM U 284, Plateau de Brabois  
 54511 VANDOEUVRE LES NANCY Cédex  
 \*\* Groupe d'Etude de la Fonction Mucociliaire  
 Faculté de Médecine - 51095 REIMS Cédex  
 \*\*\* Laboratoire de Rhéologie et d'Hydrodynamique Physico-Chimique  
 Université Paris VII  
 \*\*\*\* INSERM U 14, Plateau de Brabois  
 54511 VANDOEUVRE LES NANCY Cédex

**RESUME**

Un nouveau viscoélastomètre a été conçu et réalisé dans le but d'analyser en routine le comportement élastothixotrope de fluides biologiques comme les mucus ou de fluides de synthèse ayant un comportement similaire. L'appareillage a une géométrie cono-cylindrique. Le cylindre externe est mobile, le cylindre interne est fixé à un axe maintenu en position par deux fils de torsion. Ce montage assure une bonne concentricité des cylindres et évite les frottements parasites. Ce rhéomètre permet d'effectuer des mesures en régime stationnaire et instationnaire sur une échelle de taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  de  $10^{-2}$  à  $26 \text{ sec}^{-1}$ , sur une gamme de température variant entre  $10$  et  $60^\circ\text{C}$ . Les réponses de la contrainte de cisaillement  $\sigma$  en régime stationnaire et instationnaire à différents échelons de  $\dot{\gamma}$  et de la relaxation de  $\sigma$  à  $\dot{\gamma} = 0$  peuvent être analysées pour le mucus bronchique, le polyisobutylène et diverses substances de synthèse.

**ABSTRACT**

A new viscoelasticimeter was devised and realized with the aim of analyzing the elastothixotropic behaviour of biological fluids such as mucus or of synthetic fluids with similar behaviour. The equipment has a cono-cylindrical geometry. The external cylinder is mobile, whereas the internal cylinder is fixed to an axis, kept in position by two torsion wires. This assembly ensures a good concentricity of the cylinders and avoids parasite friction. This equipment allows measurements at different shear rates (range :  $10^{-2}$  to  $26 \text{ sec}^{-1}$ ) and at a temperature varying between  $10$  and  $60^\circ\text{C}$ . The response of the shear, in both stationary and nonstationary systems, at different levels of shear rates and of relaxation could be analyzed with regard to bronchial mucus or other biological fluids.

**INTRODUCTION**

Dans les maladies pulmonaires chroniques et en particulier dans la bronchite chronique, l'hypersecretion bronchique et les caractéristiques rhéologiques particulières des sécrétions sont considérées comme des éléments non négligeables dans les perturbations du mécanisme d'épuration bronchique. Cette épuration s'effectue grâce au mouvement coordonné des cils vibratils qui baignent dans une phase liquide de faible viscosité et au-dessus de laquelle se trouve une phase gel visqueuse qui recouvre l'épithélium cilié. Cet ensemble muco-ciliaire joue le rôle d'un tapis roulant qui capte et transporte hors des voies respiratoires les particules étrangères inhalées. Le degré de visco-élasticité des sécrétions conditionne l'efficacité du transport muco-ciliaire. Les études in vitro, réalisées sur modèle animal (palaïs de grenouille) montrent qu'une hypo ou une hyperviscoélasticité s'accompagne d'une diminution de la vitesse de transport des sécrétions bronchiques (1). En pathologie il est donc important de connaître les caractéristiques rhéologiques des sécrétions bronchiques afin de les situer par rapport aux propriétés rhéologiques optimales à un bon transport et par conséquent d'adapter un traitement et de juger de l'efficacité de ce traitement.

Plusieurs techniques permettant de déterminer la visco-élasticité des sécrétions ont été décrites (2), mais elles sont le plus souvent utilisées en recherche fondamentale et ne sont pas applicables en routine clinique. De nombreux rhéomètres ont également été développés mais ils ne sont en général pas utilisables pour l'étude des mucus bronchiques. C'est la raison pour laquelle nous avons développé un appareil simple, robuste et parfaitement adapté à la caractérisation des propriétés rhéologiques des sécrétions bronchiques ou d'autres substances telles que des polymères (3).

**I - DESCRIPTION DE L'APPAREIL**

**I-1. Principe (fig 1)**

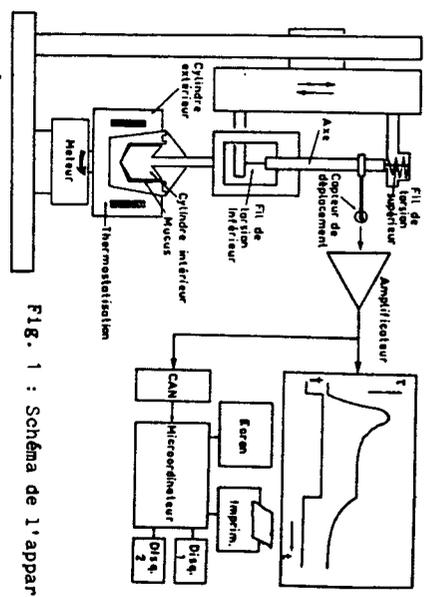


Fig. 1 : Schéma de l'appareil

Le système de mesure a une géométrie cylindrique de type Mooney et Ewart permettant d'obtenir un taux de cisaillement uniforme dans l'entrefer. Le cylindre intérieur est fixé à un axe maintenu en position par deux fils de torsion. Le cylindre extérieur tourne à vitesse constante grâce à un moteur synchrone. Un capteur, fixé à l'axe supportant le cylindre intérieur, permet de mesurer des angles de torsion très faibles. Après application d'un taux de cisaillement constant, la viscosité apparente est calculée d'après la mesure de la contrainte de cisaillement à l'état d'équilibre. Le module élastique  $G$  est calculé d'après la courbe de relaxation, sur l'hypothèse qu'elle peut être représentée par l'équation d'une exponentielle simple :

$$G(t) = G_1 e^{-t/\tau}$$

dans laquelle  $\tau$  est le temps de relaxation et  $G_1$  le module total à l'infini.

## 1-2. Détails techniques

La cuve extérieure peut être animée de différentes vitesses de rotation permettant d'obtenir différents taux de cisaillement constants compris entre 0,06 et 26  $\text{sec}^{-1}$ . Le cylindre intérieur et le cylindre extérieur ont un diamètre de 20 mm et 21,5 mm respectivement (entrefer = 0,75 mm). Le cylindre intérieur a une hauteur de 18,4 mm. La base des deux cylindres est conique (angle du cylindre intérieur = 155,9°, angle du cylindre extérieur = 164,1°). Le volume d'échantillon nécessaire à la mesure est de 1 ml. La température du système est réglée par une circulation d'eau extérieure. Le capteur constitué d'un transformateur différentiel (025 MHR SCHAEVITZ), mesure un angle de déformation de  $8 \times 10^{-2}$  pour une viscosité de 100 Pa.s.

Les principaux avantages et l'originalité de la technique utilisée résident dans le fait que 1) la structure de l'échantillon n'est pas détruite lors de sa mise en place grâce à une vitesse de pénétration très ralentie du cylindre intérieur dans le cylindre extérieur. 2) la contrainte est mesurée libre de tout frottement parasite et 3) durant la mesure la concentricité des cylindres est parfaitement conservée grâce à l'application d'une tension verticale sur les fils de torsion.

## II - MESURES ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Le signal analogique issu du capteur du viscoélastomètre est transféré vers un micro-ordinateur de type Apple II par l'intermédiaire d'un interface analogique-numérique. Le micro-ordinateur échantillonne le signal toutes les secondes et visualise la courbe correspondante sur écran.

Le calcul de la viscosité s'effectue sur les 60 points échantillonnés avant le début de l'enregistrement de la courbe de relaxation. Le logiciel calcule la moyenne de ces 60 points, ainsi que l'écart type correspondant. Cet écart-type permet ainsi de juger de la variation de la mesure.

Le module élastique est calculé d'après la courbe de relaxation obtenue après annulation du taux de cisaillement, sur la base d'un comportement exponentiel simple. Le micro-ordinateur effectue une régression linéaire entre le logarithme de la contrainte échantillonnée lors de la relaxation et le temps. Il en déduit la constante de temps  $\tau$  et un coefficient de corrélation permet d'apprécier la validité du modèle utilisé. Le module élastique est calculé d'après la relation.

$$G = \frac{\eta_a}{\tau}$$

où  $\eta_a$  représente la viscosité apparente mesurée à l'équilibre, juste avant le début de la relaxation. (fig 2).

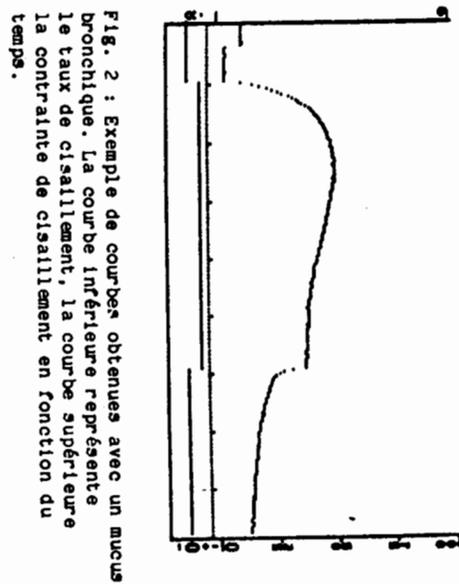


Fig. 2 : Exemple de courbes obtenues avec un mucus bronchique. La courbe inférieure représente le taux de cisaillement, la courbe supérieure la contrainte de cisaillement en fonction du temps.

## III - CONCLUSION

L'appareil décrit ci-dessus, grâce à sa simplicité d'emploi, permet de déterminer les propriétés rhéologiques des sécrétions bronchiques en routine clinique. Il est maintenant commercialisé (SEFAM) et son champ d'application devrait s'étendre à d'autres fluides biologiques (mucus cervical, gastrique...) et à des produits industriels (substances agro-alimentaires, polymères...).

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 - PUCHELLE E., GIRARD F., ZAHM J.M. : Rhéologie des sécrétions bronchiques et transport muco-ciliaire. Bull. Europ. Physiopath. Resp., 1976, 12, 771-779.
- 2 - DAVIS S.S. : Practical application of viscoelasticity measurements. Workshop on cough and expectoration. Paris 1979. Europ. J. of Resp. Dis., suppl. n°110, vol.61, 1980.
- 3 - DUVIVIER C., DIDELON J., ARNOULD J.P., ZAHM J.M., PUCHELLE E., KOPP C., OBRECHT B. : A new viscoelastometer for studying the rheological properties of bronchial mucus in clinical practice. Biorheology, suppl.1, 1984, 119-122.

VISCOSIMETRE A FERROFLUIDE : APPLICATION A L'HEMORHEOLOGIE

A FERROFLUID VISCOSMETER : APPLICATION TO HAEMORHEOLOGY

J.P. BRANCHER, M. IUCIUS

LEMETA  
2, rue de la Citadelle  
NANCY - France

RESUME

Nous présentons quelques résultats obtenus avec un viscosimètre à liquide magnétique entraîné par un champ magnétique tournant, sur des fluides à seuil connus et sur du sang.

ABSTRACT

We present some results obtained with a ferrofluid viscosimeter in a rotating magnetic field, on blood and yield liquids.

I - INTRODUCTION

Le viscosimètre à ferrofluide dont le principe de fonctionnement et l'étalonnage furent présentés au 18ème Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie [1] a été utilisé en hémothéologie et testé avec des fluides à seuil.

Le viscosimètre peut s'utiliser en fonctionnement constant par application d'un champ magnétique tournant d'intensité constante. Le cylindre intérieur contenant le ferrofluide est alors mis en mouvement à vitesse constante. La mesure de cette vitesse permet d'accéder au frottement pariétal du fluide à tester placé à l'extérieur du cylindre tournant dans un entrefer de faible épaisseur, limité par un cylindre fixe. Dans ce cas là les résultats obtenus [2] sont satisfaisants et le calcul de la viscosité apparente du fluide à tester est relativement simple et précis. Le viscosimètre peut s'utiliser en phase de ralentissement : lorsque le cylindre intérieur est lancé à une vitesse constante, le champ magnétique est annulé brutalement. Ainsi le couple magnétique moteur s'annule et le cylindre est ralenti jusqu'à l'arrêt total par le couple visqueux exercé par le liquide à tester. Dans ce cas là, il faudra faire une étude complète du mouvement du ferrofluide en phase de ralentissement notamment lorsque sa viscosité est de l'ordre de celle du fluide à tester. Dans le cas où la viscosité du ferrofluide est grande vis à vis de l'autre le mouvement du ferrofluide pourra être approché par un mouvement en bloc (cf les résultats d'étalonnage du viscosimètre [1]). Le problème évoqué ici sera discuté dans le paragraphe II. Les résultats obtenus en hémothéologie et sur les fluides à seuil seront présentés dans le paragraphe suivant.

soit le dispositif représenté sur la figure 1 où l'indice 2 correspond au fluide disposé dans l'entrefer de largeur  $e$ , l'indice 1 correspond au ferrofluide remplissant le cylindre intérieur de rayon  $R_1$ .

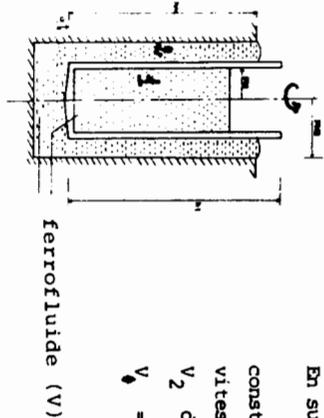


Figure 1

En supposant que  $\frac{e}{R_1} \ll 1$ , en fonctionnement constant le ferrofluide tourne en bloc à la vitesse  $\Omega_0$  et le liquide 2 à une vitesse  $V_2$  de composantes polaires  $V_r = 0$ ,  

$$V_\theta = \frac{\Omega_0 R_1}{e} (R_1 + e - r) \text{ où } R_1 \ll r \leq R_1 + e = R_2$$

Le couple magnétique équilibre alors le couple visqueux dû au fluide 2 (cf [1]). Si on supprime le couple moteur, le cylindre intérieur, freiné par le liquide 2 se trouve dans une phase de ralentissement.

En première approximation si le ferrofluide a un mouvement en bloc identique à celui du cylindre intérieur, si le liquide 2 a une viscosité apparente  $\mu_2$ .

L'équation du mouvement de l'équipage mobile s'écrit :

$$I \frac{d\Omega}{dt} = - \frac{2\pi R_1^3 \mu_2 \Omega}{e}$$

où  $\Omega(t)$  est la vitesse de rotation à l'instant  $t$  ( $\Omega(0) = \Omega_0$ ).

Il est le moment d'inertie par unité de hauteur du cylindre plein de ferrofluide. Ainsi, la durée de la phase de ralentissement est de l'ordre de  $\tau_0$  :

$$\tau_0 = \frac{I e}{2\pi R_1^3 \mu_2}$$

- Dans l'entrefer le temps que met la couche de diffusion du rotationnel de vitesse pour remplir l'espace annulaire est de l'ordre de  $\tau_0$  [3] :

$$\tau_2 = \frac{e^2}{\gamma_2 \nu_2} \quad (\text{où } \gamma_2 \text{ est la viscosité cinématique du liquide 2})$$

Le temps  $\tau_2$  met en évidence l'importance de l'inertie du fluide par rapport aux forces visqueuses.

Dans le cas de notre dispositif les ordres de grandeur sont les suivants :

$$I \approx 1 \text{ cgs}, \quad R_1 \approx 0,6 \text{ cm} \quad e \approx 0,05 \text{ cm} \quad \rho_2 \approx 1 \text{ cgs}$$

le rapport  $\frac{\tau_2}{\tau_0} = \frac{2\pi R_1^3 e \rho_2}{I} \quad \text{où } \rho_2 \text{ est la masse volumique du liquide 2}$

Il paraît alors raisonnable de négliger les effets d'inertie dans le fluide 2 et de supposer que le cisaillement est constant dans l'entrefer.

- Dans le cylindre intérieur le temps de diffusion du rotationnel dans le ferrofluide est de l'ordre de  $\tau_1 = \frac{R_1^2}{\gamma_1 \nu_1}$  où  $\gamma_1$  est la viscosité cinématique du ferrofluide.

Le rapport  $\frac{\tau_1}{\tau_0} = \frac{2\pi R_1^3 \rho_1 \mu_2}{I e \nu_1}$  est dans notre cas, de l'ordre de  $10 \frac{\mu_2}{\mu_1}$

Le ferrofluide utilisé est du F.M.L. 140 Gauss de la Georgia pacific corporation sa masse volumique est de l'ordre de 1,2 cgs et sa viscosité dynamique  $\mu_2 \approx 20-30$  cpo.

Si le fluide 2 a une viscosité suffisamment faible il est probable qu'en première approximation les effets d'inertie du ferrofluide sont faibles et que le liquide magnétique est entrainé en bloc à la vitesse  $\Omega(t)$ . Lorsqu'on a procédé à l'étalonnage du viscosimètre on a utilisé de l'eau et le rapport  $\tau_1/\tau_0$  était de l'ordre de 1/3.

Si on utilise le viscosimètre en phase de ralentissement pour du sang, les viscosités sont du même ordre. Pour les taux de cisaillement auxquels le viscosimètre fonctionne la viscosité apparente du sang est de l'ordre de 10 cpo à l'instant initial et  $\tau_1 \approx 3$ . Dans ce cas il faut faire une analyse locale du phénomène.

On écrit alors l'équation du mouvement du ferrofluide avec la condition frontière  $\Omega(R_1, t) = \Omega(t)$  et la condition initiale  $\Omega(r, 0) = \Omega_0$ .

La vitesse du liquide magnétique s'obtient après utilisation de la transformation de Hankel [4] en fonction de  $\Omega(t)$ . On peut alors connaître le couple positif  $C_A$  exercé par le ferrofluide sur le cylindre (à  $r = R_1$ ).

L'équation du mouvement du cylindre s'écrit alors :

$$(1) \quad I_0 \frac{d\Omega}{dt} = C_A - C_2$$

où  $C_2$  est le couple visqueux du liquide 2.

Il est le moment d'inertie du cylindre intérieur seul (vide de ferrofluide). La vitesse du liquide magnétique s'écrit comme une somme infinie d'exponentielles du type  $e^{-t/\tau_i}$  où  $\tau_i = \frac{R_i^2}{\xi_i^2 \gamma}$

Les quantités  $\xi_i$  sont les zéros de la fonction de Bessel  $J_1$  :

$$\xi_1 = 3,832, \xi_2 = 7,016, \xi_3 = 10,173, \dots$$

Le plus grand temps de relaxation est alors  $\tau_1 = \frac{R_1^2}{\xi_1^2 \gamma}$

$$\text{On a ainsi } \frac{\tau_1}{\tau_0} = \frac{10}{(3,832)^2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \sim \frac{2}{3} \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Le rapport montre qu'en hémorhéologie pour un essai de relaxation il est possible de négliger les effets d'inertie dans le ferrofluide. Pour obtenir une plus grande précision (1) on doit calculer  $C_1$  par une somme de produits de convolution, on accède ensuite au couple  $C_2$  :  $|C_2| = \left| I_0 \frac{dQ}{dt} - C_1 \right|$

### III - QUELQUES RESULTATS OBTENUS AVEC LE VISCOSIMETRE A FERROFLUIDE.

Un des avantages de ce type de viscosimètre est de permettre l'étude du comportement de fluides lors de régime de mise en contraintes et de contraintes imposées.

Une première application envisagée est l'étude des fluides à seuil.

Certains fluides présentent un seuil d'écoulement lié au réseau réticulé qui se forme dans le milieu au repos. Dans ce cas là pour mettre en mouvement le viscosimètre il faut appliquer un couple magnétique suffisamment important.

Des essais ont été réalisés sur des fluides à seuil bien connus comme le carboxypol 940 et les boues argileuses (figure 2) [4].

Les boues argileuses utilisées sont à forte teneur en eau, elles ont été fournies par le Centre de Recherche en Mécanique et Hydraulique des sols et des roches et proviennent de la région de Clarion-Clipperton dans le Pacifique (prélevées sur fond plat à 5000m de profondeur). Les rhéogrammes ont été obtenus pour des teneurs en eau élevées, supérieures à 1000 % et ont permis de compléter les courbes du C R M H S R réalisées pour de faibles teneurs en eau (figure 3).

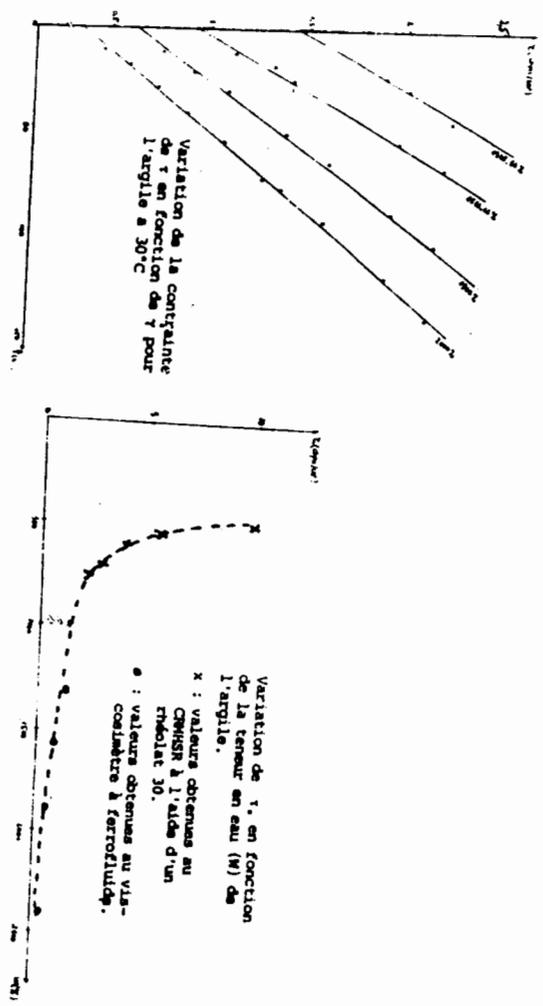


Figure 2 :

Figure 3 :

En hémorhéologie, un seuil d'écoulement a été mis en évidence [2]. La courbe de la figure 4 correspond à un essai sur du sang d'hématocrite 60 présentant un seuil d'écoulement notable ( $\tau$  seuil = 1 cgs. D'autre part les rhéogrammes obtenus soit en fonctionnement constant soit en essai de relaxation ont été comparés à ceux d'un fluide de Casson (figure 4). Suite à ces résultats, une étude est actuellement menée sur une généralisation de la loi de Casson en bi et tridimensionnel afin de résoudre des écoulements dans des rétrécissements ou des bifurcations.

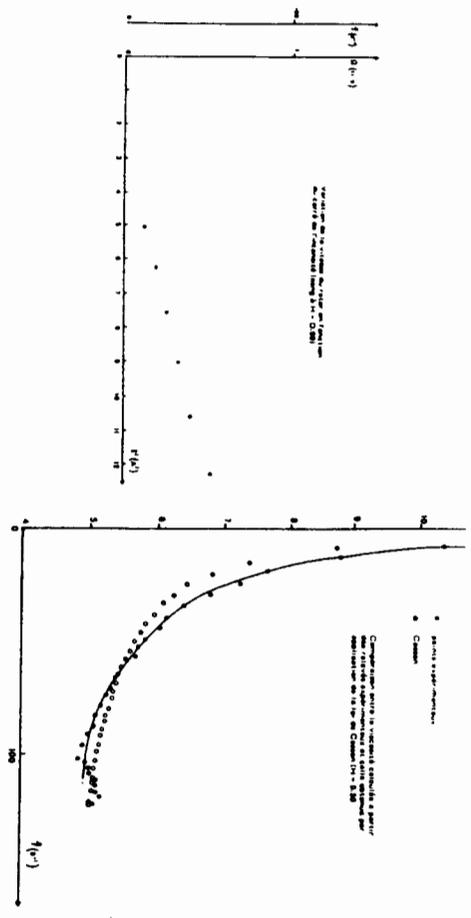


Figure 4 :

**BIBLIOGRAPHIE**

[1] J.P. BRANCHER - M. LUCIUS  
 "Viscosimètre à liquide magnétique", 18ème Congrès de la Société Française de Rhéologie (Nov. 83).  
 [2] R. RAHMANI  
 Thèse 3ème cycle I.N.P.L. (Nancy) 1985  
 [3] G.K. BATCHELOR  
 "An introduction to fluid dynamics" Cambridge Univ. Press.  
 [4] I.N. SNEDDON  
 "Fourier transform", Int. series in Pure and Applied Math.  
 [5] R. KOUTIRAT  
 D.E.A. de Mécanique (I.N.P.L. 1985, Nancy).

**APPROCHE DE LA CINÉTIQUE D'AGGREGATION DES HÉMATIES PAR ANALYSE D'IMAGES**

APPROACH TO RED BLOOD CELL AGGREGATION BY IMAGE ANALYSIS

- F. PAULUS (1.2), P. DIXNEUF (2), J.F. STOLTZ (1.3)  
 1. INSERM U 284 - Co 10  
 Brabois - 54511 VANDOEUVRE LES NANCY  
 2. Laboratoire de Physique et d'Informatique  
 Faculté des Sciences Pharmaceutiques - B.P. 403  
 54001 NANCY Cédex  
 3. Centre Régional de Transfusion et d'Hématologie  
 Brabois - 54500 VANDOEUVRE LES NANCY

**RESUME**

L'aggrégation érythrocytaire est un des paramètres fondamentaux de l'hémorhéologie et de ses applications cliniques. Actuellement les approches quantitatives du phénomène sont essentiellement réalisées à partir de méthodes optiques. Dans le but de mieux approcher ces phénomènes tant expérimentaux que pathologiques il a été entrepris une étude avec observation directe de l'aggrégation des globules rouges et traitement des images obtenues. Dans ce travail les auteurs rapportent leurs résultats concernant le calcul, à partir d'images numérisées, d'un index adimensionnel permettant de comparer entre eux des phénomènes différents. Etant donné que cet index est directement lié à un instant donné au nombre d'unités isolées présentes et à la forme des rouleaux et agrégats formés (allongés ou en amas), il varie de façon significative dans les cas pathologiques étudiés et pourrait donc servir de base pour des études cliniques.

**ABSTRACT**

The erythrocyte aggregation, a basic parameter in hemorheology and its clinical applications has been assessed hitherto by shear optical methods. For a better description of this phenomenon its kinetics has been followed in observing the formation of "rouleaux" by red blood cells. Using digital images the authors have performed successfully the determination of an adimensional index which made possible the comparison of several types of aggregation. At a given time this index is related to the number of existing isolated units and to the shape of rouleaux and that of aggregates. Its variations are significative in a number of pathologies and could be used for basic clinical studies.

## 1. INTRODUCTION

Outre les propriétés rhéologiques des hématies souvent évoquées (1,2) la connaissance de l'aggrégation érythrocytaire est fondamentale pour la compréhension des syndromes d'hyperviscosité et de leur conséquences microcirculatoires. Cependant la complexité des phénomènes mis en jeu a conduit à la mise au point de méthodes d'étude et de techniques expérimentales souvent très différentes. Ainsi la présence de rouleaux ou d'aggrégats érythrocytaires dans une suspension de globules rouges n'affecte pas seulement la viscosité apparente de la suspension mais aussi ses propriétés optiques. La formation d'aggrégats conduit à une augmentation de la lumière transmise à travers une suspension sanguine et à une diminution de la rétrodiffusion de lumière par la suspension. Utilisant ces propriétés, différents auteurs ont mis au point des techniques d'approche indirecte de l'aggrégation : méthodes faisant intervenir la lumière transmise (4) ou réfléchie (8) ou encore rétrodiffusée (7). Parallèlement des dispositifs d'observation directe ont également été mis au point pour définir les mécanismes de l'aggrégation et suivre les cinétiques d'aggrégation et de désaggrégation des globules rouges ; ces techniques mettent en oeuvre soit des viscosimètres rotatifs de type cône - plan ou Couette, soit des écoulements plans (Dintenfass). D'autre part quelques tentatives d'approches théoriques ont été développées pour calculer le nombre de cellules dans un rouleau ainsi que le degré de ramification.

Le but de ce travail est d'approcher la cinétique d'aggrégation des globules rouges par une étude à la fois qualitative et quantitative. La synthèse de ces deux approches nous a semblé indispensable pour mieux résoudre les problèmes d'interprétation lors des investigations cliniques.

Les résultats préliminaires présentés dans ce travail concernent l'étude de variations de cinétiques d'aggrégation des hématies pour des concentrations croissantes en fibrinogène, lors de modification de la charge électrocinétique des hématies et au cours de pathologies connues comme susceptibles de présenter des états d'hyperviscosité avec hyperaggrégation érythrocytaire.

## II. MATERIEL ET METHODES

### II.1. Système viscosimétrique:

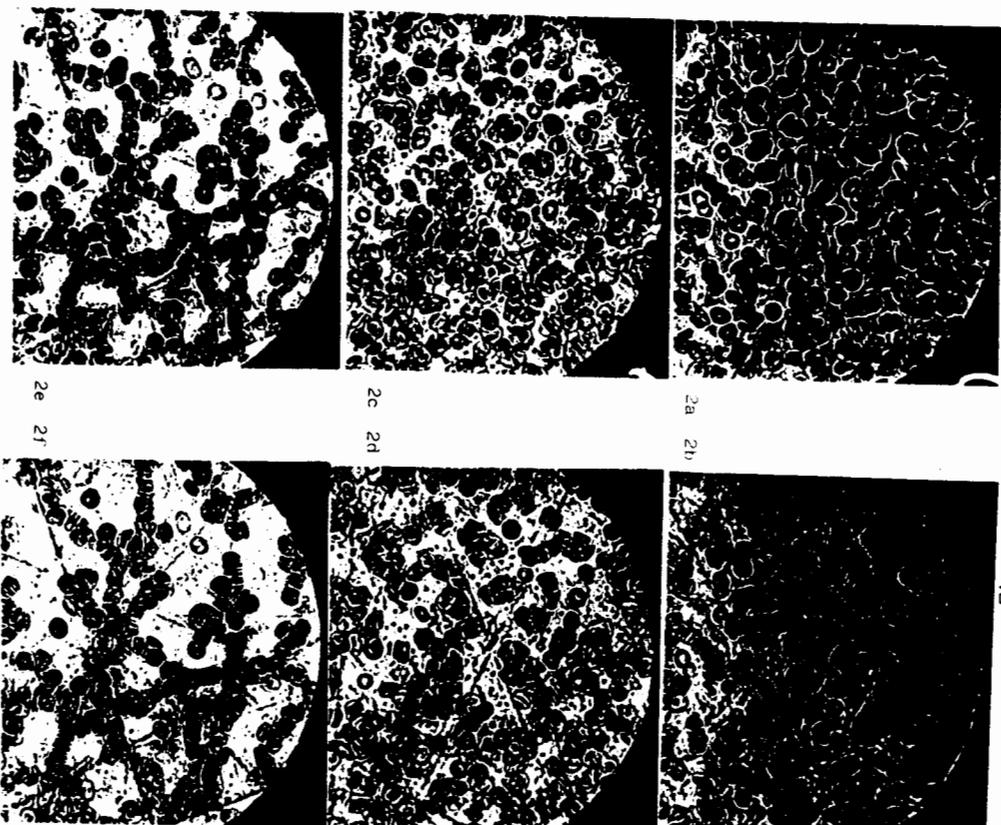
Le système viscosimétrique (rhéoscope) (5) est monté sur un microscope inversé muni d'un appareil photographique et d'une caméra vidéo (Brandt). Les échantillons sanguins sont soumis à une vitesse de cisaillement constante et suffisante pour dissocier complètement les rouleaux (entre 250 et 300 s<sup>-1</sup>). Au temps zéro, la rotation de l'appareil est stoppée et l'aggrégation des globules rouges est suivie par microphotographies prises toutes les cinq secondes (fig. 1). L'observation est toujours effectuée dans la même zone du viscosimètre.

### II.2. Numérisation des images:

Afin d'effectuer le traitement d'images nous avons mis au point un système optique et électronique permettant de numériser chacune des zones élémentaires composant le cliché étudié.

Figure 1 Formation de rouleaux ou d'aggrégats d'hématies en fonction du temps. On notera en particulier l'existence d'une structure pratiquement formée dès dix secondes dans le cas du sang d'infarctus, ce qui n'est pas le cas pour le sang normal.

G.R. étudiés	fibrinogène en g/l	temps après l'arrêt du moteur en secondes
2a Normaux	2,3	10
2b "	"	10
2c "	5,6	10
2d "	"	40
2e Infarctus	5,6	10
2f "	"	40



11.2. Numerisation des images:  
 Afin d'effectuer le traitement d'images nous avons mis au point un système optique et électronique permettant de numériser chacune des zones élémentaires composant le cliché étudié.

11.2.1. Système optique:  
 Le négatif tiré sur plan-film est placé sur une plaque de verre remplaçant le support plan d'une table traçante (MATANBE M4671). Elle est éclairée de façon diffuse et homogène par dessous à l'aide d'une lampe de 600 W. Le crayon est remplacé par un cylindre métallique dont une extrémité est percée d'un trou de 0,5 mm de diamètre. Une fibre optique emboîtée dans le cylindre conduit la lumière vers une cellule photoélectrique située dans le boîtier électronique.

11.2.2. Système électronique:  
 Le traitement électronique permet de traduire l'information lumineuse en une tension que l'on peut amplifier puis digitaliser afin d'envoyer à l'ordinateur un code permettant de distinguer pour chaque point étudiés 10 densités différentes, représentant une échelle linéaire. (Les codes choisis sont des chiffres de 0 à 9).  
 Tous les clichés sont ainsi numérisés sur 30000 points et les informations stockées sur disque peuvent être vérifiées en faisant correspondre à chaque chiffre un symbole graphique et en sortant sur imprimante la représentation du cliché étudié.

11.3. Méthode de calcul  
 A partir du cliché numérisé on procède en premier lieu à un lissage pour supprimer les zones de faible absorption correspondant au fond et ainsi améliorer le contraste entre le plasma et les structures globulaires (fig.2).

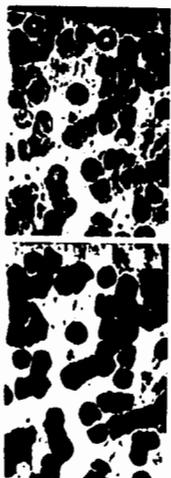


Figure 2 : Représentation obtenue avant et après lissage.

Etant donné qu'un point de forte absorption appartient à un globe rouge, pour chaque point sombre, on détermine sa contribution moyenne à la surface et au périmètre en considérant la nature, le nombre et la position de ses voisins (figure 3). Ainsi, pour chaque cliché, on peut estimer le périmètre et la surface de tous les réseaux formés (hématies isolées, en rouleaux ou en amas).

Pour suivre la cinétique d'agrégation nous avons choisi un index adimensionnel K défini par :

$$K = 4\pi S/P^2$$

présentant trois qualités :

- Etant sans dimension il permet une bonne comparaison des différentes cinétiques.

PERIMÈTRE P		SURFACE S	
Forme	Nombre	Forme	Nombre
	0		0
	2		2
	4		4
	6		6
	8		8
	10		10
	12		12
	14		14
	16		16
	18		18
	20		20
	22		22
	24		24
	26		26
	28		28
	30		30
	32		32
	34		34
	36		36
	38		38
	40		40
	42		42
	44		44
	46		46
	48		48
	50		50
	52		52
	54		54
	56		56
	58		58
	60		60
	62		62
	64		64
	66		66
	68		68
	70		70
	72		72
	74		74
	76		76
	78		78
	80		80
	82		82
	84		84
	86		86
	88		88
	90		90
	92		92
	94		94
	96		96
	98		98
	100		100

Figure 3 : Contributions possibles d'un point d'un agrégat à la surface et au périmètre en fonction du voisinage.

Il prend la valeur théorique 1 pour une forme circulaire unique et, bien que les formes observées ne soient pas toutes circulaires, son inverse varie en première approximation comme le nombre de formes isolées présentes dans le cliché étudié. Ce nombre peut à tout moment, pour un hématocrite fixé, définir un "état d'agrégation".

A surface ou à périmètre constants, il diminue lorsque les formes s'allongent. Il permet ainsi à un temps donné de définir la "structure" moyenne des réseaux formés et de distinguer les rouleaux en piles d'assiettes des amas globulaires sans orientation.

Pour calculer K on numérote de 1 à 6 les différents cas de figures possibles de la figure 3. On suppose qu'un point est noir si au moins 50 % de sa surface l'est. On remarque pour les cas 1, 3, 5 que les valeurs de la surface et du périmètre sont (entropie maximisée de la théorie d'information minimum (13) affirmer l'équiprobabilité des surfaces et des périmètres pour les cas 2, 4, 6. On connaît pour chaque cliché le nombre total N des différents cas et on sait q'une distribution équiprobable sur un intervalle, de même qu'une distribution binomiale équiprobable sur les deux bornes de l'intervalle, s'approche, lorsque le nombre d'éléments est grand, par la loi normale centrée sur le milieu de l'intervalle (N/2 (max - min)) et d'écart type  $(\sqrt{N/2}(\max - \min))$  (13). On peut alors déterminer l'erreur relative sur la surface (0,40 %) sur le périmètre (1,5 %) et sur l'indice K (inférieur à 3,5 %).



Par ailleurs à partir des photographies obtenues et afin d'étudier d'un point de vue plus théorique la formation et la structure des agrégats érythrocytaires, il serait peut être intéressant de tenter de vérifier si la notion générale de "fractale" introduite en 1975 par Mandelbrot peut s'appliquer au sang.

#### V. REFERENCES

- 1 - BESSIS, M., MOHANDAS, N., FEO, C. Automates ektacytometry : A new method of measuring red cell deformability and red cell indices. *Blood Cells*, 6, 315 - 327 (1980).
- 2 - Mc MILLAN, D.E., UTERBACK, N.G., LA PUMA, J. Reduced erythrocyte deformability in diabetes. *Diabetes*, 27, 9, 895 - 901 (1978).
- 3 - STOLTZ, J.F. Main determinants of red blood cell deformability, clinical and pharmacological approaches. In : Recent advances in Cardiovascular diseases. 2 (Sup.), 12-20 (1981).
- 4 - SCHMID-SCHONBEIN, H. Continuous viscous deformation of red blood cells in flow and their disturbance in sickle cell disease. *Blood Cells*, 8, 29 - 51 (1982).
- 5 - STOLTZ, J.F., GAILLARD, S., PAULUS, F., HENRI, D., DIXNEUF, P. Experimental approach to rouleau formation. Comparison of three methods. *Biorheology*, Suppl. I, 221-226 (1984).
- 6 - SCHMID-SCHONBEIN, H., VOLGER, E., TEITEL, P., KIESEWETTER, M., DAVER, U., HEILMANN, L. New hemorheological techniques for the routine laboratory. *R.A.C.D.*, Vol. II, (Suppl.), 27/39 (1981).
- 7 - MILLS, P., SNABRE, P. Rhéologie des suspensions de particules susceptibles d'agréger. Application à la suspension sanguine. Colloque CNRS-RCP-619 - Les Karellis (Savoie) 3-5 Janvier 1985. ITBM 1985 (à paraître).
- 8 - USAMI, S., CHIEN, S. Optical reflectometry and red cell aggregation under shear flow. 7<sup>th</sup> Europ. Conf. Microcirculation, Aberdeen, 1972, part. I. *Bibl. Anat.*, n°11, 91-97, (Karger Basel 1973).
- 9 - GOLDSMITH, H.L. The microheology of red blood cell suspension. *J. of General Physiology*, 52, 5-28 (1968).
- 10 - JAN, K. Red cell interactions in macromolecular suspension. *Biorheology*, 16, 137-148, (1979).
- 11 - PAULUS, F., DIXNEUF, P., STOLTZ, J.F. Cinétique d'aggrégation réversible des hématies (rouleaux) : approche expérimentale et traitement par analyse d'image. Colloque CNRS-RCP-619 - Les Karellis (Savoie) 3-5 Janvier 1985. ITBM 1985 (à paraître).
- 12 - SCHMID-SCHONBEIN, H., GÖSE, J.V., HEINRICH, L., KLOSE, H.J., VOLGER, E. A counter-rotating "Rheoscope chamber" for the study of the microheology of blood cell aggregation by microscopic observation and microphotometry. *Microvascular Research*, 6, 366-376, (1973).
- 13 - PAULUS, F., DIXNEUF, P., STOLTZ, J.F. Etude de la cinétique de formation des rouleaux. *Euromech* 186. *Rheology of biological fluids*. 17-18-19 Septembre 1984. Nancy (France) in *Biorheology* 1986 (à paraître).
- 14 - SCHOONEMAN, F., PAULUS, F., GAILLARD, S., STREIFF, F., STOLTZ, J.F. Macro and microheological variations observed during plasma exchange in cases of monoclonal disglobulinemia. *Clinical hemorheology*, 5, 51-59, (1985).

- 15 - JULLIEN, R., BOTET, R., KOLB, M. Les agrégats. La Recherche 16, 1334-1343, (1985).
- 16 - Statistiques appliquées à l'exploitation des mesures. C.E.A. (Ed. Masson), Tome 1, 28, (1969).
- 17 - BROOKS, D., GREIG, R.G., JANZEN, J. Mechanisms of erythrocyte aggregation. In : *Erythrocyte mechanism and blood flow* ed by G.R. Meiselman H.J. - Brooks D.E., Alan Liss Publ (N.Y.), 119 - 140 (1980).

### COMPORTEMENT DE BITUMES ET DE BITUMES-POLYMERES EN ECOULEMENT DE CISAILLEMENT ET D'ELONGATION

BEHAVIOUR OF ASPHALTS AND ASPHALT-POLYMERS IN SHEAR AND ELONGATION-NAL FLOW

P. ATTANE\*, A. SOUCEMARIANADIN\*, J.B. PRUD'HOMME\*\*

\* Institut de Mécanique  
Université scientifique et Médicale de Grenoble  
BP 68 - 38402 St-MARTIN D'HERES - France

\*\* ELF-Agucitaine  
Centre de recherche de Solalze  
BP 22 - 69360 St-SYMPHORIEN D'OZON - France

#### RESUME

On étudie le comportement en cisaillement et en élongation uniaxiale de bitumes et de bitumes-polymères : les STYRELF. Pour l'élongation un rhéomètre original a été construit. Pour le cisaillement un rhéogonimètre de Weissenberg modifié permet l'obtention des contraintes normales et tangentielles en régime permanent et des contraintes tangentielles seulement, en régime transitoire. On montre que le principe de superposition temps-température s'applique à tous les produits et à tous les types d'essais. Une méthode d'adimensionalisation est proposée. Dans le cas des bitumes les courbes maîtresses ainsi obtenues sont indépendantes du produit. Pour les STYRELF les courbes adimensionnelles obtenues sont identiques à celles des bitumes dans le domaine linéaire mais dépendent de la concentration en polymère dans le domaine non-linéaire.

#### ABSTRACT

Shear and elongational behaviour of asphalts and asphalt-polymer binder (STYRELF) is investigated. An original rheometer was built for elongational uniaxial experiment. A modified Weissenberg rheogoniometer is used to obtain first normal stress difference and viscosity in steady shear flow. Only shear-stresses are measured in transient test. The time-temperature superposition principle is found to hold for all type of test and all products. A method of reduced variables is proposed. For four penetration graded asphalts of the same origin master curves are obtained, independent of the product considered. For STYRELF the non-dimensional curves obtained are identical to the asphalt master curves in the linear region but deviate in the non linear region.

Communication au Groupe Français de Rhéologie le 29 novembre 1985

#### INTRODUCTION

On sait qu'en vue d'améliorer les propriétés mécaniques des bitumes on a souvent tenté d'y incorporer des polymères. La société ELF-AQUITAINE a résolu les problèmes de compatibilité entre bitume et polymère par un procédé original ((1) (2)). Les produits obtenus sont commercialisés sous le nom de STYRELF. L'objectif initial de nos travaux était de cerner en quoi les propriétés mécaniques des STYRELF étaient différentes de celles du bitume pur et en particulier comment ces propriétés évoluaient avec la teneur en polymère du produit. Il nous est apparu que cet objectif ne pouvait pas être atteint en utilisant la caractérisation thermo-mécanique normalisée des bitumes et produits bitumineux.

Celle-ci est basée sur une série de test de routine : pénétration, point de ramollissement, point de Fraas ... Des règles empiriques permettent, à partir de ces test, de choisir entre différents bitumes en vue d'une application particulière. On sait que ces règles, bien établies par l'usage dans le cas de bitumes courants, peuvent être mises en défaut si on les applique à des produits résultant de nouveaux bruts pétroliers ou de nouvelles techniques de raffinage. La plupart des auteurs s'accordent donc à penser que de nouveaux tests mieux définis et/ou une corrélation des tests usuels avec des paramètres rhéologiques sont nécessaires pour caractériser les produits bitumineux (3). Les études sur la rhéologie des produits bitumineux menées depuis les années 1960 ((3) - (7)) ont permis d'établir que :

- 1) Les bitumes sont des fluides viscoélastiques
- 2) Le principe de superposition temps température s'applique aux bitumes dans le domaine de la viscoélasticité linéaire (faibles déformations et/ou vitesses de déformation).

La limitation principale de ces études réside dans le fait qu'elles portent essentiellement sur les propriétés linéaires en cisaillement : mesures du module de relaxation  $G(t)$ , de la viscosité à faible vitesse de cisaillement  $\eta^0$ , de la viscosité complexe. La critique la plus courante faite aux corrélations établies sur de telles bases consiste à souligner que les tests classiques comme par exemple l'essai de pénétration peuvent faire intervenir des propriétés non-linéaires, c'est-à-dire à forte vitesse de cisaillement. Nous ajouterons de plus, que dans le domaine non-linéaire la connaissance des propriétés en cisaillement ne peut suffire, les propriétés en élongation pouvant jouer un rôle non négligeable.

- Nos travaux, ((8 - 11)) nous ont permis :
- de préciser le comportement non linéaire des bitumes tant en cisaillement qu'en élongation
- d'établir des différences qualitatives entre comportement rhéologique des bitumes purs et des bitumes polymères
- d'avancer sur la voie d'une corrélation entre test usuels et paramètres rhéologiques bien définis.

#### PRODUITS

Nous avons choisis quatre bitumes non oxydés provenant de la même origine et fabriqués par la raffinerie ELF - Feyzin. Les bitumes-polymères font partie de la famille de produits commercialisés par ELF AQUITAINE sous le nom de STYRELF. Le procédé consiste à dissoudre un polymère de faible masse moléculaire dans le bitume (ici le bitume B 80/100) et ensuite à réaliser des liaisons chimiques irréversibles du polymère sur lui-même et du polymère sur les sites réactifs du bitume ((1) (2)). Bien entendu l'augmentation du pourcentage de polymère dans le produit influe sur les propriétés mécaniques : on constate une diminution de la pénétration et une augmentation de la température de ramollissement. Les tests classiques, tant sur les bitumes que sur les STYRELF, ont été menés au centre de Recherche ELF-Solalze et leurs résultats figurent tableau 1.

Les bitumes sont repérés par la lettre B suivi de leur indice de pénétration. Les styreelf sont repérés par les lettres STYR suivi du pourcentage en poids de polymère. Les STYRELF étudiés sont fabriqués à partir du bitume B 80/100.

## a) Cisaillement

Nous disposons d'un rhégoniomètre de Weissenberg modifié en vue de réaliser des expériences de relaxation des contraintes après arrêt d'un cisaillement à vitesse de déformation  $\dot{\gamma}$  constante ou de croissance des contraintes après démarrage d'un cisaillement à vitesse de déformation  $\dot{\gamma}$  constante. ((12)). La mesure des contraintes tangentielles permet d'accéder aux viscosités transitoires (resp.  $\eta(\dot{\gamma}, t)$  et  $\eta^+(\dot{\gamma}, t)$ ). Celle des contraintes normales permet d'accéder aux premières fonctions de contraintes normales (resp.  $\psi_1(\dot{\gamma}, t)$ ,  $\psi_2^+(\dot{\gamma}, t)$ ). Il a été montré qu'un manque de rigidité de l'appareillage peut introduire de grandes erreurs dans les mesures transitoires (cf (12)). On peut estimer que les effets de couplage sont négligeables si les temps caractéristiques des mesures expérimentales sont plus grands que les temps de réponse du rhéomètre en torsion  $t_T$  et en effort axial  $t_A$ . Pour un fluide newtonien de viscosité  $\eta_0$  placé entre un plan de rayon R et un cône d'angle  $\alpha$  on a :

$$t_T = \frac{20 \pi R^3}{3 K_T \alpha} \eta_0 ; t_A = \frac{6 \pi R}{K_A \alpha^3} \eta_0$$

avec  $K_T$  rigidité en torsion du rhéomètre et  $K_A$  rigidité axiale.

Le temps caractéristique du matériau peut être estimé par le temps moyen déduit du modèle du fluide viscoélastique linéaire :

$$\bar{C}_W = \int_0^\infty t G(t) dt / \int_0^\infty G(t) dt \quad [3]$$

En utilisant les résultats de la viscoélasticité linéaire,  $\bar{C}_W$  peut être mesuré à l'aide des relations

$$\bar{C}_W = \eta_0 \bar{I}_{e_0} = \psi_{10} / 2 \eta_0 \quad [4]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \eta_0 = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}, t) \\ \psi_{10} = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \psi_1(\dot{\gamma}, t) \end{cases}$$

et  $\bar{I}_{e_0} = \psi_{10} / 2 \eta_0$  est la complaisance élastique.

Nous avons vérifié tous les produits testés satisfaisaient la condition:

$$\bar{C}_W / t_T \gg 1 \quad [5]$$

$$\bar{C}_W / t_A \gg 1 \quad [6]$$

Par contre la condition n'était pas satisfaisante et par suite nous ne pouvons présenter de résultats concernant la mesure des efforts normaux en régime transitoire. Il convient de souligner le soin qui doit être accordé à la vérification des relations (5) et (6). En effet nous avons pu montrer (9) que certains résultats expérimentaux en régime transitoire publiés dans la littérature étaient étonnés, la rigidité en torsion du rhéomètre utilisé étant trop faible compte tenu de la faible complaisance élastique des bitumes.

## b) Elongation

Nous avons réalisé un rhéomètre élongationnel (11) permettant d'élérer une éprouvette selon son axe (élongation uniaxiale). Ce rhéomètre permet de réaliser des essais transitoires fluage à vitesse de déformation imposée  $\dot{\epsilon}$  ou à contrainte imposée  $\sigma$ . En admettant que les matériaux utilisés sont incompressibles la mesure de la force de traction et de la longueur entre mors permet d'accéder respectivement à la viscosité élongationnelle  $\eta^+(\dot{\epsilon}, t)$  ou à la complaisance  $D^+(\sigma, t)$ .

En vue de pouvoir comparer les divers produits entre eux il est naturel de chercher à présenter les résultats sous forme de courbes maîtresses. La recherche de telles courbes maîtresses a été largement traitée en ce qui concerne les polymères (cf (12)) pour une revue) mais peu de travaux existent sur les bitumes. Il a été récemment proposé (13) que le tracé de  $\eta(\dot{\gamma})/\eta_0$  en fonction de  $\eta_0 \dot{\gamma}$  permettrait l'obtention d'une courbe maîtresse de viscosité par les bitumes. Nous avons pu montrer (cf (9)) que cette méthode pouvait être mise en défaut. On remarquera de plus que cette méthode ne fait pas appel à l'usage de variables adimensionnelles. Les fonctions matérielles obtenues en cisaillement dépendent de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  (écoulements permanents) et/ou du temps t (écoulements transitoires). Il est donc plus naturel d'introduire un paramètre  $\bar{C}$  ayant la dimension d'un temps pour normaliser  $\dot{\gamma}$  et t. Nous choisirons de normaliser  $\dot{\gamma}$  et t par  $\bar{C}_W$  qui apparaît comme la moyenne en poids des temps de relaxation du matériau (équation 3). Soulignons que cette démarche diffère de celles consistant à définir  $\bar{C}$  comme étant le paramètre produisant une superposition des différentes courbes expérimentales.  $\bar{C}_W$  est défini a priori et résulte de mesures dans le domaine linéaire seulement (équation 4).

## a) Superposition temps-température

La figure 1 montre les résultats obtenus en régime permanent pour un bitume à différentes températures. On constate l'existence d'une courbe maîtresse de viscosité indépendante de la température. Ce résultat est équivalent à l'application du principe de superposition temps-température. En effet la complaisance élastique  $\bar{C}_W$  est indépendante de la température et  $\bar{C}_W$  varie avec la température comme la viscosité limite  $\eta_0$  (équation (4)) c'est-à-dire comme le paramètre d'adimensionalisation  $a_T$  intervenant dans l'application de ce principe (cf (14)).

L'applicabilité de ce principe aux bitumes a été discuté en détail dans un article précédent (9). Nous rappellerons ici les principaux résultats :

- contrairement aux affirmations de plusieurs auteurs ce principe s'applique aux bitumes en régime non-linéaire ( $\dot{\gamma} \bar{C}_W > 1$ ).

- Les variations de la viscosité limite avec la température sont convenablement représentées par l'équation de Williams-Landel-Ferry

$$a_T = \frac{\eta_0(T)}{\eta_0(T_0)} = \frac{8,86 (T - T_0)}{101,6 + T - T_0} \quad [7]$$

En utilisant cette équation pour calculer la viscosité limite à la température de bille anneau  $T_{BA}$  nous avons établi que la température de bille anneau était une température d'équivalabilité limite (cf tableau 1).

$$\eta_0(T_{BA}) \sim (1,8 \pm 0,2) 10^3 \text{ Pa.s} \quad [8]$$

Les figures 2 et 3 montrent que le principe de superposition temps-température s'applique aussi en régime transitoire, aux bitumes comme aux bitumes polymères. On notera que les performances du rhéomètre utilisés ont permis d'établir ces résultats pour des viscosités  $\eta_0$  et des temps caractéristiques  $\bar{C}_W$  variant dans un rapport supérieur à  $10^4$ .

## b) Courbes maîtresses

Figure 4 nous avons reporté les courbes maîtresses de viscosité analogues à celle montrée figure 1 pour les quatre bitumes utilisés. Malgré une légère dispersion des résultats on peut admettre que l'on obtient une courbe unique indépendante du bitume considéré.

La figure 5 montre que ce résultat peut être étendu aux essais en régime transitoire. Le comportement rhéologique en cisaillement est donc qualitativement le même pour ces quatre bitumes de même origine.

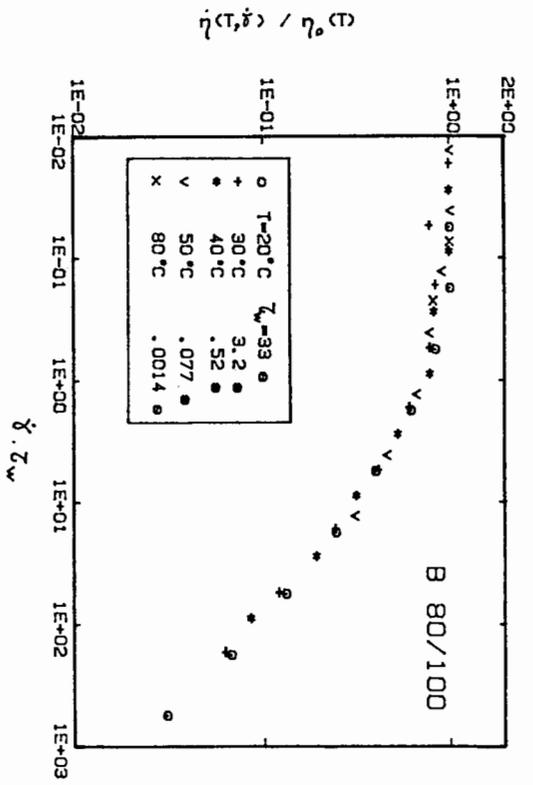


Figure 1 - Courbe maîtresse de viscosité pour le bitume B 80/100.

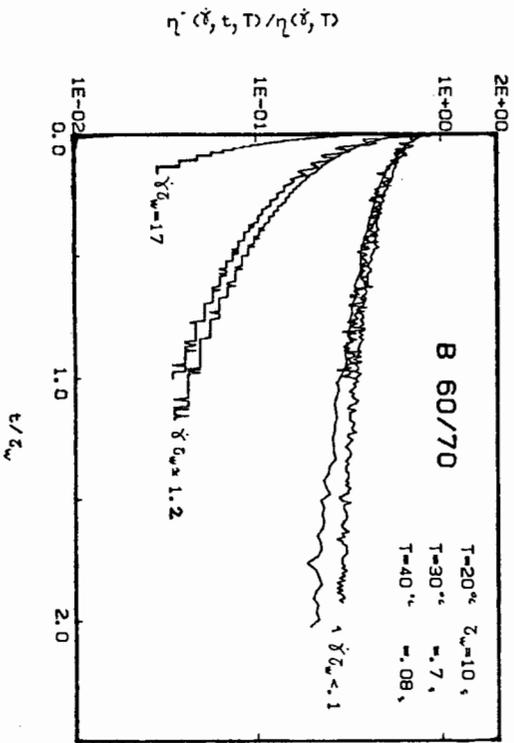


Figure 2 - Courbe maîtresse de relaxation des contraintes tangentielles pour le bitume B 60/70.

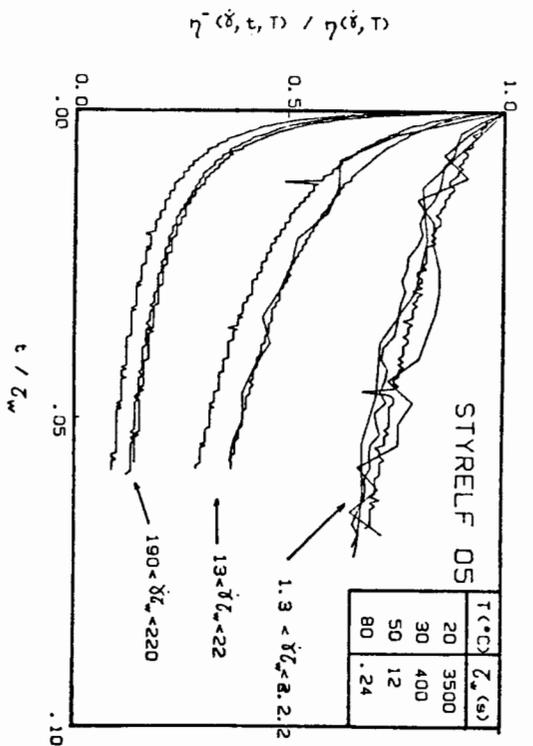


Figure 3 - Courbes réduites de relaxation des efforts tangentiels pour le STYRELF 05.

Produit	Pénétration	T <sub>BA</sub> (°K)	T <sub>S</sub> (°K)	η <sub>0</sub> (T <sub>BA</sub> ) x 10 <sup>-3</sup> (Pas)
B 40/50	48	327	312	1,7
B 60/70	70	321	311,7	1,8
B 180/220	203	312	307,4	1,6
B 80/100	83	321	309,6	2,1
STYR 01	70	325	309,4	2,7
STYR 02	64	329		
STYR 03	60	333	310,6	2,5
STYR 04	55	340		
STYR 05	48	345	309,6	2
STYR 06	44	351	313,3	1,8

Tableau 1 - Caractéristiques des bitumes et bitumes polymères étudiés.

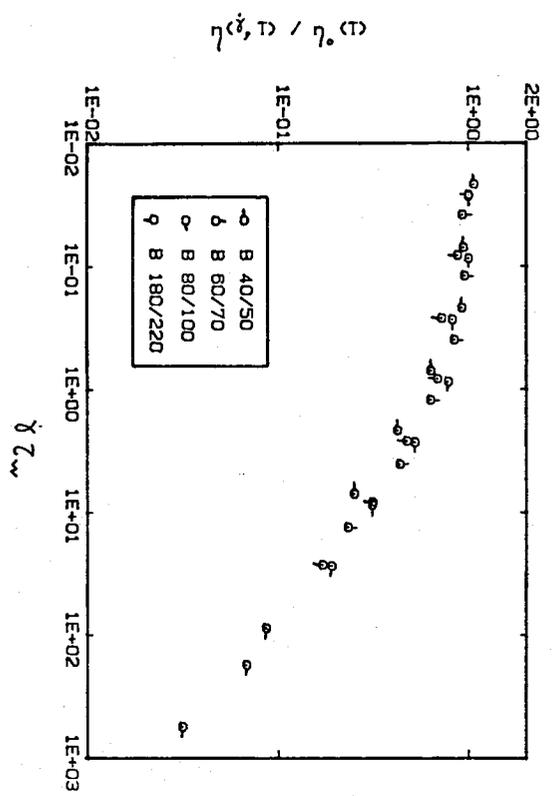


Figure 4 - Viscosité réduite en fonction de la vitesse de cisaillement réduite pour les quatre bitumes étudiés.

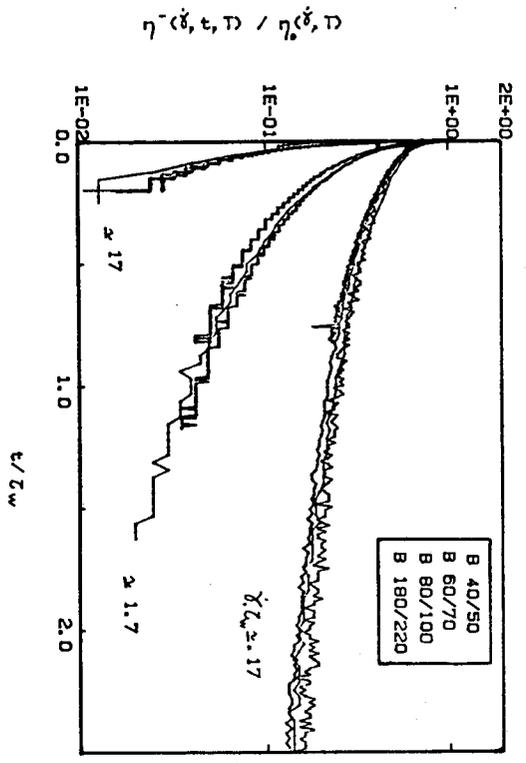


Figure 5 - Courbe maîtresse de relaxation des contraintes tangentielles pour les quatre bitumes étudiés.

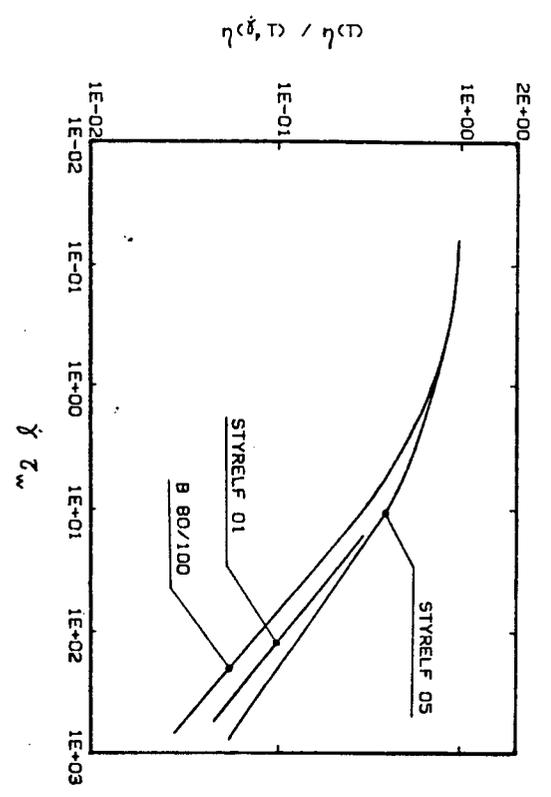


Figure 6 - Courbes réduites de viscosité (valeur moyenne) pour le bitume B 80/100 et deux STYRELF.

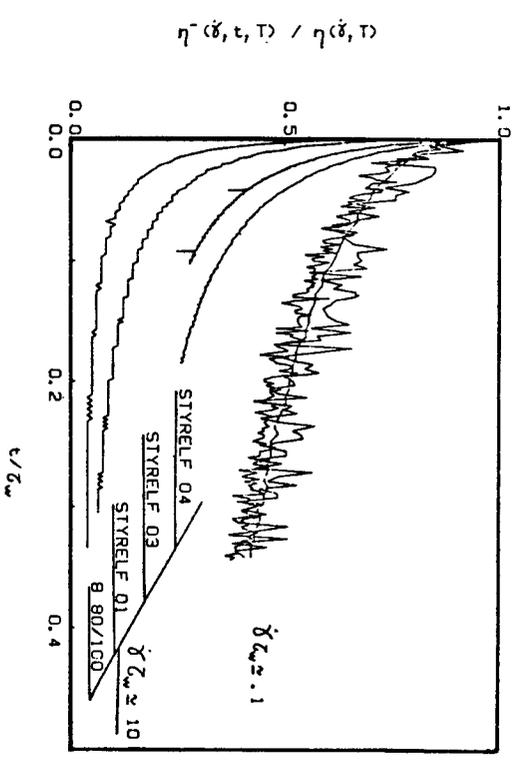


Figure 7 - Courbes réduites de relaxation des contraintes tangentielles pour le bitume B 80/100 et plusieurs STYRELF à deux vitesses de cisaillement réduites.

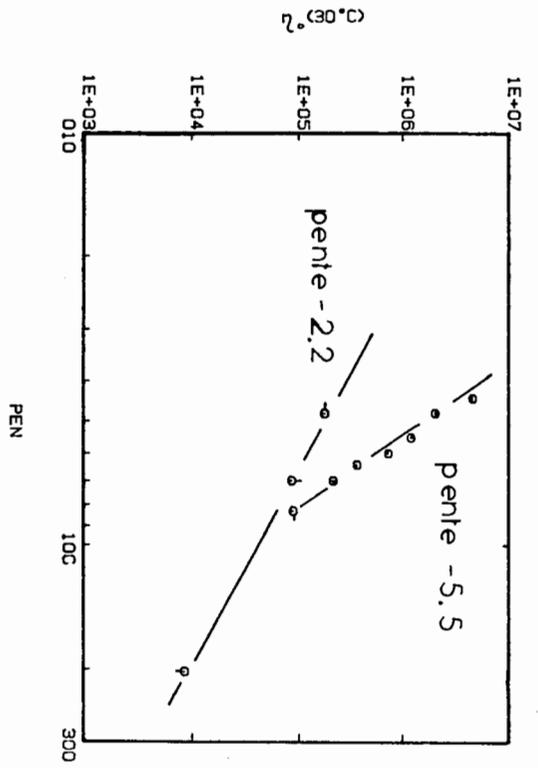


Figure 9 - Viscosité limite  $\eta_0$  à 30° C en fonction de la pénétration :  
 -○ B 40/50, ○ B 60/70, B 80/100, □ B 180/220, ●  
 STYRELF 01, ○ STYRELF 02, ● STYRELF 03, ● STYRELF 04,  
 ● STYRELF 05, ● STYRELF 06.

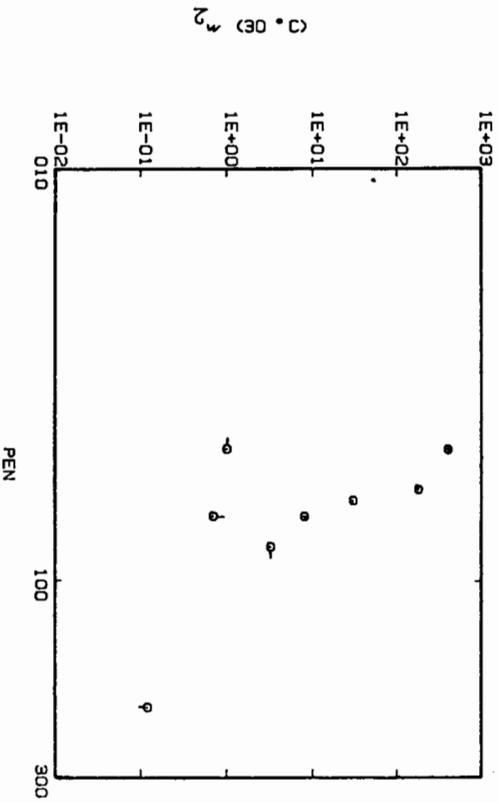


Figure 10 - Temps caractéristique  $\tau_w$  à 30° C en fonction de la pénétration : symboles identiques à ceux de la figure 9.

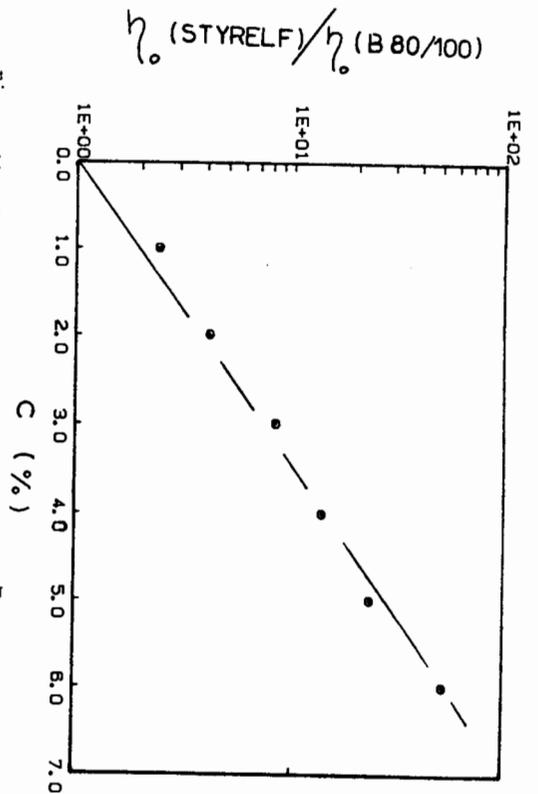


Figure 11 - Rapport de la viscosité limite  $\eta_0$  (STYRELF) à la viscosité limite du bitume mère  $\eta_0$  (B 80/100) en fonction de la concentration en polymère. T = 30° C. Symboles identiques à ceux de la figure 9.

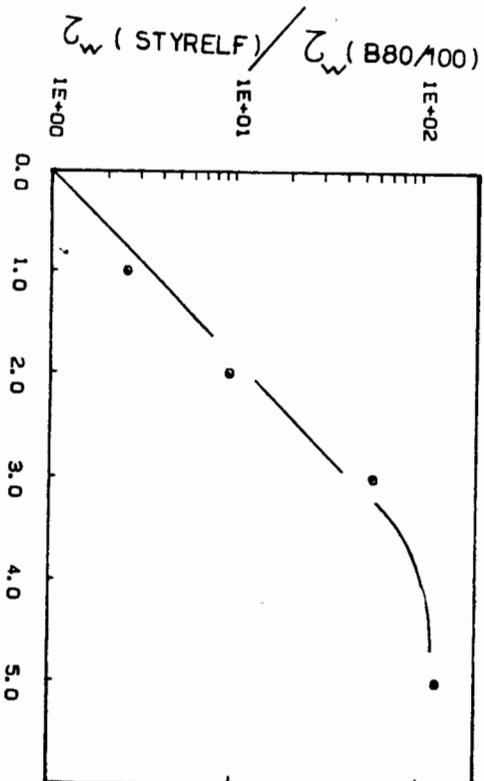


Figure 12 - Rapport du temps caractéristique  $\tau_w$  (STYRELF) au temps caractéristique du bitume mère  $\tau_w$  (B 80/100) en fonction de la concentration en polymère. T = 30° C. Symboles identiques à ceux de la figure 9.

Nous avons montré qu'une méthode d'adimensionnalisation proposée à l'origine pour des polymères (12) pouvait être étendue aux produits bitumineux. Cette méthode permet de caractériser des bitumes de même origine par deux seulement : la viscosité limite  $\eta_0$  et un temps caractéristique  $\bar{C}_w$ . Il reste toutefois à préciser dans quelles limites les courbes maîtresses ainsi obtenues restent valables pour d'autres bitumes (influence du brut d'origine ? du procédé de fabrication ?). Si les courbes maîtresses obtenues sont valables pour tous les bitumes le problème du lien entre caractérisations classiques et comportement rhéologique devient un point particulièrement important. En effet si la mesure de  $\eta_0$  ne soulève pas de grosse difficulté, la détermination de  $\bar{C}_w$  fait intervenir la mesure d'effort normal à faible vitesse de cisaillement. Cette mesure, particulièrement délicate devrait être remplacée par un test plus commode.

Si l'essai de bille-anneau semble bien être un essai d'équivalences limite par contre la situation est moins claire en ce qui concerne l'essai de pénétration. En particulier le fait d'avoir trouvé des corrélations pénétration/viscosité différentes pour les bitumes et les STYRELF doit mettre en garde contre la tentation de relier la pénétration à la seule viscosité.

En ce qui concerne plus particulièrement l'étude des bitumes polymères nous avons montré que dans le régime non linéaire ( $\dot{\gamma} \bar{C}_w > 1$ ) les courbes maîtresses obtenues dépendaient de la concentration en polymère. L'adjonction de polymère au bitume modifie donc son comportement rhéologique de manière qualitative et non seulement quantitative. Les tests classiques ne peuvent alors pas permettre de discriminer entre produits de familles différentes.

Nous avons pu montrer que la complaisance élastique des STYRELF ne croissait pas indéfiniment avec la concentration en polymère. Nos travaux se poursuivent actuellement par la mesure des propriétés en élongation des STYRELF.

- (1) HAGENBACH, G., P. MALDONADO, G. HAMEAU. Séminaire Euro-bitume, 14-15 Nov. 1978. Euro Bitume ed.
- (2) PHILLIPON, O., G. HAGENBACH. The asphalt-polymer reaction a new way for the improvement of the performances of bitumen binder. 17ème World Congress on road. 8-15 oct. 1983. Sydney Australia.
- (3) Rapport du Symposium RILEY "Susceptibilité thermique de la consistance des liants hydrocarbonés" DARMSTADT Sept. 1978 OMKOK-TECHNOINFORM ed. BUDAPEST 1979.
- (4) BRODNYAN, J. G., F. H. GOSKINS, W. PHILIPPOFF, E. THELEN. (1960). Trans. of the Soc. of Rheol., 4, 279-296.
- (5) DE LA TAILLE, B., G. BOYER. (1980). Proc. 8th International Congress on rheology, Vol. 3, 671-677.
- (6) DOBSON, G. K. (1967). J. Sci. Instrum., 44, 375-378.
- (7) DOBSON, G. R. (1972), J. Inst. Petroleum, 58, 14-24.
- (8) A. SOUCEMARIANADIN "Comportement non linéaires de bitumes en écoulements de cisaillement permanents et transitoires". Congrès Français de Mécanique - Marseille 7/11 Sept. 1981.
- (9) P. ATTANÉ, A. SOUCEMARIANADIN, G. TURKEL, J. B. PRUD'HOMME Rheol. Acta 23 : 297-310 (1984).
- (10) P. ATTANÉ, A. SOUCEMARIANADIN, J. B. PRUD'HOMME, IX International Congress on Rheology Acapulco Mexico Oct. 8-13, 1984, vol. 2, 369-376.
- (11) A. SOUCEMARIANADIN Thèse Docteur-Ingénieur - Grenoble - 14 décembre 1984.
- (12) ATTANÉ, P. (1984). Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 13 janvier 1984.
- (13) A. V. SHENOY, O. K. SAINI, V. M. NADKARNI Rheol Acta, 21, 333-339 (1982).
- (14) J. D. FERRY "Viscoelastic Properties of Polymers" 2nd Ed. WILEY, New York 1970.

**FISSURE DANS UN MILIEU INHOMOGENE FINI, CALCUL NUMERIQUE DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE**

**CRACKS IN AN INHOMOGENEOUS FINITE MEDIUM, NUMERICAL CALCULUS FOR THE STRAIN INTENSITY FACTORS**

R. EL ABDI, G. VALENTIN

Laboratoire de Génie Civil  
I.U.T. "A" - UA CNRS 867  
BORDEAUX

**RESUME**

Il a été envisagé une fissure située à l'interface de deux matériaux (dans le plan de l'interface ou normalement à ce plan). Des solutions théoriques exprimées en contraintes sont connues en élasticité pour un milieu infini. La méthode utilisée ici utilise des développements exprimés en termes de déplacements au voisinage du fond de fissure. Les déplacements sont identifiés aux valeurs numériques trouvées par éléments finis pour des structures planes de dimensions finies. Plusieurs associations de matériaux et cas de charges ont été envisagés. La singularité du champ de contrainte et le coefficient du terme singulier  $K$  trouvés, dépendent fortement des complaisances élastiques de chaque matériau.

**ABSTRACT**

An analysis of the in-plane loading of two dissimilar materials with a crack along their common interface or normal to bimaterial interface, is considered. The theoretical solutions using the stress field are known in a finite elastic medium. Here, the stress intensity factors are obtained directly from the displacement fields. These fields are given by a finite elements method of planar structures with finite dimensions. Several combinations of materials and loadings are tested. The singularity of the stress field and the factor of singular term  $K$  are found to be strongly depending on elastic compliances of the two materials.

Communication présentée au Groupe Français de Rhéologie le 29.09.85

**INTRODUCTION**

On envisage le calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans un milieu fini de matériau composite (éprouvette d'essai par exemple).

En général, on suppose le matériau homogène et on utilise des polynômes de calibration du milieu isotrope. Dans la plupart des cas d'éprouvettes, ils sont identiques ou très voisins de ceux du milieu orthotrope équivalent.

Si on considère que le matériau composite est essentiellement un milieu non-homogène, on peut s'interroger sur la validité de ces calibrations. Par exemple, pour un multicouche, il n'est pas indifférent que le fond de fissure arrive sur les fibres ou sur la matrice.

Pour déterminer les facteurs d'intensité de contrainte dans un composite de dimensions finies et non homogène, on identifiera les champs théoriques donnés pour les milieux infinis (G. SIH [1], T.S. COOK [2], MING-CHE-LU [3]) dépendant des facteurs d'intensité de contrainte  $K$  et les champs numériques. Ces derniers seront donnés par une méthode utilisant les éléments finis, donnant en chaque point les déplacements  $u$ ,  $v$  et les contraintes dans une structure de dimensions finies, quelconque. Le problème sera ici supposé plan.

On supposera que le champ des déplacements et des contraintes au voisinage du fond de fissure est identique, que le milieu soit fini ou non (c'est l'hypothèse faite pour les milieux homogènes).

**I - FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTES**

Pour un matériau contenant une fissure dans le plan  $(X,Z)$ , IRWIN a montré qu'une propagation quelconque de cette fissure pouvait se ramener à la superposition de trois modes de déplacements des surfaces de fissure (fig. 1) :

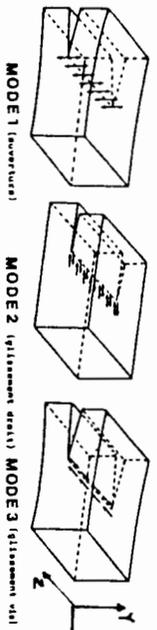


Fig. 1 : Modes de propagation d'une fissure

Si on suppose que le matériau est élastique, homogène et isotrope, alors en mode I et mode II, les contraintes s'écrivent dans le plan (x,y), (fig. 2) :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta/2 (1 + \sin \theta/2 \cdot \sin 3\theta/2) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta/2 \cos \theta/2 \cos 3\theta/2 \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta/2 \sin \theta/2 \cos 3\theta/2 + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta/2 (1 - \sin \theta/2 \sin 3\theta/2) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \theta/2 (1 - \sin \theta/2 \cos 3\theta/2) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta/2 (2 + \cos \theta/2 \cos 3\theta/2) \end{cases}$$

Les contraintes présentent autour de l'origine une singularité en  $1/\sqrt{r}$ . Elles dépendent de  $K_I$  et de  $K_{II}$ , facteurs d'intensité de contraintes (de mode I ou II), qui constituent une mesure de la singularité en fond de fissure.

En mode I, pour une fissure de longueur  $2a$  dans une plaque de dimensions infinies, soumise à une contrainte à l'infini  $\sigma^\infty$ , on a :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$$

On a une relation analogue en mode II.

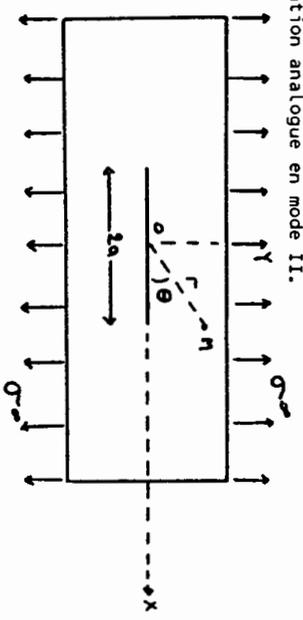


Fig. 2 : Fissure dans un milieu infini - Notations.

Lorsque les dimensions de la structure sont finies, cette expression est multipliée par un polynôme fonction des dimensions.

Si maintenant, on suppose un matériau orthotrope (composite unidirectionnel) alors, on a :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{z_2} - \frac{\mu_1}{z_1} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{z_2} - \frac{\mu_1^2}{z_1} \right) \right] \\ \sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{z_1} - \frac{\mu_2}{z_2} \right) \right] \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{z_2} - \frac{\mu_2}{z_1} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \right] \end{cases}$$

où les  $\mu_1, \mu_2$  sont les racines complexes, deux à deux conjuguées, de l'équation caractéristique :  $b_{11}\mu^4 - 2b_{16}\mu^3 + (2b_{12} + b_{66})\mu^2 - 2b_{26}\mu + b_{22} = 0$

(Les  $b_{ij}$  étant des complaisances élastiques du matériau).

avec : 
$$z_{1,2} = \sqrt{\cos \theta + \mu_{1,2} \sin \theta}$$

On retrouve, comme pour le matériau isotrope, la singularité  $1/\sqrt{r}$ . D'autre part, les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I, K_{II}$  sont identiques pour une fissure dans un milieu infini, aux valeurs dans un milieu isotrope.

II - FISSURE DANS LE PLAN DE L'INTERFACE

SIH [1] étudie le problème d'un milieu inhomogène, formé de deux demi-plans élastiques, isotropes, en présence d'une fissure semi-infinie dans le plan des  $x < 0$  (cf. fig. 3).

Il montre que les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} K_I &= \left\{ \sigma_y^\infty \left[ \cos(\varepsilon \log 2a) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log 2a) \right] + \sigma_{zy}^\infty \left[ \sin(\varepsilon \log 2a) - 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log 2a) \right] \right\} \times \sqrt{\pi a} \cosh(\pi \varepsilon) \\ K_{II} &= \left\{ \sigma_{zy}^\infty \left[ \cos(\varepsilon \log 2a) + 2\varepsilon \sin(\varepsilon \log 2a) \right] + \sigma_y^\infty \left[ \sin(\varepsilon \log 2a) - 2\varepsilon \cos(\varepsilon \log 2a) \right] \right\} \times \sqrt{\pi a} \cosh(\pi \varepsilon) \end{aligned} \right.$$

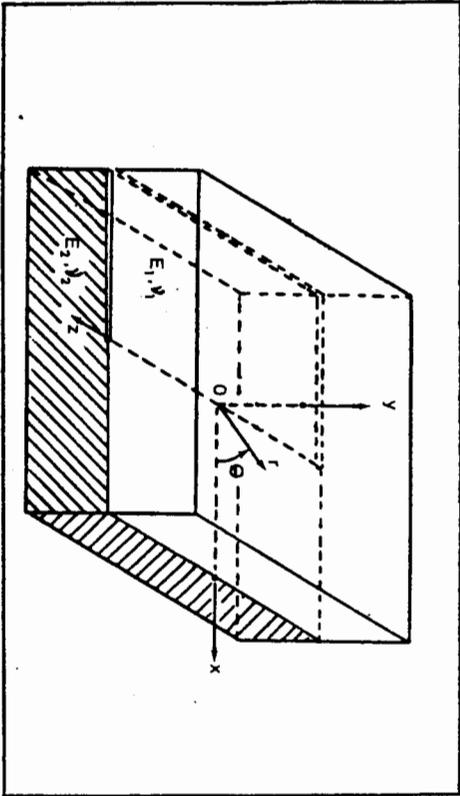


Fig. 3 : Deux demi-Plans élastiques en présence d'une fissure semi-infinie dans le Plan des  $x < 0$ .

$\varepsilon$  = constante biélastique du bimériau : 
$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \log \left[ \frac{\mu_1/\mu_2 + 1/\mu_2}{\mu_2/\mu_2 + 1/\mu_2} \right]$$

$\mu_1, \nu_1$  étant respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson du matériau 1.

$$K_I = \begin{cases} 3-4\nu_1 & \text{en déformations planes,} \\ (3-\nu_1)/(1+\nu_1) & \text{en contraintes planes.} \end{cases}$$

Les développements exprimés ci-dessus par SIH, font intervenir des valeurs à l'infini.

effet, SIH [1], montre que si  $u$  et  $v$  représentent les déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  alors (l'indice 1 restant associé au matériau 1), on a :

$$\begin{aligned} 2\mu_1 (u(z) + i v_1(z)) &= \mu_2 \int g(z) F(z) dz - \exp(2\pi i \varepsilon) \int g(z) F(z) dz \\ &+ (\bar{z}-z) \bar{g}(\bar{z}) \bar{F}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $z = x + iy, |z| > 0$

Les fonctions  $F(z)$  et  $g(z)$  sont données par :

$$\begin{aligned} *F(z) &= \frac{1}{\sqrt{z-a}} \left( \frac{z+a}{z-a} \right)^{1/2} \\ *g(z) &= Bz + C, \quad C = -2\varepsilon \mu_2 \alpha B \quad \text{dt } B = \frac{\sigma_y^\infty - i \sigma_{zy}^\infty}{1 + \exp(2\pi i \varepsilon)} = B_R + i B_I \end{aligned}$$

Reprenons l'expression (1) et choisissons un point dans le prolongement de la fissure, soit  $Z = \bar{Z} = x$  ( $y=0$ ) alors (1) s'écrit :

$$2\mu_1 (u_1(x) + i v_1(x)) = \left\{ \mu_2 - \exp(2\pi i \varepsilon) \right\} \int g(x) F(x) dx$$

c'est à dire, si on pose :  $\alpha_1 = 2\mu_1 / (\mu_2 - \exp(2\pi i \varepsilon))$

$$\alpha_1 (u_1(x) + i v_1(x)) = \int g(x) F(x) dx \quad \forall x, x > 0 \quad (2)$$

On a aussi 
$$g(x) F(x) = \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^{\beta} \frac{\beta x + C}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a$$

En réécrivant 2, et tous calculs effectués, on a dans le milieu 1 :

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1(x) = B_1 \int \bar{R}(x) dx - B_2 \int \bar{R}(x) dx \\ \alpha_2 v_1(x) = B_1 \int \bar{R}(x) dx + B_2 \int \bar{R}(x) dx \end{cases} \quad (2b'is)$$

$$\begin{cases} \bar{R}(x) = \frac{x \cos \left[ \varepsilon \log \left( \frac{x+a}{x-a} \right) \right] + 2a \varepsilon \sin \left[ \varepsilon \log \left( \frac{x+a}{x-a} \right) \right]}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ \bar{R}(x) = \frac{x \sin \left[ \varepsilon \log \left( \frac{x+a}{x-a} \right) \right] - 2a \varepsilon \cos \left[ \varepsilon \log \left( \frac{x+a}{x-a} \right) \right]}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{cases}$$

avec :

Connaissant les intégrales  $\int h(x) dx$  et  $\int \bar{h}(x) dx$  (approchées par une méthode numérique), on peut en résolvant le système précédent (2bis) avoir  $B_1$  et  $B_2$  (donc  $\sigma_y^0$  et  $\sigma_{xy}^0$ ) en fonction des déplacements  $u_1(x)$  et  $v_1(x)$ , déplacements de points dans le prolongement de la fissure. De plus, on vérifie que le choix des déplacements  $u_1(x)$  et  $v_1(x)$ , calculés numériquement, n'influe pratiquement pas sur les valeurs des constantes  $\sigma_y^0$  et  $\sigma_{xy}^0$ .

La figure 4, donnée pour une éprouvette de cisaillement compacte constituée d'un bimatérial Acier-Aluminium, montre qu'un mode d'ouverture  $K_I$  apparait,  $K_I$  change de signe, lorsqu'on intervertit les deux matériaux, la valeur négative dans le second cas, traduisant une fermeture de la fissure, due aux contraintes imposées par l'acier plus rigide que l'aluminium.

Pour un échantillon dont le rapport  $E_1/E_2 = 0,35$ , on a  $K_{II} = 28 \text{ DaN/mm}^{3/2}$  et  $K_I = 1,9 \text{ DaN/mm}^{3/2}$ . Pour un rapport  $E_1/E_2 = 2,85$ , on a  $K_{II} = 44 \text{ DaN/mm}^{3/2}$  et  $K_I = -2,9 \text{ DaN/mm}^{3/2}$ . Pour une éprouvette totalement isotrope, on trouve un facteur d'intensité de contrainte  $K_{II}$ , indépendant des modules, voisin de  $32 \text{ DaN/mm}^{3/2}$ . Sur une éprouvette DCB (Double bande en clivage), on trouve  $K_I = 1095 \text{ DaN/mm}^{3/2}$  pour un bimatérial et de l'ordre de  $200 \text{ DaN/mm}^{3/2}$  pour un matériau isotrope (selon la formule classique de KANNINEN), (fig. 5).

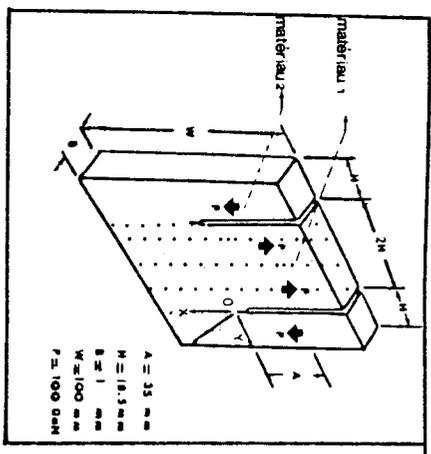


Fig. 4

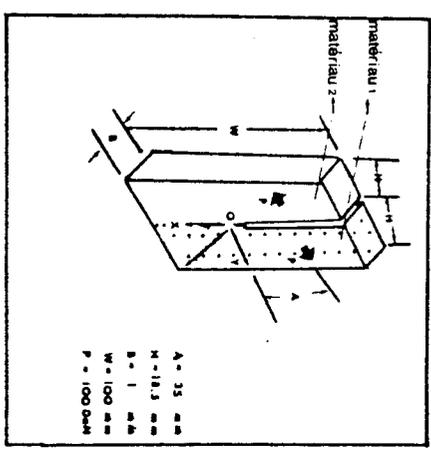
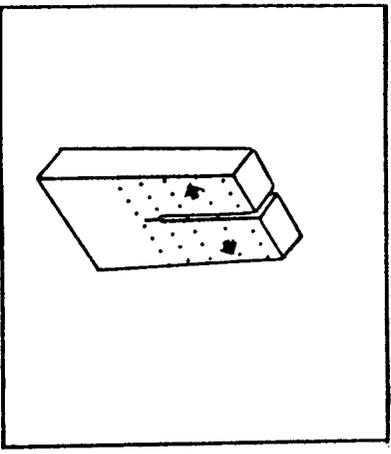
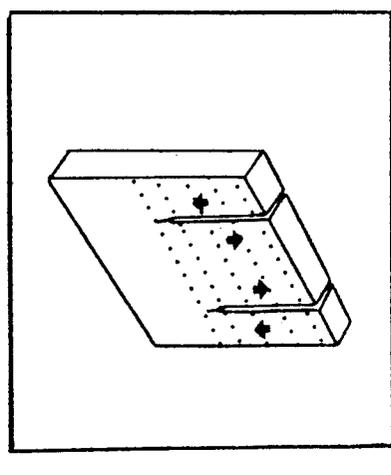


Fig. 5



Eprouvette DCB en traction

Fig. 6



Eprouvette CS en cisaillement

Fig. 7

### III - FISSURE ORTHOGONALE AU PLAN DE L'INTERFACE

COOK |2| montre que la singularité de contrainte n'est plus en  $r^{-1/2}$ .

#### III-1 - Fissure semi-infinie

Soient deux demi-plans, de frontière commune l'axe  $\theta = \pm \pi/2$ . La fissure semi-infinie le long du plan  $\theta = \pi$  soumise à une force  $P$  concentrée à une distance  $r = r_0$ , est située dans le matériau 1 (fig. 8).

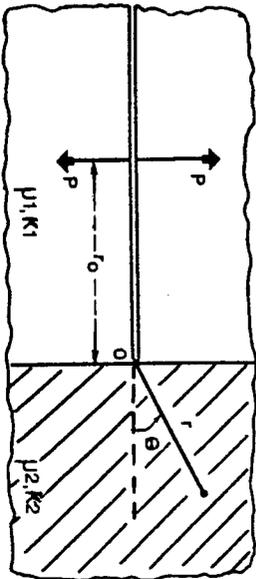


Fig. 8 : Fissure orthogonale au plan de l'interface du bimatériau.

COOK |2| définit un nouveau facteur d'intensité de contrainte en posant :

$$K_{ij} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r}^{-1-\lambda_1} \sigma_{ij}(r, \theta) \quad (3)$$

où  $\lambda_1$  est la plus petite racine d'une suite  $(\lambda_n)$ , solution de l'équation dite caractéristique (dépendant des conditions aux limites et des caractéristiques des matériaux) :

$$\eta \lambda_1^2 + \nu - 2\alpha \cos(\pi \lambda_1) = 0 \quad (4)$$

( $\eta, \nu, \alpha$  constantes connues, dépendant des deux matériaux).

La figure 9, donne l'évolution de  $\lambda_1$  en fonction du rapport des modules de cisaillement

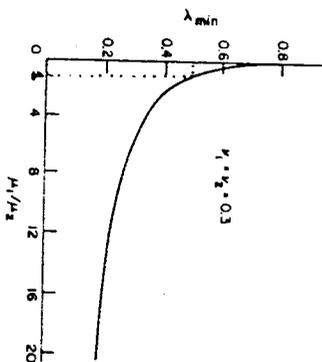


Fig. 9 : Variations de  $\lambda_1$  min avec le rapport des modules de cisaillement en D.P.

COOK |2|, montre alors que :

$$K_I = \sqrt{2} P \sqrt{r_0}^{-\lambda_1} \frac{m(\lambda_1 \mu_2)}{2\pi \alpha \sin \pi \lambda_1 + 2\beta \lambda_1} \left[ (1-2\lambda_1)(m+\mu_2) + (\lambda_1+2\lambda_2)(\lambda_1+m\mu_2) \right] \quad (5)$$

avec  $m = \mu_2/\mu_1$

De même pour le cas de cisaillement pur :

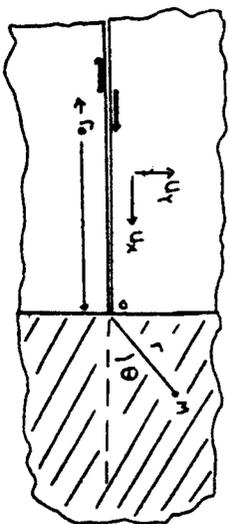


Fig. 10

Une expression plus commode peut être obtenue en fonction des déplacements au voisinage de la fissure :

$$K_{II}(\tau) = \frac{2\sqrt{2} \lambda_1}{[4(1-\nu_2) - (\lambda_1+4)] \cos((\lambda_1-1)\pi/2) - (\lambda_1+1) \sqrt{\cos((\lambda_1+1)\pi/2)}} \left\{ -\sqrt{(\lambda_1+4) + 3-\lambda_2} \right\} \mu_2 \nu y r^{-\lambda_1} \quad (6)$$

où  $U_y$  est le déplacement sur l'axe  $\theta = \frac{\pi}{2}$  au point de coordonnées  $r = r_1$

et où 
$$\xi = \frac{\bar{\alpha}(3\lambda-1) + \bar{\beta}(\lambda-2\lambda^2) + \lambda_2}{(\bar{\alpha}+1)(\lambda+1)}$$
avec 
$$\bar{\alpha} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4(\lambda_1 \lambda_2) \mu_2} ; \bar{\beta} = \left( \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda - \lambda_1} \right) \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

L'expression (6) permet à partir des valeurs de  $\lambda_1$ , calculées par éléments finis et par extrapolation en  $r = 0$  d'obtenir  $K_{II}$ .

Les figures 6, 7 donnant  $K_I$  et  $K_{II}$  pour les deux cas de charges précédemment étudiées pour un bimatérial Acier-Aluminium, montrent qu'en déformations planes, on a :

$$\begin{cases} E_1/E_2 = 0,35 & \lambda_1 = 0,58 \\ E_1/E_2 = 2,85 & \lambda_1 = 0,39 \end{cases} \begin{cases} \text{En traction } K_I = 7,7 \text{ DaN/mm}^{1+\lambda_1} \\ \text{En cisaillement } K_{II} = 0,53 \text{ DaN/mm}^{1+\lambda_1} \\ \text{En traction } K_I = 7,6 \text{ DaN/mm}^{1+\lambda_1} \\ \text{En cisaillement } K_{II} = -0,9 \text{ DaN/mm}^{1+\lambda_1} \end{cases}$$

### III-2 Fissure finie dans deux demi-plans

MING-CHE-LU et F. ERDOGAN [3] considèrent le cas d'une fissure finie dans un bimatérial borné dans une direction, illimitée dans l'autre (fig. 11) :

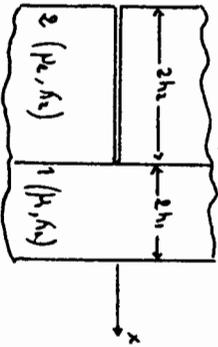


fig. 11 : fissure finie orthogonale à un demi-plan.

$K$  est défini au voisinage du fond de fissure par :  $K(\theta) = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \sqrt{r_1} \sigma_{ij}(\alpha, \theta)$

(l'indice 1 est relatif au matériau 1)

où est la plus petite solution de l'équation :

$$\text{avec : } c = -\frac{1}{2} \frac{3(\lambda-1)}{2(4+m\lambda)} + \frac{m(1+\lambda_2)}{2(m+\lambda_2)} ; m = \mu_1 \mu_2 \frac{c(m-1)}{1+m\lambda_2} ; c = \frac{4(1-m)}{1+m\lambda_2}$$

COOK et ERDOGAN [2] montrent que :

$$\text{Vig } h(\theta) = \rho^p f(\theta) \quad \text{avec } \rho^p = \mu_1 m \frac{(\lambda-2\lambda_1)(m+\lambda_2) + (\lambda+2\lambda_1)(1+m\lambda_2)}{(m+\lambda_2)(1+m\lambda_2) \sin \pi \lambda_1}$$

$f$  est telle que :

$$f(\theta) = -2\theta / \partial r (u_{2\theta}(r, \pi-0)) \quad (7)$$

La fonction  $f(r)$  pouvant être approchée par une somme finie de polynômes de Jacobi :

$$f(r) \approx \sum_{n=2}^N C_n P_n^{\lambda_1, \lambda_2}(\beta) \omega(r) \quad (8)$$

$$\text{avec : } \omega(r) = (1-r)^{\lambda_1} (1+r)^{\lambda_2}$$

Le choix des coefficients  $C_{ij}$  sera précisé plus loin.

Soit un composite formé par des fibres de  $S_{ij}$  et d'une matrice faite de Sic déposé par C.V.D. (fig. 12). Les fibres formant un empilement par couche, ont un diamètre de  $10\rho$  et forment 30 % du composite.

Par suite, les fibres qui sont rapprochées sont supposées former des couches homogènes (fig. 13)

Le composite peut être assimilé à un multicouche orthotrope dont on pourra approcher les caractéristiques par une loi des mélanges (ici, on a choisi la théorie de GRESZCZUK [4]) ( $E_f = 18000 \text{ DaN/mm}^2$ ,  $E_m = 45000 \text{ DaN/mm}^2$ ,  $\nu_f = \nu_m = 0,25$ ).

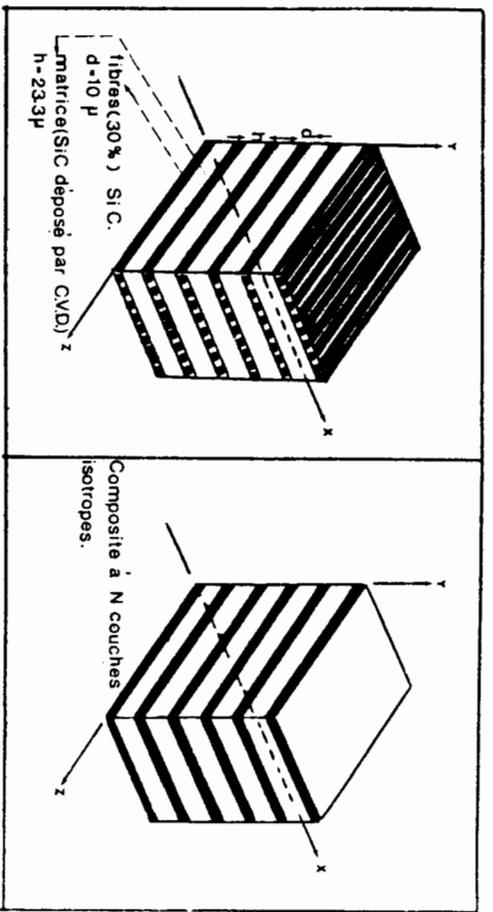


Fig. 12

Fig. 13

Une éprouvette constituée de ce composite, et contenant une fissure, est soumise à une flexion trois points :

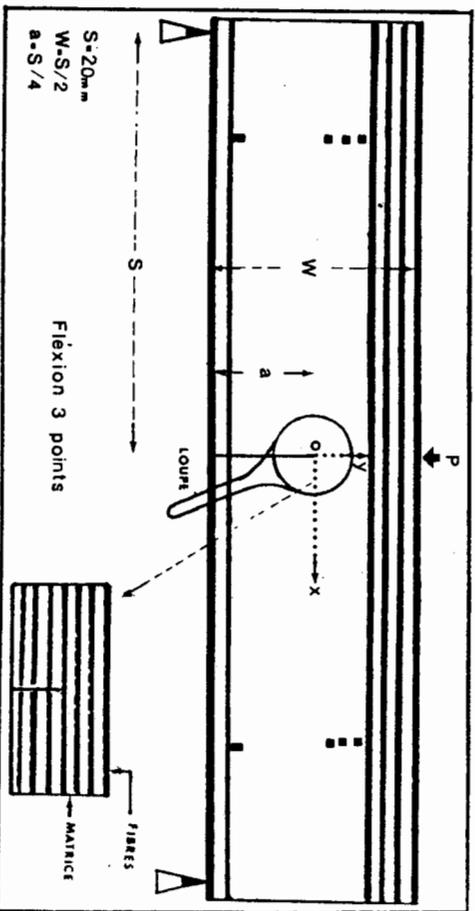


Fig. 14

L'épaisseur d'une fibre étant très petite devant la largeur de l'éprouvette (fig. 14), un maillage donnant des informations en plusieurs points de chaque fibre est à exclure. Une méthode approximative consiste à considérer le multicouche comme un matériau orthotrope, à faire un maillage sur l'ensemble de l'éprouvette, à choisir autour de la fissure une région dont on a calculé les déplacements périphériques, région assez petite pour ne contenir que quelques couches. Puis cette zone contenant l'extrémité de la fissure orthogonale aux fibres ou à la matrice, est soumise aux conditions des déplacements précédents.

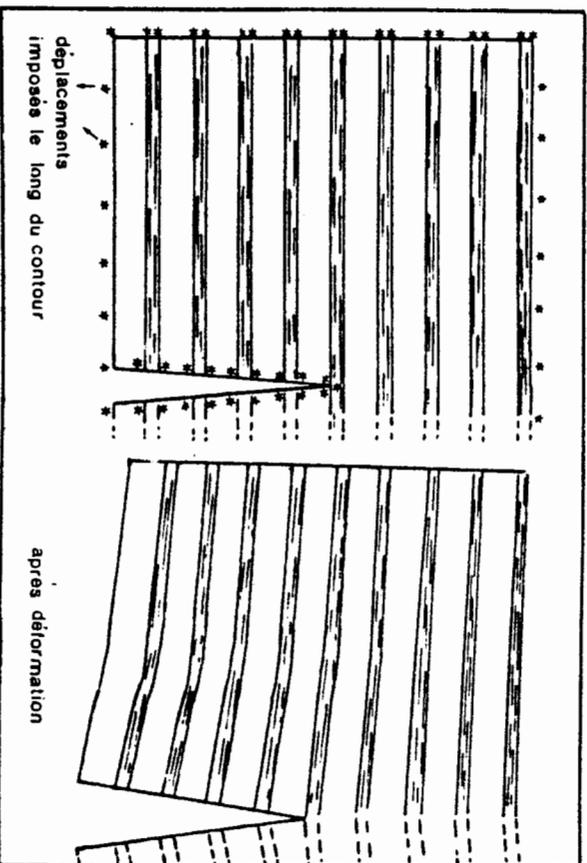
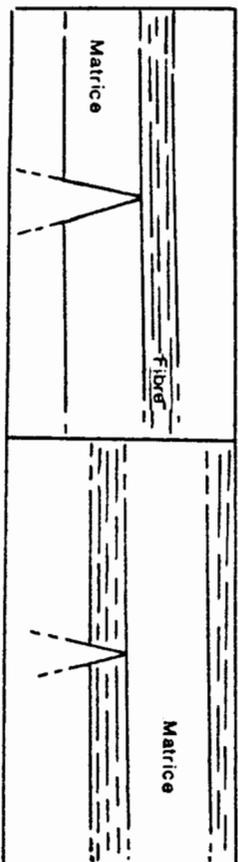


fig. 15

Puisque la longueur des fibres est assez grande par rapport à la largeur de la matrice ou des fibres, nous sommes en présence d'une fissure orthogonale dans deux milieux isotropes bornés dans un sens, illimités dans l'autre.

D'autre part, la théorie de MING-CHE-LU, considère que le bimatériau est soumis à un moment M de flexion à l'infini, mais qu'il est libre sur les bords (fig. 16).

Dans le cas réel les couches imposent l'une sur l'autre, un champ de contraintes dû à des liaisons intercouches.

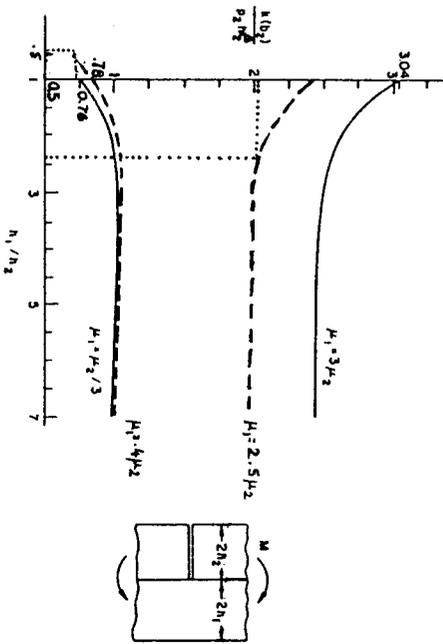


fig. 16 : Facteur d'intensité de contrainte dans un bimatériau soumis à une flexion uniforme.  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ .  $B = 0,4$  pour  $\mu_1 = 3\mu_2$   $\beta = 0,62$  pour  $\mu_1 = \mu_2/3$

Ayant le champ de déplacements lissés  $U_i(r, \pi)$  sur la lèvres de la fissure il est possible d'approcher par les formules (7) et (8) la fonction  $f(r)$ . Les résultats obtenus dépendront du choix des fonctions d'interpolation des déplacements. Ces fonctions d'interpolation devront être choisies de façon que, calculées sur des régions de différentes dimensions autour de la fissure, elles conduisent à des valeurs de K sensiblement identiques. Par intégration de la relation (7) on aura  $U_i(r, \pi)$ . Par identification aux résultats numériques, on peut déterminer les coefficients  $C_{ij}$ .

A partir de quatre coefficients, on vérifie que la valeur de  $f(r)$  est quasi-constante.

$$\beta_2 = -\sigma_{xy}(x_2, 0) = \frac{3CE_1M}{2(2h_1 - c_2)^3 + 3c_2^3 - c_2^6} \quad \text{avec } c_2 = 2(h_1 + h_2) - c_2$$

$$\text{et } c_2 = \alpha_2 = \frac{[E_1(h_1^2 + 2h_1h_2) + E_2h_2^2]}{(E_1h_1 + E_2h_2)} \quad (9)$$

La figure 16 donne l'allure de  $K(\infty)/P_2h_2^3$  en fonction de  $h_1/h_2$  [3].

En ce qui concerne l'étude présentée ici,  $x_2$  étant déterminé par la relation (9), une approximation de  $\sigma_{xy}(x_2, 0)$  est obtenue par éléments finis. Les principaux résultats sont rassemblés ci-dessous (tableau 1).

$h_1/h_2$	$h_1/h_2$	$\beta$	$K(\infty)/P_2h_2^3$		ECART
			VALEURS NUMERIQUES	VALEURS THEORIQUES	
2,5	2,35	0,4	1,9	2	- 5 %
0,4	0,42	0,6	0,8	0,75	+ 6 %

Tableau 1

Une comparaison avec les valeurs des  $K_I/P$  lorsque l'éprouvette de flexion est supposée orthotrope ou isotrope peut être faite. Dans le cas de l'isotropie, HAIGH [5] montre que  $K_I/P$  est tel que :

$$K_I/P = \frac{\gamma}{8\sqrt{a}} \quad (\text{indépendant des propriétés des matériaux}).$$

$$\gamma = 1,9 \text{ à } 1,65 \text{ si } a/W = 0,5$$

Les résultats figurent dans le tableau 2

	Puissance de 1/r	$K_I/P$	Ecarts par rapport au cas orthotrope
Eprouvette supposée isotrope	0,5	1,6	- 5 %
Eprouvette supposée orthotrope homogène	0,5	1,11	/
Composite multicouche : fissure orthogonale au matériau le moins rigide	0,4	0,37	- 66 %
Composite multicouche : fissure orthogonale au matériau le plus rigide.	0,6	1,18	+ 6 %

Tableau 2

Les valeurs de  $K_{I/P}$  lorsqu'on considère le multicouche avec fissure orthogonale à la matrice ou aux fibres, encadrent la valeur du matériau supposé orthotrope homogène ; la valeur de  $K_{I/P}$  lorsque la fissure est orthogonale au matériau le plus rigide étant proche du cas orthotrope, calculé avec 70 % du matériau constitué par le matériau le plus rigide. Cette valeur est plus élevée que celle déterminée pour le milieu isotrope mais dépend des complaisances élastiques du bimatériau.

#### CONCLUSION

La méthode des éléments finis associée aux répartitions des contraintes théoriques pour une fissure située dans le plan de l'interface de deux matériaux isotropes, conduit à des facteurs d'intensité de contrainte dépendant notamment des modules de chaque matériau, la singularité des contraintes restant en  $r^{-1/2}$  comme pour un milieu homogène.

La même méthodologie appliquée à une fissure orthogonale à l'interface de deux matériaux, est plus délicate.

Elle conduit à des singularités en  $r^{1/\beta}$ , l'exposant  $\beta$  dépendant des complaisances des deux matériaux. L'application à une éprouvette de flexion constituée de fibres et de matrice de carbure de silicium, a permis de déterminer le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ .

Pour le matériau étudié, selon que le fond de fissure est au voisinage du matériau le plus rigide ou le moins rigide,  $K_I$  est voisin de la valeur du milieu orthotrope équivalent, ou très différent.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] SIH Georges C. Cracks in Composite materials - Mechanics of fracture 6. Edition Nighorff - pp. 118-154 (1984).
- [2] COOK T.S. and ERDOGAN F. - Stress in Goudded materials with a crack perpendicular to the interface. International journal of Engineering Science, 10, pp. 677-697 (1972).
- [3] MING-CHE-LU et F. ERDOGAN - Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface I - Analysis II - Solution and Results Engineering fracture Mechanics volu. 18, n°3., pp.494-506 and 507-528 (1983).
- [4] GRESZCZUK A.I.A.A. VI Conférence (1965) page 285.
- [5] J.R. HAIGH and C.E. RICHARD - Yield point loads and compliance functions of fracture mechanics specimens. Central electricity research Laboratories. Laboratory memorandum N° RD/L/M 461 (1974), pp. A16.

**APPLICATION DE L'INTEGRALE DE CAUCHY A LA METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT**

APPLICATION OF THE CAUCHY INTEGRAL TO THE DISPLACEMENT DISCONTINUITY METHOD

BOUHADDANE A.\*\*, MOREL E.\*\*, HENRY J.P.\*, KONDO D.\*\*, FEDRIGO D.\*

\* Université de Lille I  
 Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille  
 Laboratoire de Mécanique des Matériaux Fragiles  
 59655 VILLENEUVE D'ASCQ Cédex - France  
 \*\* ECOLE DES MINES DE DOUAI  
 Rue Charles Bourseul  
 59500 DOUAI - France

**RÉSUMÉ**

Pour l'étude de l'évolution de fissures dans des milieux élastiques plans, la méthode des discontinuités de déplacement est la méthode intégrale qui s'adapte le mieux au problème dans le cas de fissures frottantes ou non. Dans cette étude, la méthode des discontinuités de déplacement est reformulée en champ complexe afin d'utiliser des solutions analytiques déduites de l'intégrale de Cauchy. Une formulation générale est présentée pour des milieux isotropes avec éléments de discrétisation linéaire ou circulaire d'ordre quelconque. Des exemples sont proposés mettant en lumière la rapidité de convergence de la méthode, et également l'application à des milieux stratifiés.

**ABSTRACT**

For crack evolution study (with friction or not) in plane elastic medium the displacement discontinuity method is the most appropriated integral method. In this paper, the displacement discontinuity method is written in complex field in order to use the Cauchy integral and to obtain analytical solutions. A general formulation is given for isotropic medium with linear or circular discretization of any element order. For anisotropic medium solutions are proposed for linear discretization. Examples are given to show the good accuracy of the method. Applications are finally presented on stratified medium.

**1. INTRODUCTION**

Dans l'étude des structures élastiques contenant des fissures, la méthode des discontinuités de déplacement [1] [2] [3] [4] a pris une place importante dans les techniques des intégrales de frontière, par sa simplicité et sa bonne adéquation avec le problème. Pour améliorer la convergence et la précision de la méthode, il est nécessaire de développer des éléments d'ordre élevé [5], et donc de rechercher, si possible, les solutions analytiques correspondantes. Dans cette optique, la méthode des discontinuités de déplacement est réécrite en champ complexe, en utilisant les potentiels complexes de Kolosov-Muskhelishvili. Pour déterminer les solutions élémentaires de la méthode, les conditions aux limites seront exprimées sur des coupures linéaires en milieu élastique plan isotrope ou anisotrope ou sur des coupures circulaires en milieu isotrope. La solution de ces équations de Plemelj va s'obtenir par une intégrale de Cauchy qu'il sera possible de calculer.

**2. METHODE DES DISCONTINUITES DE DEPLACEMENT - SOLUTION PAR UN ELEMENT LINEAIRE.**

En champ complexe, les contraintes et déplacements sont déterminés à partir de la connaissance des potentiels  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  par [6] :

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2[\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[z\phi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})] \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= 2\mu D = z\phi(z) - \bar{\psi}(\bar{z}) \end{aligned}$$

avec  $z = x_1 + ix_2$ ,  $x = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  en contrainte plane et  $x = 3 - 4\nu$  en déformation plane. La connaissance du potentiel  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  permet de calculer en tout point du plan contraintes et déplacement. En outre, les formules simples de changement de repère :

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_{nn} + \sigma_{tt} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ \sigma_{nt} - \sigma_{tn} + 2i\sigma_{nt} &= e^{2i\theta} [\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}] \\ (\sigma_n + i\sigma_t) &= e^{-i\theta} (\sigma_1 + i\sigma_2) \end{aligned}$$

permettent de calculer les contraintes sur un segment d'orientation quelconque (fig. 1).

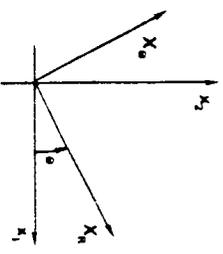


Figure 1

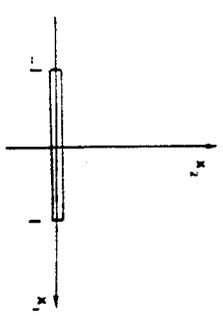


Figure 2

Effectuons le changement de fonction :

$$\bar{\eta}(z) = -[z\psi'(z) + \psi(z)]$$

dans les relations (1) précédentes. Les conditions aux limites en contrainte ou déplacement sur une levre de la coupure placée sur l'axe  $x_1$  ( $x_1 \in [-1, +1]$ ), fi-

gure 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} (\alpha_{22} - i\alpha_{12})^G(t) &= \phi^G(t) - \alpha^D(t) \\ 2\mu D^G(t) &= x \phi^G(t) - \alpha^D(t) \end{aligned}$$

avec  $t \in [-1, +1]$ . Dans les expressions précédentes, les indices G et D expriment respectivement le bord supérieur ( $x_2 = 0^+$ ) et le bord inférieur ( $x_2 = 0^-$ ) de la coupure ; il est montré [1] que la solution élémentaire dans la méthode des discontinuités est construite en postulant que le déplacement imposé sur la lèvres gauche est différent du déplacement imposé sur la lèvres droite, et que les contraintes sont continues d'une lèvre à l'autre. Les équations de Plemelj du problème sont alors :

$$(3) \quad \begin{aligned} (\alpha_{22} - i\alpha_{12})^G(t) - (\alpha_{22} - i\alpha_{12})^D(t) &= 0 = (\phi^G + \alpha^D)(t) - (\phi^D + \alpha^G)(t) \\ 2\mu [D^G(t) - D^D(t)] &= 2\mu D(t) = (x\phi - \alpha)^G(t) - (x\phi - \alpha)^D(t) \end{aligned}$$

En supposant les contraintes nulles à l'infini, la solution générale du problème est :

$$(4) \quad \phi(z) = -\alpha(z) = \frac{\mu}{\pi(x+1)} \int_{-1}^{+1} \frac{\tilde{D}(t)}{t-z} dt$$

Ceci permet de généraliser la méthode établie par Crouch [1]. En effet, l'intégrale peut être aisément calculée pour des discontinuités de déplacement de forme polynomiale quelconque ; les coefficients du polynôme sont alors les paramètres de linéarisation permettant de résoudre tout problème élastique par superposition des solutions élémentaires précédentes. Le cas où le polynôme se réduit à une constante correspond à la méthode originelle de Crouch [1].

**ELEMENT DÉGÉNÉRÉ**

La méthode des discontinuités de déplacement est particulièrement bien adaptée au calcul de structures contenant des fissures. Il sera alors également nécessaire de discrétiser cette fissure. En tête de celle-ci, la discontinuité de déplacement  $\tilde{D}$  est nulle. Pour accélérer la convergence, il est préférable de construire une solution élémentaire possédant déjà cette propriété. Cette solution peut être obtenue en imposant dans la solution (4) par exemple  $\tilde{D}(-1) = 0$ . Cependant, les résultats numériques dégagés à partir de telles solutions ne sont pas précis ; il est alors nécessaire d'avoir une discrétisation fine en tête de fissure, ou d'utiliser des éléments d'ordre élevé ce qui augmente la taille de la matrice d'influence. La comparaison entre différents éléments dégénérés nous a conduit à choisir une discontinuité de déplacement sous la forme parabolique :

$$(5) \quad \tilde{D}(t) = \gamma \sqrt{t+1}$$

avec  $\gamma$  paramètre de linéarisation ( $\tilde{D}(-1) = 0$ ).

**EXEMPLE**

Le premier exemple (fig. 3) représente la déformation d'une fissure soumise à une pression intérieure, avec une taille de matrice d'influence identique. Le cas (a) correspond à la méthode de Crouch ; le cas (b) utilise des éléments d'ordre 2, les points nodaux étant les points de Tchebyschev ; le cas (c) utilise des éléments linéaires d'ordre 2 et un élément dégénéré parabolique du type (5) et montre une excellente précision dans les résultats.

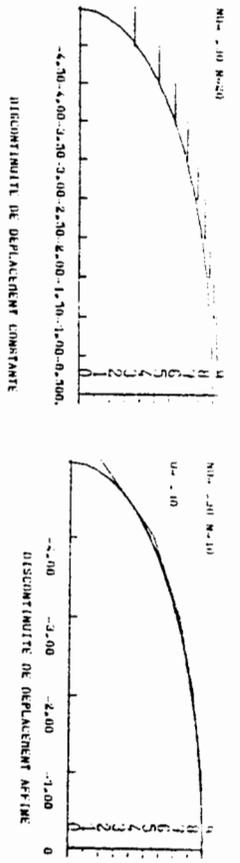


Figure 3

**3. SOLUTION POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE**

Dans la méthode classique des discontinuités de déplacement, on discrétise le contour de la structure en éléments linéaires de telle façon à faire apparaître les solutions élémentaires sur chaque segment. Cependant, dans un certain nombre d'exemples, nous sommes amenés à traiter des contours circulaires ; dans le cas de rayon de raccordement (variation rapide de la courbure), il est nécessaire de discrétiser finement non seulement le raccord, du fait de sa petitesse et de ses fortes variations de contraintes, mais également les parties linéaires car la variation de la taille de la discrétisation ne peut être que continue ; ceci conduit à des matrices d'influence de taille importante. Dans le cas de trous circulaires, il arrive que l'on soit obligé d'utiliser une discrétisation large. Pour augmenter la précision, on peut alors prendre en considération des éléments d'ordre élevé selon la méthode précédente. Si l'on améliore la précision numérique, il se glisse alors une deuxième erreur : les points d'expression des conditions aux limites s'éloignent très sensiblement du contour exact (fig. 4). Afin d'améliorer les conditions de calcul pour des éléments circulaires, nous allons présenter des solutions élémentaires pour un contour circulaire.

**SOLUTION ELEMENTAIRE**

Recherchons une solution élémentaire pour l'arc d'ouverture  $2\alpha$  placé selon la figure 5. Sachant que  $z/Z = e^{i\theta}$ , les relations (2) permettent d'écrire :

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \bar{\phi}'(\bar{z}) - z \phi''(z) - \frac{z}{r} \psi'(z) + \phi'(z) \\ 2\mu (u_r + iu_\theta) &= 2\mu \bar{D}_C = \frac{z}{r} [x\phi(z) - z\bar{\phi}'(\bar{z}) - \bar{\psi}(z)] \end{aligned}$$

Effectuons le changement de fonction :

$$(7) \quad \bar{\alpha}(z) = - (z\phi'(\frac{a^2}{z}) + \psi(\frac{a^2}{z}))$$

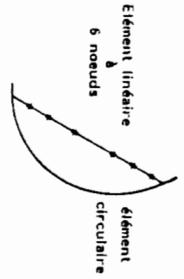


Figure 4

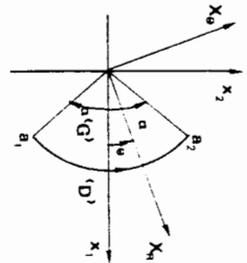


Figure 5

dans les relations précédentes. Les conditions aux limites en contrainte ou déplacement sur une lèvres de la coupure circulaire,  $r = a$   $\theta \in [-\alpha, +\alpha]$ , s'écrivent :

$$(8) \quad \begin{aligned} (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^G(t) &= \phi^G(t) - \Omega^D(t) \\ 2\mu \dot{D}_C(t) &= e^{-i\theta} [X\phi^G(t) + \Omega^D(t)] \end{aligned}$$

avec  $t = ae^{i\theta}$ . Dans les expressions précédentes, les indices "G" et "D" expriment en fonction du sens de parcours choisi respectivement le bord intérieur ( $t = ae^{i\theta}$ ) et le bord extérieur ( $t = a + e^{i\theta}$ ). Les équations de Plemelj du problème sont alors :

$$(9) \quad \begin{aligned} (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^G(t) - (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^D(t) &= 0 = (\phi^G + \Omega^D) - (\phi^D + \Omega^G) \\ 2\mu [\dot{D}_C^G(t) - \dot{D}_C^D(t)] &= 2\mu \dot{D}(t) = (X\phi - \Omega)^G(t) - (X\phi - \Omega)^D(t) \end{aligned}$$

Les fonctions  $\phi^G(z)$  et  $\psi^G(z)$  sont holomorphes dans tout le plan. Le changement de fonction (7) fait apparaître des pôles d'ordre 2 à l'origine. Les contraintes à l'infini sont supposées nulles, et également la résultante des charges appliquées sur les deux lèvres de la coupure (continuité des contraintes). Dans ce cas, la solution de (9) est :

$$(10) \quad \begin{aligned} \phi(z) + \Omega(z) &= Az \\ X\phi(z) - \Omega(z) &= -Az + \frac{\mu}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} \dot{D}_C(t)}{t-z} dt \end{aligned}$$

L'étude du comportement à l'infini de la fonction  $\Omega(z)$  impose la valeur de la constante  $A$ .  $A = I'(0)$ , avec :

$$(11) \quad I(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{i\theta} \dot{D}_C(t)}{t-z} dt$$

Nous proposons de choisir la discontinuité de déplacement circulaire  $\dot{D}_C$  sous la forme :

$$\dot{D}_C = a_0 + a_1 \sin \frac{\pi\theta}{2\alpha} + a_2 \cos \frac{\pi\theta}{2\alpha} + a_3 \sin \frac{\pi\theta}{4\alpha} + a_4 \cos \frac{\pi\theta}{4\alpha} + \dots$$

avec  $a_1$  paramètres de linéarisation.

#### EXEMPLE

L'exemple présenté ici concerne un trou sous pression  $p$  dans un milieu infini. La figure 6 compare les résultats par discrétisation en éléments linéaires avec  $D = \text{constante}$  et en éléments circulaires avec  $\dot{D} = \text{constante}$ . Pour obtenir une bonne approximation des contraintes, il est nécessaire dans le cas de segments de discrétiser le contour en 32 éléments. Dans le cas d'éléments circulaires, un seul arc suffit (le cercle lui-même). Ce cas extrême montre cependant la rapidité de convergence des solutions obtenues sur un contour circulaire car elles tiennent compte dans leur construction des symétries du problème.

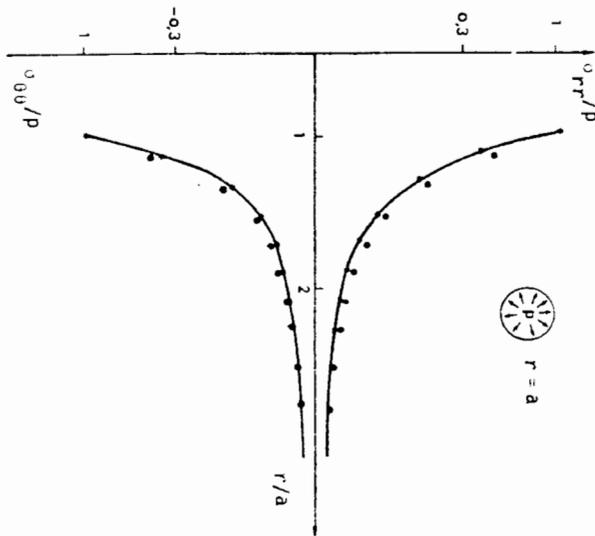


Figure 6  
solution analytique  
solution calculée

#### 4. MILIEUX ANISOTROPES

##### Solution élémentaire

Dans le cas de l'anisotropie, les contraintes s'écrivent [7]

$$(12) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re} [S_1 z \phi'(z) + S_2 z^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re} [\phi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} [S_1 \phi'(z_1) + S_2 \psi'(z_2)] \end{aligned}$$

et les déplacements

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\text{Re} [p_1 \phi(z) + p_2 \psi(z_2)] \\ u_2 &= 2\text{Re} [q_1 \phi(z) + q_2 \psi(z_2)] \end{aligned}$$

avec :  $\phi$  et  $\psi$  deux potentiels complexes

$S_1$  et  $S_2$ , racines complexes de l'équation caractéristique du 4e degré issue de l'équation de complaisabilité vérifiée par la fonction d'Airy [8]

$$z_1 = x_1 + S_1 x_2 \quad , \quad z_2 = x_1 + S_2 x_2$$

$$p_j = b_{11} S_j^2 + b_{12} - b_{14} S_j \quad j = 1, 2$$

$$q_j = \frac{1}{S_j} (b_{12} S_j^2 + b_{22} - b_{24} S_j) \quad j = 1, 2$$

Les coefficients  $b_{kh}$  sont les coefficients de la loi de Hooke. Ces relations sont applicables au cas de la contrainte plane et de la déformation plane. Pour trouver les solutions élémentaires en milieu anisotrope, il est préférable de séparer le mode I du mode II et d'effectuer ensuite la superposition ; les notations utilisées sont identiques à celles utilisées dans le cas isotrope.

#### MODE I

Ecrivons les conditions aux limites dans le cadre de la méthode des discontinuités de déplacement. Sachant que  $\sigma_{12}(t) = 0$  et que  $\sigma_{22}$  est continue, les équations de Plémelj du problème ont la forme :

$$(14) \quad (r_1 \phi - \overline{r_1} \overline{\phi})^G(t) - (r_1 \phi - \overline{r_1} \overline{\phi})^D(t) = \hat{D}_1^G(t) = u_2^G(t) - u_2^D(t) \\ (m_1 \phi - \overline{m_1} \overline{\phi})^G(t) - (m_1 \phi - \overline{m_1} \overline{\phi})^D(t) = 0 \quad t \in [-1, +1]$$

$$\text{avec} \quad r_1 = \frac{q_1 S_2 - q_2 S_1}{S_2} \quad \text{et} \quad m = \frac{S_2 - S_1}{S_2}$$

La solution du problème est :

$$(15) \quad \phi(z_1) = \frac{-1}{4\pi b_{22} \frac{S_2 - S_1}{S_2} \text{Im} \left( \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\hat{D}_1(t)}{t - z_1} dt$$

$\psi(z_2)$  est obtenu en changeant les indices de  $S_j$  et  $z_j$  soit :

$$(16) \quad \psi(z_2) = \frac{-1}{4\pi b_{22} \frac{S_1 - S_2}{S_1} \text{Im} \left( \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\hat{D}_1(t)}{t - z_2} dt$$

#### MODE II

Les conditions aux limites sont dans ce cas

$$u_1^G - u_1^D = \hat{D}_{II}(t)$$

$$\sigma_{12}^G(t) - \sigma_{12}^D(t) = 0 \quad t \in [-1, +1]$$

$$\sigma_{22}(t) = 0$$

En utilisant la même démarche, nous obtenons l'expression des potentiels :

$$(17) \quad \phi(z_1) = \frac{-1}{4\pi b_{11} (S_1 - S_2) \text{Im}(S_1 + S_2)} \int_{-1}^1 \frac{\hat{D}_{II}(t)}{t - z_1} dt$$

$$(18) \quad \psi(z_2) = \frac{-1}{4\pi b_{11} (S_2 - S_1) \text{Im}(S_1 + S_2)} \int_{-1}^1 \frac{\hat{D}_{II}(t)}{t - z_2} dt$$

#### REMARQUES

A chaque changement d'orientation, il convient de calculer les coefficients  $b_{kh}$  de la manière suivante :  
appelons  $[B]$  la matrice des coefficients  $b_{kh}$  (matrice  $3 \times 3$ ) la matrice  $[B']$  dans le nouveau repère aura la forme :

$$[B'] = t [p^{-1}] [B] [p^{-1}]$$

$$\text{avec} [p^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

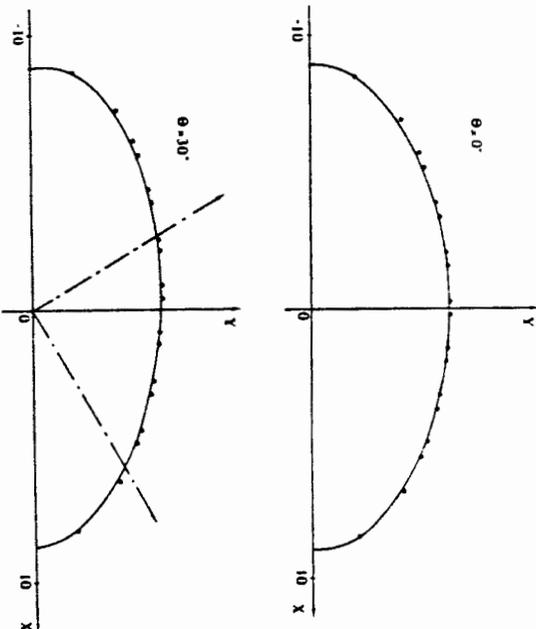
$\theta$  étant l'angle définissant l'orientation du nouveau repère par rapport à l'ancien :

De même les racines  $S_1$  et  $S_2$  de l'équation caractéristique du 4e degré doivent être déterminées pour chaque rotation du repère.

#### EXEMPLE

Reprenons l'exemple simple de la fissure soumise à une pression intérieure. Celle-ci est discrétisée en 10 éléments auxquels nous avons imposé des éléments d'ordre 2,  $D(t) = \alpha t + \beta$  ( $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ ) sauf sur les extrémités où des éléments dégénérés de la forme (5) sont utilisés.

La figure 7 montre l'évolution de la déformée de cette fissure dans un milieu orthotrope pour lequel nous avons fait varier l'orientation des axes d'orthotropie par rapport au repère global.



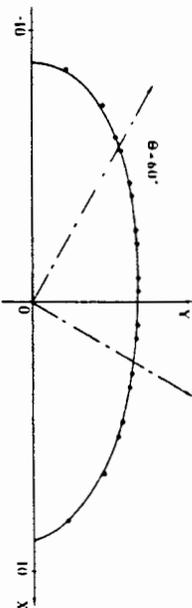


Figure 7

### 5. APPLICATION AUX MILIEUX STRATIFIES

L'application de cette technique numérique dans le calcul de stabilité des ouvrages en milieu rocheux nécessite de pouvoir tenir compte de la stratification des massifs.

Soit donc un milieu élastique stratifié constitué de deux couches isotropes ou anisotropes (fig. 8). On propose que l'interface C soit discrétisée d'une part

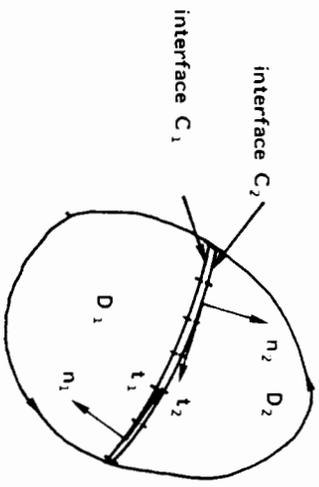


Figure 8

pour le domaine  $D_1$  et, d'autre part, pour le domaine  $D_2$  (Interfaces  $C_1$  et  $C_2$ ). On propose également que la discrétisation de  $C_1$  et  $C_2$  coïncident sur  $C$  et que les types d'éléments soient les mêmes à l'interface (points nodaux identiques). Si l'on suppose qu'il n'y a ni glissement, ni décollement, il sera nécessaire d'écrire en tout point nodal  $q$  de l'interface  $C$  la continuité des contraintes

$$\sigma_t^{(1)}(q) - \sigma_t^{(2)}(q) = 0 \quad (19)$$

$$\sigma_n^{(1)}(q) - \sigma_n^{(2)}(q) = 0$$

et des déplacements, compte tenu de l'orientation des repères locaux :

$$u_t^{(1)}(q) + u_t^{(2)}(q) = 0 \quad (20)$$

$$u_n^{(1)}(q) + u_n^{(2)}(q) = 0$$

Dans la matrice d'influence, il suffira sur les segments  $C_1$  et  $C_2$  d'écrire le premier membre des relations (19) et (20). Les conditions imposées seront alors zéro sur ces segments.

La figure (9) représente un milieu annulaire et sa discrétisation en segments à un noeud. La figure 10 donne la distribution de contrainte et montre une bonne précision de la méthode (sauf à l'interface).

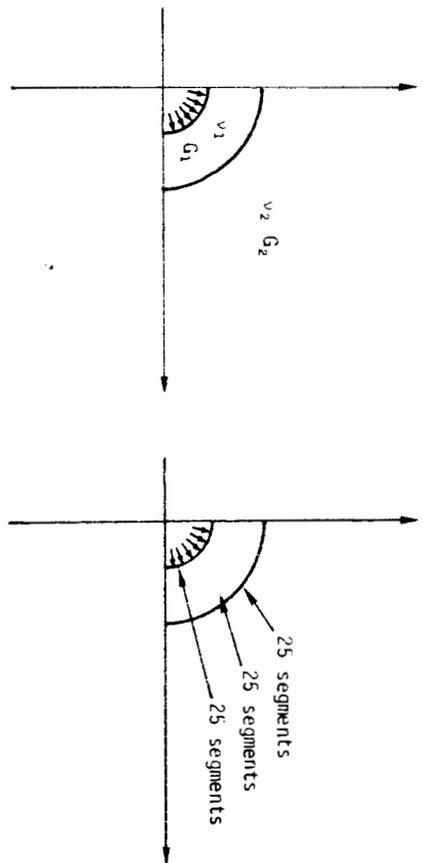


Figure 9

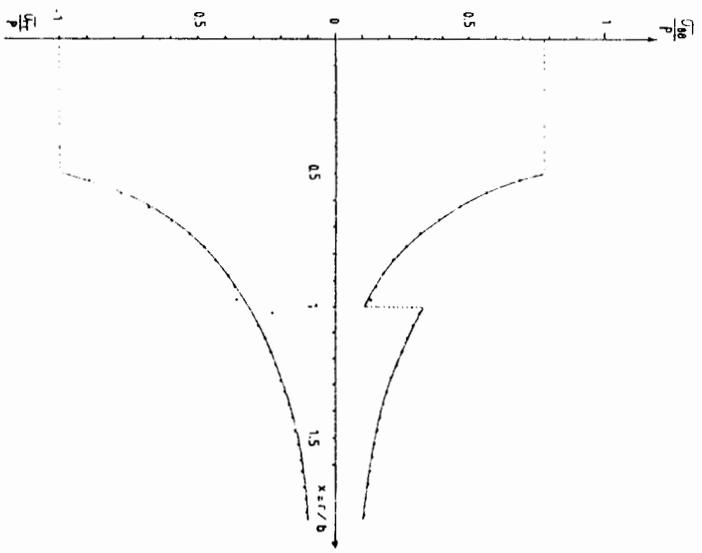


Figure 10  
— solution analytique  
- - - solution calculée

## CONCLUSION

Le but de cette étude était la retranscription de la méthode des discontinuités en problème plan, en terme de potentiels complexes. L'intégrale de Cauchy a permis de dégager des solutions analytiques performantes dans le cas de milieux isotropes ou anisotropes. L'association de toutes ces solutions dans un code de calcul est actuellement en cours de réalisation. Ce logiciel permettra de résoudre des problèmes élastiques plans isotropes ou anisotropes stratifiés ou non selon la technique présentée, mais aussi des problèmes de propagation de fissures frottantes ou non dans les cas précédents.

L'intégrale de Cauchy et les techniques de transformation conforme devant permettre d'accroître les possibilités de la méthode exposée précédemment, notamment dans le cas de contour elliptique et de coin.

## BIBLIOGRAPHIE

- | 1 | CROUCH S.L. (1976) - "Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method" - *Int. J. Num. Meth. In Eng.*, 10, p. 301-343
- | 2 | CROUCH S.L., STARFIELD (1983) - "Boundary element methods in Geomechanics". Ed. George Allen and Unwin
- | 3 | WILES T.D., CURRAN J.H. (1984) - "A general 3-D Displacement Discontinuity Method. Proceedings of the 4<sup>th</sup> Int. Conf. Num. Methods in Geomech. Edmonton - Canada, Vol. 1, p. 103-111
- | 4 | CRAWFORD A.M., CURRAN J.H. (1983) - "A displacement discontinuity method approach to modelling the creep behaviour of rock and its discontinuities" - *Int. J. Num. Methods in Geomech.*, Vol. 7, p. 245-268
- | 5 | CRAWFORD A.M., CURRAN J.H. (1982) - "Higher order Functional variation displacement Discontinuity elements". *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 19, p. 143-148
- | 6 | MUSKHELISHVILI N.I. (1963) - "Some basic problems of mathematical theory of elasticity". Noordhoff Ed. Groningen.
- | 7 | SIH G.C., LIEBOWITZ H. (1968) - "Rectilinearly Anisotropic Bodies with cracks". *In Fracture Academic Press*, Vol. 2, p. 108-123
- | 8 | LEKHNITSKII S.G. (1963) - "Theory of an anisotropic elastic body - *Norden Day Inc.*

10 ans du Groupe Français de Rhéologie - Progrès récents -  
R 20e Coll G.F.R., Paris, Nov 1985 G.F.R. et L.M.P. 1987

## RESISTANCE A LA FISSURATION DU MATERIAU " PAPIER "

### RACTURE RESISTANCE OF PAPER

POUYET, Professeur, W. VOLOZINSKIS, Allocataire M.R.T.  
Laboratoire de Mécanique Physique, UA CNRS 867  
Université de Bordeaux I  
3405 TALENCE

SILVY, Professeur  
cole Française de Papeterie, Grenoble  
DUBROCA, Ingénieur  
allulose du Pin, Talence

## RESUME

Cette étude a pour but de mesurer la résistance à la fissuration du papier à partir de la théorie linéaire de la mécanique de la rupture. On donne en particulier la méthodologie à mettre en oeuvre pour déterminer la géométrie optimale d'un échantillon qui permet d'utiliser la théorie précédente.

Une telle démarche s'impose puisque ce matériau est orthotrope et anélastique.

Ainsi sont évalués le taux de restitution d'énergie  $G_{1c}$  et l'intégrale de RICE  $J_{1c}$  pour des papiers isotropes et anisotropes fabriqués pour différentes conditions de pressage et de séchage.

## ABSTRACT

This work deals with measurement of fracture resistance of paper using the theory of linear elastic fracture mechanics. Due to the orthotropy and to the inelasticity of this material, a preliminary investigation has been made for evaluation, on both test specimen length and the crack's size.

So, energy release rate  $G_c$  and  $J_c$  integral have been measured for five machine made and hand-sheets papers.

## INTRODUCTION

"Nous sortons du siècle de la papeterie pour entrer dans celui de la consommation du papier". C'est ainsi que s'adressait un pionnier de la communication électronique à ceux qui prédisaient le bureau sans papier.

En effet, aux produits classiques utilisés en impression, emballage, ... sont venus s'ajouter des produits plus nouveaux tels que papiers autocopiants, papiers thermiques, papiers pour impression par jet d'encre ou par laser, "mailing", "listing", ...

La France qui vient au 7ème rang mondial avec une production qui, en 1984, a atteint près de 5,6 millions de tonnes, n'est qu'au 15ème rang pour la consommation avec une quantité de papier de 12,7 kg par an et par habitant (contre 160 en Allemagne Fédérale).

Malgré l'ancienneté de l'industrie du papier, le renouveau de ce produit né en Chine 220 ans avant notre ère, vient du fait que ses propriétés ne sont pas toutes établies et que la technique de fabrication n'est pas figée.

C'est un Français, N. ROBERT, qui sera l'inventeur, en 1793, de la première machine à fabriquer le papier en continu : les fibres végétales séparées de la lignine par procédé mécanique (râpage des grumes), chimique (cuisson dans un lessivage) ou thermo-mécanique, sont mises en suspension dans l'eau. Cette suspension fibreuse entre dans la caisse de tête de la machine pour être répandue sur une table équipée d'une toile métallique. Après égouttage, le matériau fibreux est transféré sur un feutre et conduit entre des rouleaux qui, par pressage, diminuent la teneur en eau. La feuille entre enfin dans la sècheuse où la teneur en eau est portée aux alentours de 5 à 10%.

Ainsi, à l'aide de fibres longues de 1 à 4 mm, larges de 10 à 40 µm, on obtient un papier d'apparence homogène et continu, sensiblement orthotrope du fait du sens préférentiel imposé par le jet de pâte sur la toile ainsi que de la tension subie par la feuille dans le sens machine.

De plus, malgré sa porosité, le papier possède une bonne cohésion due aux liaisons qui s'établissent au croisement des fibres.

### I - INTERET DE L'ETUDE ET MODELISATION

La rhéologie complexe de ce matériau hétérogène et orthotrope vise à établir les corrélations entre la géométrie des fibres, des liaisons et leurs distributions, leurs propriétés mécaniques et les propriétés macroscopiques de la feuille. Celles-ci sont d'ordre intrinsèques ou plus souvent techniques exprimant une aptitude comme la résistance au déchirement, à l'éclatement, au pliage, à l'imprimabilité.

A partir des ruptures brutales qui apparaissent sur machine ou lors des

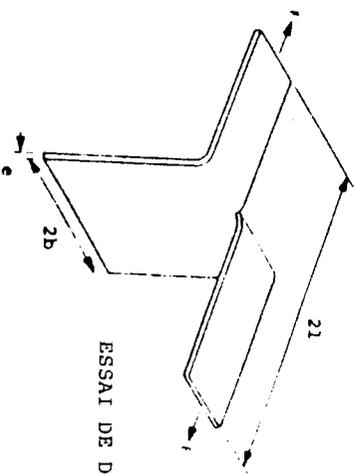
opérations de transformation alors que le papier n'est soumis qu'à des déformations bien inférieures aux "bornes" élastiques, se pose le problème de la résistance à la rupture de ce matériau. Les problèmes de "casse" sur machine ont été décrits /1,2/ ; celles-ci se produisent le plus souvent par propagation d'une fissure préexistante dans le réseau fibreux.

L'apparition de fissures dans la feuille peut provenir des opérations de manutention mais elle est également due à l'hétérogénéité de la structure (existence de bûchettes, inclusions et trous). De tels défauts induisent des concentrations de contraintes à leur proximité ; ils croissent jusqu'à atteindre une taille critique au-delà de laquelle ils se propagent de façon irréversible.

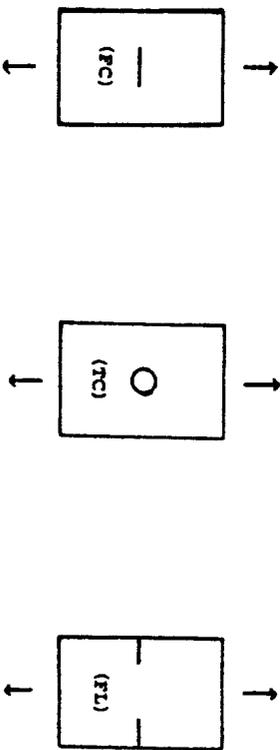
On trouvera dans la référence /3/ quelques tentatives d'application des règles de la mécanique de la rupture à ce problème de rupture par fissuration.

Dans les casses sur machine, la fissure se propage, dans quasiment tous les cas, dans la direction perpendiculaire à la direction d'application des efforts (sens machine) de sorte que l'on se trouve ramené à une rupture en mode I.

On remarque dès à présent que l'essai papetier usuel de déchirement correspond à une rupture en mode III, ce qui ne traduit apparemment pas les cas réels. Les études sur la signification et l'intérêt de ce dernier essai sont nombreuses ; on peut citer celles de MINK et VAN EBEREN /4,5/.



Notre choix s'est porté, dans un premier temps, sur l'examen d'une feuille préfissurée soumise à tension uniaxiale.

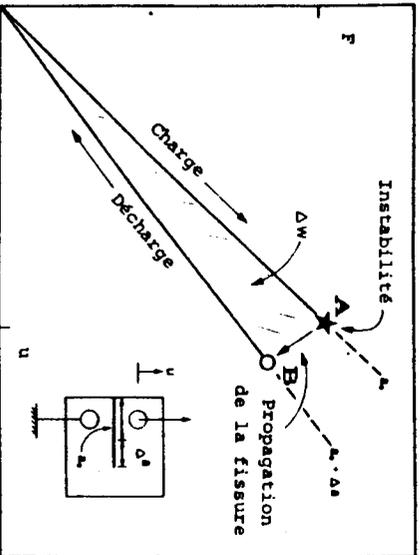


## II - ELEMENTS DE MECANIQUE DE LA RUPTURE

### 1) - Point de vue énergétique

L'abaissement rapide de la résistance offerte par un matériau "microfissuré" est dû aux concentrations de contraintes considérables qui dépassent les limites de ce que peuvent supporter les fibres ou les liaisons entre-fibres.

GRIFITH avait répondu le premier à la question de savoir quel critère adopter pour tenir compte des irrégularités de structure de tout matériau (notion de taille critique) : la rupture survient lorsque la dimension d'un défaut dépasse une longueur caractéristique :  $L_c = (1/\pi)(G_{Ic}/U)$  où U est l'énergie emmagasinée,  $G_{Ic}$  l'énergie de création de nouvelles surfaces ou taux de restitution d'énergie critique. Cette relation traduit l'équilibre entre l'énergie élastique emmagasinée dans le matériau fissuré et celle nécessaire à la création de nouvelles surfaces de rupture /6/.



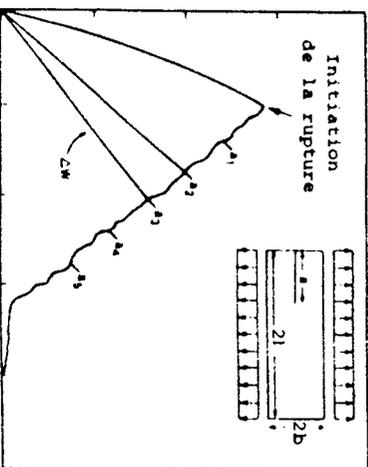
L'extension de la fissure d'une quantité  $\Delta a$  nécessite de dissiper une énergie  $\Delta W$ . Ainsi,  $G_{Ic} = (\Delta W / \Delta a)_{\Delta a \rightarrow 0}$ .

Depuis, la mécanique de la rupture a connu un essor considérable. Il faut cependant rappeler que l'application des règles correspondantes n'est pas dénuée de difficultés s'agissant d'un matériau orthotrope, non linéaire, même dans le cas où on le considère comme en moyenne homogène, et qu'il convient d'établir avec précision les conditions dans lesquelles on peut appliquer aux matériaux orthotropes les techniques utilisées pour les matériaux isotropes.

Une telle mesure peut cependant être réalisée dans le cas d'une propagation quasi-statique /7,8/. L'hypothèse "quasi-statique" est réalisée pour :

- une vitesse de charge lente, de l'ordre de 1 mm/mn,
- des dimensions adéquates de l'éprouvette : la largeur doit être importante vis-à-vis de la longueur, afin que l'énergie emmagasinée avant rupture soit faible devant l'énergie nécessaire à la propagation de fissure dans le but de ne mesurer que cette dernière.

Dans ce cas, la mesure de "l'énergie à la rupture" R est réalisée sur la totalité du chemin de fissuration.



Cette détermination à l'avantage de tenir compte des bifurcations de fissure, mais nécessite un montage spécifique respectant le parallélisme rigoureux des mâchoires. SETH et PAGE /8/, munis d'un tel appareillage, ont cependant obtenu des valeurs de critères par cette méthode.

### 2) - Facteur d'intensité des contraintes

Une deuxième approche consiste à déterminer le champ de contraintes en fond de fissure. Son intensité est proportionnelle à un facteur K appelé facteur d'intensité des contraintes (F.I.C.) qui dépend de la géométrie et des conditions aux limites.

Si une éprouvette de longueur  $2b$  contenant une fissure  $2a$  est soumise à une contrainte uniaxiale d'intensité  $\sigma$ , la fissure ne se propagera pas tant que  $\sigma \sqrt{\pi a} F(a/b) \leq K_{Ic}$ . A la fissuration,  $\sigma$  atteint une valeur critique  $\sigma_c$ .  $K_{Ic}$  est une caractéristique intrinsèque /9,10/ appelée tenacité du matériau. La détermination expérimentale de cette propriété exige, comme indiqué en in-

production, que soit connue l'influence de la géométrie, du type de chargement de la longueur de la fissure.  $F(a/b)$  est un facteur de correction égal à l'unité pour une éprouvette infinie, qui a été calculé dans un grand nombre de cas //1//.

En fait, cette analyse ne tient pas compte de la longueur de l'éprouvette Or, à mesure que cette dimension est réduite, l'influence des mors sur la répartition des contraintes augmente. De plus, elle n'est valable que dans le domaine linéaire, ce qui n'est pas vérifié pour le papier, pour deux raisons principales :

- le comportement du matériau est anélastique,
- la structure en feuille impose des épaisseurs faibles. Cela entraîne un état de contraintes planes induisant une importante zone plastique autour de la fissure.

On pallie cette restriction en augmentant la dimension de la fissure (a) par le rayon  $r_y$  de la zone plastique comme le préconise IRWIN //12// :

$$a^* = a + r_y$$

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_{Ic}}{\sigma_e} \right]^2 \quad (\text{en C.P.})$$

Cependant, la correction n'est valable que lorsque la plasticité reste confinée au voisinage de l'entaille, c'est-à-dire pour  $r_y$  faible devant a.

Si  $\sigma_n$  est la contrainte rapportée à la portion de section non pré-fissurée de l'éprouvette, la validité de la correction peut se traduire par  $(\sigma_n/\sigma_e) \ll 1$ ,  $\sigma_e$  étant la limite élastique du matériau. On en déduit un F.L.C. corrigé :

$$K_{Ic}^* = \sqrt{a/a} \cdot K_{Ic}$$

Lien entre les deux formulations

Malgré la nature fondamentalement différente de ces deux approches, on a pu montrer que, pour un matériau isotrope, en état de contrainte plane :

$$G_c = K_c^2/E$$

Pour un matériau orthotrope homogène, l'expression du  $K_c$  (en mode I) est identique //11// mais pour ce qui concerne le lien entre  $G_c$  et  $K_c$ , il convient de prendre :

$$\frac{1}{E} = \left( \frac{1}{2 E_1 E_2} \right)^{1/2} \left[ \frac{E_1}{E_2} \right]^{1/2} + \frac{2 E_1}{E_45} - \frac{E_1 + E_2}{2 E_2} \Bigg]^{1/2}$$

où 1 et 2 désignent respectivement les directions parallèle et perpendiculaire à la fissure et  $E_{45}$  le module apparent à 45 degrés.

La procédure de détermination de  $G_{Ic}$  exige donc la détermination de la contrainte critique  $\sigma_c$  pour une éprouvette de forme définie ainsi que la connaissance du seuil plastique et des constantes élastiques anisotropes.

3) - Intégrale de RICE

RICE a proposé un paramètre J dont la valeur critique peut être adoptée comme critère d'initiation de la rupture //13//.

Son intérêt réside dans le fait qu'il peut être évalué pour une répartition arbitraire des champs de contraintes et de déformations et donc un écoulement plastique. Il s'exprime sous la forme d'une intégrale de contour invariante, propriété qui découle des lois de conservation établies par ESHELBY //10//.

On trouve dans la littérature plusieurs approches de détermination de ce critère ; on retiendra parmi ces différentes approches la méthode R.P.M. exposée par RICE, PARIS et MERKLE //14// pour sa facilité d'application, car elle n'impose pas d'hypothèses restrictives ni d'approximations.

J est décomposé en un terme correspondant à la contribution élastique et un terme exprimant l'apport anélastique.

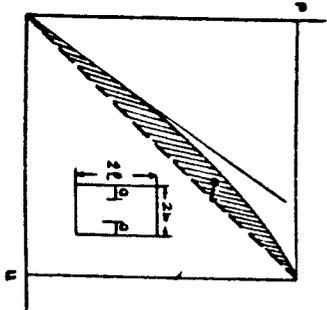


Diagramme effort-allongement

P = force par unité d'épaisseur

u = déplacement

AIRE HACHURÉE

$$J_c = \frac{K_{Ic}^2}{E} + \frac{1}{2(b-a)} \left[ 2 \int_0^u P \, du - P u \right]$$

## 111 - RESULTATS EXPERIMENTAUX

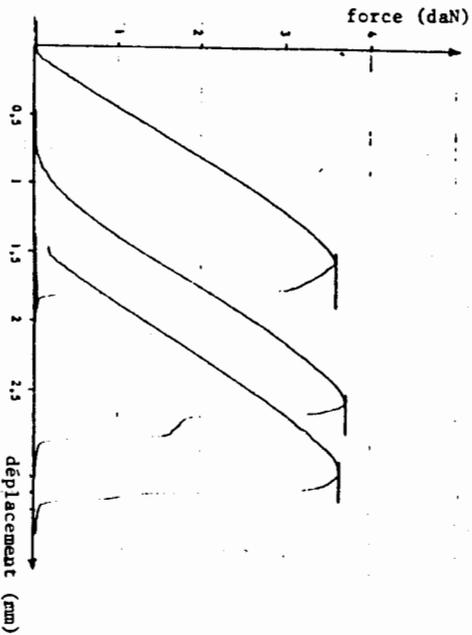
Dans un premier temps, nous mettrons en évidence l'influence de la géométrie de l'éprouvette et de la fissure sur les critères de rupture, nous en déduirons des dimensions optimales respectant les hypothèses (plasticité confinée) et telles que les critères soient intrinsèques au matériau. Le choix sera alors porté sur le(s) critère(s) le(s) plus approprié(s) à l'évaluation de la rupture de la feuille.

Une deuxième étape consistera à examiner les liens éventuels entre les paramètres de fissuration et les caractéristiques mécaniques habituellement mesurées. On étudiera notamment l'influence des paramètres de fabrication tels le pressage et le séchage, pour différents papiers.

### 1) - Procédure expérimentale

L'éprouvette est sollicitée en traction uniaxiale à l'aide d'une machine de traction à déplacement imposé avec une vitesse de traverse de 5 mm/mn. Les essais sont effectués dans un local conditionné à 20°C et 65% H.R.

Nous enregistrons les diagrammes force-allongement à partir desquels sont évalués chacun des critères considérés.



Chaque valeur reportée est constituée de la moyenne de 5 essais (sauf spécifications contraires).

### 2) - Echantillons testés

Les papiers utilisés et leurs principales caractéristiques sont consignés en Annexe dans les tableaux 1 et 2.

L'expérimentation a porté sur deux papiers industriels "A" et "B", un papier "C" réalisé sur machine pilote à différentes conditions de pressage, deux papiers de laboratoire, isotropes, dont l'un réalisé avec différentes conditions de séchage :

- "L" : libre,
- "Sl" : sous glacéuse,
- "Sc" : sous cylindres (à retrait quasi-nul).

Les caractéristiques mécaniques dans le sens machine (SM) et le sens travers (ST) sont données dans le tableau 2.

On notera que l'on s'affranchit d'une mesure d'épaisseur en rapportant ces caractéristiques à la densité ; ceci ne nécessite alors qu'une mesure supplémentaire : le grammage.

Les figures 1 et 2 sont les représentations polaires du module de YOUNG apparent et de la contrainte à rupture.

Une première série d'expériences, visant à déterminer les dimensions optimales, a été pratiquée en maintenant constants les rapports a/b et l/h.

#### \* Rapport a/l/h

SETH /15/ a montré dans ses expérimentations qu'un rapport de l'ordre de 0.40 répondait aux diverses exigences techniques /16/. En outre, il situe le maximum des critères pour cet ordre de grandeur.

Un faible rapport permet de garder la charge par unité de largeur non fissurée,  $\sigma_n$ , inférieure à la valeur du seuil plastique,  $\sigma_e$ , et de conserver ainsi la plasticité confinée. De plus, la taille de la fissure se trouve, par ce choix, suffisamment importante vis à vis des dimensions des fibres et des liaisons inter-fibres de façon à opérer une analyse macroscopique de la rupture de la feuille.

#### \* Rapport l/h

Un compromis doit être trouvé (conformément aux recommandations de PARIS et SIH /9/) entre un écartement trop faible des mors apportant des perturbations importantes du champ de contraintes et une longueur trop élevée entraî-

nant une énergie élastique importante emmagasinée dans le matériau.

Des travaux analogues effectués par MALSH lui ont permis de fixer un rapport de l'ordre de 2.5 à 3 /17/.

Les rapports choisis ont été les suivants :

- a/b ~~4~~ 0.40
- 1/b ~~4~~ 3,

cela pour quatre dimensions d'éprouvette : 2b = 30, 50, 65, 70 mm.

Cette première investigation ayant permis de déterminer une largeur d'éprouvette convenable (2b = 60 mm), nous avons examiné lors d'une deuxième série d'expériences, l'influence de la longueur pour différentes dimensions de fissures : pour chacune des longueurs (11, 18, 23, 28, 36 mm - fissure centrale), on a testé des éprouvettes de longueur 50, 90, 120, 150 et 195 mm.

Les fissures ont été pratiquées à la lame de rasoir dans la direction perpendiculaire au sens marche de la feuille.

### 3) - Résultats obtenus

#### \* Essais à rapports géométriques constants

Ces essais ont été réalisés sur un papier de laboratoire (ISO) et un papier industriel (A), pour deux types de configurations de fissure (FC et FL).

Comme nous l'avions supposé, les dimensions de l'éprouvette ont une forte influence sur l'évaluation des critères.

L'observation des courbes 3, 4 et 5 fait apparaître :

- la dépendance de  $K_{Ic}$  et J avec les dimensions de l'éprouvette,
- la stabilisation de ces critères à partir d'une largeur de l'ordre de 50 à 70 mm,

- l'évolution décroissante du rapport  $\sigma_n/\sigma_e$  qui est parfois supérieur à 1 pour des valeurs faibles de 2b,

- des valeurs de critères toujours inférieures dans le cas de la fissure centrale à celles obtenues pour l'éprouvette à fissures latérales.

Cette première analyse nous a conduit au choix d'une largeur d'éprouvette 2b = 60 mm, compromis entre les impératifs mécaniques (stabilisation des critères) et expérimentaux (dimensions des mors, respect du parallélisme).

#### \* Essais à largeur constante

Pour une largeur déterminée suffisante, les valeurs des critères semblent être des grandeurs intrinsèques. Il paraît cependant nécessaire de connaître l'effet des deux autres dimensions : longueur entre mors (2l) et dimension de la fissure (a).

La première série d'essais ayant montré que  $K_{Ic}$  et J évoluent de manière semblable en fonction des dimensions de l'éprouvette, et ce quelque soit le type d'entaille, nous avons effectué une détermination systématique de l'un des critères, en l'occurrence  $K_{Ic}$ , pour des éprouvettes à fissure centrale.

Lorsque l'on expérimente sur des éprouvettes de même longueur, mais pour des fissures de longueurs différentes, l'effet de la géométrie se manifeste par le fait que les points expérimentaux reportés sur un diagramme  $\log(\sigma_c) - \log(a)$  s'écartent de la droite de pente -1/2 ( $F(a/b) = 1$ ) représentative d'un milieu illimité (figure 6), /18/ :

$$\log(\sigma_c) = -\frac{1}{2} \log(a) + \log\left(\frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi} F(a/b)}\right).$$

En recherchant sur cette courbe la droite de pente -1/2, on détermine la dimension de fissure optimale qui rend applicable les règles simples de détermination du  $K_{Ic}$ . En répétant cette opération pour des éprouvettes de longueurs différentes, on met ensuite en évidence le rôle de cette dimension.

a (mm) \ 2l (mm)	50	90	120	150	195
5,5	3,15	2,64	2,50	2,41	2,43
9	2,39	2,11	2,02	1,87	1,83
11,5	2,11	1,77	1,71	1,58	1,54
14	1,73	1,50	1,41	1,33	1,26
18	1,28	1,19	1,08	1,01	0,92

Contrainte à la rupture (en  $\text{daN/mm}^2$ ) pour une éprouvette de longueur 2l avec fissure centrale 2a (papier industriel).

Il est clair sur le tracé de la figure 7, qu'il est nécessaire d'utiliser des longueurs d'éprouvettes supérieures à 150 mm pour espérer déterminer une grandeur intrinsèque. Ce résultat est conforme à celui obtenu par WALSH /17/. Enfin, les dimensions d'entaille correspondantes se situent entre 7 et 13 mm. On peut donc raisonnablement choisir des entailles de dimension  $a = 11$  mm qui respecte le rapport  $a/b$  évoqué plus haut.

#### \* Premières conclusions

Cette première approche expérimentale a permis d'appréhender l'influence de la géométrie de l'éprouvette sur la détermination de critères de rupture. Les dimensions retenues ( $2l = 150$  mm;  $2b = 60$  mm,  $a = 11$  mm) permettent à la fois d'accéder à des valeurs intrinsèques et de limiter le comportement anélastique du papier.

La dernière affirmation est essentielle pour la détermination du facteur d'intensité de contraintes, qui suppose un comportement élastique du matériau ou, à défaut, une plasticité confinée aux bords de la fissure (auxquels cas, les corrections peuvent être utilisées).

Ainsi, la détermination du F.I.C. satisfait aux exigences de la mécanique de la rupture et est applicable au papier.

Le taux de restitution d'énergie  $G_c$ , déterminé comme nous l'avons fait à partir de  $K_{Ic}$ , n'apporte pas d'information supplémentaire sur la résistance à la rupture du papier.

Par contre, l'intégrale de RICE, valable quelque soit le comportement du matériau, permet d'accéder à des valeurs de résistance par une approche réellement différente (tableau 5).

#### \* Signification des critères de rupture et objectifs

L'évaluation de critères de rupture par propagation de fissure a pour objectif de quantifier une grandeur intrinsèque qui traduise de façon la plus proche possible le comportement mécanique du papier.

Les paramètres mécaniques mesurés usuellement ne satisfont pas pleinement les papetiers qui ont tenté depuis plusieurs années de leur substituer des valeurs plus complexes, représentant la "somme" de plusieurs propriétés (module d'élasticité, contrainte ou longueur de rupture, indices de déchirement et d'éclatement).

De la détermination de  $K_{Ic}$  et  $J$  sur plusieurs papiers de provenances différentes, nous examinerons les liens éventuels de ces critères avec les caractéristiques mécaniques pré-citées.

La comparaison des différents paramètres ne peut s'effectuer qu'avec des grandeurs d'unités homogènes. On trouve dans la littérature des grandeurs rapportées au grammage (longueur de rupture, ...) ou bien pondérées par la valeur de l'épaisseur ( $J_e, G_c, e$ ).

En rapportant les caractéristiques à la densité, on se rapproche des études mécaniques sur d'autres matériaux (les composites par exemple) qui utilisent les valeurs spécifiques. De plus, cela permet de s'affranchir de la mesure dispersive de l'épaisseur tout en rapportant la valeur mesurée à la quantité de matière fibreuse réelle de l'échantillon testé.

#### \* Liens avec d'autres critères

Nous avons expérimenté les phénomènes de propagation de fissure sur un papier isotrope à fibres longues fabriqué en laboratoire à l'École Française de Papeterie, pour une gamme de pressage de 0, 1,5, 3, 5, 12 bars et pour trois modes de séchage.

Le parallèle établi entre les mesures mécaniques usuelles et les critères de fissuration fait apparaître une similitude entre la contrainte à la rupture et le F.I.C. (courbe 8). Néanmoins, sur les papiers considérés, il n'a pas pu être établi de liens précis entre les critères de rupture et les essais de déchirement et d'éclatement. De même, SETH et PAGE /19/ relèvent les difficultés de comparaison entre les deux types de mesure.

L'influence des paramètres de fabrication reste à appréhender. Sur le papier (C), compte tenu de la dispersion des résultats, aucune relation significative n'a pu être mise en évidence.

## BIBLIOGRAPHIE

- /1/ SEARIS G.R., TYLER R.F., DENZER C.W. -  
Shives in newsprint : The role of shives in paper web breaks.  
Pulp Paper Mag. Can., 1965, vol. 66, T-351.
- /2/ MAC MILLAN F.A., FARRELL W.R., BOOTH K.G. -  
Shives in newsprint : Their detection, measurement and effects  
on paper quality. T-361.
- /3/ Handbook of physical and mechanical testing of paper and paperboard.  
(Vol.1). Ed. by R.E. MARK, p.99-114, Syracuse, 1983.
- /4/ WINK W.A., VAN EPEREN R.H. -  
Does the Elmendorf tester measure tearing strength ?  
Tappi, 1963(5), vol. 46, p.323.
- /5/ LYNE M.B., JACKSON M., RANGER A.E. -  
The in-plane Elmendorf and edge tear strength properties of  
mixed furnish papers.  
Tappi, 1972 (6), vol.55, p.924.
- /6/ GRIFFITH A.A. -  
Phil. Trans. Roy. Soc. (London) 221A, 4, p.163, 1926.
- /7/ GURNEY C., HUNT J. -  
Quasi-static crack propagation.  
Proc. Roy. Soc., A 299, 1967, p. 508.
- /8/ SETH R.S., PAGE D.H. -  
Fracture resistance of paper.  
Journ. of Mat. Sc., 1974 (9), p. 1745.
- /9/ PARIS P.C. -  
Stresses analysis of cracks.  
ASTM STP 381, 1964, p.30.
- /10/ BUI H.D. -  
Mécanique de la rupture fragile  
Ed. Masson, Paris, 1978.
- /11/ SIH G.C. -  
On cracks in rectilinearly anisotropic bodies.  
Int. J. Fract. Mech., 1965, vol.1, p.189.
- /12/ DUBOIS M.  
Introduction à la mécanique de la rupture.  
Note n° 4, CERTIM, oct. 1973.
- /13/ RICE J.R. -  
A path independent integral and the approximate analysis of  
stress concentration by notches and cracks.  
Journ. of Appl. Mech., 1968 (6), p.379.
- /14/ RICE J.R., PARIS P.C., MERKLE J.G. -  
Some further results of J-integral analysis and estimates.  
in Progress in flow growth and fracture toughness testing.  
ASTM STP 536, 1973, p.231.
- /15/ SETH R.S. -  
Measurement of fracture resistance of paper.  
Tappi, 1979 (7), vol. 62.
- /16/ SRAWLEY J.E. -  
Fracture toughness testing and its applications.  
STP 381, ASTM, Philadelphia, 1965, p.133.
- /17/ WALSH P.F. -  
Linear fracture mechanics in orthotropic materials.  
Eng. Fract. Mech., 1972, vol.4, p.533.
- /18/ TSAI S.W., PAGANO N.J. -  
Composite materiel workshop  
Techno. publication Co., Inc. 1968, p.233.
- /19/ SETH R.S., PAGE D.H. -  
Fracture resistance : a failure criterion for paper.  
Tappi, 1975 (9), vol.58, p.112.
- /20/ CHERADON H. -  
La Recherche, n° 184, v.14, p.1236, 1983.

Tableau 1 :

Nature et caractéristiques physiques des papiers utilisés

PAPIER	TYPE / ORIGINE	COMPOSITION FL: fibres longues FC: fibres courtes C: fibres cassées	PARAMETRES DE FABRICATION			CARACTERISTIQUES PHYSIQUES			
			Raffinage (*SR)	Pressage (bars)	Séchage	Epaisseur (mm)	Grammage (g/m <sup>2</sup> )	Densité (g/cm <sup>3</sup> )	
A	Industriel Condat	FL - FC - C	30			0.099	76.5	0.77	
B	Industriel (couché) Condat	FL - FC - C	30 - 25			0.124	150.5	1.21	
C I	Machine pilote Facture	FC	48	1 + 1		0.113	55.5	0.49	
C II			"	3 + 3		0.125	70.7	0.57	
C III			"	5 + 5		0.119	73.7	0.62	
ISO	Papier de labo. Cellulose du Pin	FC				0.153	67.9	0.44	
G	Papier labo Formette Franck Rapid-Kothen	FL	14	0	L SL SC	0.233	60.5	0.26	
						0.227	62.9	0.27	
						0.148	62.1	0.42	
	E.F.P. Grenoble	"	"	"	1.5	L SL SC	0.158	66.4	0.42
							0.142	62.3	0.44
							0.121	62.8	0.52
	"	"	"	"	3	L SL SC	0.135	63.2	0.47
							0.125	62.0	0.50
							0.104	61.6	0.59
	"	"	"	"	6	L SL SC	0.129	75.6	0.59
							0.113	61.8	0.55
							0.107	65.3	0.61
"	"	"	"	12	L SL SC	0.112	67.1	0.60	
						0.105	62.2	0.59	
						0.090	60.9	0.67	

Tableau 2 :

Propriétés mécaniques

PAPIER	MODULE SPECIFIQUE E/p (N.m/kg)		MODULE EQUIVALENT E <sub>eq</sub> /p (N.m/kg)	CONTRAINTE SPECIFIQUE σ <sub>r</sub> /p (N.m/kg)		DEFORMATION A LA RUPTURE ε <sub>r</sub> (%)		ENERGIE A LA RUPTURE W (J)		LIM. EL. SPECIFIQ. (N.m/kg)	INDICES	
	SM	ST		SM	ST	SM	ST	SM	ST		Eclatement I <sub>e</sub>	Déchirement I <sub>d</sub> (SM)
	(x10 <sup>6</sup> )		(x10 <sup>6</sup> )	(x10 <sup>4</sup> )		SM	ST	(x10 <sup>-1</sup> )		(x10 <sup>4</sup> )		
A	7.79	1.63	6.34	7.73	3.27	2.08	11.70	1.26	3.24	4.96	3.35	710
B	7.07	2.10	4.50	5.77	2.30	1.90	5.83	1.55	0.75	3.57	2.33	590
C I	7.94	1.71	5.88	8.45	2.00	2.36	3.51	1.06	0.46	4.51	3.75	1160
C II	8.52	3.12	6.42	10.54	3.00	2.66	4.98	1.82	1.29	3.91	4.88	880
C III	7.84	3.13	6.81	10.20	3.10	2.01	4.22	1.43	1.04	6.33	5.16	810
ISO	2.03			1.41		1.65				1.11	0.83	210
G 0	L	1.03		1.00		3.05		0.20		0.94		
	SL	1.44		1.15		1.71		0.14		0.62		
	SC	1.38		1.57		3.52		0.39		0.93		
1.5	L	1.28		1.62		3.93		0.49		0.98		
	SL	1.86		1.45		2.03		0.21		1.14		
	SC	2.27		1.75		1.97		0.25		0.96		
3	L	1.75		1.91		3.55		0.48		1.17		
	SL	2.82		1.54		1.73		0.22		1.17		
	SC	3.53		2.05		1.86		0.28		1.59		
6	L	2.32		2.24		3.91		0.78		1.25		
	SL	2.30		1.82		2.37		0.33		1.28		
	SC	2.06		1.69		1.97		0.25		1.29		
12	L	2.16		2.68		4.52		0.91		1.40		
	SL	2.59		2.12		2.59		0.43		1.33		
	SC	3.03		2.57		2.73		0.49		1.70		

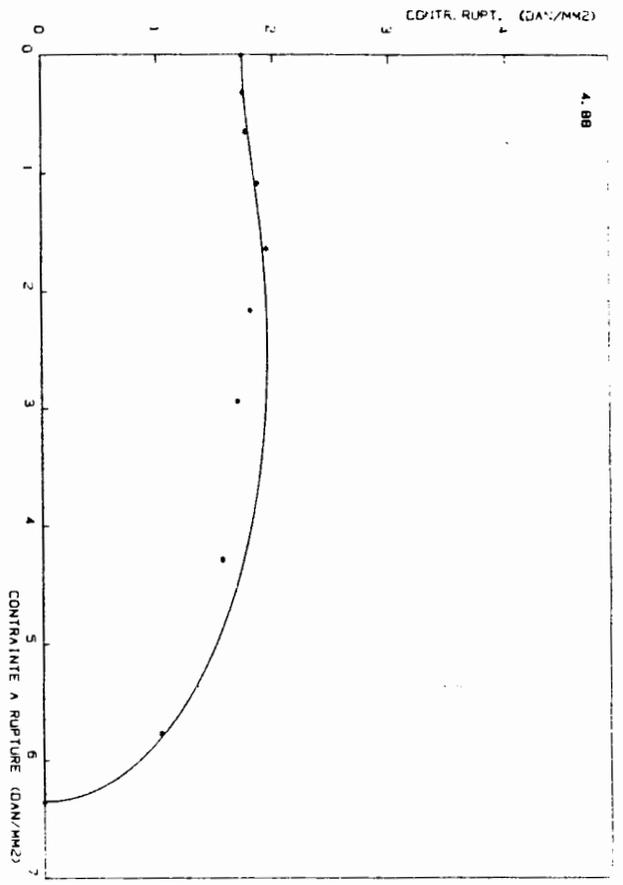
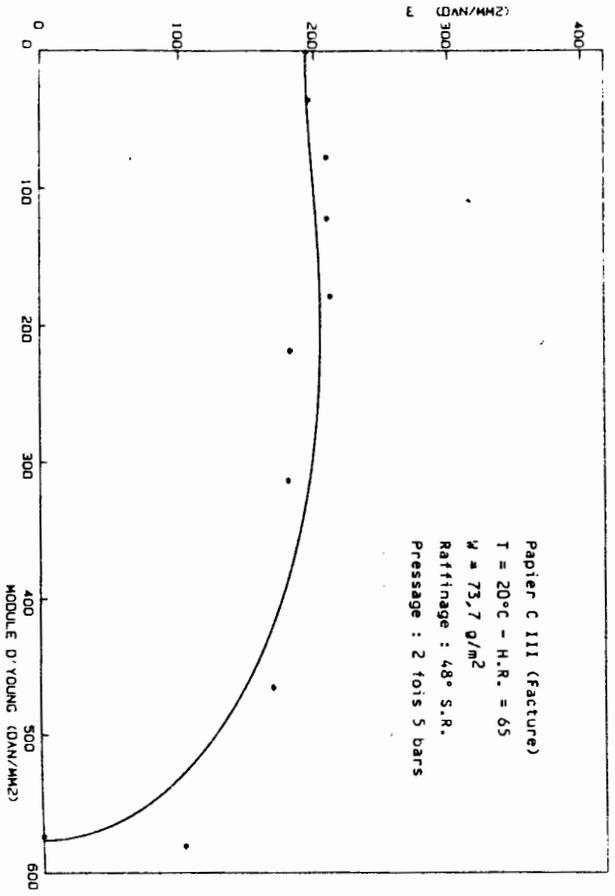


Figure 1 :

Figure 2 : Représentation polaire de la contrainte à rupture et du module de Young (dan/mm<sup>2</sup>)



Evolution du facteur d'intensité de contrainte K<sub>Ic</sub>

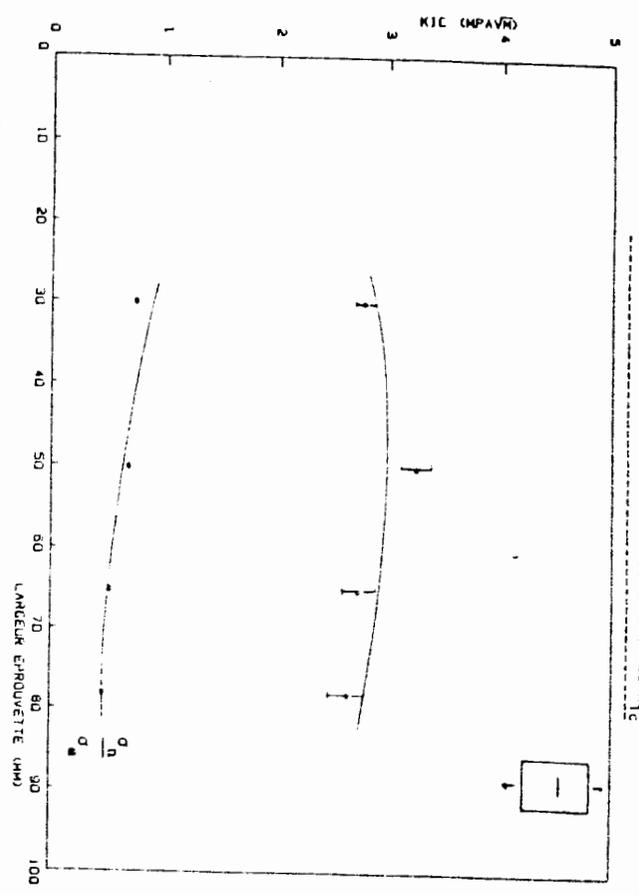


Figure 3 : Papier industriel A

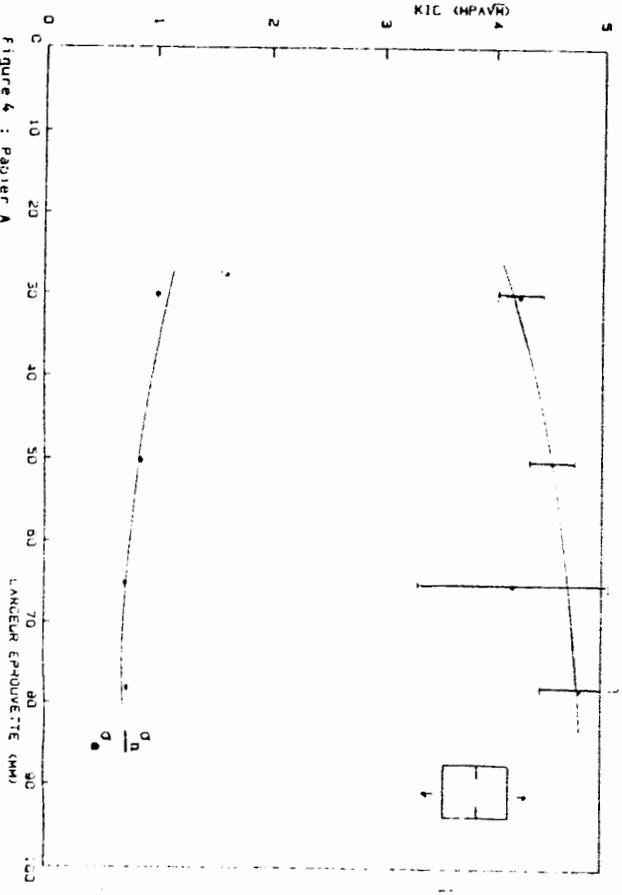


Figure 4 : Papier A

Comparaison des évolutions de l'intégrale de RICE

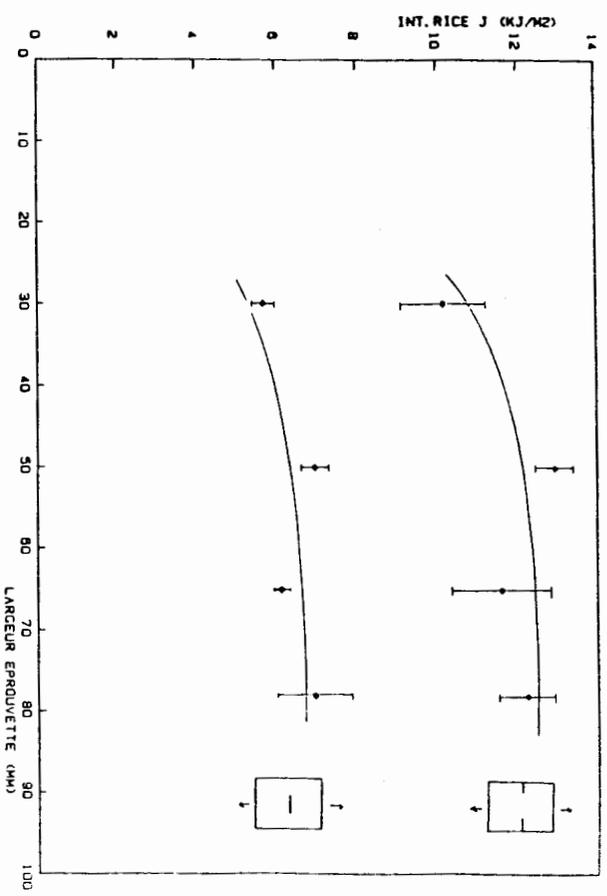


Figure 5 : Papier A

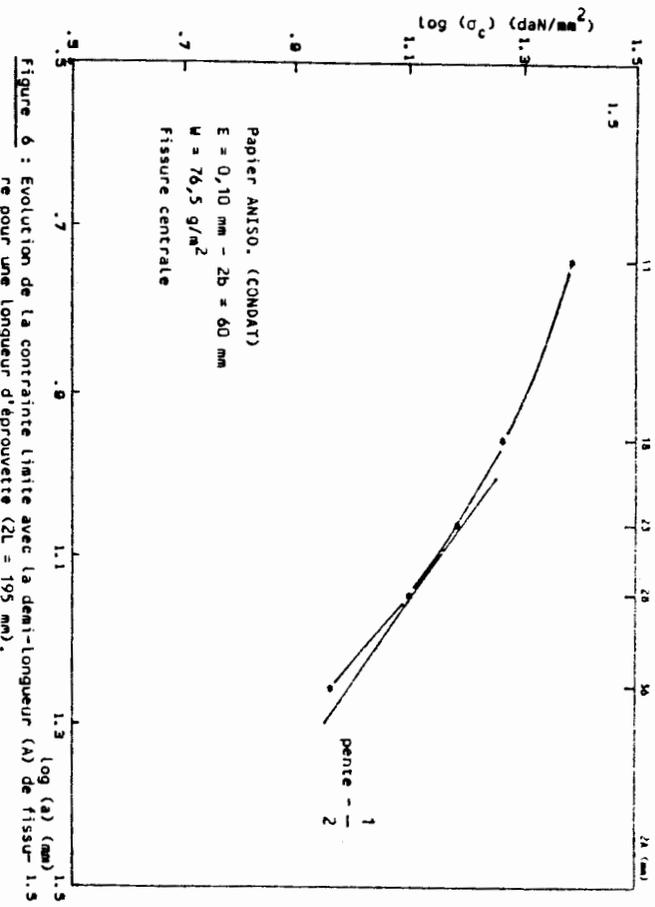
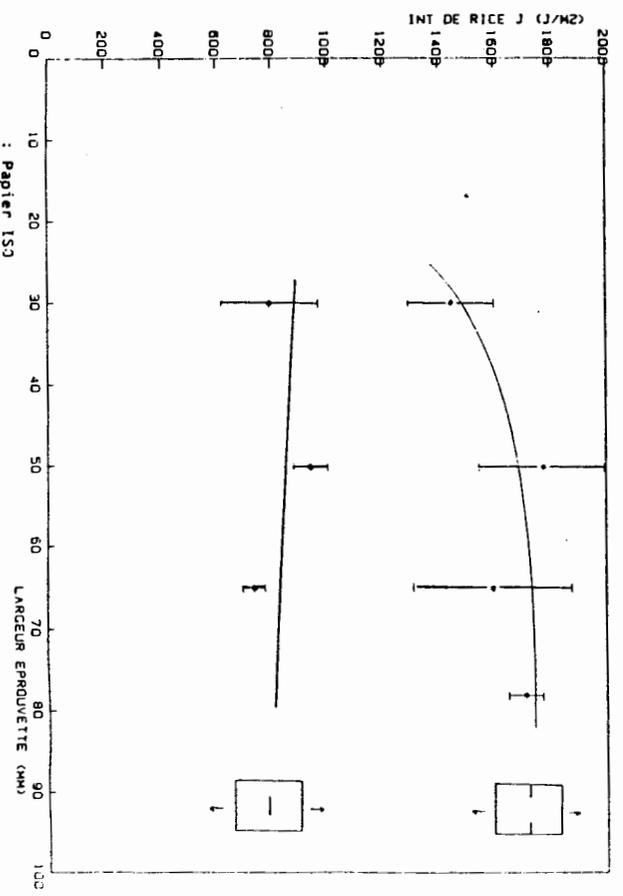


Figure 6 : Evolution de la contrainte limite avec la demi-longueur (a) de fissure re pour une longueur d'éprouvette (2L = 195 mm).

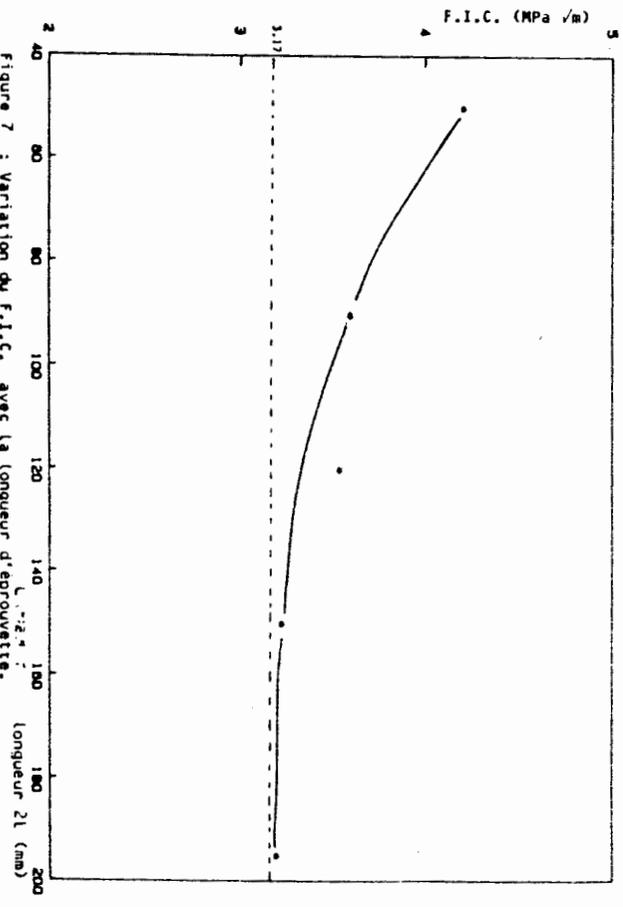
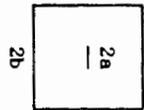


Figure 7 : Variation du F.I.C. avec la longueur d'éprouvette.



21

2 a = 22 mm  
 2 b = 60 mm  
 2 l = 150 mm

Tableau 5 : Valeurs des criteres de rupture (FC)

PAPIER	$K_{IC} / \rho$	$J / \rho$	$G / \rho$	$\frac{\sigma_n}{\sigma_e}$	$\frac{F_y}{B}$
	(N.m <sup>3/2</sup> /kg) x 10 <sup>3</sup>	(J.m/kg)	(J.m/kg)		
A	4.12	5.86	3.31	0.67	0.10
B	3.97	6.29	3.52	0.79	0.15
C I	7.00	15.06	8.36	1.03	0.25
C II	7.46	13.56	8.65	0.90	0.19
C III	7.39	15.63	8.03	0.82	0.16
G 0 L	1.96	5.65	3.71	1.58	0.59
SL	1.74	3.96	2.13	1.15	0.31
SC	1.90	5.31	2.64	1.25	0.37
1.5 L	1.90	7.80	3.89	1.35	0.43
SL	1.95	5.12	2.04	1.10	0.29
SC	2.21	4.61	2.65	1.04	0.26
3 L	2.11	6.70	2.54	1.15	0.31
SL	2.16	5.30	1.64	1.17	0.32
SC	2.46	5.30	1.72	1.03	0.25
6 L	2.68	9.83	3.08	1.30	0.40
SL	2.36	6.49	2.43	1.17	0.32
SC	2.03	5.26	2.01	1.04	0.26
12 L	2.65	10.67	3.23	1.18	0.30
SL	2.49	6.12	2.40	1.11	0.33
SC	2.91	7.23	2.80	1.10	0.29

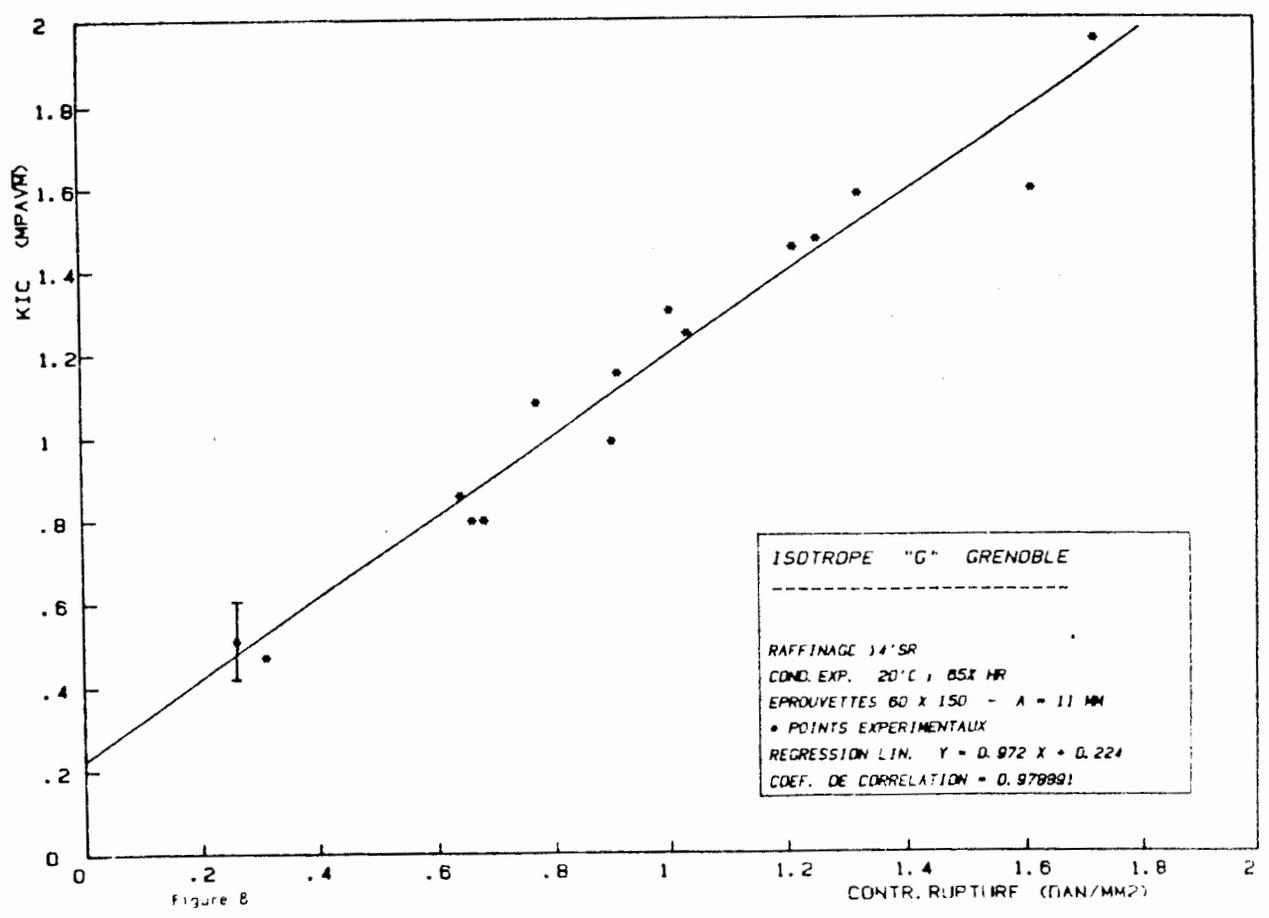


Figure 8

**ETUDE DE LA MICROFISSURATION D'ASSEMBLAGES DE TUBES METALLIQUES  
MINCES COLLES PAR L'INTERMEDIATAIRE D'UNE RESINE EPOXYDE**

**A STUDY OF MICROCRACKS IN THIN METALLIC TUBES BONDED WITH EPOXY  
RESIN**

**Y. DELMAS, C. COLLOT**

Laboratoire "Science des Matériaux"  
U.E.R. Sciences Exactes et Naturelles  
Moulin de la Housse  
51062 REIMS Cédex - France

**RESUME**

Nous étudions la tenue mécanique et le mécanisme de rupture d'assemblages de tubes minces par manchon droit collé.

Les adhésifs utilisés sont des résines époxydes durcissant à chaud.

Dans une première étape, nous caractérisons les matériaux constituant l'éprouvette composite (alliage métalliques, résines chargées). Nous présentons en particulier les divers types de comportements rhéologiques des adhésifs en fonction de la température d'essai.

Des éprouvettes instrumentées à l'aide de jauges électriques à fil résistant sont ensuite testées en traction à une vitesse bien déterminée. Les micro-déformations induites à la surface du modèle expérimental permettent de localiser les zones d'initiation des microfissures et de suivre leur propagation jusqu'à la ruine complète de l'assemblage.

L'ensemble des résultats donne des indications intéressantes sur le comportement de tels assemblages suivant la nature et la structure des constituants et sur le mode de rupture.

**ABSTRACT**

We study the mechanical behaviour and the way thin tubes bonded together by means of glued straight coupling sleeve break.

The adhesives used are epoxy resins hardening when heated.

Hence a first part of the paper deals with the description of the materials constituting the composite test-tube (metallic alloys, "charged" resins). In particular we show the different types of rheological behaviours of adhesives according to the test temperature.

The second part of the study deals with the experimental test of tubes bonded and equipped with electric gages with a resisting wire submitted to tension at a well-fixed speed.

The micro-deformations affecting the surface of the model for experimentation enable us to localise the places where microcracks first appear and to follow their propagation until complete failure of the connection.

The sum of the results gives interesting indications as to the behaviour of such assemblings according to the kind and structure of the components as well as the mode of fracture.

## 1-INTRODUCTION

Le collage est appelé à un grand développement dans l'industrie car il permet de remplacer les techniques de liaison de tubes cylindriques minces telles que le brasage, le soudage ou le soudo-brasage.

En effet ces modes traditionnels d'assemblages présentent un certain nombre d'inconvénients : ils réclament un personnel extrêmement qualifié; de plus, ils exercent sur les matériaux qui les subissent des effets thermiques importants qui réduisent énormément leur tenue mécanique.

Par contre, le collage ne nécessite de la part de celui qui le met en oeuvre aucune agilité particulière, simplement un peu de soin et de méthode.

Dans cet exposé, nous montrons d'abord comment l'utilisation d'adhésifs monocomposants durcissant à chaud et l'amélioration des moyens de chauffage pendant la réticulation permettent de réduire notablement la durée de la mise en oeuvre du collage et le rendent compétitif.

Nous étudions ensuite la variation du comportement rhéologique des adhésifs réticulés retenus en fonction de la température; nous mettons ainsi en évidence les domaines dans lesquels les assemblages présenteront une bonne tenue mécanique.

Nous avons, enfin, à l'aide d'une méthode d'extensionnètrie par jauges électriques, observé, lors d'essais de traction d'assemblages de tubes minces métalliques par manchon droit collé, le développement de la microfissuration à l'intérieur du joint d'adhésif. L'ensemble de ces observations permet de comprendre le comportement de l'éprouvette composite et de décrire avec vraisemblance le mécanisme de la rupture des assemblages testés.

## 2-CHOIX DES ADHÉSIFS

Il est donc nécessaire de rechercher des adhésifs dont la réticulation s'effectue en un temps voisin de la minute, le temps qui est celui de la réalisation d'une brasure. De plus, il faut que la mise en oeuvre du collage soit aussi simple que celle du brasage. Par ailleurs, l'assemblage doit résister en continu à une température de 80°C avec des pointes possibles à 100°C. Le joint doit supporter sans dégradation importante le contact de l'eau. Enfin, l'adhésif doit être peu sensible à l'état de surface des substrats.

Après une étude bibliographique sur les colles, nous pensons que seul un adhésif époxyde monocomposant durcissant à chaud convient.

Parmi tous les adhésifs époxydes disponibles actuellement sur le marché français, nous avons retenu les colles XD911 (et sa variante thixotropée XD981) de la société CIBA-GEIGY\* et ESP105 (chargée de poudre d'aluminium) de la société PERMABOND\*\*.

Pour ces deux colles, les durées de durcissement en étuve à 180°C préconisées par les fabricants sont de l'ordre de la demi-heure. Il est possible de diminuer ces durées par une technique de chauffage appropriée telle que le chauffage par induction.

\* CIBA-GEIGY, rue de la Glacière, 03103 MONTLUCON CEDEX  
\*\* PERMABOND ADAC INDUSTRIE, 18 rue J.M. Foulmarch 94200 IVRY/S

Figure 1 Assemblage tube-manchon d'assemblage identiques

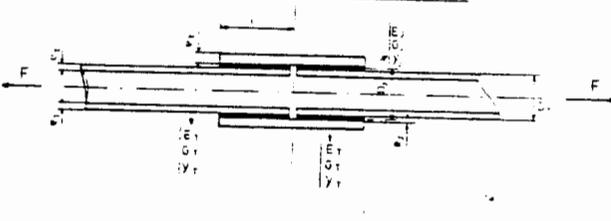


Figure 2 Courbe d'analyse enthalpique différentielle de l'adhésif XD 911.

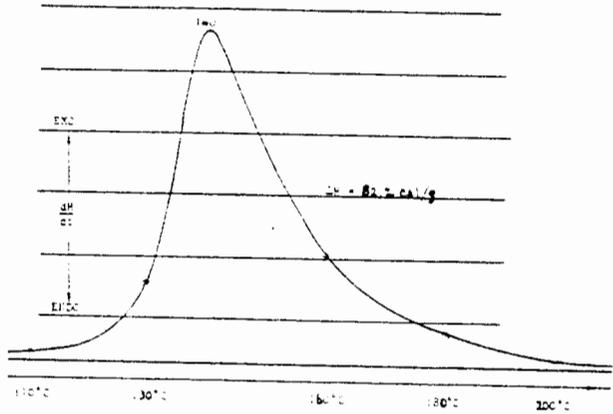


Figure 3 Courbe d'analyse enthalpique différentielle de l'adhésif ESP 105.

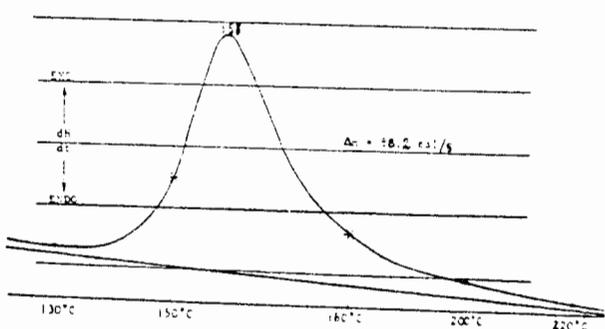


Tableau 4 Résultats des analyses enthalpiques différentielles sur 5 essais

	XD 911	ESP 105*
Zone de réticulation	90 - 215°C	120 - 140°C
Sommet du pic	140°C	159°C
Énergie de réticulation cal/g	62,2 ± 1,7	86,2 ± 3,9

\* Cette résine étant chargée de 40% de poudre d'aluminium, le chiffre de l'énergie de réticulation est rapporté à la résine seule.

### 3. MODELE EXPERIMENTAL

Le modèle expérimental retenu est un modèle classique d'assemblage de tubes métalliques par manchon droit collé à simple recouvrement cisailé par traction simultanée des substrats (figure 1).

Les tubes et les manchons sont en cuivre écroui ou en acier XC38 recuit. Leur épaisseur est dans tous les cas égale à 1 mm. Le diamètre extérieur des tubes métalliques est  $DI = 14$  mm, celui des manchons,  $DM = 16$  mm. L'épaisseur du joint d'adhésif est constante et égale à  $e_j = 0,1$  mm. La longueur de recouvrement du joint,  $l$ , mesure 28 mm.

L'acier utilisé est un XC38 fortement étiré, ayant subi un recuit. Ses constantes mécaniques déterminées par extensométrie sont les suivantes :

$E = 200000$  MPa,  $R_{p0,2\%} = 283$  MPa,  $R_{rupture} = 384$  MPa,  $A\% = 45\%$ .  
Le cuivre a une structure fortement écrouie. Ses constantes mécaniques sont :

$E = 100000$  MPa,  $R_{p0,2\%} = 280$  MPa,  $R_{rupture} = 435$  MPa,  $A\% = 3\%$ .

Pour éviter la ruine prématurée des assemblages étudiés aux interfaces colle-adhésif, nous avons choisi l'état de surface optimal, obtenu par sablage à l'aide de particules artificielles AVB 150 (1). Les éprouvettes sont dégradées au trichloréthylène.

Les essais de cisaillement s'effectuent à  $20^\circ\text{C}$ , à la vitesse de 10 mm par minute.

### 4. ETUDE DES CONDITIONS DE RETICULATION DES ADHESIFS XD911, XD981 ET ESP105

L'analyse enthalpique différentielle nous permet de déterminer les zones de température dans lesquelles les réactions de réticulation se produisent de manière optimale.

Le matériel utilisé est le calorimètre à balayage DSC 1B PERKIN ELMER. L'accroissement de température est de  $8^\circ\text{C}$  par minute, sous courant d'azote.

L'adhésif ESP105 présente la particularité d'être chargé avec 40% de poudre d'aluminium. Les colles XD911 et XD981 sont formulées à partir de la même résine, seules les charges minérales diffèrent. C'est pourquoi, les valeurs des énergies de réticulation sont ramenées à la résine seule et les essais ont été effectués uniquement sur la nuance XD911 et la colle ESP105.

Les courbes obtenues sont représentées sur les figures 2 et 3. Leur interprétation est résumée dans le tableau 4. Nous pouvons tirer de ce tableau les conclusions suivantes :

\* Les énergies de réticulation des deux résines testées sont très voisines : 82 Cal/g pour la nuance XD911 et 88 Cal/g pour la colle ESP105,

\* Les sommets des pics de température sont eux aussi du même ordre :  $140^\circ\text{C}$  pour l'XD911,  $159^\circ\text{C}$  pour l'ESP105, \* par contre, les zones de réticulations des deux résines sont très différentes :

- le domaine est très étendu pour la nuance XD911 ( $90^\circ\text{C}-215^\circ\text{C}$ ); la limite inférieure relevée est relativement basse,

- il est beaucoup plus étroit pour la

colle ESP105 ( $125^\circ\text{C}-220^\circ\text{C}$ ) et la réaction a lieu à une température plus élevée.

La réticulation de l'adhésif XD911 peut donc se produire à une température plus faible que celle qui est nécessaire pour la colle ESP105. Mais, puisque leurs énergies de réticulation sont très voisines, les deux adhésifs seront maintenus au dessus du seuil de température le plus élevé ( $125^\circ\text{C}$ ) pendant des temps à peu près équivalents afin d'obtenir sûrement une bonne réticulation. Dans les deux cas, les réactions sont exothermiques; il est nécessaire de prendre des précautions lors du chauffage, une surchauffe risquerait en effet d'entraîner leur dégradation.

#### 4-1 DURCISSEMENT PAR CHAUFFAGE EN TUBE A AIR CHAUD

Nous avons vu précédemment que les deux familles d'adhésifs présentent des caractéristiques voisines. Nous avons donc considéré par cette méthode uniquement l'aptitude au durcissement que la nuance XD981.

Nous avons retenu la température de  $180^\circ\text{C}$  pour nos essais, car elle se situe au dessus des valeurs qui correspondent aux pics exothermiques.

Le mode opératoire des essais et les éprouvettes sont conformes à la description du paragraphe 3.

Le chauffage s'effectue dans une étuve stabilisée à  $180^\circ\text{C}$  pendant des temps respectifs de 5, 10, 15, et 25 mn.

Les résultats sont consignés dans le tableau 4.

Pour une durée de durcissement inférieure à 15 mn, les assemblages se rompent par cisaillement du joint de colle. La perte de résistance est due vraisemblablement à une réticulation insuffisante des adhésifs.

En effet, l'air ambiant dans l'étuve étant à  $180^\circ\text{C}$ , température nécessaire à une bonne réticulation de l'adhésif, la puissance de chauffage sert essentiellement à la montée en température de l'éprouvette. Des mesures par thermocouple montrent que, pour un temps de chauffage de 25 mn, le maintien à  $180^\circ\text{C}$  ne dure effectivement que 3 minutes.

La réticulation commence à  $90^\circ\text{C}$  pour la nuance XD981; cette température est atteinte en moins de 15 mn. Le maintien à cette valeur est insuffisant pour obtenir une réticulation totale de la résine, la vitesse de réaction étant trop faible.

Nous avons ensuite placé une série d'éprouvettes dans de l'air ambiant à  $300^\circ\text{C}$  et dès qu'elles ont atteint la température de  $180^\circ\text{C}$ , nous les avons stabilisées pendant 3 mn. La montée jusqu'à  $180^\circ\text{C}$  s'effectue en 4 mn, ce qui réduit nettement la durée de la mise en oeuvre du collage.

Les cinq éprouvettes réalisées de cette façon se sont toutes rompues au niveau de l'un des tubes assemblés (tableau 5) pour une valeur moyenne de 1884 dan. Le maintien effectif des éprouvettes à  $180^\circ\text{C}$  pendant 3 mn est donc suffisant pour assurer une bonne réticulation de l'adhésif.

Pour augmenter la vitesse de montée en température à  $180^\circ\text{C}$  des éprouvettes, il semble judicieux d'utiliser un moyen de chauffage très rapide, tel que le chauffage par induction.

Cette technique a pu être mise en oeuvre au Laboratoire Central de l'Armement par JEANDRAU et PAUL IAKD (2), les résultats sont exposés dans le paragraphe suivant.

4-2 CHAUFFAGE DES ÉPROUVETTES PAR INDUCTION : DÉTERMINATION DE LA DURÉE MINIMALE DE CHAUFFAGE NECESSAIRE À LA RÉTICULATION DES ADHÉSIFS

Les épreuves utilisées sont en acier. Les adhésifs retenus pour ces essais sont la nuance XD911 et la colle ESP105. Les principaux résultats sont consignés dans le tableau 6. Pour l'adhésif XD911, les conditions optimales de réticulation par induction sont les suivantes :

\* 1 mn à 110°C puis 2 mn à 160°C.

La limite élastique des tubes est dépassée et les charges de rupture obtenues sont très proches de celles atteintes lors du chauffage en étuve.

Pour l'adhésif ESP105, les meilleurs résultats sont obtenus pour les conditions de réticulation suivantes :

\* 1 mn à 150°C puis 2 mn à 200°C.

Nous constatons que la durée effective du chauffage par induction assurant une bonne tenue mécanique des épreuves est de 3 minutes dans les deux cas.

C'est une amélioration très sensible par rapport à la technique classique du chauffage en étuve. L'inconvénient majeur des collages à chaud qui était la grande durée du durcissement est donc supprimée par cette méthode de chauffage par induction. Le développement des collages structuraux à chaud passe par l'amélioration des moyens de chauffage. Pour les assemblages métalliques, les systèmes par induction sont très prometteurs.

5 COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES ADHÉSIFS RÉTICULÉS

Pour étudier la microfissuration du joint d'adhésif réticulé dans notre modèle expérimental cisailé par traction, il est important de caractériser les colles utilisées, durcies dans les conditions optimales.

5-1 ESSAIS DE TORSION

Ces essais ont été réalisés au Laboratoire Technique Central de l'Armement (3) avec un pendule de torsion BRABENDER.

Les épreuves ont été usinées dans des plaques de résine obtenues par coulage entre deux carreaux de verre téflonés; le durcissement a eu lieu en étuve à 180°C pendant 30 mn pour l'ESP105 et 25 mn pour l'XD911. Leur forme est parallélepédique de dimensions 60x60x1, la longueur utile est de 50 mm.

Nous avons représenté sur les figures 7 et 8, les évolutions en échelles semi-logarithmiques des modules de cisaillement réels en fonction de la température.

Nous constatons l'existence de trois zones distinctes qui correspondent à trois types de comportement des adhésifs :

- un plateau du logarithme du module de cisaillement  $G'$ . Le haut niveau du module s'explique par le blocage des chaînes de macromolécules. Cette zone s'apparente à un état vitreux des polymères. Dans ce domaine la rupture des adhésifs est du type fragile lorsque les essais sont de courte durée.

- un domaine dans lequel le logarithme du module diminue régulièrement. La température plus élevée permet les déplacements relatifs des chaînes macromoléculaires. Dans cette

TABLEAU 6

Caractéristiques des adhésifs Epoxy-ESP 105 et XD 911 en traction (essais avec jauges doubles)

Adhésif	N° épreuve	$v$ moyen	E (MPa)	$\sigma$ rupture (MPa)	$\epsilon_L$ rupture %
XD 911	6	0,332	3116	49,3	-
	7	0,315	3064	57,7	-
	8	0,330	3282	54	-
	9	0,325	3166	55,9	-
	moynne	0,325	3157	55,9	-
		$\pm 0,085$	$\pm 139$	$\pm 4,2$	
ESP 105	1	0,312	5390	54	1,52
	2	0,300	5173	52	1,45
	3	0,307	5225	50	1,16
	4	0,293	5124	50	1,24
	moynne	0,302	5228	51,5	1,35
		$\pm 0,011$	$\pm 132$	$\pm 2,0$	$\pm 0,13$

Tableau 6b Caractéristiques de l'adhésif XD 911 en traction (essais avec extensomètre)

N° épreuve	Charge rupture (daN)	Contrainte rupture $\sigma$ (MPa)	Allongement rupture $\epsilon_L$ %	Module E (MPa)
1	105	62,5	3,52	3300
2	115	66,4	4,88	2940
3	92	54,7	2,14	3534
4	106	63	2,92	3125
moynne	104,5 $\pm$ 11,5	62,1	3,36	3224
		$\pm 6,3$	$\pm 1,37$	$\pm 297$

Figure 7 COMPORTEMENT EN TORSION DE L'ADHÉSIF (ESP) XD 911

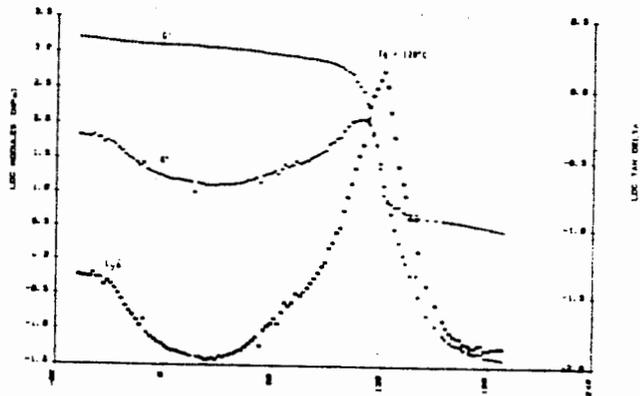
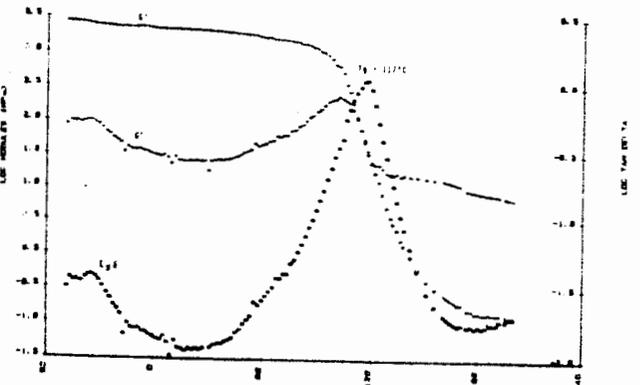


Figure 8 COMPORTEMENT EN TORSION DE L'ADHÉSIF (ESP) ESP 105



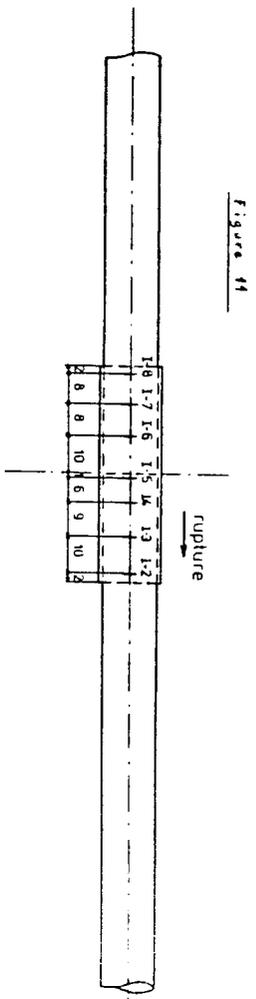


Figure 11

Eprouvette 180°C, type adhésif XD 911

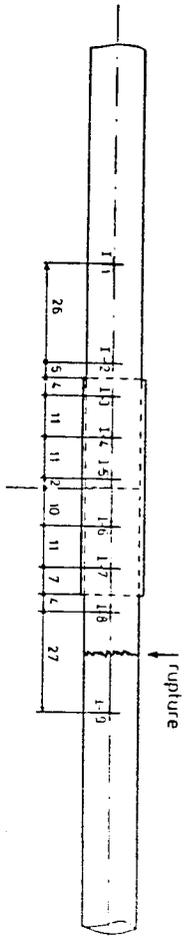


Figure 12

Eprouvette 180°C, type adhésif XD 911

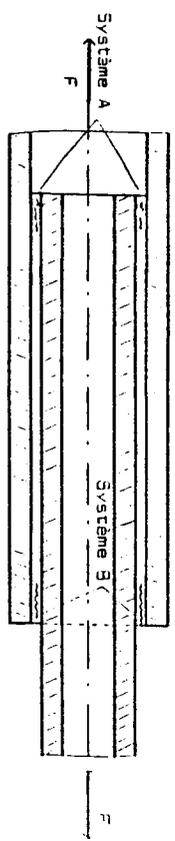


Figure 13

Systèmes de microfissures

zone le comportement des adhésifs est viscoélastique, ils présentent un état caoutchoutique. La durée et la vitesse d'application de l'effort auront une grande influence sur les valeurs des déformations et des contraintes de rupture des adhésifs.

une zone de transition entre les deux domaines précédents dans laquelle le logarithme du module  $G'$  chute fortement.

La température de transition entre l'état vitreux et l'état caoutchoutique est relevée conventionnellement au maximum du pic d'amortissement.

Elle est égale à 120,4°C pour la nuance XD911 et 117,5°C pour l'adhésif ESP105. Ces valeurs sont très voisines, les deux familles de colles ont le même type de comportement pour une température inférieure au seuil de 117,5°C.

Ces adhésifs conservent de bonnes caractéristiques mécaniques à 100°C: 30% du module de cisaillement à température ambiante pour l'ESP105 et 48,5% pour l'XD911.

Tous les essais de rupture effectués lors de notre étude ont été réalisés à la température ambiante de 20°C. Les deux familles de colles sont à cette température, à l'état vitreux. La vitesse de mise en charge est grande, ce qui conduit normalement à des ruptures du type fragile.

Dans la zone vitreuse, le module de cisaillement  $G'$  de l'ESP105 est plus élevé que celui de la nuance XD911; cela s'explique par la plus grande quantité de charges incorporées dans la résine ESP105, sa rigidité est alors plus grande.

5-2 ESSAIS DE TRACTION

Nous donnons dans les tableaux 9 et 10 les principaux résultats. De ces valeurs nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- l'adhésif XD911 est plus résistant que la colle ESP105 (contrainte de rupture de 56 MPa pour le premier; 52 MPa pour le second);

- la nuance XD911 est moins rigide que la colle ESP105 (modules d'Young respectifs 3197 MPa pour l'XD911, 5228 MPa pour l'ESP105; module de cisaillement 1179 MPa pour l'XD911, 2090 MPa pour l'ESP105);

- l'allongement à la rupture de l'adhésif ESP105 est beaucoup plus faible que celui de l'XD911 (1,35% contre 3,36%).

6 ETUDE EXPERIMENTALE DU CISAILEMENT DU JOINT PAR L'ANALYSE DES COURBES  $F = f(\Delta L)$

Les éprouvettes testées sont en cuivre écroui, elles sont conformes à la description du paragraphe 3.

Le dispositif extensométrique que nous avons adopté (figures 11 et 12), nous a permis de suivre le comportement de l'assemblage soumis à la traction, en relevant la variation des allongements relatifs  $\Delta L$  et  $\Delta L$  en fonction de la charge axiale  $F$ .

En étudiant l'évolution des courbes  $F = f(\Delta L)$  et  $F = f(\epsilon_{TI})$  (figures 13, 14, 15, 16), nous mettons en évidence les phénomènes suivants :

\* pour la première éprouvette qui s'est rompue par cisaillement du joint de colle :

- au delà d'une charge  $F_{D5} = 500$  daN, la pente du diagramme  $F = f(\epsilon_{L5})$  relatif à la jauge I-5 (jauge placée près du milieu du manchon du côté où a lieu la rupture) diminue, alors que pour une valeur sensiblement voisine la pente du diagramme  $F = f(\epsilon_{T1})$  augmente,

- puis la pente des diagrammes  $F = f(\epsilon_{L1})$  relatifs aux jauges I-4 et I-3 (jauges situées dans la partie médiane de la zone de rupture) diminue pour des valeurs successives  $F_{D1}$  de la charge, la pente des courbes  $F = f(\epsilon_{T1})$  pour ces courbes augmentant,

- la pente du diagramme  $F = f(\epsilon_{L2})$  relatif à la jauge I-2 (à l'extrémité du manchon) augmente légèrement pour une valeur de la charge  $F_{D2} = 1000$  daN tandis que celle de la courbe  $F = f(\epsilon_{T2})$  diminue.

On retrouve les mêmes phénomènes pour les jauges I-6, I-7, I-8 placées sur l'autre moitié du manchon qui n'a pas été le siège de la rupture.

\* La deuxième éprouvette dont la ruine est intervenue par rupture du métal conduit à des courbes émanant des jauges situées dans les mêmes zones qui sont tout à fait analogues.

Nous pouvons expliquer ces anomalies en admettant qu'il existe vraisemblablement deux systèmes de microfissures dans le joint, l'un agissant depuis son extrémité B (figure 17), l'autre depuis le bord A du joint :

- Système de microfissures A : les microfissures progressent depuis l'extrémité A, c'est à dire à travers la zone du joint dans laquelle l'effort de traction est transmis du manchon au tube intérieur. L'assemblage est en partie détruit, aussi  $\sigma_{LX}$  et  $\sigma_{TZ}$  tendent elles vers  $\sigma_{Lmax}$  et  $\sigma_{Tmax}$ , valeurs prévues pour le manchon en dehors du recouvrement. C'est pourquoy, les pentes des diagrammes  $F = f(\epsilon_{L1})$  relatifs aux jauges I-5, I-4, I-3 diminuent successivement et celles des courbes  $F = f(\epsilon_{T1})$  augmentent,

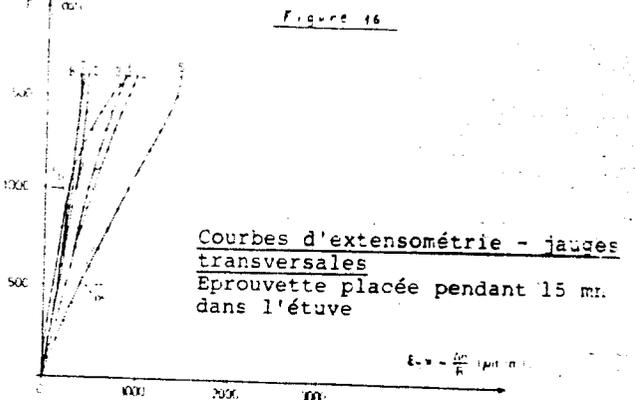
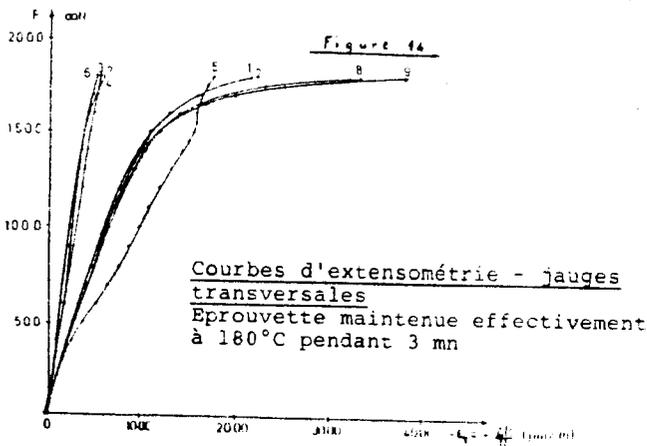
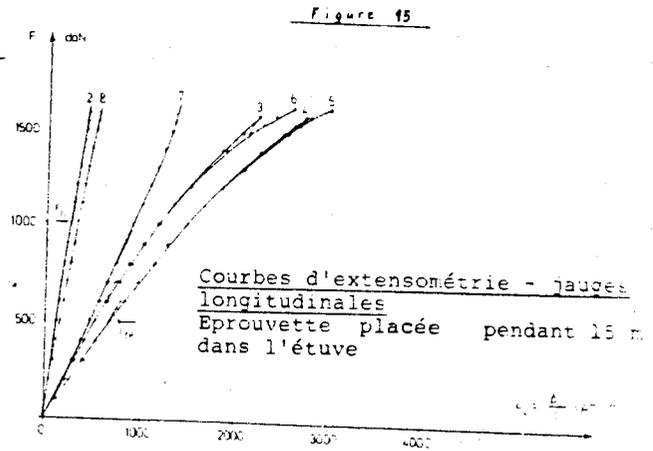
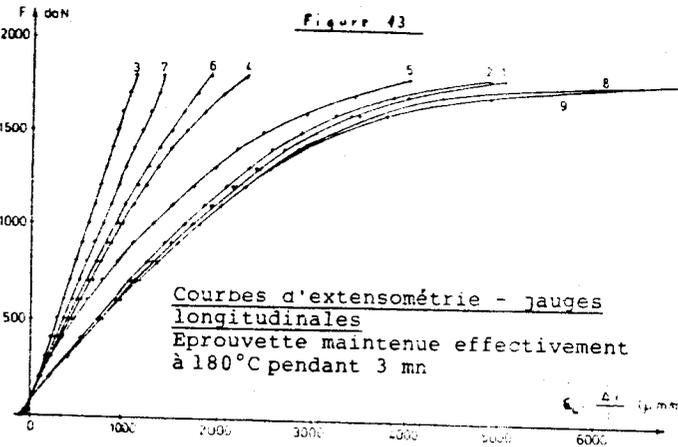
- Système de microfissures B : les microfissures se propagent à partir du bord B de l'éprouvette; elles diminuent progressivement l'efficacité du joint qui n'est plus capable de transmettre correctement l'effort du tube intérieur au manchon. Le système B provoque donc au niveau de la jauge I-2 un détachement partiel du manchon. Les contraintes longitudinales et transversales décroissent. C'est pourquoy, la pente du diagramme  $F = f(\epsilon_{L2})$  augmente tandis que celle de la courbe  $F = f(\epsilon_{T2})$  diminue.

Il apparaît que la fissuration débute logiquement aux extrémités du joint qui correspondent bien aux zones les plus sollicitées théoriquement d'après LUBKIN et REISSNER (4) par le cisaillement.

Les assemblages de tubes de cuivre se détruisent selon deux mécanismes différents :

- soit par cisaillement du joint de colle,
- soit par rupture de l'un des tubes assemblés au voisinage du manchon.

Mais pour les assemblages de tubes d'acier, la ruine intervient toujours par cisaillement du joint d'adhésif. Les éprouvettes d'acier ont une meilleure tenue mécanique.



MOTIVÉ	durée 5 mn		durée 10 mn		durée 15 mn		durée 25 mn	
	type de rupture	charge (dan)						
1	0	C	240	C	1750	C	1850	T
2	0	C	190	C	1570	C	1820	T
3	0	C	240	C	1880	C	1830	T
4	-	-	-	-	-	-	1880	T
5	-	-	-	-	-	-	1900	T
0	0	-	225	-	1755	-	1856	-

Tableau 6  
 Chauffage par induction

**Essais de traction sur tubes**  
 acier d'épaisseur 1 mm -  
 Ø EXT : 14 ; Ø INT : 12 -  
 collés avec l'adhésif XD 911  
 - Préchauffage : 1 mn à 110°C  
 - Polymérisation finale : 2 mn à 160°C  
 durée totale : 3 mn  
 manchons calibrés de longueur 42 mm - Sablage

**Essais de traction sur tubes**  
 acier d'épaisseur 1 mm - Ø EXT : 14 ; Ø INT : 12 - collés avec l'adhésif ESP 105  
 - Préchauffage : 1 mn à 150°C  
 - Polymérisation finale : 2 mn à 200°C  
 durée totale : 3 mn  
 manchons calibrés de longueur 42 mm - Sablage

No	Charge rupture (dan)	Charge de rupture moyenne (dan)	Ecart type (dan)
1	1425		
2	1360		
3	1430		
4	1295		
5	1240	$F_R = 1348$ dan	62 dan
6	1420		
7	1310		
8	1340		
9	1315		
10	1350		

Résultats obtenus en étuve :  
 (25 mn à 180°C)  
 $F_R = 1434$  dan  
 Ecart type : 70 dan

No	Charge rupture (dan)	Charge de rupture moyenne (dan)	Ecart type (dan)
1	1275		
2	1305		
3	1200		
4	1195		
5	1220	$F_R = 1253$ dan	41 dan
6	1285		
7	1285		
8	1280		
9	1215		
10	1290		

Résultats obtenus en étuve :  
 (30 mn à 180°C)  
 $F_R = 1336$  dan  
 Ecart type : 36 dan

que celles de cuivre tant qu'on ne dépasse pas la limite élastique des substrats (1). Ceci est en accord avec les travaux théoriques de LUBKIN et REISSNER (4). En effet, lorsque le module d'Young des subjectiles augmente, le facteur de concentration des contraintes diminue.

Dès lors que la limite élastique du cuivre a été dépassée en cours d'essai, on obtient la rupture systématique du cuivre. La microfissuration a bien débuté mais la réunion des deux systèmes A et B ne se produit pas. L'allongement à la rupture du cuivre est trop faible.

Dans le cas de l'acier, la valeur de son allongement à la rupture permet toujours le développement complet des microfissures. C'est le joint qui se rompt.

**Z. CONCLUSION**

L'analyse enthalpique différentielle nous a permis de définir les domaines de température dans lesquels les adhésifs XD981, XD981 et ESP105 réticulent.

Nous avons ensuite étudié le durcissement de ces résines en étuve à air chaud et par chauffage à induction. Nous avons montré qu'une durée de quelques minutes de traitement par un air très chaud ou par induction suffisent pour obtenir une bonne tenue mécanique des assemblages.

Des essais de torsion et de traction sur les colles durcies dans les conditions optimales ont mis en évidence leur comportement fragile à 200°C.

L'utilisation d'une technique d'extensométrie par jauges à fil résistant permet de comprendre le comportement de l'éprouvette composite et de décrire avec vraisemblance les mécanismes de rupture.

La microfissuration débute pour une valeur de la charge nettement inférieure à celle de la charge de rupture, et cela dans la zone centrale du manchon.

De faible seuil de microfissuration et la localisation des premières fissures en un endroit où la corrosion de l'interface adhésif-substrat n'est pas observable directement commandent la plus grande prudence dans le dimensionnement réel des joints.

**BIBLIOGRAPHIE**

(1) Y. DELMAS  
 Contribution à l'étude théorique et expérimentale du collage de tubes métalliques par l'intermédiaire de résines époxydes.  
 Thèse de doctorat de 3ème cycle, U.E.R. Sciences de Reims, 1985.  
 (2) J.P. JEANDRAU, R. FAULIARD  
 Mise au point d'une technique de collage de tubes (Rapport final) Etablissement Technique Central de l'Armement,  
 Note n°83R016, 1983.  
 (3) J.P. JEANDRAU, D. BOUVART, R. FAULIARD, D. LEVASSEUR  
 Mise au point d'une technique de collage de tubes Etablissement Technique Central de l'Armement,  
 Note n°82R006, 1981.  
 (4) J.L. LUBKIN, E. REISSNER  
 Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joint  
 Transaction of ASME, pp 1213-1221, August 1956.

## ANALYSE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DE L'ASSEMBLAGE PAR COLLAGE DE TUBES METALLIQUES

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL ANALYSIS OF A METALLIC TUBULAR ADHESIVE-JOINT

Y. GILIBERT, A. RIGOLOU

Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA)  
Laboratoire de Mécanique et Energétique (LME)  
Groupe Composites et Collage (GCC)  
Centre de l'Yvette  
Chemin de la Humière  
91120 PALAISEAU

### RESUME

Nous présentons une recherche de nature expérimentale et de nature théorique relative à l'assemblage de tubes par l'intermédiaire d'un joint adhésif fragile, constitué par une résine époxydique bi-composant. La méthode expérimentale mise en oeuvre utilise l'extensométrie par jauges électriques. Nous déterminons le domaine élastique du corps d'éprouve sollicité à la traction simple. Cette technique permet aussi de mettre en évidence, l'initiation des premières microfissures au voisinage des extrémités et de suivre leur croissance dans le joint jusqu'à la ruine de l'échantillon. Le champ de contrainte de la partie centrale du corps d'éprouve a été modélisé par la méthode des développements asymptotiques.

### ABSTRACT

An experimental and theoretic research has been carried out on a tubular joint bonded by a fragile adhesive made of a bi-component epoxy resin. The experimental method has used extensometry with electrical gauges. The range of the elastic domain of a test specimen under uniaxial traction has been determined. This technique allows us to make evident the beginning of the first microcracks near the ends and to follow their growing in the joint until the ruin of the sample. The stress field in the central part of the test specimen has been modeled by a method of asymptotic developments.

### INTRODUCTION

L'utilisation de matériaux collés connaît actuellement un développement considérable dans les différents secteurs de l'industrie. Les études expérimentales et théoriques existantes relatives aux assemblages tubulaires sont incomplètes [2 à 7]. Le travail présenté dans ce mémoire apporte une contribution à l'étude du comportement mécanique des assemblages réalisés par l'intermédiaire d'un joint adhésif.

Nous avons mis au point un modèle expérimental (figure 1) constitué de deux corps métalliques cylindriques liés par un film de résine époxydique. Le corps d'éprouve est sollicité à la traction simple.

Nous cherchons à évaluer la contrainte de cisaillement tangentielle critique qui entraîne la ruine de l'éprouvette. Les scissions se calculent à partir des microdéformations enregistrées, grâce à des jauges électriques d'extensométrie, installées sur l'échantillon.

La première partie du travail décrit la méthode expérimentale utilisée. Nous avons effectué les essais correspondants en choisissant des matériaux de structure contrôlée : acier de composition et d'aspect micrographique homogènes, adhésif de nature bien définie [8]. Les subjectiles des substrats présentent un état de surface défini par les critères de la norme Française E 05015.

Notre méthode expérimentale permet de mettre en évidence une phase élastique, puis l'initiation progressive des microfissures dans l'adhésif constitué par une substance fragile et enfin la propagation rapide des criques jusqu'à la ruine du modèle (figure 2).

Dans la deuxième partie, nous présentons une modélisation analytique du comportement élastique de la partie centrale du corps d'éprouve. Nous utilisons la technique des développements asymptotiques [9 à 11].

### 1. EXPERIMENTATION

#### 1.1. Description du corps d'éprouve

La figure 1 décrit l'éprouvette qui doit être adaptée sur la machine de traction.

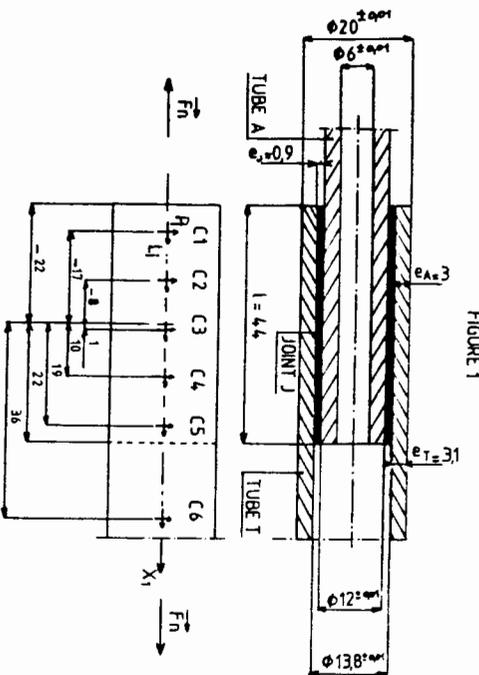


FIGURE 1

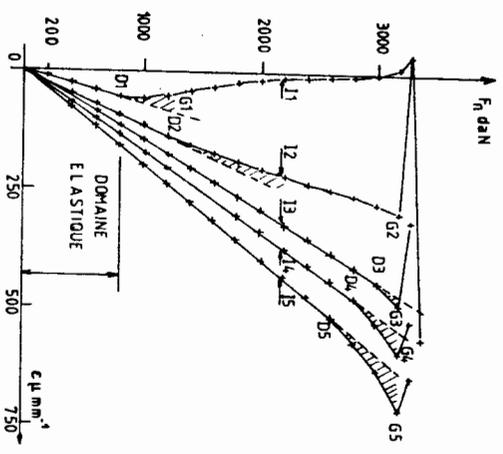


FIGURE 2

La partie femelle (T) (tôle), comme la partie mâle (A) (âme) sont constituées par de l'acier contenant 0,18 % de carbone (nuance XC 18).

Nous avons fixé l'épaisseur de l'âme ( $e_A$ ), de la tôle ( $e_T$ ) et la longueur de recouvrement ( $l$ ), respectivement égales à 3 mm, 3,1 mm et 44 mm.

L'assemblage de la tôle (T) avec l'âme (A) est réalisé par un joint (J) de résine époxydique d'épaisseur constante. Dans notre étude nous prendrons  $e_J = 0,9$  mm.

### 1.2. Elaboration des pièces (A) et (T)

Le modèle expérimental doit permettre d'obtenir des résultats reproductibles, son élaboration a donc été conduite avec une grande rigueur.

Les pièces (A) et (T) proviennent de la même barre d'acier XC 18.

Après l'opération de tournage les subjectiles sont rectifiés puis sablés à l'aide de particules de corindon dont le diamètre moyen est voisin de 169  $\mu\text{m}$ .

Dans nos travaux antérieurs [8], nous avons montré que le comportement mécanique de l'assemblage du type double recouvrement symétrique est optimal lorsque les subjectiles métalliques possèdent la rugosité totale  $R_t = 5,6 \mu\text{m}$ , caractéristique obtenue lorsque le traitement de sablage est effectué avec des particules de diamètre moyen 169  $\mu\text{m}$ . L'étude des opérations de rectification extérieure et intérieure des subjectiles de (A) et de (T) d'une part et de sablage d'autre part, nous ont permis d'obtenir un état de surface dont l'écart arithmétique moyen  $R_a$  (par rapport à la ligne moyenne de la rugosité) et la rugosité totale  $R_t$  ont pour valeur  $R_a = 1 \mu\text{m}$  et  $R_t = 5 \mu\text{m}$ .

Par conséquent, les charges minérales de dimension moyenne 5  $\mu\text{m}$  contenues dans l'adhésif peuvent remplir les cavités dues aux aspérités de la rugosité [8] et confèrent une bonne adhérence des phases à l'interface.

### 1.3. Réalisation du collage

Les pièces (A) et (T) étant liées par un film d'adhésif d'épaisseur constante, il faut assurer leur coaxialité au moment du collage. A cet effet, pendant la durée de la polymérisation de la colle, le centrage correct des 2 tubes (A) et (T) est assuré par un système placé dans une rainure dont les plans ont subi une finition à l'outil meule de précision.

#### 1.4. Condition d'essai

Les essais de traction sont effectués à la température de 20°C après un temps de durcissement égal à 4 jours, avec une vitesse de mise en charge de 100 dan.mn<sup>-1</sup>.

#### 1.5. Mesure des déformations superficielles du tube T

Nous mesurons les déformations relatives du modèle, en de nombreux points, à l'aide de capteurs constitués par des jauges électriques à fils (Europavia-France) montées en pont de Wheatstone. Le pont de base est du type VE 20 AML (Vishay-Micromesures) et s'insère dans un système automatique comprenant notamment un scrutateur et une imprimante.

Chaque capteur  $C_i(L_i, P_i)$  (figure 1) est constitué par une rosette de 2 jauges ( $L_i, P_i$ ) de longueur active 3 mm centrées au point d'intersection de leurs axes perpendiculaires. La rosette à 90° est installée sur (T) de telle façon que l'axe de ( $L$ ) soit parallèle à l'effort de traction  $F_n$  (figure 1) en des points d'abscisse  $x_1$ . Dans le cas de nos expériences  $x_1$  a pour valeurs : - 17 mm, - 8 mm, 1 mm, 10 mm, 19 mm et 36 mm.

Notons que l'obtention de résultats significatifs nécessite l'utilisation de 4 éprouvettes dont une ou deux portent les capteurs.

#### 1.6. Réalisation des essais

Les efforts de traction appliqués  $F_n$  sont tels que

$$F_n - F_{n-1} = 100 \text{ dan.}$$

Nous maintenons  $F_n$  constant pendant la durée de l'enregistrement des déformations relatives du tube T. Nous avons effectué 4 essais avec des modèles identiques (figure 1) selon les conditions expérimentales précédemment définies. Les valeurs des efforts de rupture  $F_R$  soit :  $F_{R1} = 3380 \text{ dan.}$ ,  $F_{R2} = 3450 \text{ dan.}$ ,  $F_{R3} = 3400 \text{ dan.}$ ,  $F_{R4} = 3400 \text{ dan.}$  L'éprouvette du quatrième essai porte les jauges d'extensométrie. Les valeurs de l'écart type ( $S = 25,8 \text{ dan.}$ ) et du coefficient de variation ( $V = 8/1000$ ) montrent que la reproductibilité de nos mesures est excellente.

L'observation des faciès de rupture montre que la ruine de l'éprouvette se produit par cisaillement du joint : les subjectiles de (A) et de (T) sont complètement recouverts de colle.

#### 1.7. Etude des déformations enregistrées à la surface des tôles

La mesure directe des déformations et la détermination des contraintes dans le joint d'adhésif est extrêmement délicate. Si l'on place des jauges d'extensométrie à l'interface acier-colle, l'adhésion est perturbée et l'assemblage est partiellement détruit. Notre méthode [8] indirecte, si elle ne permet pas d'évaluer les contraintes réelles engendrées au niveau du joint, présente toute fois l'avantage suivant : en comparant les microdéformations enregistrées à la surface des tôles, nous pouvons caractériser le comportement mécanique fin du modèle expérimental.

#### 1.8. Evolution des courbes représentatives des forces de traction $F_n$ en fonction des allongements relatifs $\epsilon_{11}$ .

Nous avons montré [8] que notre système de détection par capteur à jauges électriques permet de localiser la région où s'amorce la fissuration du joint et l'endroit où se produit le décollage des tôles (ou de l'âme) dans le cas d'une rupture d'adhérence (figure 2).

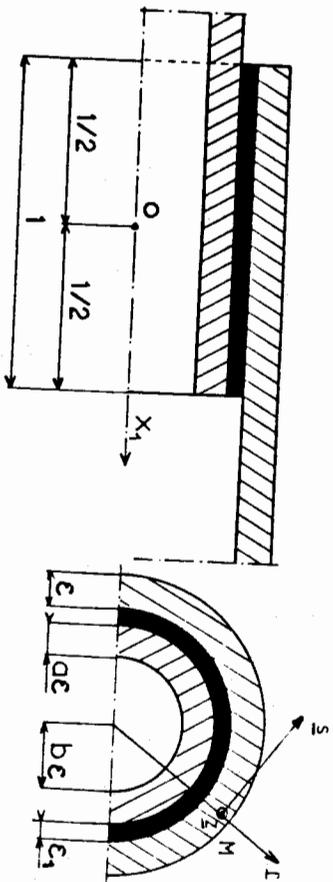
Les domaines  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  de l'éprouvette ont une longueur égale à celle de la grille de la jauge,  $k_j = 3 \text{ mm}$  ; ils sont centrés aux points d'abscisses respectives : - 17 mm, - 8 mm, 1 mm, 10 mm et 19 mm.

Nous avons reporté sur la figure 2 les courbes  $F_n = f_1(\epsilon)$  qui correspondent à l'éprouvette 4. Les changements de pente apparents sent l'initiation progressive des microfissures dans les régions  $I_1$  (1000 dan),  $I_2$  (1200 dan),  $I_3$  (2600 dan), puis  $I_3$  (3000 dan). Quand l'effort de traction  $F_n$  atteint 3200 dan le brusque changement du signe de la pente  $\frac{dF_n}{d\epsilon}$  indique le début de propagation des fissures simultanément dans les parties  $I_2, I_3, I_4$  et  $I_5$  (de l'éprouvette). La propagation des criques est lue plus tardivement dans la zone  $I_1$ , elle se produit au voisinage de l'effort de rupture  $F_R = 3400 \text{ dan.}$

Notons qu'à partir de  $F_n = 3200 \text{ dan.}$ , il est impossible de faire croître l'effort de traction à une vitesse constante de 100 dan.mn<sup>-1</sup>.

Ainsi, cette technique expérimentale permet de suivre la propagation de la fissuration dans le joint adhésif fragile.

FIGURE 3



Les caractéristiques mécaniques des matériaux constituant l'éprouvette, à savoir les modules d'Young

$$E, \nu, A_E$$

et les coefficients de Poisson :

$$\nu, \nu, A_\nu$$

sont choisies, de façon que :

$$A_E E^{-1} = 0(1),$$

$$\nu E^{-1} \ll 1.$$

Par rapport au repère local, orthonormé, direct, décrit dans la figure 3, associé aux coordonnées cylindriques d'axe  $\theta_z$ , soit  $(M; r, s, Z)$ , le tenseur des contraintes  $\Sigma$  sera noté :

$$(2.1.1.) \quad \Sigma = \Sigma_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta + \Sigma_{33} X_3 X_3,$$

à condition d'utiliser la convention de sommation des indices répétées et d'introduire les axes locaux  $X_i (1 \leq i \leq 3)$  définis par :

$$\underline{X}_1 = \underline{z}, \quad \underline{X}_2 = \underline{r}, \quad \underline{X}_3 = \underline{s}.$$

En imposant aux indices latins de courir de 1 à 3 et aux indices grecs de courir de 1 à 2, la formule (2.1.1.) traduit l'hypothèse de symétrie de révolution autour de  $\underline{O}_Z$  faite aux *le champ de déplacements* associé au champ de tensions  $\Sigma$ .

En l'absence de forces à distance, le problème aux contraintes est défini par les conditions à la limite résumées dans le tableau suivant :

## 2. POSITION DU PROBLEME ANALYTIQUE

### 2.1. Introduction des notations essentielles

Il s'agit d'étudier, dans le cadre de l'élasticité classique (se reporter à la référence [1], ch. VI pour une définition précise de ce modèle) l'équilibre de l'assemblage à symétrie de révolution sollicité en traction, décrit dans la figure 1.

La longueur de recouvrement étant prise comme unité de longueur (voir la figure 3), le couvre-joint T affecte la forme d'un manchon cylindrique d'épaisseur  $e$ , l'âme A celle d'un manchon cylindrique d'épaisseur à  $e$  avec :

$$e \ll 1, \quad a = 0(1),$$

le rayon intérieur de l'âme étant  $b$   $e$  avec

$$b = 0(1) \quad a \neq b.$$

Le joint d'adhésif  $J$  est considéré comme un cylindre droit dont la section droite est une couronne circulaire d'épaisseur  $e_1$  avec

$$e_1 \ll e.$$

TABEAU 1

	$r = (a+b+c)\epsilon + \epsilon_1$	$X_1 = -1/2$	$r = b\epsilon$	$X_1 = 1/2$
T	$T_{E_{12}} = 0$ $T_{E_{22}} = 0$	$T_{E_{11}} = \sigma_0$ $T_{E_{12}} = 0$		$T_{E_{11}} = 0$ $T_{E_{12}} = 0$
J		$J_{E_{11}} = 0$ $J_{E_{12}} = 0$		$J_{E_{11}} = 0$ $J_{E_{12}} = 0$
A		$A_{E_{11}} = 0$ $A_{E_{12}} = 0$	$A_{E_{12}} = 0$ $A_{E_{22}} = 0$	$A_{E_{11}} = \sigma_0 k^{-1}$ $A_{E_{12}} = 0$

Dans ce tableau, le symbole  $\sigma_0$  désigne la contrainte de traction dans le couvre-joint T en dehors du recouvrement et k le coefficient :

$$k = (2ab + a^2) [2(a+b) + \epsilon_1/\epsilon] + 1]^{-1}.$$

Il est naturel d'introduire une dimensionalisation du tenseur  $\Sigma$  en développant dans chaque région T, J ou A les tenseurs  $T_\Sigma$ ,  $J_\Sigma$  et  $A_\Sigma$  sous la forme :

$$T_\Sigma = \sigma_0 T_\sigma = \sigma_0 \{T_\sigma(0) + \epsilon T_\sigma(1) + \dots + \epsilon^n T_\sigma(n) + \dots\},$$

$$J_\Sigma = \sigma_0 J_\sigma = \sigma_0 \{J_\sigma(0) + \epsilon_1 J_\sigma(1) + \dots + \epsilon_1^p J_\sigma(p) + \dots\},$$

$$A_\Sigma = \sigma_0 A_\sigma = \sigma_0 \{A_\sigma(0) + \epsilon A_\sigma(1) + \dots + \epsilon^n A_\sigma(n) + \dots\}.$$

En fait, chaque champ  $v_\sigma(n)$  et  $A_\sigma(n)$  est développable en série asymptotique selon les puissances de  $\epsilon_1$

$$T_\sigma(n) = T_{\sigma(n)}(0) + \epsilon_1 T_{\sigma(n)}(p) + \dots + \epsilon_1^p T_{\sigma(n)}(p) + \dots$$

$$A_\sigma(n) = A_{\sigma(n)}(0) + \epsilon_1 A_{\sigma(n)}(1) + \dots + \epsilon_1^p A_{\sigma(n)}(p) + \dots$$

et chaque champ  $J_\sigma(0)$  est développable selon les puissances de  $\epsilon$  :

$$J_\sigma(p) = J_{\sigma(0)}(p) + \epsilon J_{\sigma(1)}(p) + \dots + \epsilon^n J_{\sigma(n)}(p) + \dots$$

Dans chaque domaine T, J et A des variables caractéristiques d'épaisseur sont introduites :

$$T \quad x_1 = X_1, \quad x_2 = \epsilon^{-1}(X_2 - \epsilon(a+b) - \epsilon_1) \quad \text{dans la région T,}$$

$$J \quad x_1 = X_1, \quad x_2 = \epsilon_1^{-1}(X_2 - \epsilon(a+b)) \quad \text{dans la région J,}$$

$$A \quad x_1 = X_1, \quad x_2 = \epsilon^{-1}(X_2 - \epsilon b) \quad \text{dans la région A.}$$

TABEAU 2

	$x_1 = -1/2$	$x_1 = 1/2$
T	$T_{\sigma_{12}}(x_1, 1) = 0$ $T_{\sigma_{22}}(x_1, 1) = 0$	$T_{\sigma_{11}}(1/2, x_2^T) = 1$ $T_{\sigma_{12}}(-1/2, x_2^T) = 0$ $T_{\sigma_{12}}(1/2, x_2^T) = 0$
J	$J_{\sigma_{11}}(-1/2, x_2^J) = 0$ $J_{\sigma_{12}}(-1/2, x_2^J) = 0$	$J_{\sigma_{11}}(1/2, x_2^J) = 0$ $J_{\sigma_{12}}(1/2, x_2^J) = 0$
A	$A_{\sigma_{11}}(-1/2, x_2^A) = 0$ $A_{\sigma_{12}}(-1/2, x_2^A) = 0$	$A_{\sigma_{12}}(x_1, b) = 0$ $A_{\sigma_{11}}(A/2, x_2^A) = k^{-1}$ $A_{\sigma_{12}}(1/2, x_2^A) = 0$

## 2.2. Equations du problème

Ainsi qu'il est classique dans un problème présentant la symétrie de révolution autour de l'axe  $O_3$  ([1], p. 341), les équations de l'équilibre se réduisent à deux, dans chaque région :

$$(2.2.1.) \begin{cases} \sigma_{111} + \epsilon^{-1} \tau \sigma_{122} + [\epsilon x_2^T + \epsilon(a+b) + \epsilon_1]^{-1} \tau \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{121} + \epsilon^{-1} \tau \sigma_{222} + [\epsilon x_2^T + \epsilon(a+b) + \epsilon_1]^{-1} \tau (\sigma_{22} - \tau \sigma_{33}) = 0 \end{cases}$$

$$(2.2.2.) \begin{cases} \sigma_{111} + \epsilon_1^{-1} \tau \sigma_{122} + [\epsilon_1 x_2^J + \epsilon(a+b)]^{-1} \tau \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{121} + \epsilon_1^{-1} \tau \sigma_{222} + [\epsilon_1 x_2^J + \epsilon(a+b)]^{-1} \tau (\sigma_{22} - \tau \sigma_{33}) = 0 \end{cases}$$

$$(2.2.3.) \begin{cases} \sigma_{111} + \epsilon^{-1} A \sigma_{122} + [\epsilon x_2^A + \epsilon b]^{-1} A \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{121} + \epsilon^{-1} A \sigma_{222} + [\epsilon x_2^A + \epsilon b]^{-1} A (\sigma_{22} - A \sigma_{33}) = 0 \end{cases}$$

Dans ces équations, la notation à désigne la dérivée par rapport à la variable caractéristique  $x_\alpha$  de la région dans laquelle l'équation considérée est valable.

Aux équations d'équilibre, il y a lieu d'adjoindre l'équation qui traduit la compatibilité des déformations (cf. par exemple [1] § IV.6).

Pour ce problème, dans lequel le déplacement a une composante nulle selon l'axe  $X_3$ , la compatibilité donne lieu à la seule équation de BELTRAMI : ([1], § VI.4.) :

$$(1+V) \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial X_2^2} \right] - 2(1+V) \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} - V \left( \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) \sigma_{kk} = 0$$

et dans chaque région T, J et A, cette équation devient :

$$(2.2.4.) [(1+V) \sigma_{22} - V \sigma_{kk}]_{11} - 2(1+V) \epsilon^{-1} \tau \sigma_{1212} + \epsilon^{-2} \tau^2 [(1+V) \sigma_{11} - V \sigma_{kk}]_{22} = 0$$

$$(2.2.5.) [(1+V) \sigma_{22} - V \sigma_{kk}]_{11} - 2(1+V) \epsilon_1^{-1} \tau \sigma_{1212} + \epsilon_1^{-2} \tau^2 [(1+V) \sigma_{11} - V \sigma_{kk}]_{22} = 0$$

$$(2.2.6.) (1+V) \sigma_{22} - V \sigma_{kk}]_{11} - 2(1+V) \epsilon^{-1} A \sigma_{1212} + \epsilon^{-2} [(1+V) \sigma_{11} - V \sigma_{kk}]_{22} = 0$$

Dans chaque région T (resp. J, A) les équations du problème aux contraintes sont constituées par (2.2.1.) (resp. (2.2.2.) (2.2.5.), (2.2.3.) (2.2.6) à la condition de supposer connues les contraintes continues aux interfaces T/J et J/A, c'est-à-dire les fonctions  $\pm \tau(x_1)$  et  $\pm \sigma(x_1)$  définies par :

$$\begin{cases} + \tau(x_1) = \sigma_{12}(x_1, 0) = \sigma_{12}(x_1, 1) \\ + \sigma(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 0) = \sigma_{22}(x_1, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \tau(x_1) = \sigma_{12}(x_1, 1) = \sigma_{12}(x_1, 0) \\ - \sigma(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 1) = \sigma_{22}(x_1, 0) \end{cases}$$

Le tableau 2 fournit les conditions à la limite relative à l'intégration des systèmes différentiels (2.2.1.), (2.2.4.) dans T, (2.2.2.) (2.2.5.) dans J et (2.2.3.) (2.2.6.) dans A.

Dans une étape ultérieure, la continuité du champ de déplacements aux interfaces T/J et J/A permet d'écrire les équations différentielles qui régissent les fonctions  $\pm \tau$  et  $\pm \sigma$ .

## 3. RESULTATS

Par une technique analogue à celle qui a été présentée pour les assemblages plans [12], il est possible de montrer que :

1) dans la couche d'adhésif J, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_0 \epsilon \left[ \frac{a+b+n}{a+b+n X_2} \tau(x_1) \underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2 + O(n) \right]$$

Cette formule traduit les phénomènes physiques suivants :

a) les contraintes dans le joint de colle sont beaucoup plus petites que celles des tubes : elles sont dans un rapport de l'ordre  $\epsilon$ .

b) à l'ordre  $n$  près, les contraintes dans le joint sont de cisaillement pur, caractérisé par la fonction  $\tau$  définie par :

$$\tau(x_1) = \tau(1)(0) \frac{\int_0^E \frac{2[(a+b)+n] + 1}{4 \epsilon \epsilon_{1w}(1+\nu)} \text{Log} \frac{a+b+n}{a+b} \left\{ 1 - \frac{2[(a+b)+n] + 1}{\alpha(2ab+a^2)} \frac{chw_1}{2} \right\}}{\left( 1 + \frac{2[(a+b)+n] + 1}{\alpha(2ab+a^2)} \right) \frac{chw_1}{shw/2}}$$

avec :

$$w^2 = \frac{1}{2(1+\nu)} \text{Log} \frac{a+b+n}{a+b} \left\{ \frac{2(a+b+n)}{2(a+b+n)} + \frac{2(a+b+n)}{\alpha a(a+2b)} \right\}$$

c) contrairement au cas des assemblages plans, la contrainte de cisaillement pur est une fonction de la coordonnée d'épaisseur  $x_2$ .

2) dans le tube B, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_0 \left[ \frac{2(a+b+n)}{2(a+b+n) + 1} \int_0^{x_1} \tau(u) du \frac{x_1}{x_1} \otimes x_1 + 0(c) \right]$$

Cette formule traduit la prépondérance du phénomène de traction simple dans le tube T.

3) dans le tube A, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_0 \left[ -\frac{2(a+b)}{a(a+2b)} \int_0^{x_1} \tau(u) du \frac{x_1}{x_1} \otimes x_1 + 0(c) \right]$$

$$\sigma_0 \left[ -\frac{2(a+b)}{a(a+2b)} \right]$$

Comme dans des travaux antérieurs, la fonction  $\tau(x_1)$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 \tau}{dx_1^3} - w^2 \frac{d\tau}{dx_1} = 0$$

La difficulté essentielle consiste dans le choix des bonnes conditions à la limite [10]. A l'ordre où est fait le calcul, les conditions naturelles" aux extrémités du recouvrement, à savoir :

$$\tau \left( \pm \frac{1}{2} \right) = 0$$

n'interviennent pas. Pour calculer les trois constantes d'intégration, il est fait usage de la condition d'équilibre global du cylindre T :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \tau(u) du = -\frac{2(a+b+n) + 1}{2(a+b+n)}$$

et des conditions de continuité du déplacement aux interfaces T/J et J/A. La confrontation théorie expérience est satisfaisante.

#### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ 1 ] GERMAIN P. : "Mécanique des milieux continus". Masson, Paris 1962.
- [ 2 ] THEREKHOVA L.P. et SKORYI I.A. : "Stresses in bonded joints of thin cylindrical shells". Strength of Materials, Vol. 4, N° 10, Oct. 1972, p. 1271 à 1274.
- [ 3 ] GRUZINSKI K., LORKIEWICZ J. : "Résistance à la torsion des joints cylindriques collés". Przeglad Mechaniczny, Vol. 29, N° 8, pp. 235-239.
- [ 4 ] GATAVAT A.N. and POWELL G.M. : "Finite element analysis of thin and thick-walled tubular joints". NL, NUCL. ENG. DES., Vol. 46, N° 2, 1978, pp. 381-394.
- [ 5 ] PEPPIATT N.A. : "Stress analysis of adhesive bonded tubular lap. J. Adhesion, Vol. 9, pp. 1-18, 1977.

- [ 6 ] GILBERT Y., RIGOLOTT A. : "Assemblage par adhésion de deux tiges cylindriques sollicitées en traction". Mechanics Research Communication, Vol. 8(5), pp. 269-274, 1981.
- [ 7 ] LUBKIN J.L., REISSNER E. : "Stress analysis of adhesive bonded tubular lap joint". Transactions of the ASME, pp. 1213-1221, August 1956.
- [ 8 ] GILBERT Y. : "Contribution à l'étude de l'adhésivité de matériaux collés par l'intermédiaire de résines époxydiques". Thèse de Doctorat d'Etat ès-sciences physiques, Université Reims 1978.
- [ 9 ] RIGOLOTT A. : "Application de la méthode des développements asymptotiques raccordés au calcul des effets d'extrémités dans un composite plan collé". 2ème C.I. du GAMNI, 2 au 7 Décembre, pp. 245-259, 1980.
- [ 10 ] GILBERT Y., RIGOLOTT A. : "Analyse asymptotique des assemblages-collés à double recouvrement sollicités au cisaillement en traction". J. Mech. Appl. Vol. 3, n° 3, pp. 341-372, 1978.
- [ 11 ] GILBERT Y., RIGOLOTT A. : "Analyse asymptotique des assemblages à double recouvrement sollicités au cisaillement en traction". C.R. Acad. des Sc. Paris, Mécanique des Solides, t. 288, pp. Série B 387-390 (25 Juin 1979).
- [ 12 ] RIGOLOTT A. : "Régularisation de l'effet Saint Venant dans une structure plane, composite, collée, soumise à des sollicitations de traction". Euromech Colloquium 1984 "The inclusion of local effects in the analysis of structures". 11/14 Septembre, Cachan 1984.

LES COLLOQUES ANNUELS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE (1965-1986)

THE ANNUAL COLLOQUIA OF THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY (1965-1986)

- |  |      |
|--|------|
| 1 - Rhéologie des systèmes à 2 phases  | 1965 |
| 2 - Aspects énergétiques en Rhéologie  | 1966 |
| 3 - Progrès récents des effets du 2ème ordre   | 1967 |
| 4 - Rhéologie en relation avec la structure  | 1968 |
| 5 - Comportements mécaniques des matériaux composites                                | 1969 |
| 6 - Influence de la température et de la pression sur les comportements rhéologiques | 1970 |
| 6 bis - Rhéologie et hydrotechnique  | 1970 |
| 7 - Viscoplasticité  | 1971 |
| 8 - Rhéologie des bétons   | 1973 |
| 9 - Phénomènes de surface  | 1974 |
| 10 - Influence de la température sur les comportements rhéologiques                  | 1975 |
| 11 - Rhéologie des corps mous  | 1976 |
| 12 - Thermodynamique des comportements rhéologiques                                  | 1977 |
| 13 - Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture                              | 1978 |
| 14 - Rhéologie des couches minces  | 1979 |
| 15 - Comportements rhéologiques et structure des matériaux                           | 1980 |
| 16 - Applications de la Rhéologie aux problèmes de fabrication industrielle          | 1981 |
| 17 - Comportements rhéologiques sous sollicitation rapides ou dynamiques             | 1982 |
| 18 - Méthodes et Appareils de mesures rhéologiques                                   | 1983 |
| 19 - Rhéologie des matériaux anisotropes   | 1984 |
| 20 - Vingt ans de Groupe Français de Rhéologie : Progrès récents                     | 1985 |
| 21 - Rhéologie des fluides hétérogènes   | 1986 |

Renseignements sur les conditions d'obtention des comptes-rendus  
Information on the conditions for obtaining Proceedings

Prof. C. HUET  
Cahier du Groupe Français de Rhéologie  
CERAM - ENPC  
La courtine B.P. 105  
F - 93194 NOISY-LE-GRAND Cedex France  
Tél. (1) 43.04.40.98

## LE GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

THE FRENCH GROUP OF RHEOLOGY

La Rhéologie est la science des DEFORMATIONS et ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine, et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions. Son impact économique est donc considérable.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE, qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique fondée en 1964 et régie par la loi de 1901, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIFS de contribuer au DEVELOPPEMENT des études et recherches relatives à la Rhéologie, et de favoriser la DIFFUSION ou le TRANSFERT des progrès accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le Groupe Français de Rhéologie

- organise des REUNIONS où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations ;
- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES DE RHEOLOGIE d'autres pays ;
- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL ;
- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes ;
- contribue à la clarification du langage par l'établissement d'un DICTIONNAIRE ;
- etc...

Cette activité vous intéresse et vous souhaitez devenir membre ou obtenir de plus amples renseignements, écrivez à l'adresse ci-dessous :

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Secrétariat Général

C.E.B.T.P.

12, rue Brançion

75737 PARIS CEDEX 15

### Anciens Présidents du G.F.R.

J. MANDEL (Président Fondateur, 1964-1967)

M. JOLY (1967-1970)

B. PERSOZ (1970-1973)

P. HABIB (1973-1976)

R. COURTEL (1976-1979)

C. HUET (1979-1983)

Président actuel : J.D. WEBER (1983- )

Association régie par la loi du 1.7.1901 J.O. du 30.7.64

CCP Paris 8045-90 K