

# *Les Cahiers de Rhéologie*

Volume VIII , Numéro 1  
juillet 1989

Edités par:

Le Groupe Français de Rhéologie

## *Les Cahiers de Rhéologie*

### COMITE DE REDACTION

#### Secrétariat:

O. SCRIVENER

I.M.F.S.  
2, rue Boussingault  
67083 STRASBOURG

### COMITE SCIENTIFIQUE

G. Antonini  
D. Bourgoïn  
R. Gaudu  
P. Habib  
C. Huet  
T. E. R. Jones  
I. Krieger  
J-L. Lataillade  
B. Launay  
M. Lebouche  
J. Lemaitre  
D. Lhuillier  
M. Lucius  
P. Papon  
J. M. Pierrard  
D. Quemada  
K. Walters  
J. D. Weber  
C. Wolff  
S. Zahorski  
J. Zarka

### GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Président: D. BOURGOIN

Trésorier: D. GEIGER

Secrétaire: R. GAUDU  
I.M.F.T.  
Avenue du Professeur Camille Soula  
31400 TOULOUSE  
Tel: 61.28.58.96

### SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS

Les Cahiers paraissent deux à trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement. Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant au Secrétariat du Groupe moyennant une participation aux frais.

### PUBLICITE

Les Cahiers de Rhéologie sont ouverts aux annonces commerciales. Seules peuvent être acceptées les annonces ayant un lien avec la rhéologie. Il sera demandé aux annonceurs une participation aux frais de réalisation des cahiers.

Pour tous renseignements s'adresser au Secrétariat du Comité de Rédaction ou au Secrétariat du GFR.

## CONSIGNES AUX AUTEURS

### 1. Généralités

En vue de publication dans *Les Cahiers de Rhéologie* le Comité de rédaction souhaite recevoir des articles dans tous les domaines de la rhéologie théorique et expérimentale des solides et des fluides. Des résultats de recherche dans ces domaines ou dans des domaines voisins mais faisant appel à la rhéologie seront pris en considération de même que les contributions d'auteurs pourtant sur l'"état de l'art" dans l'un ou l'autre des domaines de la rhéologie.

La langue officielle du Journal *Les Cahiers de Rhéologie* est le français mais des articles en anglais pourront être acceptés. Les auteurs soumettant des articles doivent s'assurer qu'ils n'ont pas été publiés par ailleurs ou soumis à un autre journal. Les articles sont soumis à l'approbation d'un Comité de Lecture. Il peut être demandé à un auteur de réviser son article en fonction des remarques des rapporteurs. La décision finale de publication appartient au Comité de Rédaction.

### 2. Soumission des articles

Les articles étant reproduits directement à partir de l'original envoyé par les auteurs il est nécessaire que le plus grand soin soit apporté à la présentation de ces articles et que les auteurs respectent scrupuleusement les instructions ci-dessous.

Le manuscrit original et 2 copies de chaque article doivent être envoyés à l'adresse du Secrétariat du Comité de Rédaction.

La frappe doit être faite, si possible, en caractère ELITE 12, avec un double interligne. Une machine équipée d'un ruban carbone est recommandée. Les textes réalisés en traitement de texte sont acceptés sous réserve que la frappe soit effectuée avec une imprimante de très bonne qualité: qualité courrier, imprimante Laser. Une marge de 25 mm doit être laissée autour de la feuille.

Le manuscrit doit comprendre:

- Le titre en majuscules centré en haut de page à 35 mm du bord supérieur de la feuille,
- deux lignes en dessous, centrés, le nom du ou des auteurs, suivis, à la ligne suivante de leur appartenance,
- cinq lignes en dessous, un résumé en français suivi d'un résumé en anglais, chacun de 5 lignes au maximum. L'ordre sera inversé pour un article anglais.
- l'introduction de l'article suivie du texte,
- les conclusions,
- si nécessaire, la liste des notations et symboles,
- une liste de références bibliographiques complètes.

Une liste de 5 Mots Clé devra figurer sur la dernière page, après l'article et avant les figures si celles-ci ne sont pas incluses dans le texte. La longueur normale du texte ne devrait pas dépasser 15 pages au format A4, y compris les résumés, les formules et les illustrations et la bibliographie. Certains articles plus longs pourront être acceptés si le sujet le justifie et sous réserve de l'accord préalable du Comité de Rédaction. Des articles plus courts, éventuellement sous forme de "notes", seront également les bienvenus. Les figures doivent être fixées de préférence en place dans le texte ou éventuellement en fin d'article. Les photos doivent être évitées dans la mesure du possible.

**Les auteurs peuvent obtenir un modèle de présentation.**

## EDITORIAL

Combien de Membres du GFR ont pensé qu'ils payaient leur cotisation et que les Cahiers de Rhéologie ne tenaient pas leurs engagements - beaucoup, combien d'auteurs ont pensé qu'ils avaient commis une erreur en proposant un article aux Cahiers de Rhéologie - plusieurs. Ils ont raison.

Mais pour éditer un numéro des Cahiers de Rhéologie il faut avoir des articles à publier !!! Certains auteurs nous font confiance - en un an ils nous ont proposé deux et même trois articles - mais pour cela il a été nécessaire d'expliquer et d'expliquer. Espérons qu'ils continueront à nous faire confiance.

Les Cahiers de Rhéologie c'est l'affaire de tous les Membres du GFR et pas seulement de celui qui prépare les Cahiers et de celui qui les fait imprimer et les expédie, tout cela bénévolement en plus de leur travail de chercheur.

La poursuite de la publication des Cahiers de Rhéologie, c'est l'affaire de tous les Membres du GFR. Je n'ose croire qu'il n'y a que dans l'Est de la France que s'effectuent des recherches en rhéologie. Ecrivez des articles, pendant les jurys informez systématiquement les jeunes chercheurs qui passent leur thèse etc...

Les Cahiers de Rhéologie n'est pas seulement le Journal des chercheurs qui ont peaufiné leur travail de recherche pendant des années. Les Notes permettent aux chercheurs de prendre date pour les recherches en cours. Nous attendons aussi vos Réponses aux auteurs des articles publiés dans les Cahiers. Les articles faisant le point ou donnant l'"Etat de l'Art" sur des points théoriques, expérimentaux ou d'appareillage seront aussi les bienvenus. Et pourquoi ne pas penser à des articles d'initiation à la rhéologie ? Enseignants à vos plumes.

Nous faisons aussi appel aux Membres du GFR pour qu'ils nous aident à trouver une solution économique et stable pour l'impression de Cahiers et des Comptes Rendus des Colloques.

MEMBRES DU GFR CET EDITORIAL VOUS CONCERNE

LISEZ LE

Le Comité de Rédaction

*Les Cahiers de Rhéologie*

SOMMAIRE DU VOLUME VIII NUMERO 1

juillet 1989

ARTICLES

Pages

Influence de la forme, de la dimension et de la nature  
des charges minérales sur la résistance mécanique  
d'un joint collé

par W. LUHOWIAK, B. CABRILLAC, R. DUVAL et C. COLLOT .... 1

Etude théorique et numérique de l'écoulement des fluides  
non-newtoniens entre deux cylindres coaxiaux.  
Régime de montée en vitesse

par R. KOUITAT, G. MAURICE, M. LUCIUS ..... 17

Champ des vitesses du mouvement secondaire dans un fluide  
de Bingham en régime des tourbillons de Taylor

par B. NSOM EYENGA et R. CRESSELY ..... 35

Écoulement plastique dans un viscosimètre rotatif à  
plans parallèles

par I. KRIEGER ..... 61

## I. INTRODUCTION

Le comportement mécanique d'un joint de colle chargé cisailé en traction peut être décrit en prenant des modèles élastiques constitués d'inclusions et de pores noyés au sein d'une matrice de dimension infinie. Dans de précédents travaux [1] et [2], nous avons étudié l'influence du diamètre des bulles et des charges minérales sur la microtension du joint d'adhésif en supposant que toutes ces singularités présentent une forme sphérique. Toutefois, la forme de certaines charges se rapproche davantage de celle d'un ellipsoïde que de celle d'une sphère.

Parmi ces inclusions "vulgaires", dont les caractéristiques géométriques sont principalement elliptiques, nous avons montré que les telles inclusions se comportent dans le cas d'un joint de colle de manière à ce que la matrice, pour se comporter de manière élastique, soit soumise à un effet d'un champ de contraintes de compression uniforme, nous déterminons un diamètre limite [1] et [2] en lien avec la charge adhésive ou le pore circulaire ne joue plus aucun rôle dans la microtension du joint d'adhésif.

par

W. LUHOWIAK\* - R. CABRILLAC\*\* - R. DUVAL\*\*\* - C. COLLOT\*\*\*\*

- (\*) Maître de Conférences, Docteur ès Sciences - Laboratoire "Science des Matériaux" (U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles de REIMS) - I.U.T. Génie Civil (CERGY).  
 En outre, nous considérons que  
 (\*\*\*) Professeur des Universités - I.U.T. Génie Civil (CERGY)  
 (\*\*\*\*) Professeur des Universités - Laboratoire "Science des Matériaux" (U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles de REIMS) - I.U.T. Génie Civil (REIMS).  
 nous nous intéressons plus spécialement à la zone la plus soumise à la traction, lors de l'essai de cisaillement, au voisinage de l'extrémité A du joint (figure 1).

## 1. INTRODUCTION

Le comportement mécanique d'un joint de colle chargée cisailé en traction peut être décrit en prenant des modèles triphasiques constitués d'inclusions et de pores noyés au sein d'une matrice de dimension infinie. Dans de précédents travaux [1] et [2], nous avons étudié l'influence du diamètre des bulles et des charges minérales sur la microfissuration du joint d'adhésif en supposant que toutes ces singularités présentent une forme sphérique. Toutefois, la forme de certaines charges se rapproche davantage de celle d'un ellipsoïde que de celle d'une sphère.

Parmi ces inclusions sont décelées des charges "vulgaires", dont les caractéristiques mécaniques sont inférieures à celles de la matrice ; elles sont principalement à base de sulfate de calcium, de calcaire et de kaolin. Nous avons montré que de telles inclusions se rompent dans tous les cas bien avant que ne débute la microfissuration de la matrice, pour se comporter ensuite comme des trous circulaires. Sous l'effet d'un champ de contraintes de compression uniforme, nous déterminons un diamètre limite [1] et [2] en deçà duquel la charge vulgaire ou le pore circulaire ne joue plus aucun rôle dans la microfissuration du film d'adhésif.

Par analogie, nous allons montrer qu'il existe des tailles limites de trou elliptique correspondant à des charges vulgaires de forme elliptique, pour lesquelles la présence de ces singularités n'intervient plus dans le mécanisme de rupture du joint d'adhésif. Nous supposons alors que le modèle est sollicité en compression monoaxiale plane et nous envisageons deux cas de chargement : parallèle et perpendiculaire au grand axe de l'ellipse.

En outre, nous considérons que la matrice présente un comportement linéaire fragile en extension pour un rapport entre la limite élastique en compression et la limite élastique en traction sensiblement égal à 3. Ainsi le seuil de rupture ou d'initiation des microfissures dans le joint peut être assimilé au seuil de fissuration de la matrice époxyde, soit aux points les plus tendus, soit aux points les plus comprimés. Dans cette étude, nous nous intéresserons plus spécialement à la zone la plus comprimée qui se situe, lors de l'essai de cisaillement, au voisinage de l'extrémité A du joint (figure 1).

## 2. L'EPROUVETTE A DOUBLE RECOUVREMENT

C'est un modèle classique d'assemblage collé à double recouvrement cisailé par traction simultanée des subjectiles de 10 mm de largeur (figure 1). Ses substrats métalliques sont constitués d'un acier à 0,90 % en poids de carbone (nuance XC90), qui possède les constantes élastiques suivantes :

- module d'élasticité longitudinal :  $E_T = E_A = 228\ 000\ \text{MPa}$
- coefficient de Poisson :  $\nu_T = \nu_A = 0,28$
- limite élastique en traction :  $R'_T = 450\ \text{MPa}$

L'adhésif est une colle structurale "bi-composant" du type "Eponal 317" qui polymérise à la température ordinaire. La base est une résine époxyde mélangée au moment de l'utilisation à un durcisseur du type amine. Les constantes élastiques de la colle durcie ont été obtenues par la méthode d'extensométrie au moyen de jauges électriques. Le module d'Young et le coefficient de Poisson ont pour valeurs respectives :  $E_J = 5800\ \text{MPa}$  et  $\nu_J = 0,33$ . Les courbes de traction et de compression montrent que l'adhésif a un comportement du type fragile. Les limites élastiques en traction et en compression sont les suivantes :  $R_T = 30\ \text{MPa}$  et  $R_C = 100\ \text{MPa}$ . Notons enfin que tous les essais de cisaillement ont été effectués à la vitesse de  $1000\ \text{N.mn}^{-1}$ .

## 3. ANALYSES CHIMIQUES ET STRUCTURE DE LA COLLE DURCIE

Des analyses chimiques ont été pratiquées à la fois sur la résine, le durcisseur et la colle "Eponal 317" durcie. Elles révèlent la présence de nombreuses charges minérales dans l'adhésif (pourcentage pondéral : 40 %). Leur nature minéralogique est de plus extrêmement variée ; elles sont constituées de talc, de kaolin, d'alumine, de titane, d'oxydes de fer et de cuivre.

Des micrographies provenant d'examens réalisés au microscope électronique à balayage montrent que l'adhésif possède une structure poreuse (figure 2). Le diamètre des pores, parfaitement sphériques, varie de quelques micromètres à une vingtaine de micromètres. Des examens complémentaires, effectués sur les faciès de rupture de la colle (figure 3), révèlent que la dimension des charges est comprise entre quelques  $\mu\text{m}$  et  $15\ \mu\text{m}$ . La forme

des inclusions est essentiellement polyédrique ou grossièrement sphérique ; toutefois, certaines charges présentent une forme qui rappelle plutôt celle d'un ellipsoïde de révolution allongé. Enfin, l'aspect fragile de certaines particules apparaît sur ces mêmes faciès (figure 4).

Les charges incorporées dans la matrice, soit de forme circulaire soit de forme elliptique, sont ainsi de deux types :

- des charges vulgaires dont les caractéristiques mécaniques sont inférieures à celles de la matrice (talc, kaolin, sulfate de calcium).
- des charges renforçantes dont l'introduction dans la matrice permet d'améliorer le comportement mécanique de l'adhésif (alumine, titane et oxyde de fer).

#### 4. CALCUL DU DIAMETRE LIMITE D'UN PORE CIRCULAIRE

Nous avons démontré [3] qu'il règne un champ de contraintes de compression monoaxial plan uniforme dans la demi-épaisseur du joint de colle près de l'interface colle/âme, au voisinage de l'extrémité A, lorsque l'éprouvette à double recouvrement est soumise à un essai de cisaillement ; cette partie du film d'adhésif correspond à la zone la plus sollicitée.

Par ailleurs, dans de précédents travaux [1], nous avons déterminé la taille limite d'un pore circulaire ( $d_{lim.} = 15 \mu m$ ) en deçà duquel la singularité ne joue plus aucun rôle dans le mécanisme de microfissuration du joint. Le calcul de cette valeur s'appuie sur les travaux de Wittman et Zaitsev [4]. Les premières microfissures s'initient à partir du pore circulaire lorsque la densité de charge appliquée  $p$  prend la valeur  $p_{min.} = 2,015$ , pour un rapport  $k$  entre la longueur de la fissure et le rayon du pore  $r$  égal à 0,18.  $p_{min.}$  dépend de  $r$  et s'exprime par la relation (1) :

$$p_{min.} = 2,015 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\pi E \gamma}{2r}} \quad (1)$$

avec  $E$  : module d'élasticité de la matrice

$\gamma$  : énergie superficielle de la résine considérée égale à  $1 J.m^{-2}$ .

La fonction inverse (2) donne les variations du diamètre  $d$  ( $d = 2r$ ) en fonction de  $p_{\min.}$  :

$$d = 8,1225 \cdot \frac{\pi E \gamma}{p_{\min.}^2} \quad (2)$$

La charge  $p_{\min.}$  prend sa valeur limite  $(p_{\min.})_{\lim.}$  quand elle atteint la limite élastique de la colle en compression ( $R_C = 100$  MPa), laquelle est aussi la charge de rupture en compression de l'adhésif. A cette valeur correspond le diamètre limite du pore :  $d_{\lim.} = 15 \mu\text{m}$ .

### 5. CALCUL DU DIAMETRE LIMITE D'UNE INCLUSION CIRCULAIRE

Le diamètre d'un trou circulaire pour lequel s'initient les premières fissures est tiré ainsi de la formule :

$$d_T = \frac{K}{p_{\min.}^2} \quad (3)$$

De même, nous pouvons supposer que le diamètre d'une particule circulaire commençant à jouer un rôle dans la microfissuration du joint d'adhésif obéit à une relation analogue :

$$d_I = \frac{K}{p'_{\min.}{}^2} \quad (4) ;$$

$p'_{\min.}$  représente la densité de charge  $p$  pour laquelle apparaissent les premières microfissures à partir de l'inclusion de diamètre  $(2r)$ .

Nous pouvons alors écrire l'expression (5) qui donne le rapport  $\underline{s}$  entre le diamètre de ces deux singularités actives pour une même contrainte de compression  $p$  appliquée à une plaque de dimension infinie :

$$\underline{s} = \frac{d_T}{d_I} = \frac{K/p^2}{K/1,5^2 p^2} = 2,25 \quad (5)$$

Lorsque  $p_{\min.}$  atteint sa valeur  $(p_{\min.})_{\lim.}$ , l'expression (5) devient :

$$\underline{s} = \frac{(d_T)_{\lim.}}{(d_I)_{\lim.}} = 2,25 \quad (6)$$

$$\text{d'où } \underline{(d_I)_{\lim.}} = 7 \mu\text{m.}$$

Notons que  $p'_{\min.}$  s'obtient par application du critère d'Ishai [5], généralement utilisé dans le cas des colles époxydes, aux points  $M_2$  et  $M'_2$  (figure 5) de la matrice. Ce critère prend en compte les limites élastiques en traction  $R_T$  et en compression  $R_C$  (confondues avec les charges de rupture) de la colle, ainsi que les contraintes principales en ces deux points ( $\sigma_1 = 0,45p$  et  $\sigma_2 = 1,45p$ , quelle que soit la nature minéralogique de l'inclusion). La rupture s'amorce dans la matrice quand la contrainte de comparaison  $\sigma_{IS}$  ( $\sigma_{IS} = 1,50p$ ) est égale à la limite élastique en traction de l'adhésif :

$$\sigma_{IS} = 1,50p = R_T \quad (7)$$

Dans le cas d'un trou circulaire, la microfissuration peut se produire indifféremment soit en  $M_1$  soit en  $M_2$  puisque le rapport  $R_C/R_T$  est égal à 3,3.

- en  $M_1$  la contrainte de compression a pour valeur  $3p$  ; la rupture se produit quand :

$$\begin{aligned} 3p &= \sigma_C = 3,3 R_T \\ \text{soit : } p &= 1,1 R_T \quad (8) \end{aligned}$$

- en  $M_2$  la valeur absolue de la contrainte de traction a pour valeur  $p$  ; la rupture est initiée par des microfissures d'extension quand :

$$p = R_T \quad (9)$$

Ainsi à diamètre égal, les microfissures s'initient plutôt autour de l'inclusion qu'autour du trou circulaire ; autrement dit, la microfissuration de la matrice débutera simultanément à partir du pore ou de l'inclusion circulaire lorsque le rapport entre le diamètre du trou et le diamètre de la charge est égal à 2,25.

En résumé, nous pouvons dire que :

- si le diamètre de la charge est inférieur à  $7 \mu\text{m}$  : la charge vulgaire ou renforçante ne joue aucun rôle dans la microfissuration du joint.
- si le diamètre de l'inclusion est supérieur à  $7 \mu\text{m}$  :
  - pour une charge vulgaire :
    - la charge commence à se fissurer avant que ne débute la fissuration de la matrice. La force de traction augmentant, la charge est détruite. On distingue alors les deux cas suivants :
      - . le diamètre est inférieur à  $15 \mu\text{m}$  :
        - la charge vulgaire ne joue aucun rôle dans la microfissuration du joint de colle
      - . le diamètre est supérieur à  $15 \mu\text{m}$  :
        - le trou circulaire qui correspond maintenant à la charge, initie des microfissures dans la matrice.
    - pour une charge rigide :
      - la charge rigide ne subit aucun dommage, mais elle initie des microfissures dans le film de colle.

## 6. CAS D'UN TROU ELLIPTIQUE

Les charges vulgaires elliptiques rompues se comportent comme des trous elliptiques noyés dans une plaque de dimension infinie (la matrice), soumis à un champ de contraintes de compression uniforme de densité  $p$  (figure 6).

Les contraintes maximales de traction et de compression sont respectivement localisées aux points  $M, M'$  et  $N, N'$  ; elles ont pour valeur absolue :

$$\text{en } M, M' \quad \sigma = p \quad (10)$$

$$\text{en } N, N' \quad \sigma = p \left( 1 + 2 \frac{a}{c} \right) \quad (11)$$

avec  $a$  égal au demi-grand axe de l'ellipse  
et  $c$  égal au demi-petit axe de l'ellipse.

Compte tenu des hypothèses précédentes, des microfissures peuvent s'initier dans la matrice aussi bien aux points les plus tendus M, M' qu'aux points les plus comprimés N, N'.

Nous allons déterminer la dimension critique du grand axe  $(2a)_{lim.}$  d'une particule vulgaire elliptique en fonction du rapport  $a/c$ . Rappelons au préalable que la charge critique  $(p_{min.})_{2r}$  d'un pore circulaire de rayon  $r$  dépend de la résistance en compression de la colle  $R_C$  et du diamètre limite  $d_{lim.} = 15 \mu m$  ; elle s'exprime par la relation :

$$\frac{(p_{min.})^2_{2r}}{\left(\frac{R_C}{3}\right)^2} = \frac{15}{2r} \quad (12)$$

Soient un trou circulaire de diamètre  $15 \mu m$  (I) et un trou elliptique de grand axe  $15 \mu m$  également, inscrit dans le pore précédent (figure 6). Le rapport entre le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse  $a/c$  est supposé être supérieur à 1 et le champ appliqué à la matrice est un champ de contraintes de compression uniforme uniaxial de densité  $p$ . Pour le trou circulaire, il y a amorce de rupture en N et N' quand la contrainte en ces points atteint la limite élastique en compression  $R_C$  de la matrice :

$$(\sigma_{Tc})_{lim.} = 3 p_{lim.} = R_C \quad (13)$$

Dans le cas du trou elliptique, la microfissuration en compression aux points N, N' débutera lorsque la contrainte en ces points aura également atteint la valeur  $R_C$  :

$$(\sigma_{Te})_{lim.} = p^*_{lim.} \left(1 + 2 \frac{a}{c}\right) = R_C \quad (14)$$

Des relations (13) et (14) on tire les valeurs limites  $p_{lim.}$  et  $p^*_{lim.}$

$$p_{lim.} = \frac{R_C}{3} \quad (15) \quad \text{et} \quad p^*_{lim.} = \frac{R_C}{1 + 2 \frac{a}{c}} \quad (16)$$

Puisque  $1 + 2 \frac{a}{c} > 3$ , les fissures en compression apparaissent plutôt aux points N, N' de l'ellipse qu'aux points correspondants du cercle car  $p_{\text{lim.}}^* < p_{\text{lim.}}$ . Ainsi, si l'on envisage l'apparition des microfissures aux points les plus comprimés, l'ellipse se comporte comme un cercle de diamètre  $2r'$  avec  $2r' > 2r = 2a$  (cercle II. fig. 6). La valeur du diamètre du trou circulaire équivalent s'obtient à l'aide de l'expression (12), compte tenu de la relation  $p_{\text{min.}} = p_{\text{lim.}}^*$ .

L'expression (12) s'écrit alors :

$$\frac{\left( \frac{R_C}{1 + 2 \frac{a}{c}} \right)^2}{\left( \frac{R_C}{3} \right)^2} = \frac{15}{2r} \quad (16),$$

les dimensions des singularités étant données en microns.

On en tire le diamètre équivalent :

$$2r' = 15 \left( \frac{1 + 2 \frac{a}{c}}{3} \right)^2 \quad (17)$$

Envisageons, maintenant, le problème inverse : le grand axe  $2a$  d'un trou elliptique correspondant à une charge vulgaire rompue est orienté perpendiculairement au champ de contraintes uniaxial. Aux points N, N' apparaissent les premières microfissures en compression pour une densité de charge critique  $p_{\text{lim.}}^*$  donnée. Déterminons alors la valeur du grand axe de l'ellipse  $(2a)_{\text{lim.}}$  équivalente au diamètre limite du trou circulaire ( $d_{\text{lim.}} = 15 \mu\text{m}$ ) pour lequel apparaissent les premières microfissures en N, N'. L'expression donnant  $(2a)_{\text{lim.}}$  est semblable à la relation (17) :

$$(2a)_{\text{lim.}} = 15 \times \frac{3^2}{\left( 1 + 2 \frac{a}{c} \right)^2} \quad (18)$$

Sur la figure 7 nous traçons la courbe représentant la variation de la valeur limite  $(2a)_{\text{lim.}}$  du grand axe de l'ellipse équivalente au trou circulaire de diamètre critique  $15 \mu\text{m}$ , en fonction du rapport des deux axes de l'ellipse ( $a/c$ ). Nous pouvons observer, en particulier, que lorsque le rapport  $a/c$  est

égal à 1,7, le grand axe  $2a$  a pour dimension  $7 \mu\text{m}$ . La charge vulgaire possédant ces caractéristiques géométriques est aussi dangereuse que la charge rigide circulaire de diamètre  $7 \mu\text{m}$  qui initie des microfissures dans la colle. Nous remarquons également que lorsque  $a/c$  croît, le grand axe limite décroît. Ainsi, par exemple, avec une particule dont le rapport  $a/c$  est égal à 3, cette charge vulgaire intervient dans le processus de microfissuration du joint pour une valeur limite du grand axe égale à  $2,75 \mu\text{m}$ . Notons enfin qu'en deçà de la valeur  $a/c$  égale à 4, le pore elliptique se comporte plutôt comme une fissure : nous ne développerons pas le cas de telles singularités.

Pour  $a/c < 1$ , il apparaît en  $N, N'$  des fissures dues à des contraintes de traction. Le grand axe ( $2a$ ) est alors de dimension supérieure à  $15 \mu\text{m}$ . Comme la colle utilisée ne contient pas de charges de cette taille, nous ne considérerons pas l'influence de telles particules. Par conséquent, nous ne prendrons en compte que les seules fissures en compression dans l'étude d'un pore elliptique.

En résumé, les charges elliptiques vulgaires jouent un rôle important dans la microfissuration du joint de colle lorsqu'elles sont orientées perpendiculairement au champ de contraintes monoaxial. Des microfissures dues à des contraintes de compression s'initient aux extrémités du grand axe pour des valeurs de  $2a$  inférieures à  $15 \mu\text{m}$ . Plus le rapport  $a/c$  croît et plus la valeur limite du grand axe  $(2a)_{\text{lim}}$  décroît, cette valeur étant inversement proportionnelle à la quantité  $(1 + 2a/c)^2$ .

## 7. CONCLUSION

Il ressort de notre étude que :

- Les pores circulaires de diamètre inférieur à  $15 \mu\text{m}$  ne jouent aucun rôle dans la microfissuration du joint d'adhésif.
- Toute charge circulaire de dimension inférieure à  $7 \mu\text{m}$  n'initie aucune microfissure dans la matrice.
- Une charge vulgaire de diamètre supérieur à  $7 \mu\text{m}$  commence à se rompre bien avant que ne débute la microfissuration de la matrice. Une fois détruite, la singularité se comporte alors comme un trou circulaire ; en conséquence, dès que la taille de la particule rompue dépasse  $15 \mu\text{m}$ , des fissures vont s'initier dans la matrice à partir du trou.

- Une charge rigide ne subit aucun dommage au cours de la ruine du film d'adhésif, mais elle participe à la fissuration du joint d'adhésif lorsque son diamètre est supérieur à  $7 \mu\text{m}$  en induisant des microcraques dans la colle.
- Une charge elliptique vulgaire se comporte comme un trou elliptique dont la position la plus défavorable correspond à une orientation du grand axe perpendiculaire au champ de contraintes monoaxial. La dimension critique du grand axe de l'ellipse varie en fonction du rapport  $a/c$  (grand axe et petit axe). Cette dimension est inversement proportionnelle à  $(1 + 2 a/c)^2$ .

Enfin, nous étudierons ultérieurement l'influence des charges rigides de forme elliptique sur la fissuration du joint d'adhésif.

### Références bibliographiques

- [1] LUHOWIAK W., COLLOT C. - Influence du diamètre des bulles sur la microfissuration d'un joint collé. Matériaux et Construction. RILEM, volume 19. n° 109, janvier-février 1986, p 27 à 32.
- [2] LUHOWIAK W., COLLOT C., CABRILLAC R., DUVAL R. - Influence des charges minérales sur le comportement mécanique d'un joint collé cisailé en traction. 23ème Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie. Talence 19-21 Octobre 1988, tome 1, p 81 à 89.
- [3] LUHOWIAK W. - Comportement mécanique d'assemblages métalliques collés par l'intermédiaire de résines époxydes. Etude théorique et expérimentale de la fissuration. Thèse de Doctorat ès-Sciences. Université de Reims-Juillet 1984.
- [4] WITTMAN F.H., ZAITSEV Y.V. - Behaviour of hardened concrete cement paste and concrete under sustained load. Proc. Inst. Symp. on Mech. Behaviour of Materials, vol. IV, p 84-85, Kyoto, 1971.
- [5] GALI S., DOLEV. ISHAI O. - An effective stress/strain concept in the mechanical characterization of structural adhesive bonding. Int. J. Adhesives. January 1981, p 135-140.

de forme elliptique sur la fissuration du joint d'adhésif.

Enfin, nous étudions ultérieurement l'influence des charges rigides

dimension est inversement proportionnelle à  $(1 + 2 \alpha c)^2$ .

en fonction du rapport  $\alpha/c$  (grand axe et petit axe). Cette

monoxiale. La dimension critique du grand axe de l'ellipse varie

orientation du grand axe perpendiculaire au champ de contraintes

elliptique dont la position la plus défavorable correspond à une

Une charge elliptique vulgaire se comporte comme un trou

des microcraques dans la colle.

d'adhésif lorsque son diamètre est supérieur à  $7 \mu\text{m}$  en induisant

du film d'adhésif, mais elle participe à la fissuration du joint

- Une charge rigide ne subit aucun dommage au cours de la ruine

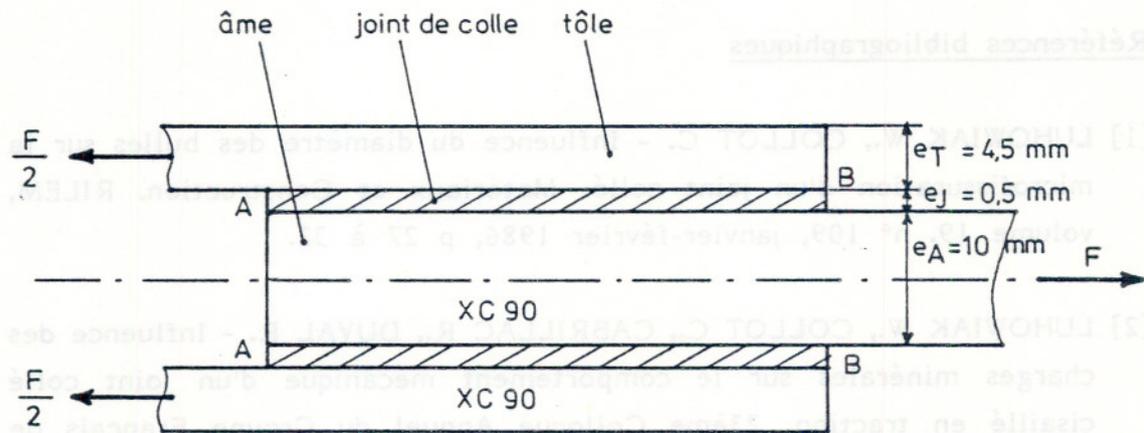
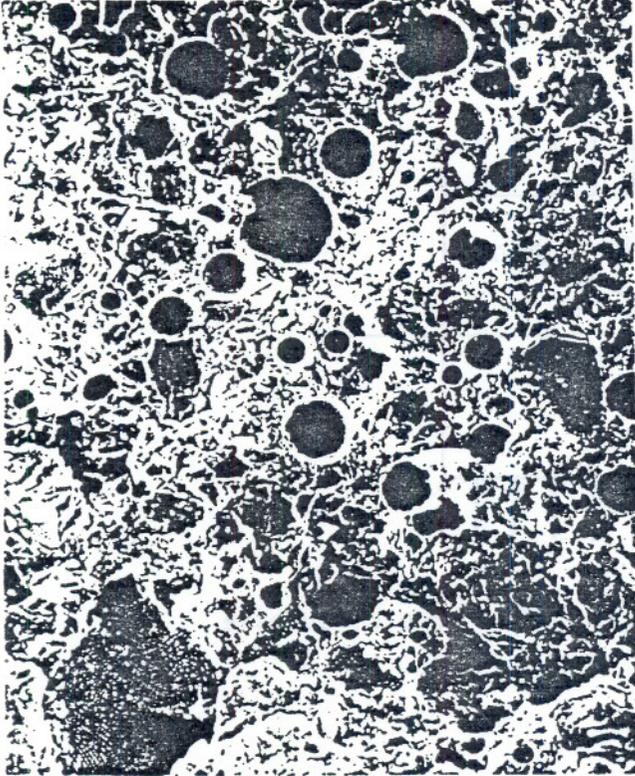
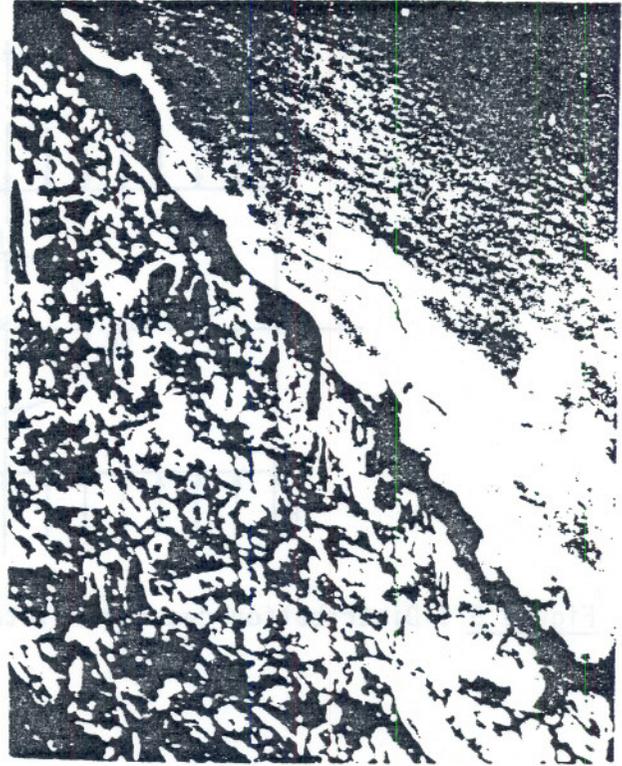


Figure 1 : modèle expérimental



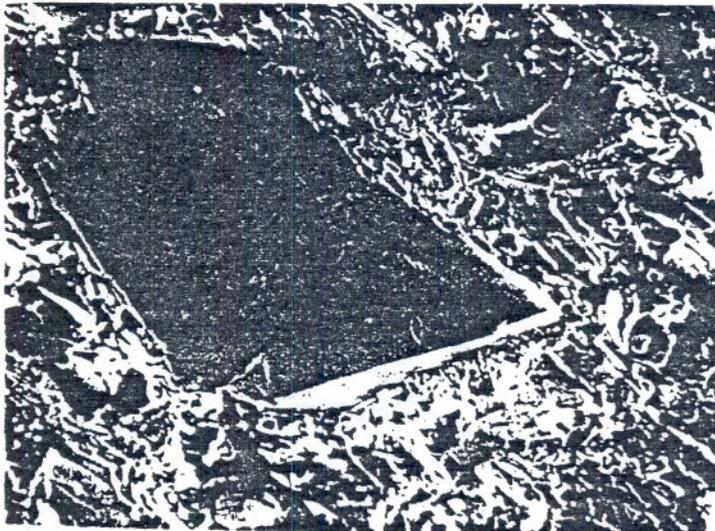
20 $\mu$

Figure 2 : La colle «Eponal» durcie possède une structure poreuse.



10 $\mu$

Figure 3 : Micrographie électronique révélant la présence de charges minérales dans la résine.



3 $\mu$

Figure 4 : Micrographie électronique montrant la rupture lisse de certaines charges minérales

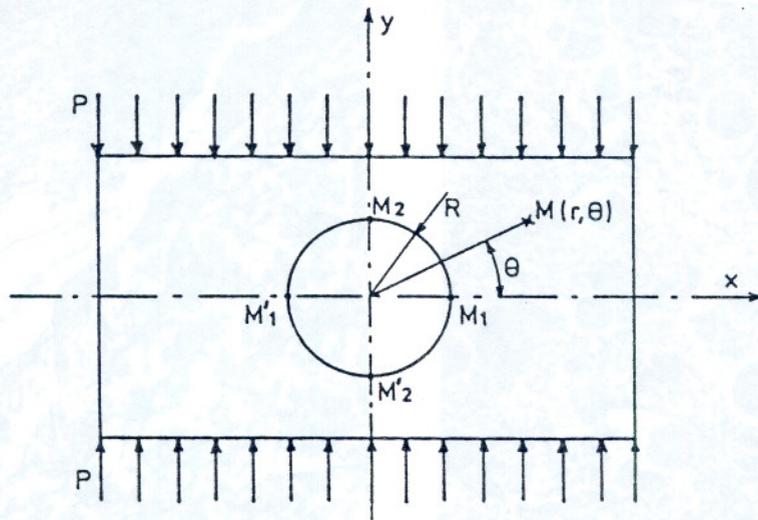


Figure 5 : Distribution des contraintes autour d'un trou circulaire

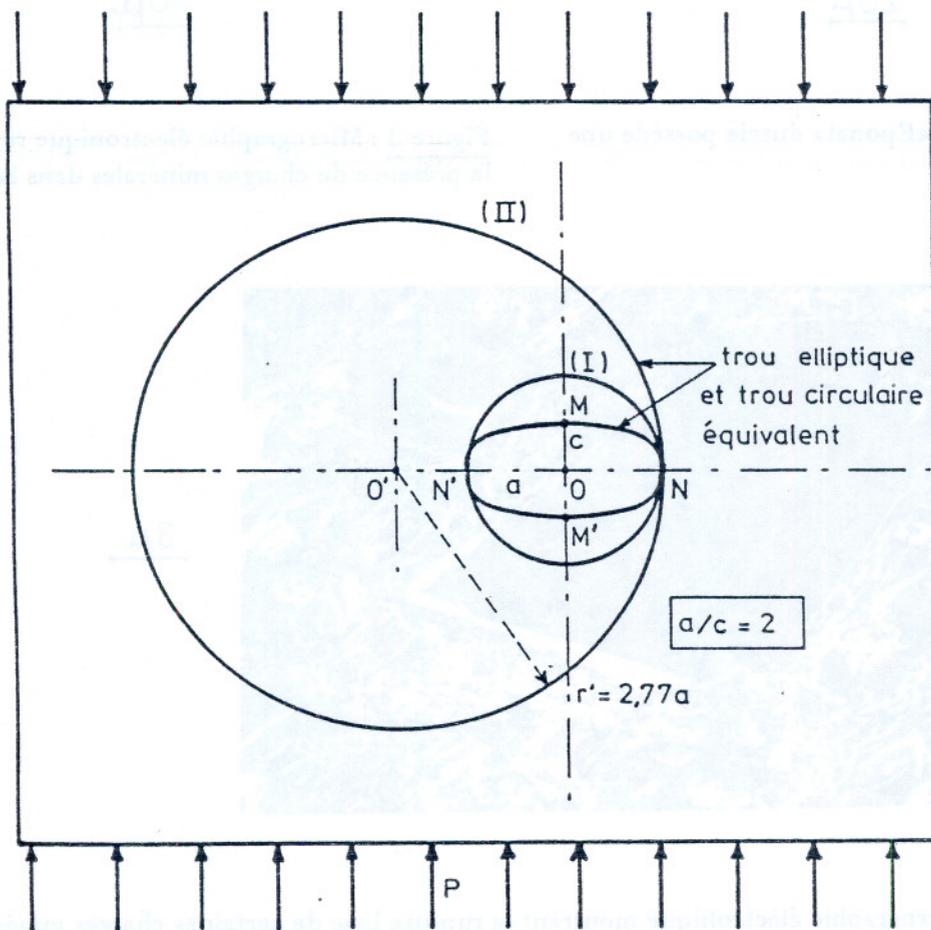


Figure 6 : Trous elliptiques et trous circulaires équivalents

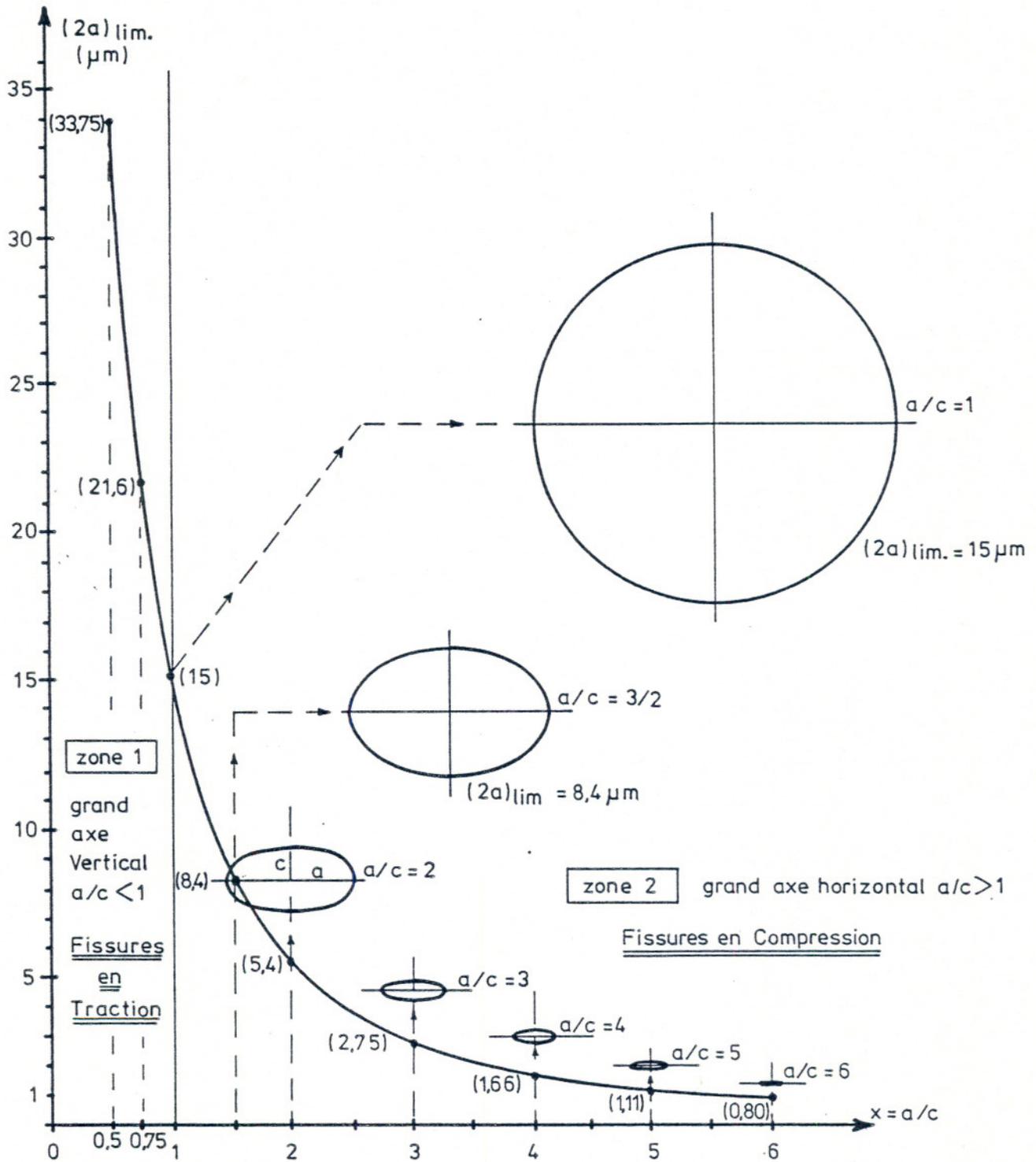


Figure 7 : Variation de la dimension critique du grand axe  $(2a)_{lim.}$  de la particule elliptique en fonction du rapport  $a/c$

## ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE DE L'ÉCOULEMENT DES FLUIDES NON NEWTONIENS ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX. REGIME DE MONTEE EN VITESSE.

Par

R.Kouitat ; G.Maurice ; M.Lucius

L.E.M.T.A 24 rue lionnois 54000 Nancy ( France )

### Résumé

Dans cet article, nous étudions l'écoulement laminaire d'un fluide dans les premiers instants de la mise en rotation d'un viscosimètre à cylindres coaxiaux. Nous montrons en particulier que pour un fluide newtonien et certains fluides non newtoniens les approximations usuelles du taux de cisaillement ne sont valables que sous certaines conditions expérimentales que nous définissons à l'aide de grandeurs adimensionnelles.

### Summary

In this paper, we study the laminar fluid flow during start-up motion in a coaxial cylinders viscometer. It is shown mainly for a newtonian fluid and some non newtonian fluids, that common approximations of the shear rate in the flow are not valid unless some experimental conditions are fulfilled. These conditions are defined in terms of dimensionless parameters.

### Introduction

Les viscosimètres à cylindres coaxiaux sont des outils simples et efficaces pour la détermination de la loi de comportement ( relation entre les contraintes tangentielles et le taux de cisaillement ) d'un matériau fluide, en écoulements stationnaire et transitoire.

Il existe principalement deux conceptions de ce dispositif. Pour les uns, le mouvement du rotor est dû à l'action d'un couple généré par exemple par un champ magnétique; ce sont les viscosimètres à couple appliqué ou à contrainte imposée. Pour les autres la vitesse de rotation du cylindre mobile est imposée; ce sont les viscosimètres à vitesse imposée.

Pour les deux versions du dispositif, on a accès, plus ou moins directement à tout instant, à la contrainte tangentielle expérimentale agissant sur l'une des parois latérales. Par contre le taux de cisaillement ( $\gamma$ ), grandeur de première importance pour établir la loi de comportement du fluide testé, est en général inconnu.

- Une première méthode de détermination d'une loi de comportement, à l'aide de l'écoulement unidirectionnel entre deux cylindres coaxiaux, consiste à résoudre numériquement les équations du mouvement pour une loi de comportement dépendant d'un certain nombre de paramètres que l'on optimise pour que le couple calculé numériquement coïncide avec celui mesuré. Cette méthode qui ne demande pas la con-

naissance explicite du taux de cisaillement, conduit à d'excellents résultats mais nécessite parfois un traitement numérique important et, limite la forme de la loi de comportement.

- La deuxième méthode, la plus utilisée, consiste à construire directement la courbe taux de cisaillement  $\leftrightarrow$  contrainte à partir d'une expression approchée du taux de cisaillement de l'écoulement. On peut ensuite ajuster les paramètres d'une loi de comportement de telle sorte qu'elle représente mathématiquement le rhéogramme de manière satisfaisante. Cette dernière méthode, plus simple que la première, conduit à de bons résultats si l'approximation de  $\dot{\gamma}$ , utilisée, est de bonne qualité.

Différentes formules d'approximation, ainsi que leur limites d'utilisation, ont été proposées, pour le taux de cisaillement de l'écoulement permanent, par de nombreux auteurs. En écoulement transitoire, les approximations les plus utilisées sont obtenues en considérant que  $\dot{\gamma}$  est à tout instant directement proportionnel à la vitesse du rotor. Dans le cas d'un entrefer petit, ces expressions approchées, correspondent au taux de cisaillement issu de la modélisation simplifiée de l'écoulement dite "lentement variable".

La validité de cette simplification de l'écoulement, qui consiste à postuler que le fluide réagit comme s'il avait une inertie nulle, a été largement étudiée pour les fluides newtoniens (1) et pour des fluides plus généraux (2), dans le cas de l'écoulement à couple appliqué. Une telle étude n'a pas été effectuée pour l'écoulement à vitesse imposée. Elle constitue l'objet de cet article.

Nous montrerons d'abord, à l'aide d'une résolution numérique des équations du mouvement, qu'en écoulement de montée en vitesse, la modélisation lentement variable ( qui conduit à une expression simple de  $\dot{\gamma}$  ) n'est pas toujours représentative de l'écoulement réel pour les fluides newtonien, non linéaire purement visqueux et de Maxwell classique. Nous déterminerons ensuite, par deux méthodes concordantes, la résolution des équations du mouvement à l'aide de transformations intégrales d'une part et du développement en séries de fonctionnelles de Volterra d'autre part: - les conditions expérimentales, déterminées en fonction des valeurs d'un nombre adimensionnel, pour lesquelles l'écoulement réel est assimilable à l'écoulement simplifié. - Cet écoulement fournit une approximation de bonne qualité et d'expression simple du taux de cisaillement.

## 1 Modélisations des écoulements

Le champ des vitesses laminaires, au sein du fluide contenu dans l'espace annulaire,  $[r_1, r_2]$ , du viscosimètre rotatif à cylindres coaxiaux, considéré, vérifie les équations :

$$[1] \begin{cases} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma(\gamma)) = \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} & r_1 < r < r_2 & t > 0 \\ \omega(r_2, t) = 0 \\ \omega(r_1, t) = v(t) \\ \omega(r, 0) = 0 \end{cases}$$

où :

$\omega(r, t)$  désigne la vitesse angulaire de la particule fluide se situant à la distance  $r$  de l'axe de rotation, à l'instant  $t$ .

$\gamma(r, t)$  est le taux de cisaillement à l'instant  $t$ , à la distance  $r$  de l'axe.

$\rho$  est la masse volumique du fluide

$v(t)$  désigne la vitesse imposée au rotor. ( $v(0)=0$ )

$\sigma(\gamma)$  est la contrainte tangentielle dont l'expression est donnée par la loi de comportement. On remarquera que cette notation prend en compte, non seulement les fluides visqueux non linéaires classiques, mais également les fluides non linéaires à mémoire.

L'écoulement lentement variable, correspondant au fluide "sans inertie", est modélisé par :

$$[2] \begin{cases} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma(\gamma)) = 0 & r_1 < r < r_2 & t > 0 \\ \omega(r_2, t) = 0 \\ \omega(r_1, t) = v(t) \\ \omega(r, 0) = 0 \end{cases}$$

Cette modélisation simplifiée de l'écoulement correspond à la situation où le fluide évolue continuellement d'un état d'équilibre stationnaire à un autre.

Les équations [1] et [2] montrent que, la connaissance du taux de cisaillement de l'écoulement d'un fluide quelconque nécessite celle de la loi de comportement recherchée. Cette difficulté est à l'origine des méthodes de détermination d'une loi de comportement, présentées en introduction.

Sous la condition "entrefer petit", les expressions approchées, les plus utilisées, du taux de cisaillement constituent des approximations, en général, satisfaisantes pour l'écoulement simplifié.

Nous étudierons donc la validité de ces formules d'approximation, dans le cadre de l'écoulement de montée en vitesse, par comparaison des taux de cisaillement issus des

modélisations complète et lentement variable. Cette étude va être menée par résolution numérique des équations [1] et [2], pour différentes lois de comportement.

## 2 Etude numérique de l'écoulement de montée en vitesse entre deux cylindres coaxiaux

Pour résoudre numériquement les équations [1], nous effectuons d'abord une formulation variationnelle. Cette opération permet de réécrire le problème sous une forme adaptée à l'approximation numérique et, conduit à l'expression:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_1}^{r_2} r^3 u(r) \omega(r, t) dr = - \int_{r_1}^{r_2} r^2 \frac{\partial u(r)}{\partial r} \sigma \left( r \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial r} \right) dr \quad [3]$$

où  $u(r)$  est une fonction "régulière" vérifiant  $u(r_1) = u(r_2) = 0$ .

On subdivise ensuite l'intervalle  $[r_1, r_2]$  en  $N+1$  sous intervalles dont les  $N+2$  extrémités sont numérotées de 0 à  $N+1$ . On applique alors la méthode des éléments finis en approchant le champ des vitesses  $\omega$  sous la forme d'un polynôme du premier degré en  $r$  sur chaque sous intervalle, soit:

$$\omega(r, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t) \Phi_i(r)$$

où les  $\Phi_i(r)$  sont des fonctions d'interpolation, linéaires et définies par:

$$\Phi_i(r) = \begin{cases} \frac{r-r(i-1)}{r(i)-r(i-1)} & r(i-1) \leq r \leq r(i) \\ \frac{r(i+1)-r}{r(i+1)-r(i)} & r(i) \leq r \leq r(i+1) \end{cases}$$

$r(j)$  étant la position du noeud  $j$  par rapport à l'axe de rotation.

Si on considère que la fonction  $u(r)$  décrit successivement les fonctions  $\Phi_i(r)$  pour  $i = 1$  à  $N$  (approximation de Galerkin), on est conduit, pour chaque extrémité intérieure  $i$ , à la relation:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} r^3 \Phi_i(r) \sum_{j=1}^{i+1} x_j(t) \Phi_j(r) dr = - \int_{r_{i-1}}^{r_{i+1}} r^2 \frac{\partial \Phi_i(r)}{\partial r} \sigma \left( r \frac{\partial \sum_{j=1}^{i+1} x_j(t) \Phi_j(r)}{\partial r} \right) dr \quad [4]$$

L'ensemble des équations du type [4], pour toutes les extrémités intérieures, peut être mis sous la forme matricielle:

$$[C] \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{X})(t) + \mathbf{F}(t) = 0 \quad [5]$$

où:

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$

C désigne une matrice carrée tridiagonale d'ordre N, telle que:

$$C_{ij} = \rho \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i+1)}} r^3 \Phi_i(r) \Phi_j(r) dr$$

$$C_{ij} = 0 \text{ pour } j \neq i-1, i, i+1$$

K(X)(t) est une fonction vectorielle, dont la i<sup>ème</sup> composante a pour expression :

$$K_i(X)(t) = \int_{r^{(i-1)}}^{r^{(i+1)}} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \Phi_i(r) \sigma(r) \frac{\partial}{\partial r} \sum_{j=i-1}^{i+1} x_j \Phi_j(r) dr$$

F(t) est un vecteur tenant compte des conditions limites et n'ayant qu'une seule composante non nulle:

$$F_1(t) = \rho \frac{\partial}{\partial t} v(t) \int_{r_1}^{r^{(2)}} r^3 \Phi_1(r) \Phi_0(r) dr$$

On a ainsi ramené la résolution du système continu [1] à celle du système discret [5]. On notera que le système discret, correspondant aux équations [2], se déduit de [5] en posant [C]  $\equiv$  0 et F(t)  $\equiv$  0.

La résolution numérique de [5] va donner accès, à tout instant, à la vitesse en tout point du fluide correspondant à un noeud de discrétisation. Ce calcul nécessite cependant, la connaissance de la sollicitation extérieure dont dépend le vecteur F(t) et, de la loi de comportement qui permet d'explicitier la fonctionnelle K(X)(t).

Nous commençons par préciser le type de fonction de mise en mouvement qui va être utilisé.

Il est d'usage dans une expérience de brusque mise en vitesse constante dans le dispositif rotatif étudié, de représenter la sollicitation extérieure par une fonction du type:  $v(t) = v_s Y(t)$  où  $v_s$  est la vitesse stationnaire imposée au rotor et Y(t) la fonction de Heaviside. On postule ainsi, qu'à l'instant initial, le cylindre mobile est soumis à une accélération infinie. Une telle situation étant physiquement impossible, la construction de la fonction de mise en mouvement, doit tenir compte de la continuité du phénomène et d'un temps  $\epsilon$  aussi petit soit-il, représentant la durée de montée en vitesse. Il nous a paru suffisamment général de ne considérer que les termes de degré inférieur ou égal à deux, dans le développement limité au voisinage de zéro d'une fonction quelconque de mise en mouvement. Soit:

$$v(t) = \begin{cases} \left( -\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\epsilon}t \right) v_s & t \leq \epsilon \\ v_s & t \geq \epsilon \end{cases}$$

Plus le paramètre  $\varepsilon$ , contenu dans ces relations, est petit, plus l'énergie apportée par l'extérieur, pour amener le rotor du repos à la vitesse  $v_s$ , doit être importante.

La sollicitation extérieure étant définie, la donnée de la loi de comportement du matériau testé, permet de résoudre les équations [5].

Dans ce qui suit, nous considérons des fluides du type purement visqueux (modèles de Newton et de Quemada) et des fluides à mémoire (modèle de Maxwell classique). Pour les premiers, [5] est un système d'équations différentielles ordinaires et, pour les autres, un système intégral-différentiel.

Le champ des vitesses est obtenu par résolution numérique d'un de ces systèmes. On en déduit le taux de cisaillement en un point du fluide par dérivation numérique ( $\dot{\gamma} = r \partial \omega / \partial r$ ). Notons cependant que, compte tenu de la "raideur" des systèmes, des résultats ne peuvent être fournis que par des méthodes numériques possédant la propriété de A-stabilité (4,5,6). Nous avons utilisé la  $\theta$ -méthode avec  $\theta \in ]0.5, 1]$ .

### 2.1 Fluides purement visqueux:

Nous rappelons que le modèle de Quemada, fortement non-linéaire, a pour expression mathématique:

$$\sigma = \eta \left( \frac{1 + \tau \dot{\gamma}_1}{\lambda + \tau \dot{\gamma}_1} \right)^2 \dot{\gamma} \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma}_1 = |\dot{\gamma}|^{\frac{1}{2}}$$

Pour une brusque mise en vitesse constante, la courbe représentative de l'évolution du taux de cisaillement de l'écoulement, pour un fluide newtonien (cas linéaire) et un fluide de Quemada (cas non-linéaire), au niveau du cylindre mobile présente un maximum aigu que nous appelons par la suite "overshoot" (fig 2.1 et 2.2).

Ce phénomène n'est pas à attribuer au comportement non-linéaire du matériau puisqu'il se manifeste de manière encore plus prononcée pour l'écoulement d'un fluide newtonien. Il serait plutôt relatif au dispositif expérimental.

Nous nous sommes alors proposés d'étudier l'influence, sur cette nature de la solution, des différentes grandeurs intervenant dans les équations du mouvement d'un fluide newtonien.

#### - Influence de la morphologie du dispositif:

Les caractéristiques géométriques du dispositif expérimental peuvent intervenir par l'intermédiaire de l'entrefer ( $r_2 - r_1$ ) ou du rapport des rayons ( $\lambda = r_2 / r_1$ ). En général, la géométrie du dispositif à cylindres coaxiaux est caractérisée par  $(r_2 - r_1) / r_1$ , rapport de la distance entre les deux cylindres par l'un des rayons. Il est égal à  $\lambda - 1$ . Nous avons donc considéré que  $\lambda$  était caractéristique de la géométrie du dispositif. Les courbes de  $\dot{\gamma}(t)$  pour  $\lambda = 1.25$  et  $1.0775$  sont représentées sur les figures 2.1 et 2.3. On peut constater que ce paramètre n'influence presque pas la nature de l'écoulement. Contrairement à ce qu'on aurait pu penser, plus il est grand, moins l'amplitude de l'overshoot est grande. Notons cependant que ce fait est pratiquement insignifiant pour la gamme des rapports de rayons couramment utilisés. Ainsi, on peut affirmer que l'hypothèse entrefer petit ( $\lambda - 1 \ll 1$ ) ne justifie pas l'utilisation des approximations usuelles du taux de cisaillement en écoulement de montée en vitesse. Par contre, l'entrefer ( $r_2 - r_1$ ) influence l'écoulement de manière non négligeable (fig 2.5). Il interviendra donc, dans la détermination des conditions expérimentales conduisant à l'approximation lentement variable.

- Influence de la sollicitation extérieure:

La fonction de mise en mouvement du rotor ne peut influencer l'évolution de  $\gamma(t)$  qu'à travers les paramètres  $v_s$  (vitesse stationnaire atteinte) et  $\epsilon$  (durée de montée en vitesse).

Pour  $\epsilon=0.2s$ , une viscosité dynamique de  $1cp$  et des valeurs stationnaires de la vitesse imposée, correspondant à des  $\gamma$  stationnaires de  $1s^{-1}$  et  $0.5s^{-1}$ , les courbes de  $\gamma(t)$  au niveau du rotor sont représentées sur les figures 2.1 et 2.4. On constate que le cisaillement final atteint, n'influence pas la nature de l'écoulement. Cette conclusion était d'ailleurs prévisible car le mouvement d'un fluide ne peut être influencé par son avenir. Les conditions expérimentales justifiant l'utilisation de l'approximation lentement variable seront donc indépendantes de ce paramètre. A contrario, le paramètre  $\epsilon$  joue un rôle non négligeable sur la nature de la courbe  $\gamma(t)$ . Plus il est grand, plus l'amplitude de l'overshoot est faible et le taux de cisaillement réel proche de celui issu de l'écoulement simplifié (fig 2.6, 2.7).

- Influence des caractéristiques du fluide:

Les caractéristiques d'un fluide newtonien, intervenant dans les équations du mouvement, sont la viscosité dynamique ( $\mu$ ) et la masse volumique ( $\rho$ ). Ils influencent grandement l'écoulement à travers leur rapport  $\nu=\mu/\rho$  appelé coefficient cinématique de viscosité. Plus  $\nu$  est grand, plus les taux de cisaillement issus des modélisations complète et simplifiée sont proches l'un de l'autre (fig 2.8). Dans certains cas, les courbes représentatives de ces deux grandeurs sont indiscernables sur la même figure (fig 2.9). Les conditions expérimentales, justifiant l'utilisation de l'approximation lentement variable, vont forcément dépendre de la viscosité cinématique du fluide étudié.

Les résultats présentés ci-dessus sont relatifs à l'écoulement d'un fluide, induit par la rotation du cylindre intérieur d'un viscosimètre rotatif. Il est bien connu qu'en régime stationnaire, l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux est plus stable lorsque le stator est intérieur. Nous avons donc vérifié si cette propriété influençait la nature de  $\gamma(t)$ . La courbe représentative du taux de cisaillement au niveau du cylindre extérieur, pour  $\epsilon=0.2s$ ,  $\lambda=1.07$ ,  $\mu=1cp$  et  $\rho=1g/cm^3$ , permet d'affirmer que le type de courbe d'évolution de  $\gamma(t)$  est indépendant du cylindre mis en rotation (fig 2.10). Ainsi, les résultats obtenus lorsque le rotor est intérieur s'appliquent au cas où c'est le cylindre extérieur qui est mobile.

Pour les fluides visqueux, à loi de comportement non-linéaire, la géométrie du dispositif et la sollicitation extérieure influencent l'écoulement de la même manière que pour l'écoulement d'un fluide newtonien. La viscosité étant une fonction du taux de cisaillement, son influence sur le comportement de ce dernier ne peut plus être analysée de la même manière que dans le cas newtonien.

2.2 Fluide de Maxwell classique:

C'est un cas particulier du fluide de Maxwell généralisé dont la loi de comportement peut se mettre sous la forme:

$$\sigma(\gamma) = \int_0^t g(t-s)\gamma(s) ds$$

Le modèle de Maxwell classique correspond au cas où on a  $g(t) = \mu (\exp(-t/a))/a$  avec  $\mu$  désignant la viscosité infinie et  $a$  le temps de relaxation du fluide.

Sur la figure 2.11, l'évolution de  $\gamma(t)$  au niveau du rotor, pour  $\mu=1\text{cp}$  et  $a = 0.1\text{s}$ , est représentée. On constate que pour ce fluide, le taux de cisaillement peut évoluer d'une manière chaotique. Le taux de cisaillement de l'écoulement est, dans ce cas aussi, peu influencé par le rapport des rayons des cylindres (fig 2.12). Les paramètres morphologiques du dispositif et la sollicitation extérieure, influencent l'écoulement de la même façon que dans le cas purement visqueux.

Le temps caractéristique  $a$ , est responsable de l'évolution chaotique de  $\gamma$ . Plus il est petit, moins la courbe de  $\gamma$  présente d'oscillations (fig 2.13). Cette situation correspond au cas où la mémoire du matériau devient très courte et son comportement proche de celui d'un fluide purement visqueux. La proximité des solutions des modélisations complète et simplifiée va dépendre de la vitesse imposée au rotor, de la viscosité du fluide et de la fonction mémoire.

Il nous a paru nécessaire à ce niveau, de préciser les conditions expérimentales pour lesquelles l'écoulement réel est assimilable à l'écoulement lentement variable associé. Nous commençons par l'étude des modèles rhéologiques linéaires du fluide newtonien et du fluide de Maxwell classique.

### 3 Proximité des solutions des modélisations complète et simplifiée pour un fluide newtonien et un fluide de Maxwell classique

Pour cette étude, nous avons utilisé le modèle de Maxwell généralisé pour lequel les modèles newtonien et de Maxwell classique sont des cas particuliers.

Nous avons aussi rendu adimensionnelles, les équations du mouvement, en introduisant les grandeurs:

$x, U, \tau$ , telles que:  $r=x(r_2-r_1)$ ,  $\omega=v_s U$ ,  $t=\tau \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est la durée de mise en mouvement et  $v_s$  la vitesse stationnaire du rotor.

Si on considère qu'on peut écrire  $g(t)=\mu h(t)$  où  $\mu$ , paramètre ayant la dimension d'une viscosité est défini par

$$\mu = \int_0^{\infty} g(t) dt$$

alors, en regroupant les grandeurs influençant le plus l'écoulement et mises en évidence par l'étude numérique précédente, on peut définir un nombre adimensionnel:

$$NK = \frac{\rho (r_2 - r_1)^2}{\mu \varepsilon}$$

Les équations du mouvement rendues adimensionnelles ont été résolues par utilisation successive des transformations fonctionnelles de Hankel de troisième espèce et de Laplace.

On rappelle que la transformée de Hankel  $w(\xi_i, \tau)$  de  $V(x, \tau)$  dans l'intervalle  $(x_1, x_2)$ , est définie par (3):

$$w(\xi_i, \tau) = \int_{x_1}^{x_2} x [J_1(\xi_i x) G_1(\xi_i x_1) - J_1(\xi_i x_1) G_1(\xi_i x)] V(x, \tau) dx$$

où:

$J_1$  désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1

$2G_1 = \pi i H_1(1)$  où  $H_1(1)$  est la fonction de Bessel de troisième espèce ou première fonction de Hankel.

$\xi_i$  est une racine de l'équation

$$J_1(\xi_i x_2) G_1(\xi_i x_1) - J_1(\xi_i x_1) G_1(\xi_i x_2) = 0$$

La formule d'inversion de cette transformation est:

$$V(x, \tau) = \sum_i \frac{2 \xi_i^2 J_1^2(\xi_i x_2)}{J_1^2(\xi_i x_1) - J_1^2(\xi_i x_2)} [J_1(\xi_i x) G_1(\xi_i x_1) - G_1(\xi_i x) J_1(\xi_i x_1)] w(\xi_i, \tau)$$

Nous présentons directement les résultats, les détails des calculs pouvant être obtenus dans (7).

Pour les deux matériaux fluides considérés, les taux de cisaillement de l'écoulement réel, au niveau des cylindres intérieur et extérieur, s'expriment comme la somme de deux termes dont l'un représente le taux de cisaillement de l'écoulement simplifié. Soit, pour un fluide newtonien:

$$\gamma_1 = \frac{-2x_2^2}{x_2^2 - x_1^2} v_1(\tau) - 2 \sum_i \frac{J_1^2(\xi_i x_2)}{J_1^2(\xi_i x_1) - J_1^2(\xi_i x_2)} \int_0^\tau v_1(u) e^{-\frac{\xi_i^2}{NK}(\tau-u)} du$$

$$\gamma_2 = \frac{-2x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} v_1(\tau) - 2 \sum_i \frac{J_1(\xi_i x_2) J_1(\xi_i x_1)}{J_1^2(\xi_i x_1) - J_1^2(\xi_i x_2)} \int_0^\tau v_1(u) e^{-\frac{\xi_i^2}{NK}(\tau-u)} du$$

et pour un fluide de Maxwell classique:

$$\gamma_1 = \frac{-2x_2^2}{x_2^2 - x_1^2} v_1(\tau) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_i x_2)}{J_1^2(\xi_i x_1) - J_1^2(\xi_i x_2)} \int_0^{\tau} v_1'(u) K(\xi_i, \tau-u) du$$

$$\gamma_2 = \frac{-2x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} v_1(\tau) - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_i x_2) J_1(\xi_i x_1)}{J_1^2(\xi_i x_1) - J_1^2(\xi_i x_2)} \int_0^{\tau} v_1'(u) K(\xi_i, \tau-u) du$$

avec:

$$K(\xi_i, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{\tau}{2a}} \left( \operatorname{ch}\left(\frac{\delta_1}{2a}\tau\right) + \frac{1}{\delta_1} \operatorname{sh}\left(\frac{\delta_1}{2a}\tau\right) \right) & 1 \geq \frac{4a\xi_i^2}{NK} \\ e^{-\frac{\tau}{2a}} \left( \cos\left(\frac{\delta_2}{2a}\tau\right) + \frac{1}{\delta_2} \sin\left(\frac{\delta_2}{2a}\tau\right) \right) & 1 < \frac{4a\xi_i^2}{NK} \\ \delta_1 = \sqrt{1 - \frac{4a\xi_i^2}{NK}} \\ \delta_2 = \sqrt{\frac{4a\xi_i^2}{NK} - 1} \end{cases}$$

$\gamma_1$  et  $\gamma_2$  désignent respectivement le taux de cisaillement sur les cylindres intérieur et extérieur, et  $a$  un paramètre adimensionnel, rapport entre le temps de relaxation du fluide de Maxwell classique et la durée de montée en vitesse  $\varepsilon$ .

Les expressions ci-dessus montrent que, le taux de cisaillement de l'écoulement simplifié est une approximation de bonne qualité pour l'écoulement réel si, la contribution du terme complémentaire ( exprimé sous forme d'une série de fonctions de Bessel ) est à tout instant négligeable. Cette hypothèse est vérifiée pour une plage de variation des paramètres adimensionnels  $NK$  et  $a$ .

Pour un fluide newtonien, les taux de cisaillement, issus des modélisations complète et simplifiée, sont indiscernables sur la même figure dès que la valeur du paramètre  $NK$  est inférieure à 0.05 ( fig 3.1, 3.2, 3.3 ).

Pour un fluide de Maxwell classique, si les nombres  $NK$  et  $a$  sont du même ordre de grandeur, les taux de cisaillement sur les cylindres intérieur et extérieur, ont une évolution chaotique ( fig 3.4 et 3.5 ). Ils sont assimilables à ceux issus de la modélisation simplifiée de l'écoulement, dès que  $NK \leq 0.05$  et  $a \leq NK/100$  ( fig 3.6 ).

Nous avons ainsi précisé, pour un fluide newtonien et un fluide de Maxwell classique, les conditions expérimentales pour lesquelles l'approximation lentement variable est de très bonne qualité, pour l'écoulement de montée en vitesse entre deux cylindres coaxiaux.

Le comportement d'un fluide quelconque étant assimilable, au voisinage d'un taux de cisaillement  $\gamma_0$  donné, à celui d'un fluide newtonien s'il est du type purement visqueux ou, à celui d'un fluide de Maxwell classique s'il est à mémoire, les résultats présentés ci-dessus sont applicables localement à tout fluide.

Une hypothèse locale est, cependant, difficilement exploitable du point de vue expérimental. Ainsi, comme pour les lois de comportement linéaires traitées ci-dessus, les conditions expérimentales, pour lesquelles les solutions des deux modélisations de l'écoulement sont proches l'une de l'autre, doivent être précisées de manière globale pour des fluides plus généraux. Dans ce qui suit, nous effectuons cette étude pour une catégorie de fluides non-newtoniens du type purement visqueux.

#### 4 Proximité des solutions des modélisations réelle et simplifiée pour certains fluides visqueux.

Pour cette étude, nous nous proposons d'utiliser l'outil mathématique du développement en série de fonctionnelles de Volterra (8,9). Nous nous limiterons au cas des fluides dont la loi de comportement est une fonction de  $\gamma$ , dérivable en zéro. C'est par exemple le modèle fortement non linéaire du fluide de Quemada sur lequel nous montrerons la validité des résultats.

Nous considérerons que le taux de cisaillement "lentement variable" de l'écoulement d'un fluide newtonien constitue une approximation de bonne qualité pour l'écoulement simplifié d'un fluide quelconque, pour les mêmes conditions limites.

Les équations du mouvement d'un fluide de loi de comportement  $\sigma$  sont données par:

$$[1] \begin{cases} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma(\gamma)) = \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} & r_1 < r < r_2 & t > 0 \\ \omega(r_2, t) = 0 \\ \omega(r_1, t) = v(t) \\ \omega(r, 0) = 0 \end{cases}$$

Le champ des vitesses de l'écoulement simplifié d'un fluide newtonien a pour

$$\text{expression } \omega_1(r, t) = \frac{r_1^2 (r_2^2 - r^2)}{r(r_2^2 - r_1^2)} v(t) \text{ et, est tel que:}$$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \omega_1(r, t)}{\partial r} \right) = 0$$

Si on fait le changement de variable  $u(r, t) = \omega(r, t) - \omega_1(r, t)$ , les équations [1] deviennent:

$$[6] \begin{cases} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma (r \frac{\partial}{\partial r} u + r \frac{\partial}{\partial r} \omega_1)) - \rho \frac{\partial}{\partial t} u = \rho g(r, t) \\ u(r_1, t) = u(r_2, t) = u(r, 0) = 0 \end{cases}$$

où on a posé  $g(r, t) = \partial \omega_1(r, t) / \partial t$ .

Pour une loi de comportement  $\sigma$  donnée,  $u(r, t)$  dépend uniquement de la fonction  $g(r, t)$  et, peut être considéré comme une fonctionnelle, réponse d'un système non-linéaire soumis à l'excitation  $g(r, t)$ .

Nous appliquons le développement en série de fonctionnelles de Volterra aux équations [6]. Autrement dit, nous cherchons  $u(r, t)$  sous la forme (7):

$$u(r, t) = \sum_n U^{(n)} [g(r, t)] \quad [7]$$

avec:

$$U^{(n)} [g(x)] = \int_{y_1}^{y_2} dx_1 \dots \int_{y_1}^{y_2} dx_n V^{(n)}(x; x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) \quad [8]$$

où, pour des raisons de clarté, nous avons introduit les notations :

$$y = (x, t) \text{ et } \int_{y_1}^{y_2} = \int_{r_1}^t \int_{r_1}^{r_2}$$

Le développement [7] étant valable pour toute fonction  $g$ , posons  $g = Ag_0$  où,  $A$  est une variable réelle et  $g_0$  une fonction fixe. Si on introduit [7] dans les équations [1] et, on dérive une fois l'expression résultante par rapport à  $A$ , compte tenu de la propriété d'homogénéité des fonctionnelles  $U^{(n)}$ , on obtient, en posant  $A=0$ , l'équation pour le premier terme de la série. Soit:

$$\frac{\sigma'(0)}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \frac{\partial}{\partial r} U^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial t} U^{(1)} = g_0 \quad [9]$$

où  $\sigma'(0)$  désigne la dérivée de  $\sigma$ , par rapport à  $\gamma$ , prise au point zéro.

Pour l'équation du deuxième terme de la série, on introduit [7] dans [1], toujours avec  $g = Ag_0$ , on dérive l'expression résultante deux fois par rapport à  $A$  et on pose  $A=0$ . On obtient:

$$\frac{\sigma'(0)}{\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial}{\partial r} U^{(2)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} U^{(2)} = - \frac{\sigma''(0)}{2\rho r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( U^{(1)} + k_0 \right) \right]^2 \quad [10]$$

On constate que  $U^{(2)}$  dépend de l'excitation  $g_0$  et du premier terme  $U^{(1)}$ .

Le terme  $U^{(n)}$ , d'ordre  $n$ , dépendra de  $g_0$  et des  $U^{(j)}$  pour  $j=1$  à  $n-1$ .

Une analyse de la relation [10], compte tenu des conditions limites, montre que si  $U^{(1)}$  ou  $\partial U^{(1)}/\partial r$  est nul, il en est de même pour tous les autres termes de la série et, le mouvement du fluide peut être considéré comme lentement variable. Les conditions expérimentales correspondantes vont donc être données par l'équation [9].

Cette équation est semblable à celle modélisant l'écoulement d'un fluide newtonien de viscosité dynamique  $\sigma'(0)$ . Le problème a donc déjà été traité et les conditions expérimentales recherchées sont données par  $NK \leq 0.05$  avec:

$$NK = \frac{\rho (r_2 - r_1)^2}{\sigma'(0)\varepsilon}$$

La validité de la condition théorique, ainsi obtenue, est montrée sur l'exemple du modèle fortement non-linéaire de Quemada (fig 2.2 et 4.1). Nous rappelons que l'expression de sa dérivée par rapport à  $\gamma$  est donnée par:

$$\sigma(\gamma) = \eta \left\{ \frac{\tau}{2} \frac{(x-1)\gamma_1}{(x+\tau\gamma_1)^2} + \frac{1+\tau\gamma_1}{(x+\tau\gamma_1)} \right\}$$

## Conclusion

Dans cette étude, nous avons montré que dans le cas de l'écoulement unidirectionnel, à vitesse imposée, entre deux cylindres coaxiaux, des précautions doivent être prises dans l'emploi des diverses expressions approchées du taux de cisaillement donc, pour l'utilisation de certaines méthodes classiques de détermination de loi de comportement. Nous avons en particulier montré que, pour certaines conditions expérimentales assez restrictives et exprimées en fonction d'une quantité adimensionnelle, l'approximation issue de la modélisation simplifiée de l'écoulement (modélisation dite lentement variable) est de très bonne qualité pour les fluides purement visqueux et de Maxwell classique. Cette propriété garantit de la qualité de la loi de comportement déterminée dans ces conditions.

### Legende des figures

#### Figures 2

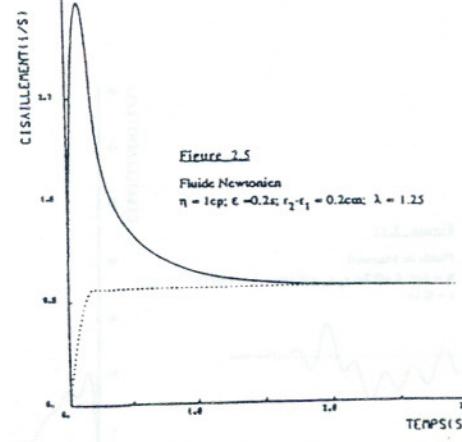
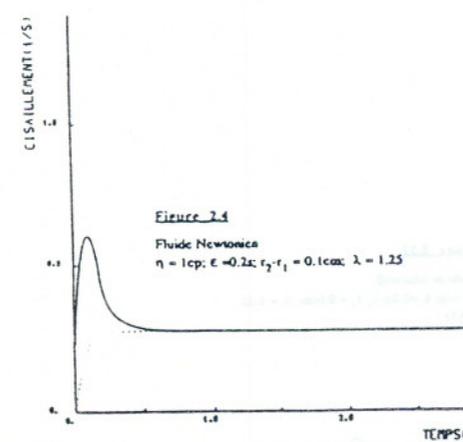
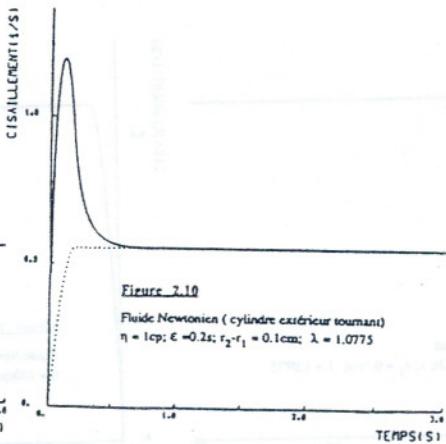
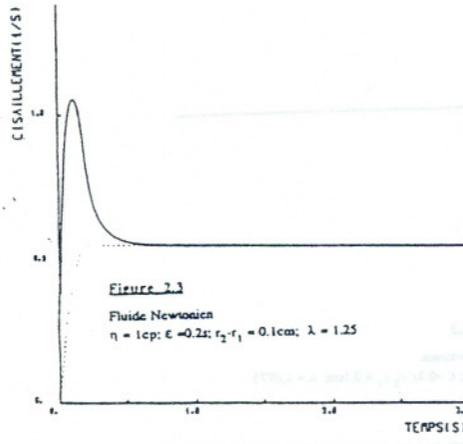
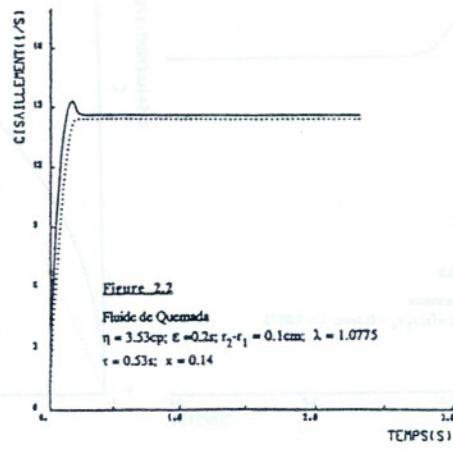
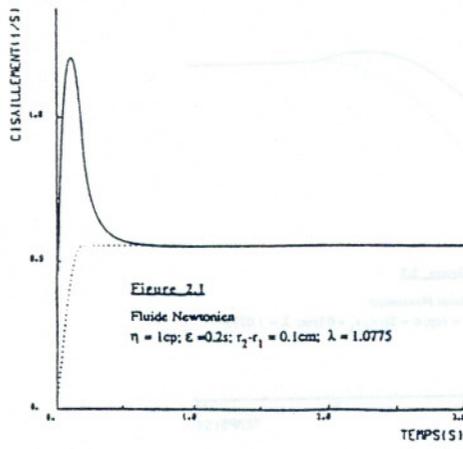
- Taux de cisaillement réel  
 ..... Taux de cisaillement lentement variable

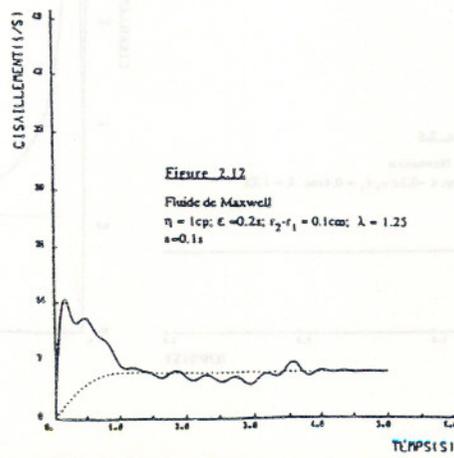
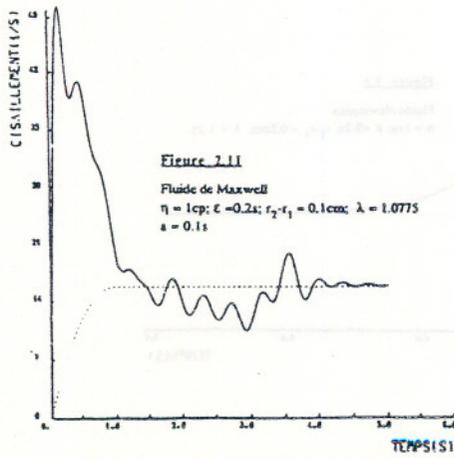
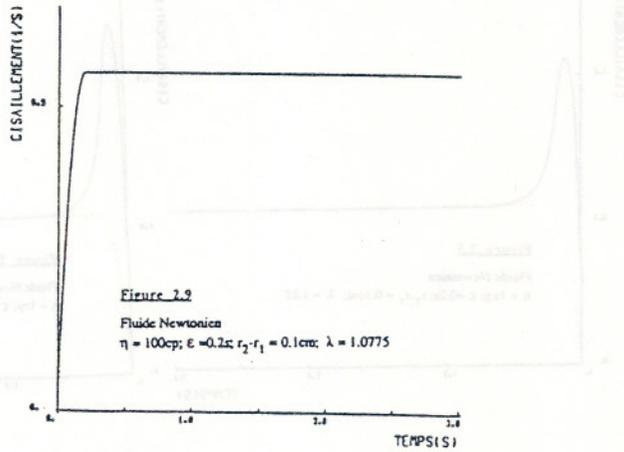
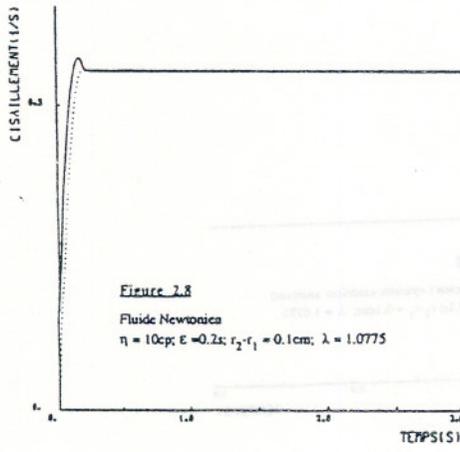
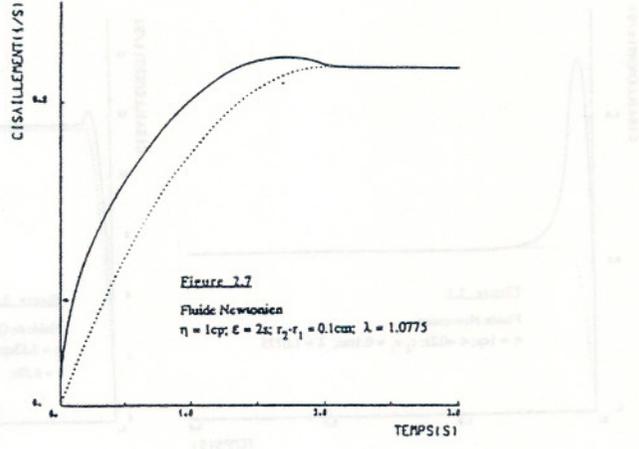
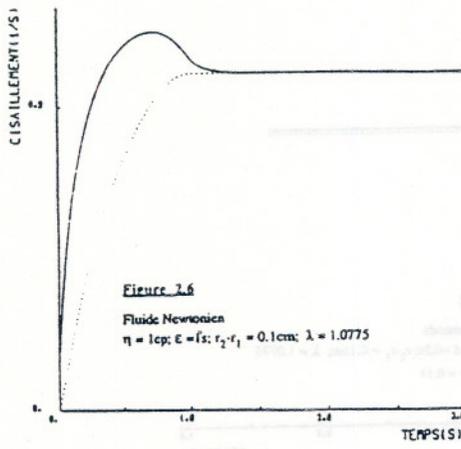
#### Figures 3

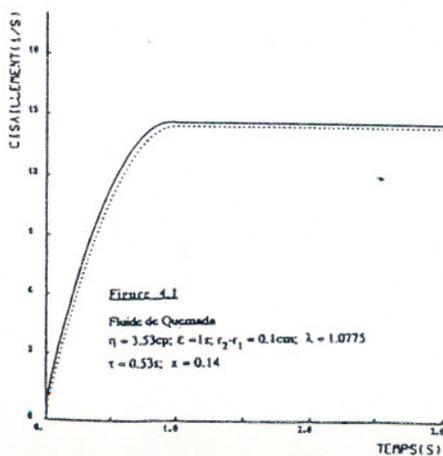
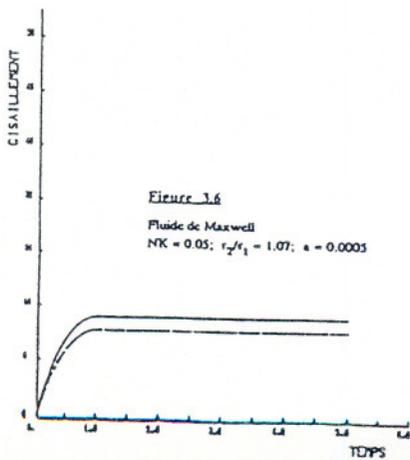
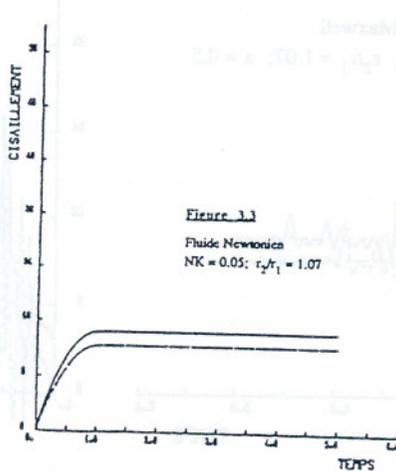
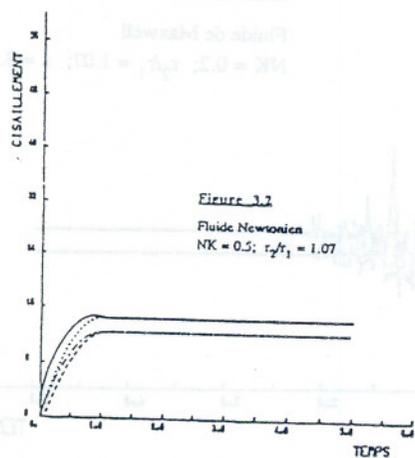
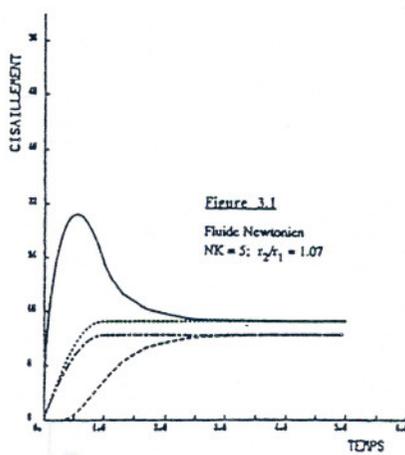
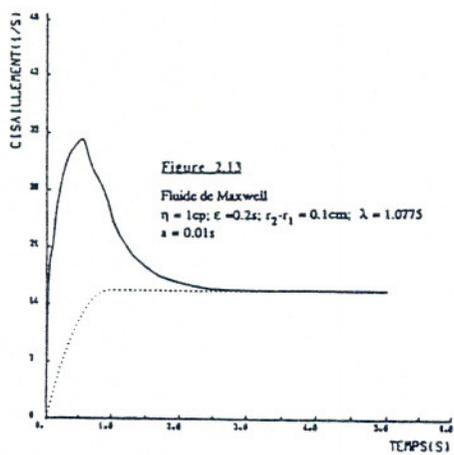
- Taux de cisaillement réel ( rotor)  
 ..... Taux de cisaillement lentement variable (rotor)  
 ----- Taux de cisaillement réel ( stator)  
 - - - - Taux de cisaillement lentement variable (stator)

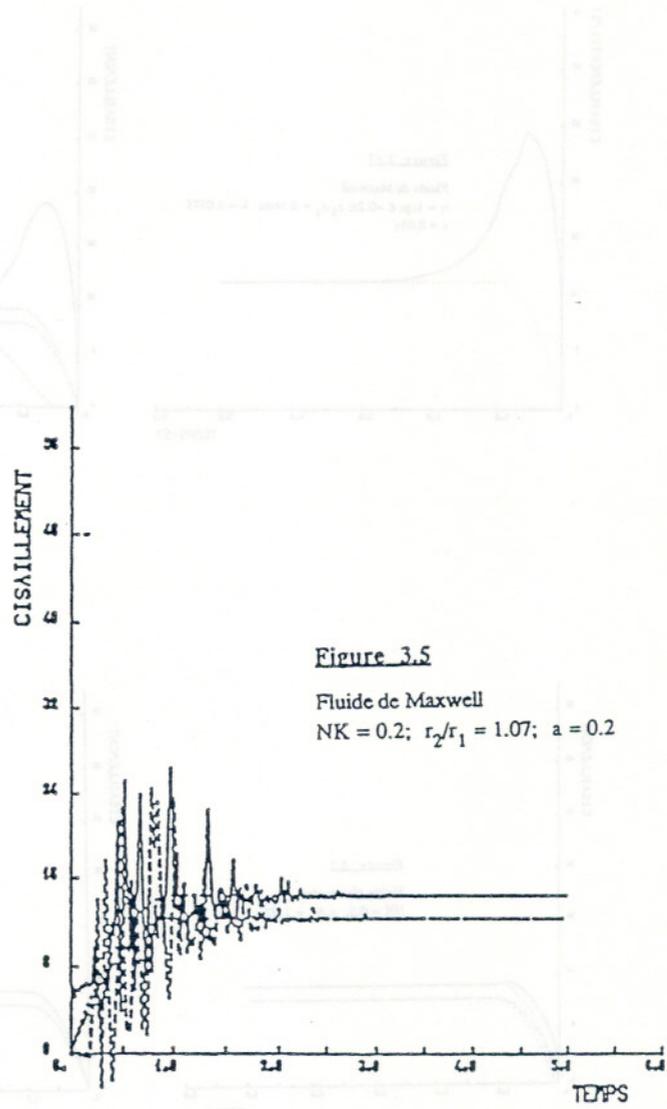
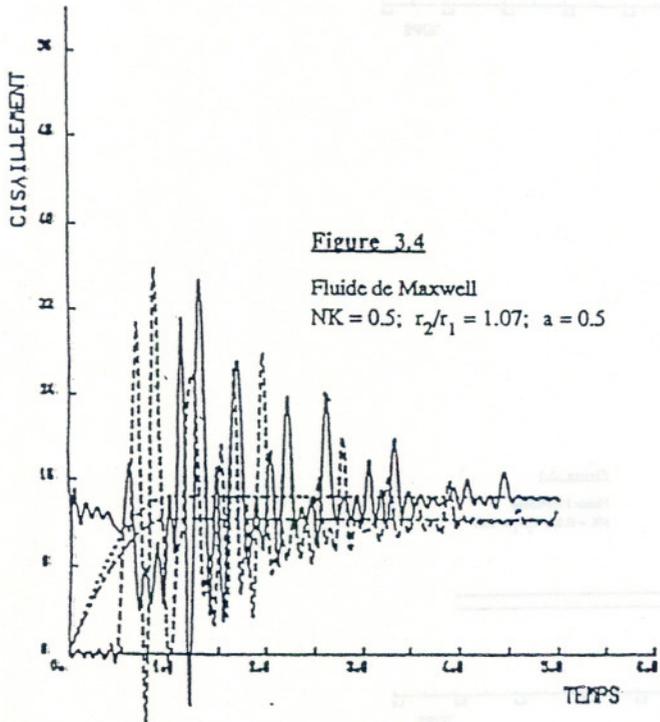
### Bibliographie

- (1) J.C.Ravey; M.Dognon; M.Lucius  
 " Transient rheology in a new type of Couette apparatus. Theoretical study with newtonian fluids." Rheol.Acta 19, 51-59, (1980)
- (2) G.Maurice  
 " Etudes théoriques et numériques de comportement de fluides non-newtoniens en écoulement de Couette. Application à la rhéologie sanguine." Thèse de Docteur d'Etat-Sciences I.N.P.L Nancy (1985)
- (3) I.Ian.Sneddon  
 " Fourier transforms" Mc Graw-Hill book Co (1951)
- (4) J.Stoer; R.Burlirsch  
 " Introduction to numerical analysis " Springer-Verlag (1983)
- (5) R.Theodor  
 " Initiation à l'analyse numérique " CNAM Cours A. Masson (1982)
- (6) M.Crouzeix; A.L.Mignot  
 " Analyse numérique des équations différentielles " Masson (1984)
- (7) R.Kouitat  
 " Contribution à l'étude du taux de cisaillement d'un écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux. Régime de montée en vitesse " Thèse de Docteur de l'I.N.P.L Nancy (1989)
- (8) M.Schetzen  
 " The Volterra and Wiener theories of non linear systems" John Wiley & Sons (1976)
- (9) M.Asdente; M.C.Pascucci; A.M.Ricca  
 " Modified Volterra-Wiener functional. Method for highly nonlinear systems " Alta Frequenza. Vol XLV-N 12, 756-760. (1976)









CHAMP DE VITESSES DU MOUVEMENT SECONDAIRE DANS UN FLUIDE DE BINGHAM  
 EN REGIME DES TOURBILLONS DE TAYLOR

B. NSOM EYENGA , R. CRESSELY

Laboratoire de Physiques des Polymères.

Faculté des Sciences. Ile du Saulcy.

57045 METZ Cédex.

RESUME:

Nous présentons un calcul numérique des paramètres critiques et du champ de vitesses du mouvement secondaire, à la transition laminaire - tourbillons de Taylor, dans un fluide de Bingham en écoulement entre deux cylindres coaxiaux tournants.

1 INTRODUCTION

If the study of the stability of a newtonian fluid has roused many papers, especially in the Couette-Taylor device (fig.1), since TAYLOR's classical paper [1], their number is less important for non-newtonian fluids.

GRAEBEL, [2], presents a calculation of the laminar-Taylor vortex flow transition in a Bingham fluid contained between two coaxial cylinders, the outer of which is fixed while the inner is rotating, (fig.1).

From the steady laminar flow, when the angular speed of the inner cylinder is gradually increased, the fluid develops a cellular structure, remaining steady and axisymmetric, but being such that in adjacent cells, the fluid particles move in counterrotating spiral paths. That is the Taylor vortex flow.

In a theoretical point of view, the flow obeys the usual equations of conservation of the mass and the momentum, which are imposed to the superposition of the basic tangential flow  $\vec{V}$  and a small disturbance  $\vec{v}$ .

The expressions of  $\vec{V}$  and  $\vec{v}$  are given in [2].

Thus, in the case of an infinitely long apparatus with the small-gap approximation, GRAEBEL establishes a sixth-order ordinary differential equation with a non-constant coefficient, for the tangential velocity of the disturbance, associated with homogeneous boundary conditions. That equation is similar to that which governs the transition in a newtonian fluid, [3].

For that problem, many methods of integration have been proposed, [4].

In the case of a Bingham fluid considered here, GRAEBEL solves the equation by an expansion of the solution in a

Fourier series of the radial coordinate  $x$ . Then he obtains an infinite system of linear homogeneous equations, with an infinite number of unknown constants. Annuling the determinant of the system, he obtains the critical values  $T_c$  of the Taylor number and  $a_c$  of the wave length, which characterize the appearance of the Taylor vortices. Then GRAEBEL proposes a family of marginal stability curves, (fig.2). But he does not give the numerical values of  $T_c$  and  $a_c$ , in function of the Bingham number  $P$ . In this paper, we precise the numerical values of the critical parameters, then, we compute the velocity field of the secondary motion, at the transition.

## 2 THE MARGINAL STABILITY STUDY

The equation of motion for the angular velocity  $v$  is

$$\left[ A_6 D^6 - A_4 D^4 + A_2 D^2 - A_0 \right] v = T \cdot a^2 \cdot x \cdot v \quad (1)$$

where

$$D \equiv \frac{d}{dx} \quad (2)$$

and the  $A_i$ 's are constants depending on the Bingham number. The no-slip condition on the cylinders is:

$$v = D^2 v = D \left[ U^2 - a^2(1+P) \right] v = 0 \quad \text{at } x=0 \text{ and } 1 \quad (3)$$

To solve (1), we seek a solution in the form:

$$v(x) = \int_{\beta}^{\alpha} e^{xt} \cdot v'(t) dt \quad (4)$$

Then, the equation (3) can be solved such that

$$T \cdot a^2 \cdot \frac{dv'(t)}{dt} = K(t) \cdot v'(t) \quad (5)$$

with

$$K(t) = -A_6 t^6 + A_4 t^4 - A_2 t^2 + A_0 \quad (6)$$

$\alpha$  and  $\beta$  being such that

$$e^{xt} \cdot v'(t) = 0 \quad (7)$$

The integration contours, which are chosen such that

$$\mathcal{R}_e \left\{ \int K(t) dt \right\} = -\infty \quad (8)$$

at their extremities, are shown on fig.3 .

On these, we derive six linearly non-dependent solutions.

The eigenvalue problem (3) on these solutions leads to the critical parameters  $a_c$  and  $T_c$ .

The solutions are calculated numerically. They contain infinite integrals which rapidly converge. We give the numerical values of  $a_c$  and  $T_c$  on Table (a), for some values of  $P$  comprised between 0.00 and 1.50.

### 3 THE VELOCITY FIELD OF THE SECONDARY MOTION

As a quasi-linear solution, above the critical point, the tangential velocity of the secondary motion is a linear combination of the six solutions found previously.

The relations defining the radial and the axial velocities as functions of  $v$  are given in [2] .

The tables (b), (c) and (d) give the numerical values of the velocity field, which we have computed for the values of  $P$  which have been taken above.

The general form of their variation in the gap is shown on the fig. (4,5 and 6), which have been drawn for  $P = 0.00$  .

For that value of the Bingham number, which corresponds to the newtonian fluid, our results are in good agreement with those of DAVEY, [6] .

The table (e) shows that the non-newtonian effects tend to displace to the inner cylinder, the point of maximum speed.

That result confirms the stabilizing effect of the plastic terms.

7 TEXTE DE LA NOTE1- INTRODUCTION

La stabilité de l'écoulement d'un fluide visqueux confiné entre deux cylindres coaxiaux, dans le cas où le cylindre extérieur est immobile et l'autre est en rotation (écoulement de Couette-Taylor) a suscité de nombreux travaux depuis l'étude de TAYLOR [1], devenue classique.

La plupart de ceux-ci sont consacrés au fluide newtonien.

GRAEBEL [2], présente un calcul de la transition laminaire-tourbillons de Taylor pour le fluide viscoplastique ou fluide à seuil, dans l'hypothèse d'une loi de comportement linéaire (modèle de Bingham).

A partir de l'écoulement tangentiel stable, faisons croître progressivement la vitesse angulaire  $\Omega$  du cylindre intérieur.

Lorsque  $\Omega$  est légèrement supérieur à une valeur critique  $\Omega_c$ , l'écoulement, qui reste laminaire, se produit dans des cellules toroïdales contrarotatives, limitées par des plans transversaux. C'est le régime des tourbillons de Taylor.

D'un point de vue théorique, l'écoulement obéit aux lois usuelles de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, que l'on impose à la superposition du champ tangentiel de base  $\vec{V}$  et d'une petite perturbation  $\vec{v}$ .

L'expression de  $\vec{V}$  et la forme de  $\vec{v}$  sont données en [2].

Ainsi, dans l'hypothèse d'un appareillage infiniment long et de petit espace annulaire, GRAEBEL établit le système

d'équations adimensionnelles suivant, en théorie linéaire, pour une perturbation stationnaire (stabilité marginale) :

$$\left. \begin{aligned} \left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^2 + P \left( \frac{d^2}{dx^2} - a^2 \right)^2 \right] u &= (1-x)v \\ \left[ \frac{d^2}{dx^2} - a^2 (1+P) \right] v &= -Ta^2 u \end{aligned} \right\} (1)$$

avec les conditions aux limites suivantes (non-glissement sur les parois des cylindres) :

$$u = \frac{du}{dx} = v = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } 1 \quad (2)$$

Dans ces relations,  $a$  désigne la longueur d'onde de la perturbation ;  $x$ , la coordonnée radiale (fig.1);  $u$  et  $v$ , les champs de vitesses radiales et tangentielles, respectivement.

La définition du nombre de Taylor  $T$  et du nombre de Bingham  $P$  est donnée en [2].

Le système (1) est analogue à celui qui régit l'écoulement du fluide newtonien dans les mêmes hypothèses [3]. Pour ce problème, diverses méthodes d'intégration ont été proposées [4].

Pour le fluide de Bingham considéré ici, GRAEBEL résout le système (1) par un développement de la solution en une série de Fourier de la coordonnée radiale. Il obtient alors un système infini d'équations linéaires homogènes, avec un nombre infini de constantes inconnues. En imposant la nullité du déterminant de ce système, l'auteur obtient les valeurs critiques  $T_c$  du nombre de Taylor et  $a_c$  de la longueur d'onde, qui déterminent l'apparition des tourbillons de Taylor. GRAEBEL propose alors la famille de courbes de stabilité marginale que nous présentons sur la figure(2). Mais il ne donne pas les valeurs numériques de  $a_c$  et  $T_c$  en fonction du nombre de Bingham  $P$ .

Dans ce travail, nous précisons les valeurs des paramètres critiques, puis nous calculons numériquement le champ de vitesses du mouvement secondaire, à la transition laminaire-tourbillons de Taylor.

## 2. STABILITE MARGINALE .

Par substitution, le système (1) se réduit à :

$$(A_4 D^4 - A_4 D^2 + A_2 D^2 - A_0) v = Ta^2 x v \quad (3)$$

avec

$$A_4 = 1 + P$$

$$A_4 = a^2 (3 + 4P + P^2)$$

$$A_2 = a^4 (3 + 5P + 2P^2)$$

$$A_0 = a^6 (1 + 2P + P^2) - Ta^2$$

avec les conditions aux limites (2\*), qui s'écrivent :

$$v = D^2 v = D[D^2 - a^2(1 + P)] = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } 1 \quad (4)$$

avec

$$D \equiv \frac{d}{dx} \quad (5)$$

La méthode intégrale que nous utilisons pour intégrer (3), s'élabore de la manière suivante : [5]

Cherchons une solution de la forme

$$v(x) = \int_B^\alpha e^{x \cdot t} v'(t) dt \quad (6)$$

nous pouvons alors résoudre (3), de telle manière que

$$Ta^2 \frac{dv'(t)}{dt} = K(t) v'(t) \quad (7)$$

avec

$$K(t) = -A_4 t^4 + A_4 t^4 - A_2 t^2 + A_0 \quad (8)$$

La solution tabulaire de (7) est

$$v'(t) = C \exp\left[\frac{1}{Ta^2} \int K(t) dt\right] \quad (9)$$

$\beta$  et  $\alpha$  étant choisis de telle sorte que

$$e^{\alpha t} v'(t) = 0 \quad (10)$$

les contours d'intégration dans le plan complexe de la variable  $t$ , sont tels qu'aux extrémités,

$$\operatorname{Re} \left( \int K(t) dt \right) = -\infty \quad (11)$$

Les deux premières solutions qui s'obtiennent par intégration le long de  $(c_1)$  (fig. 2), ont pour expressions :

$$v_1(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos[M_1(x,t)] \cdot N_1(x,t) dt$$

et

$$v_2(x) = - \int_0^{+\infty} \sin[M_1(x,t)] \cdot N_1(x,t) dt \quad (12)$$

avec

$$v_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x t} \cdot L(t) dt \quad (13)$$

$$L(t) = \exp\left\{-\frac{1}{Ta^2} \left[ \frac{A_4 t^7}{7} + A_4 \frac{t^5}{5} + \frac{A_2 t^3}{3} + (A_0 - Ta^2)t \right]\right\}$$

$$M_1(x, t) = \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \sin \frac{2\pi}{7} - \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \sin \frac{3\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} \quad (14)$$

$$N_1(x, t) = \exp\left\{\left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \cos \frac{2\pi}{7} - \frac{A_4 t^7}{7Ta^2} - \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \cos \frac{3\pi}{7} + \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \cos \frac{\pi}{7}\right\}$$

L'intégration le long de  $(c_2)$  donne les deux solutions suivantes

$$v_3(x) = v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos[M_2(x, t)] \cdot N_2(x, t) dt \quad (15)$$

$$v_4(x) = - \int_0^{+\infty} \sin[M_2(x, t)] \cdot N_2(x, t) dt$$

avec

$$M_2(x, t) = \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \sin \frac{4\pi}{7} + \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \sin \frac{\pi}{7} + \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} \quad (16)$$

et

$$N_2(x, t) = \exp\left\{\left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \cos \frac{4\pi}{7} - \frac{A_4 t^7}{7Ta^2} - \frac{A_4 t^5}{5Ta^2} \cos \frac{\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \cos \frac{2\pi}{7}\right\}$$

Enfin, les deux dernières solutions qui s'obtiennent par intégration le long de  $(c_3)$  s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} v_3(x) &= v_0(x) - \int_0^{+\infty} \cos[M_3(x,t)] \cdot N_3(x,t) dt \\ v_4(x) &= - \int_0^{+\infty} \sin[M_3(x,t)] \cdot N_3(x,t) dt \end{aligned} \right\} (17)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} M_3(x,t) &= \left[ x + \frac{A_0}{Ta^2} \right] t \sin \frac{6\pi}{7} + \frac{A_4 t^3}{5Ta^2} \sin \frac{5\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \sin \frac{4\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} \\ N_3(x,t) &= \exp \left[ \left( x + \frac{A_0}{Ta^2} \right) t \cos \frac{6\pi}{7} \right] - \frac{A_4 t^3}{7Ta^2} \cos \frac{5\pi}{7} - \frac{A_2 t^3}{3Ta^2} \cos \frac{4\pi}{7} \end{aligned} \right\} (18)$$

Les solutions précédentes se calculent numériquement .

Le problème aux valeurs propres des conditions aux frontières (4) n'aura une solution non-triviale que si son déterminant est non-nul .

Le tableau (a) précise les valeurs numériques des paramètres critiques pour quelques valeurs de  $P$  , comprises entre 0.00 et 1.50

### 3. CHAMP DE VITESSES DU MOUVEMENT SECONDAIRE

En solution quasi-linéaire au-delà du point critique, la vitesse tangentielle du mouvement secondaire est une combinaison linéaire des six solutions déterminées précédemment :

$$v(x) = c_i \cdot v_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (19)$$

Les relations définissant les vitesses radiale  $u$  et axiale  $w$  en fonction de  $v$  sont données en [2].

Les tableaux (b), (c), et (d) donnent les valeurs numériques du champ de vitesses, que nous avons calculées pour les valeurs de  $P$ , utilisées précédemment.

L'allure générale de leur variation dans l'entrefer est illustrée sur les fig. (4, 5 et 6), qui ont été tracées pour  $P=0.00$ . Pour cette valeur du nombre de Bingham, qui correspond au fluide newtonien, nos résultats sont en bon accord avec ceux de DAVEY [6].

Le tableau (e) montre que les effets non-newtoniens ont tendance à déplacer vers le cylindre intérieur, le point de vitesse maximale. Ce résultat confirme le rôle stabilisant des termes plastiques.

### 4. CONCLUSION

Nous avons effectué une étude théorique de la transition laminaire-tourbillons de Taylor, dans un fluide de Bingham.

La stabilité marginale est régie par une équation différentielle du sixième ordre avec un coefficient non-constant. Celle-ci a été résolue par une méthode intégrale. La solution comporte des intégrales infinies qui conver-

gent rapidement.

L'application de la condition d'adhérence aux parois des cylindres, a permis de préciser les valeurs des paramètres critiques, en fonction du nombre de Bingham,  $P$ , qui mesure les effets non-newtoniens, dans la gamme  $0.00 \leq P \leq 1.50$ .

A la transition, le champ de vitesses du mouvement secondaire a été calculé numériquement pour toutes les valeurs de  $P$ , étudiées précédemment.

Ce dernier calcul indique que les effets non-newtoniens ont tendance à déplacer vers le cylindre intérieur, le point de vitesse maximale; ce qui confirme que la plasticité a un effet stabilisant pour l'écoulement.

L'étude de la brisure des symétries azimuthale (par rotation par rapport à  $Oz$ ) et temporelle de l'écoulement ci-dessus, serait une suite intéressante à ce travail.

8. LEGENDE DES FIGURES

- Fig.1 Géométrie du champ d'écoulement
- Fig.2 Courbes de stabilité marginale, d'après GRAEBEL [2]
- Fig.3 Contours d'intégration dans le plan complexe de la variable  $t$
- Fig.4 Variation de la vitesse tangentielle dans l'espace annulaire pour  $P=0.00$
- Fig.5 Variation de la vitesse radiale dans l'espace annulaire pour  $P=0.00$
- Fig.6 Variation de la vitesse axiale dans l'espace annulaire pour  $P=0.00$
- Tableau a Nombre de Taylor et longueur d'onde critiques en fonction du nombre de Bingham
- Tableau b Vitesse tangentielle du mouvement secondaire pour divers nombres de Bingham
- Tableau c Vitesse radiale du mouvement secondaire pour divers nombres de Bingham
- Tableau d Vitesse axiale du mouvement secondaire pour divers nombres de Bingham

Tableau e Déplacement du point de vitesse maximale vers  
 le cylindre intérieur, causé par les effets  
 non-newtoniens

Fig. 1 Contours d'intégration dans le plan complexe de la  
 variable  $\zeta$   
 Fig. 2 Variation de la vitesse tangentielle dans l'espace  
 annulaire pour  $\eta=0.00$   
 Fig. 3 Variation de la vitesse radiale dans l'espace annu-  
 laire pour  $\eta=0.00$   
 Fig. 4 Variation de la vitesse axiale dans l'espace annu-  
 laire pour  $\eta=0.00$

Tableau a Nombre de Taylor et longueur d'onde critiques  
 en fonction du nombre de Bingham  
 Tableau b Vitesse tangentielle du mouvement secondaire  
 pour divers nombres de Bingham  
 Tableau c Vitesse radiale du mouvement secondaire pour  
 divers nombres de Bingham  
 Tableau d Vitesse axiale du mouvement secondaire pour  
 divers nombres de Bingham

9. REFERENCES

- 1 TAYLOR, G.I. Phil. Roy. Soc. A 223, 289 (1923)
- 2 GRAEBEL, W.P. Proc. Intern Symp. on second-order effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics Haifa , Israel (1962)
- 3 CHANDRASEKHAR, S. "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability". Oxford at the Clarendon Press (1961).
- 4 LIN, C.C. "The theory of hydrodynamic stability" Cambridge at the University Press (1966)
- 5 HOCHSTADT, H. "Les fonctions de la Physique mathématique" Masson (1973)
- 6 DAVEY, A. Jour. Fluid Mech. 14, 336 (1962)

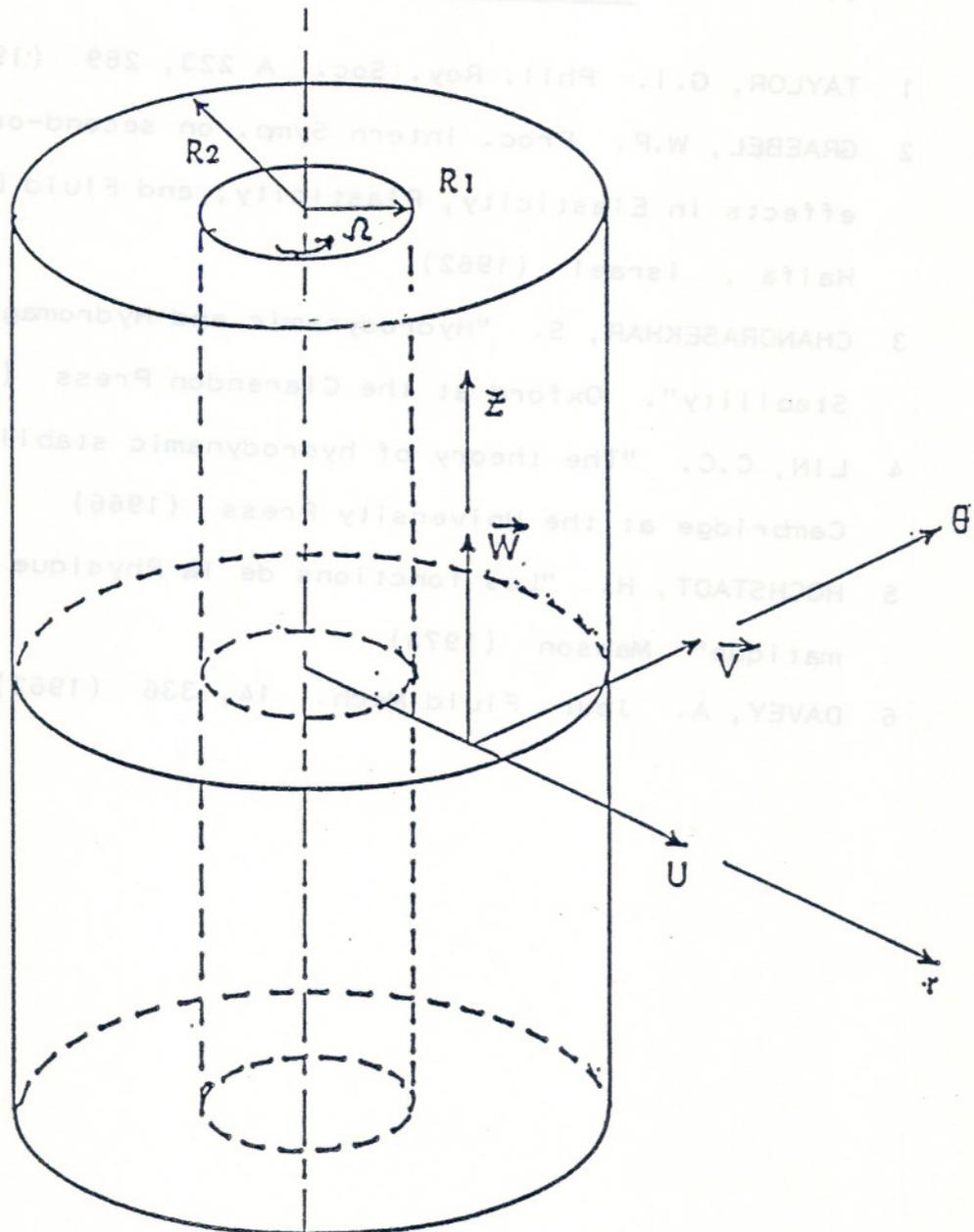


Fig. 1

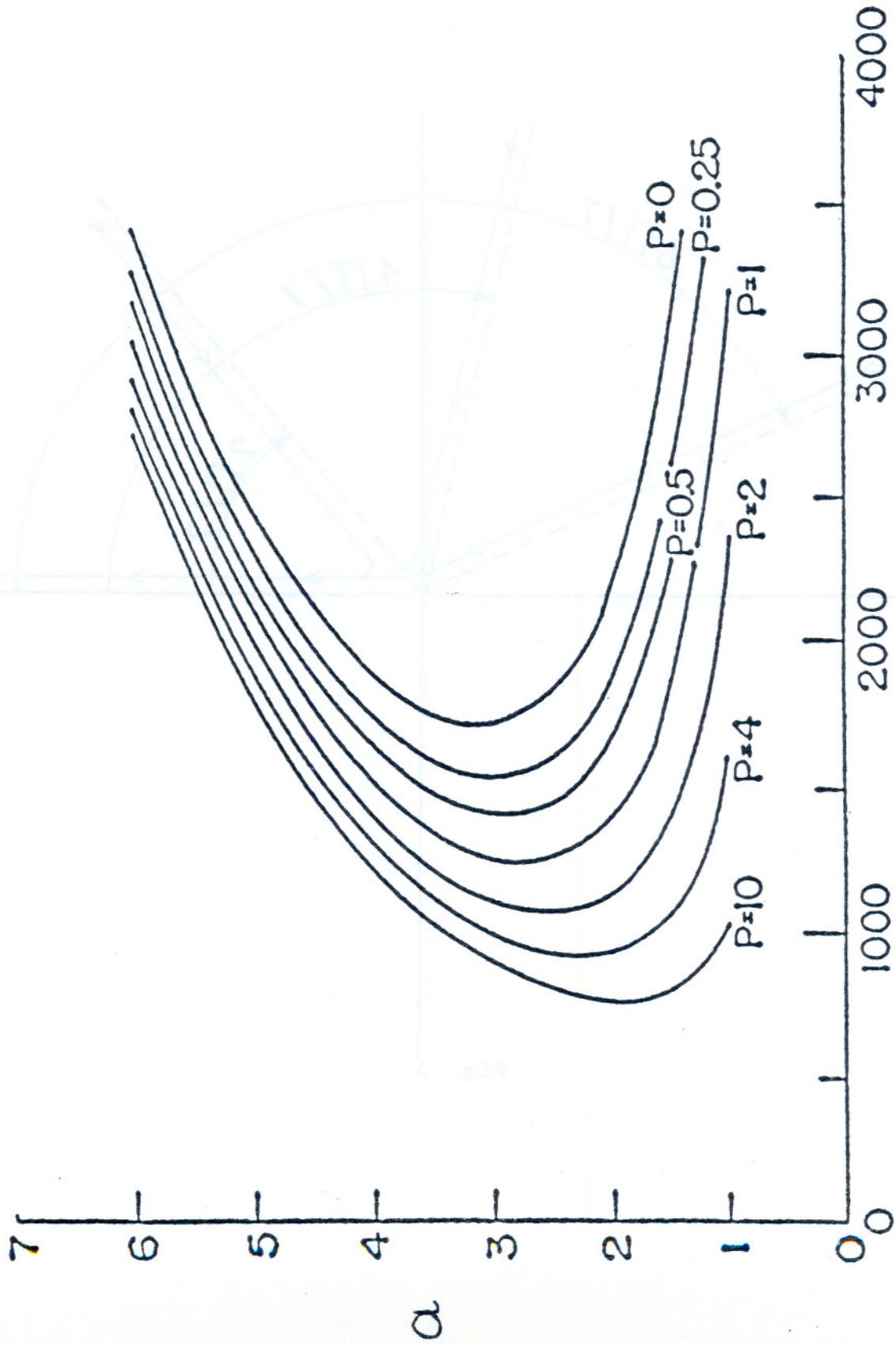


Fig. 2

 $T / (1 + P^2)$

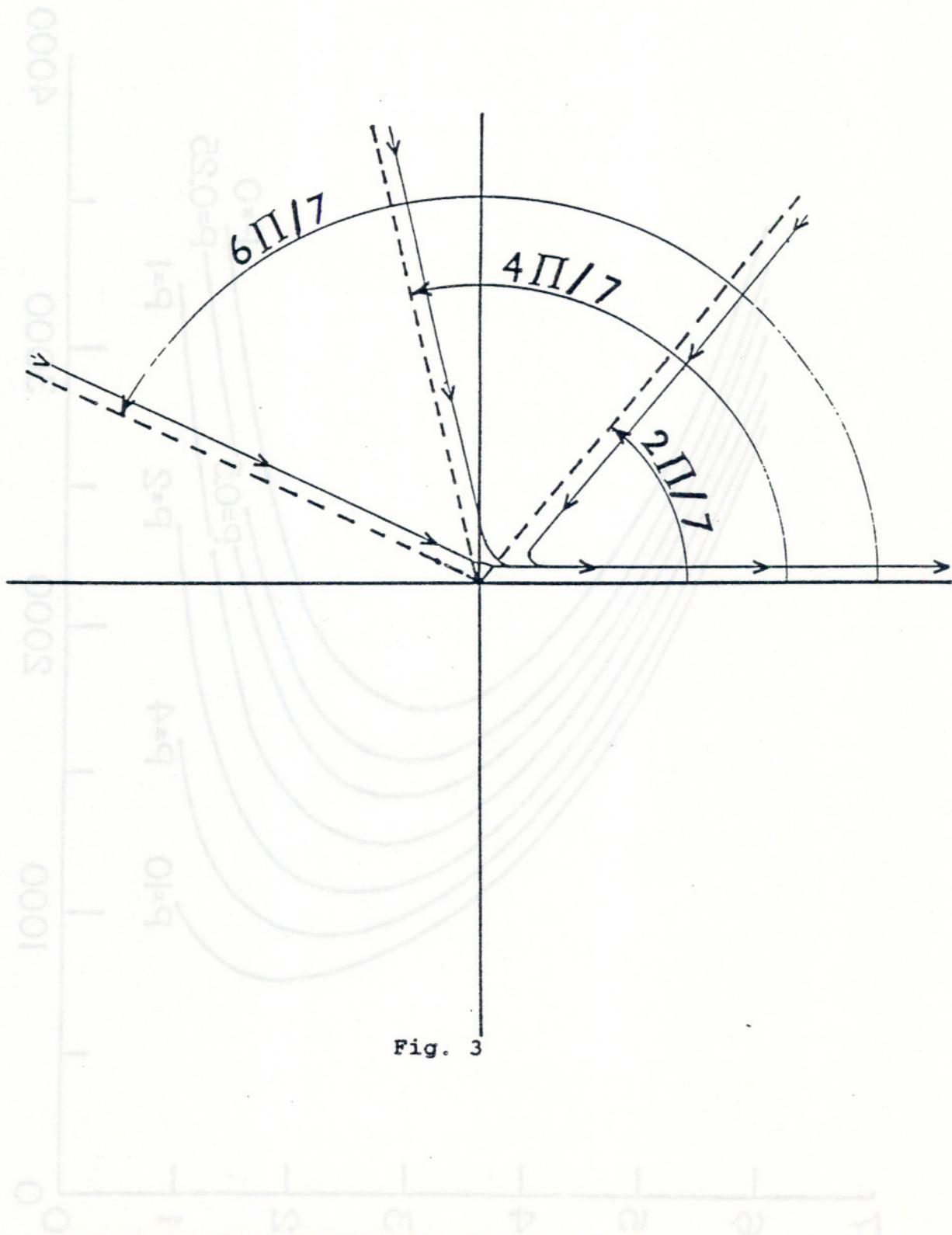


Fig. 3

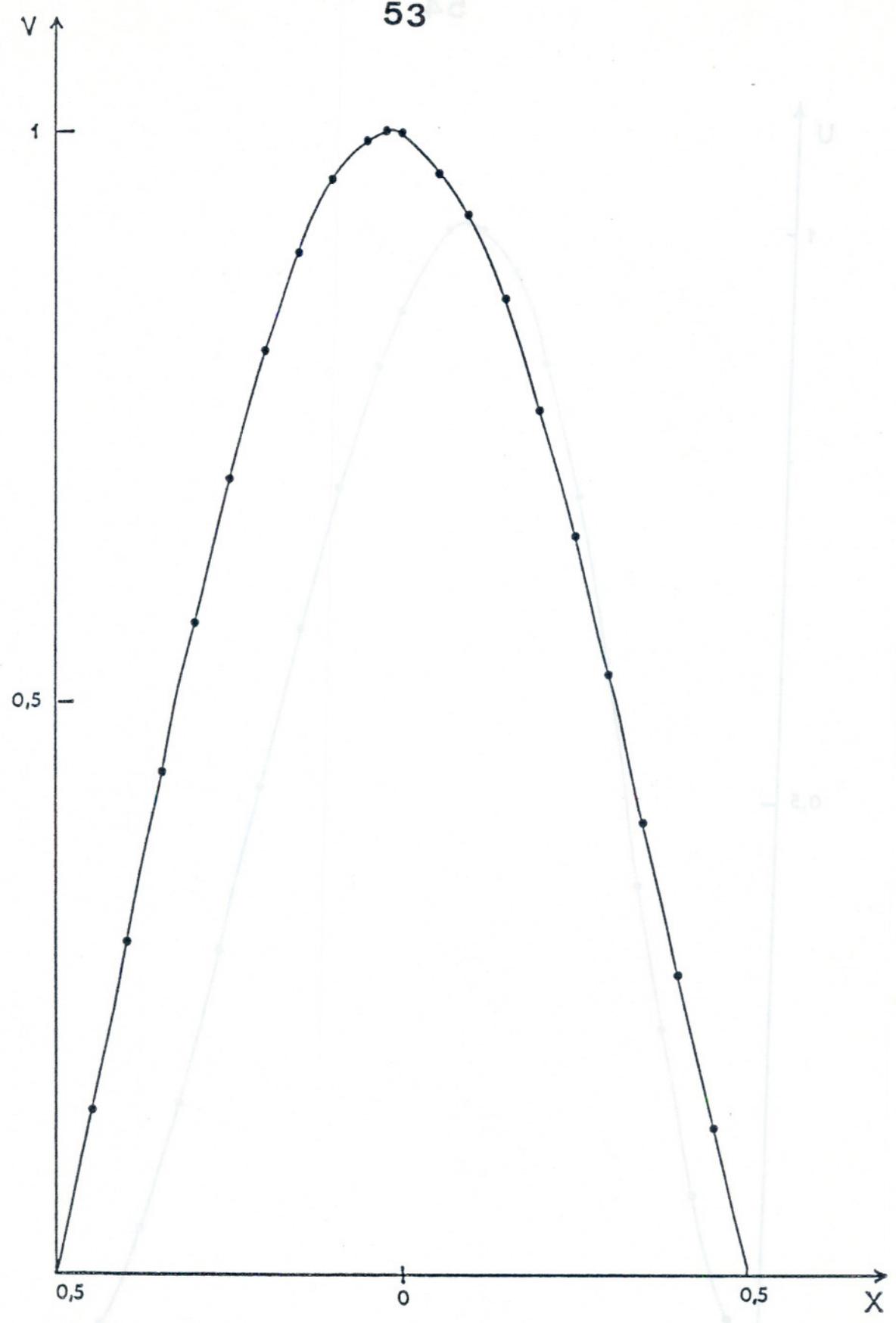


Fig. 4

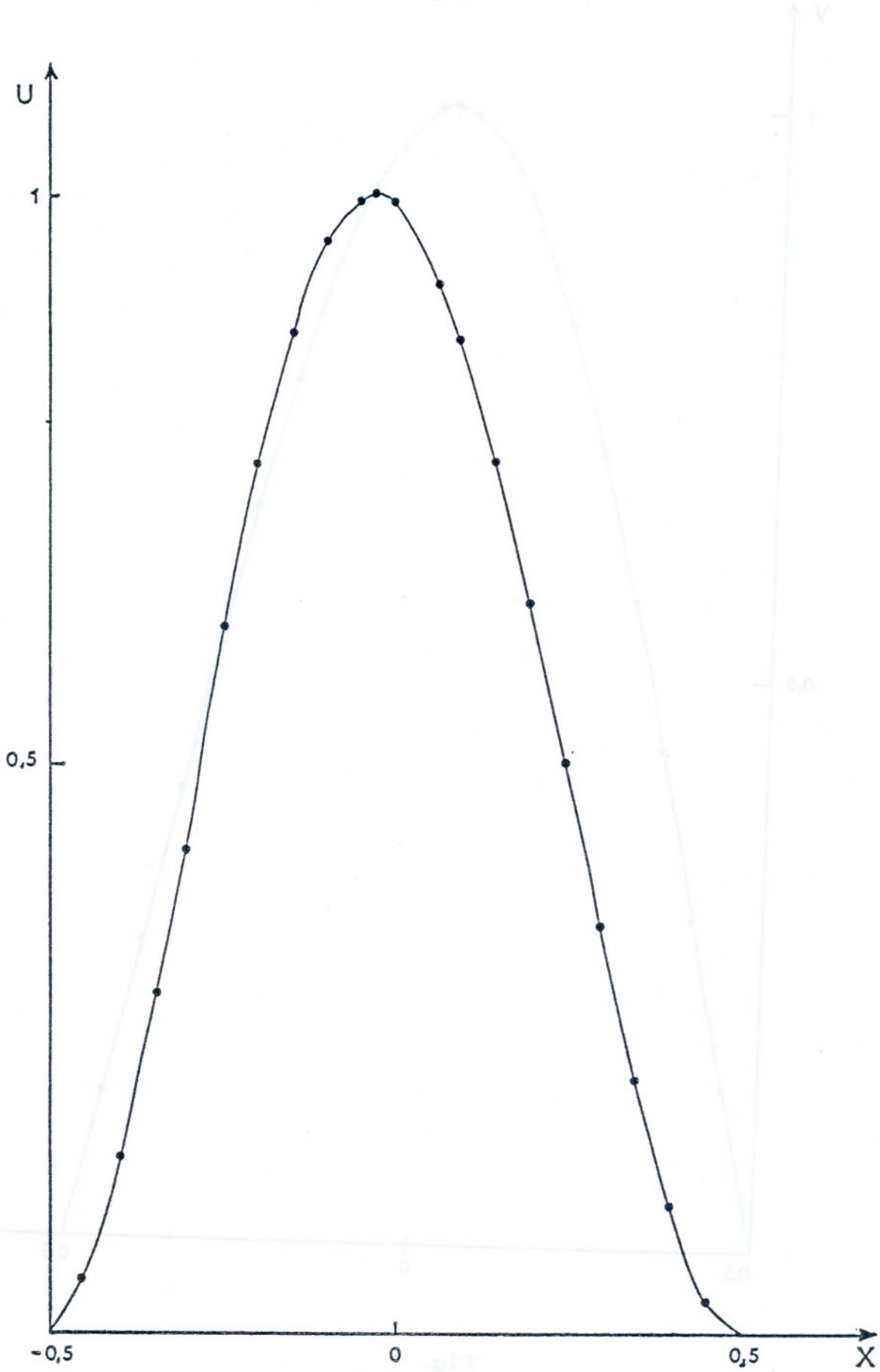


Fig. 5

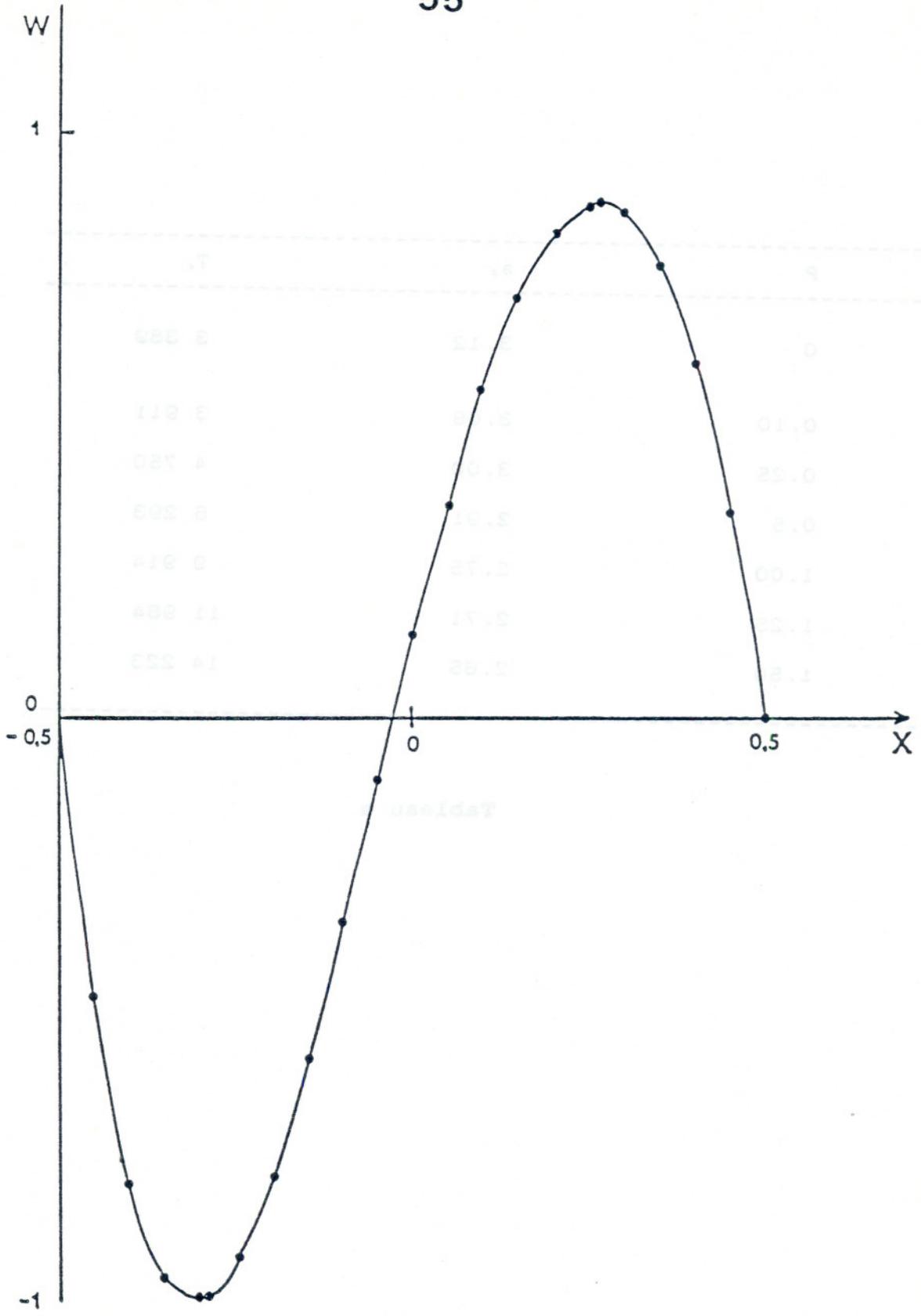


Fig. 6

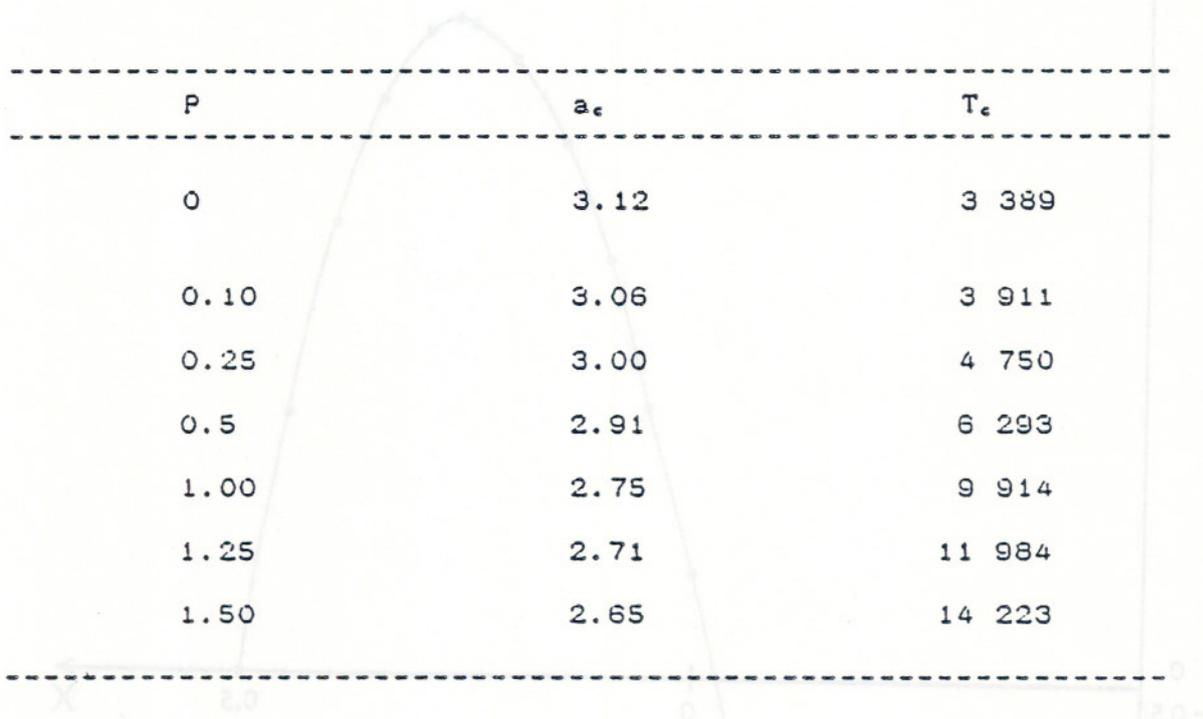


Tableau a

v pour

	P = 0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.143	0.145	0.149	0.149	0.155	0.157	0.159
0.10	0.288	0.291	0.296	0.300	0.309	0.312	0.315
0.15	0.431	0.435	0.441	0.447	0.459	0.465	0.469
0.20	0.568	0.573	0.580	0.588	0.602	0.608	0.613
0.25	0.695	0.700	0.707	0.716	0.731	0.737	0.742
0.30	0.808	0.810	0.816	0.825	0.839	0.845	0.850
0.35	0.894	0.898	0.903	0.911	0.923	0.928	0.931
0.40	0.957	0.960	0.964	0.969	0.977	0.980	0.982
0.45	0.993	0.994	0.996	0.997	0.999	1.00	1.00
0.50	0.999	0.998	0.997	0.995	0.989	0.987	0.984
0.55	0.976	0.973	0.969	0.962	0.949	0.942	0.937
0.60	0.926	0.921	0.913	0.901	0.879	0.869	0.860
0.65	0.852	0.844	0.833	0.815	0.785	0.771	0.759
0.70	0.757	0.747	0.732	0.710	0.672	0.655	0.640
0.75	0.646	0.634	0.617	0.591	0.546	0.525	0.508
0.80	0.523	0.510	0.492	0.463	0.413	0.389	0.370
0.85	0.394	0.381	0.362	0.332	0.219	0.254	0.234
0.90	0.262	0.250	0.231	0.202	0.150	0.125	0.105
0.95	0.130	0.120	0.104	0.078	0.031	0.007	0.013
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau b

	u pour						
	P = 0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.043	0.043	0.043	0.049	0.048	0.049	0.05
0.10	0.151	0.153	0.154	0.163	0.166	0.170	0.172
0.15	0.298	0.302	0.305	0.315	0.325	0.329	0.333
0.20	0.461	0.466	0.471	0.483	0.497	0.503	0.508
0.25	0.621	0.627	0.634	0.646	0.662	0.669	0.674
0.30	0.764	0.769	0.777	0.789	0.804	0.811	0.816
0.35	0.878	0.883	0.889	0.900	0.913	0.917	0.922
0.40	0.957	0.960	0.964	0.971	0.979	0.982	0.984
0.45	0.996	0.997	0.998	0.999	1.00	0.999	0.999
0.50	0.994	0.992	0.989	0.985	0.976	0.971	0.967
0.55	0.953	0.948	0.939	0.928	0.909	0.899	0.892
0.60	0.877	0.867	0.854	0.834	0.803	0.789	0.777
0.65	0.772	0.758	0.738	0.710	0.666	0.647	0.631
0.70	0.644	0.627	0.601	0.564	0.506	0.483	0.462
0.75	0.504	0.482	0.450	0.405	0.334	0.306	0.282
0.80	0.361	0.335	0.298	0.245	0.162	0.130	0.102
0.85	0.226	0.197	0.156	0.097	0.002		
0.90	0.111	0.081	0.386				
0.95	0.005	0.001					
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau c

w pour

P =	0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.05	0.490	0.513	0.545	0.581	0.646	0.669	0.682
0.10	0.802	0.814	0.832	0.850	0.884	0.896	0.897
0.15	0.963	0.967	0.975	0.979	0.991	0.993	0.986
0.20	0.998	0.997	0.997	0.990	0.985	0.980	0.968
0.25	0.933	0.927	0.921	0.906	0.888	0.878	0.862
0.30	0.790	0.776	0.769	0.749	0.722	0.708	0.690
0.35	0.592	0.580	0.565	0.540	0.505	0.489	0.471
0.40	0.359	0.346	0.328	0.300	0.260	0.242	0.225
0.45	0.112	0.097	0.077	0.046	0.003	-0.016	-0.031
0.50	-0.133	-0.149	-0.171	-0.203	-0.249	-0.267	-0.280
0.55	-0.360	-0.378	-0.401	-0.434	-0.480	-0.498	-0.509
0.60	-0.442	-0.576	-0.600	-0.633	-0.680	-0.696	-0.704
0.65	-0.715	-0.733	-0.758	-0.790	-0.836	-0.851	-0.856
0.70	-0.822	-0.840	-0.864	-0.897	-0.941	-0.954	-0.957
0.75	-0.872	-0.889	-0.912	-0.944	-0.987	-0.998	-0.999
0.80	-0.857	-0.873	-0.895	-0.925	-0.966	-0.976	-0.976
0.85	-0.772	-0.785	-0.804	-0.832	-0.870	-0.880	-0.879
0.90	-0.608	-0.617	-0.631	-0.654	-0.689	-0.698	-0.698
0.95	-0.355	-0.357	-0.364	-0.380	-0.408	-0.417	-0.419
1.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tableau d

	P = 0.00	0.10	0.25	0.50	1.00	1.25	1.50
$V_{max}$ pour							
x =	0.49	0.48	0.48	0.47	0.46	0.46	0.45
$u_{max}$ pour							
x =	0.47	0.47	0.46	0.46	0.45	0.44	0.44
$w_{max}$ pour							
x =	0.19	0.19	0.18	0.18	0.17	0.17	0.76

Tableau e

## L'ÉCOULEMENT PLASTIQUE ET LE RHEOMETRE ROTATIF

## A PLATEAUX PARALLELES

Irvin M. Krieger \*

Laboratoire de Spectrométrie et d'Imagerie Ultrasonores

Université Louis Pasteur

Strasbourg, France

## SOMMAIRE

De tous les rhéomètres rotatifs, celui à plateaux parallèles est le plus facile à construire et à aligner. Il possède aussi l'avantage d'avoir une sensibilité réglable et il ne nécessite qu'un très faible volume d'échantillon. On l'utilise actuellement pour la rhéologie en régime permanent des liquides non-newtoniens, et pour la rhéologie oscillatoire des matériaux viscoélastiques. Etant donné que le cisaillement dans l'entrefer n'est pas uniforme, la question se pose de savoir si cette géométrie est bien adaptée aux fluides qui montrent l'existence de contraintes seuils (liquides plastiques). Sous certaines conditions de cisaillement, une partie du fluide se trouve dans un régime de comportement élastique, tandis que le reste se trouve dans un régime visqueux. L'analyse présentée dans ce manuscrit montre que le rhéomètre rotatif à plateaux parallèles s'adapte très bien à la rhéométrie en régime permanent des fluides plastiques pour les trois types de comportement: élastique, visqueux et mixte.

---

\* Adresse permanente: Department of Chemistry, Case Western Reserve University, Cleveland, OH 44106.

L'ÉCOULEMENT PLASTIQUE ET LE RHEOMETRE ROTATIF  
A PLATEAUX PARALLELES

Irvin M. Krieger \*

Laboratoire de Spectrométrie et d'Imagerie Ultrasonores

Université Louis Pasteur

Strasbourg, France

SOMMAIRE

De tous les rhéomètres rotatifs, celui à plateaux parallèles est le plus facile à construire et à aligner. Il possède aussi l'avantage d'avoir une sensibilité réglable et il ne nécessite qu'un très faible volume d'échantillon. On l'utilise actuellement pour la rhéologie en régime permanent des liquides non-newtoniens, et pour la rhéologie oscillatoire des matériaux viscoélastiques. Etant donné que le cisaillement dans l'entrefer n'est pas uniforme, la question se pose de savoir si cette géométrie est bien adaptée aux fluides qui montrent l'existence de contraintes seuils (liquides plastiques). Sous certaines conditions de cisaillement, une partie du fluide se trouve dans un régime de comportement élastique, tandis que le reste se trouve dans un régime visqueux. L'analyse présentée dans ce manuscrit montre que le rhéomètre rotatif à plateaux parallèles s'adapte très bien à la rhéométrie en régime permanent des fluides plastiques pour les trois types de comportement: élastique, visqueux et mixte.

---

\* Adresse permanente: Department of Chemistry, Case Western Reserve University, Cleveland, OH 44106.

## ABSTRACT

The parallel-disk rotational viscometer has advantages of simple construction and alignment, adjustable sensitivity and small sample volume. Its use is well established for steady-state rheometry of non-Newtonian fluids, and for oscillatory rheometry of linear viscoelastic materials. The question has been raised as to whether the nonuniformity of shear in this viscometric geometry might render it unsuitable for the study of materials exhibiting yield stresses (plastic fluids) because, under a certain range of shear conditions, part of the sample will be in the elastic regime while another part is in the viscous regime. The analysis presented in this paper shows that the parallel-disk rotational viscometer is highly suitable for the steady-shear rheometry of plastic fluids in all three regimes: elastic, viscous and mixed.

## INTRODUCTION

Parmi les géométries de rotation adaptées à la mesure des propriétés rhéologiques des fluides, la configuration de plateaux parallèles est la plus facile à fabriquer et à aligner. Elle possède les avantages supplémentaires de ne nécessiter qu'un petit volume d'échantillon et de permettre la modification de la sensibilité rien qu'en faisant varier la distance entre les plateaux. Cette configuration peut être utilisée aussi bien en écoulement oscillatoire de faible amplitude pour caractériser la viscoélasticité, qu'en rotation continue pour mesurer la viscosité non-newtonienne en fonction de la vitesse de cisaillement.

La plupart des rhéomètres rotatifs imposent une vitesse angulaire comme variable indépendante, et mesurent le couple qui en résulte. Certains nouveaux rhéomètres utilisent au contraire le couple comme variable indépendante, et mesurent la déformation

ou la vitesse angulaire. Ces derniers instruments sont bien adaptés à l'étude des fluides plastiques, c'est-à-dire, aux matériaux qui se comportent comme des solides élastiques aux contraintes inférieures à leurs contraintes seuils, et comme des liquides visqueux à des contraintes supérieures.

Dans le rhéomètre rotatif à plateaux parallèles, le cisaillement de l'échantillon est très inhomogène, variant de zéro au niveau de l'axe jusqu'à un maximum à la périphérie des disques. Tant que la contrainte au bord des disques reste inférieure à la contrainte seuil, tout l'échantillon se comporte comme un solide élastique. Quand le couple est augmenté graduellement à partir de zéro, on rencontre un régime mixte, où l'échantillon près de l'axe se trouve dans le régime élastique, tandis que la partie de l'échantillon éloignée de l'axe se trouve dans le régime visqueux. Le rayon du régime élastique diminue avec l'augmentation du déplacement angulaire; pour des couples suffisamment élevés pour permettre une rotation continue, tout l'échantillon se trouve effectivement dans un régime visqueux.

Le premier à analyser le régime visqueux fut Burgers (1), qui démontra que, malgré l'inhomogénéité du cisaillement, on peut déterminer rigoureusement la contrainte en fonction de la vitesse de cisaillement. Le but du travail actuel est d'analyser les régimes élastique et mixte, et de savoir si les avantages de cette géométrie pourraient être utilisés pour l'étude des fluides plastiques.

#### LES FLUIDES PLASTIQUES

Aux contraintes inférieures à sa contrainte seuil  $\sigma_y$ , un fluide plastique se comporte comme un solide élastique, dont le module de cisaillement  $G = \sigma/\gamma$  est fonction de la déformation de cisaillement  $\gamma$ . (Pour les solides qui obéissent à la loi de Hooke,  $G$  est une constante du matériau, fonction de la

composition, de la température et de la pression, mais indépendante de  $\sigma$ .) Le déplacement qui correspond à  $\sigma_Y$  est  $\gamma_Y$ . Pour  $\sigma > \sigma_Y$ , le matériau se comporte comme un liquide visqueux, dont la viscosité  $\mu$  est fonction de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . (Pour un liquide newtonien,  $\mu$  est une constante du matériau, indépendante de  $\dot{\gamma}$ .) Voici trois exemples de fluides plastiques:

$$\text{Le fluide de Bingham: } \dot{\gamma} = (\sigma - \sigma_Y) / \mu_1 \quad (1)$$

$$\text{Le fluide de Casson: } \dot{\gamma}^{1/2} = (\sigma^{1/2} - \sigma_Y^{1/2}) / \mu_1^{1/2} \quad (2)$$

$$\text{Le fluide de Herschel-Bulkley: } \dot{\gamma} = a(\sigma - \sigma_Y)^n \quad (3)$$

Dans les équations 1-3,  $\dot{\gamma} = 0$  quand  $\sigma < \sigma_Y$ ;  $\mu_1$  est la viscosité limite à fort cisaillement, et  $a$  et  $n$  sont des paramètres.

Afin de caractériser la rhéologie d'un fluide plastique sous cisaillement continu, il faut déterminer:

- a. la contrainte seuil  $\sigma_Y$ ;
- b. pour  $\sigma < \sigma_Y$ , la forme de la fonction  $G(\tau)$ ;
- c. pour  $\sigma > \sigma_Y$ , la forme de la fonction  $\mu(\dot{\gamma})$ .

## LE REGIME VISQUEUX

L'analyse de Burgers de l'écoulement des fluides non-newtoniens dans le viscomètre rotatif à plateaux parallèles est tout à fait semblable à celle de Weissenberg-Rabinowitsch pour l'écoulement dans les capillaires (2). La figure 1 représente schématiquement un rhéomètre à plateaux parallèles; les dimensions importantes sont le rayon  $R$  des plateaux et la largeur  $L$  de l'entrefer. Le disque inférieur est fixe, et le disque supérieur est soumis à un couple  $M$ , produisant un déplacement angulaire  $\theta$  et une vitesse angulaire  $\Omega$ . La vitesse de cisaillement d'un élément de l'échantillon situé à une distance  $r$  de

l'axe est

$$\dot{\gamma} = \Omega r/L \quad (4)$$

On obtient le couple en intégrant la contrainte:

$$M = \int_0^R r \cdot \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \int_0^R \mu \dot{\gamma} r^2 dr \quad (5)$$

En effectuant le changement de variable  $r \rightarrow \dot{\gamma}$  et en posant  $\dot{\gamma}_R = R\Omega/L$  on obtient:

$$M = 2\pi(L/\Omega)^3 \int_0^{\dot{\gamma}_R} \mu \dot{\gamma}^3 d\dot{\gamma} \quad (6)$$

Pour un liquide newtonien, avec  $\mu$  constant, on trouve:

$$M = \pi R^4 \Omega \mu / (2L) \quad (7)$$

ou

$$\mu = 2LM / (\pi R^4 \Omega) \quad (8)$$

Pour un fluide non-newtonien, on définit une viscosité apparente  $\mu_a$  calculée à partir de l'équation (8):

$$\mu_a = 2LM / (\pi R^4 \Omega) \quad (9)$$

En tirant  $M$  de l'équation (6) et en réarrangeant, on trouve:

$$\dot{\gamma}_R^4 \mu_a / 4 = \int_0^{\dot{\gamma}_R} \mu \dot{\gamma}^3 d\dot{\gamma} \quad (10)$$

Cette équation intégrale peut être résolue par dérivation par rapport à  $\dot{\gamma}_R$ :

$$\dot{\gamma}_R^3 \mu_a + \dot{\gamma}_R^4 (d\mu_a / d\dot{\gamma}_R) / 4 = \dot{\gamma}_R^3 \mu(\dot{\gamma}_R) \quad (11)$$

On en tire la solution:

$$\mu(\dot{\gamma}_R) = \mu_a [1 + \frac{1}{4} (d \log \mu_a / d \log \dot{\gamma}_R)] \quad (12)$$

L'équation (12) peut être appliquée directement:

1. On mesure  $\Omega$  en fonction de  $M$  (ou vice versa).
2. On calcule  $\dot{\gamma}_R = \Omega R/L$  et  $\mu_a = 2LM/(\pi R^4 \Omega)$ .
3. Pour chaque point, on détermine  $m = d \log \mu_a / d \log \dot{\gamma}_R$ .
4. Pour chaque point, on calcule  $\mu(\dot{\gamma}_R) = \mu_a (1 + m/4)$   
et  $\sigma(\dot{\gamma}_R) = \dot{\gamma}_R \mu(\dot{\gamma}_R)$ .

On peut trouver un exemple de ces calculs dans un article de Krieger et Woods (3), où les résultats obtenus en employant les plateaux parallèles sont comparés avec les résultats obtenus avec le même fluide et d'autres géométries: capillaires et rhéomètres rotatifs à cône-plan et à cylindres concentriques.

#### LE REGIME ELASTIQUE

L'analyse du régime élastique est tout à fait semblable à l'analyse de Burgers du régime visqueux. Ici  $\gamma = \theta r/L$ , et

$$M = \int_0^R r \cdot \sigma \cdot 2\pi r = 2\pi \int_0^R G \gamma r^2 dr \quad (13)$$

En effectuant le changement de variable  $r \rightarrow \gamma$  et en posant  $\dot{\gamma}_R = \theta R/L$ , on obtient:

$$M = 2\pi (L/\theta)^3 \int_0^{\dot{\gamma}_R} G \gamma^3 d\gamma \quad (14)$$

Pour un solide de Hooke, pour lequel  $G$  est constant, on obtient:

$$M = \pi R^4 G \theta / (2L) \quad (15)$$

ou encore:

$$G = 2LM/(\pi R^4 \theta) \quad (16)$$

Pour les autres solides, on définit un module apparent  $G_a$  à partir de l'équation (16):

$$G_a = 2LM/(\pi R^4 \theta) \quad (17)$$

En tirant  $M$  de l'équation (14), et en réarrangeant, on trouve:

$$\tau_R^4 G_a / 4 = \int_0^{\tau_R} G \tau^3 d\tau \quad (18)$$

En résolvant cette équation en  $G$  de la même manière que pour déterminer  $\mu$  à partir de l'équation (10), on obtient:

$$G(\tau_R) = G_a (1 + m/4) \quad (19)$$

où  $m = d \log G_a / (d \log \tau_R)$ . On peut appliquer l'équation (19) immédiatement pour obtenir  $G$  en fonction de  $\tau$ , de  $\tau = 0$  jusqu'à  $\tau = \tau_y$ :

1. On mesure  $\theta$  en fonction de  $M$  (ou vice versa), de 0 jusqu'au seuil d'écoulement.
2. On calcule  $\tau_R = \theta R/L$  et  $G_a = 2LM/(\pi R^4 \theta)$ .
3. Pour chaque point, on détermine  $m = d \log G_a / d \log \tau_R$ .
4. Pour chaque point, on calcule  $G(\tau_R) = G_a (1 + m/4)$   
et  $\sigma(\tau_R) = \tau_R G(\tau_R)$ .

(20)

## LE REGIME MIXTE

Quand le déplacement angulaire est augmenté progressivement à partir de zéro, le régime élastique se termine et le régime mixte commence quand  $r_R$  dépasse  $r_Y$ . En continuant à augmenter le déplacement, l'échantillon reste dans le régime élastique de  $r = 0$  jusqu'à  $r = r_Y = Lr_Y/\theta$ , et l'échantillon situé entre  $r_Y$  et  $R$  se trouve dans le régime visqueux. En supposant que la vitesse de cisaillement reste négligeable, la contrainte dans la région visqueuse sera  $\sigma_Y$ . Donc, le régime mixte se termine quand le couple atteint la valeur

$$M = \int_0^R r \cdot \sigma_Y \cdot 2\pi r dr = 2\pi R^3 \sigma_Y / 3 \quad (21)$$

A cette valeur du couple,

$$G_a = (4/3) (\sigma_Y / r_R) \quad (22)$$

Dans le régime mixte, le couple se compose (1) d'une partie élastique de  $r = 0$  à  $r = r_Y$  et (2) d'une partie visqueuse de  $r = r_Y$  à  $r = R$ . En supposant toujours que la vitesse de cisaillement reste négligeable,  $\sigma = \sigma_Y$  dans la région visqueuse, et donc

$$M = \int_0^{r_Y} r \cdot G r \cdot 2\pi r dr + \int_{r_Y}^R r \cdot \sigma_Y \cdot 2\pi r dr \quad (23)$$

En effectuant le changement de variable  $r \rightarrow r$ , on obtient:

$$M = 2\pi (L/\theta)^3 \int_0^{r_Y} r^3 G dr + 2\pi (L/\theta)^3 \sigma_Y (r_R^3 - r_Y^3) / 3 \quad (24)$$

En portant cette expression de  $M$  dans la définition de  $G_a$ , on obtient:

$$r_R^4 G_a / 4 = \int_0^{r_Y} r^3 G dr + \sigma_Y (r_R^3 - r_Y^3) / 3 \quad (25)$$

Quand on dérive par rapport à  $r_R$ ,  $\sigma_Y$  et  $r_Y$  sont constants et il

ne reste que

$$\tau_R^3 G_a + (\tau_R^4/4) (dG_a/d\tau_R) = \tau_R^2 \sigma_Y \quad (26)$$

En résolvant par rapport à  $\sigma_Y$ , on arrive à

$$\sigma_Y = \tau_R G_a [1 + \frac{1}{4} (d \log G_a / d \log \tau_R)] \quad (27)$$

On peut considérer l'équation (27) comme équation différentielle, et la résoudre pour  $G_a$  en fonction de  $\tau_R$  pour tout le régime mixte. Le résultat est

$$G_a = 4\sigma_Y / (3\tau_R) + (\tau_Y/\tau_R)^4 [G_{aY} - 4\sigma_Y / (3\tau_Y)] \quad (28)$$

où  $G_{aY} = G_a(\tau_Y)$ .

On voit que l'équation (20) donne correctement la valeur de  $\sigma_R$  à la fois dans le régime mixte et dans le régime élastique. Dans le régime élastique,  $\sigma_R$  augmente avec  $M$ , tandis que dans le régime mixte,  $\sigma_R$  reste constant avec la valeur  $\sigma_Y$ . Toutefois,  $G(\tau_R)$  n'est donné par  $\sigma_R/\tau_R$  que dans le régime élastique; dans le régime mixte,  $G_a$  et  $\sigma_R/\tau_R$  doivent décroître quand  $M$  augmente, d'autant plus qu'une plus grande partie de l'échantillon cède à l'écoulement.

## CONCLUSIONS

Les trois propriétés importantes d'un fluide plastique peuvent donc être facilement déterminées avec le rhéomètre rotatif à plateaux parallèles. Dans les régimes élastique et visqueux, on peut employer au choix la méthode à contrainte imposée ou celle à déplacement imposé, afin d'obtenir la relation fonctionnelle entre  $G_a$  et  $\tau_R$ . Avec l'accroissement du cisaillement,  $\sigma_R$  croît jusqu'au point où le matériau commence à céder à la contrainte. Dans tout le régime mixte,  $\sigma_R = \sigma_Y$ . L'écoulement

visqueux commence quand  $\gamma_{RGa} = 4\sigma_y/3$ . Ainsi, nous obtenons à la fois la contrainte en fonction du déplacement dans tout le régime élastique, et la valeur de la contrainte seuil. Après le début de l'écoulement, on peut employer au choix la méthode de contrainte imposée ou la méthode de vitesse imposée, avec l'analyse de Burgers, pour obtenir la relation entre la contrainte et la vitesse de cisaillement.

En fait il y a un réel bénéfice à utiliser la géométrie de plateaux parallèles pour la caractérisation des fluides plastiques. L'homogénéité de cisaillement des géométries cône-plan et cylindres concentriques conduit à un départ brusque de l'écoulement, accompagné souvent d'une exaltation de la contrainte. L'apparition progressive de l'écoulement qu'on observe avec la géométrie des plateaux parallèles pourrait éliminer ou minimiser cet effet.

#### REMERCIEMENTS

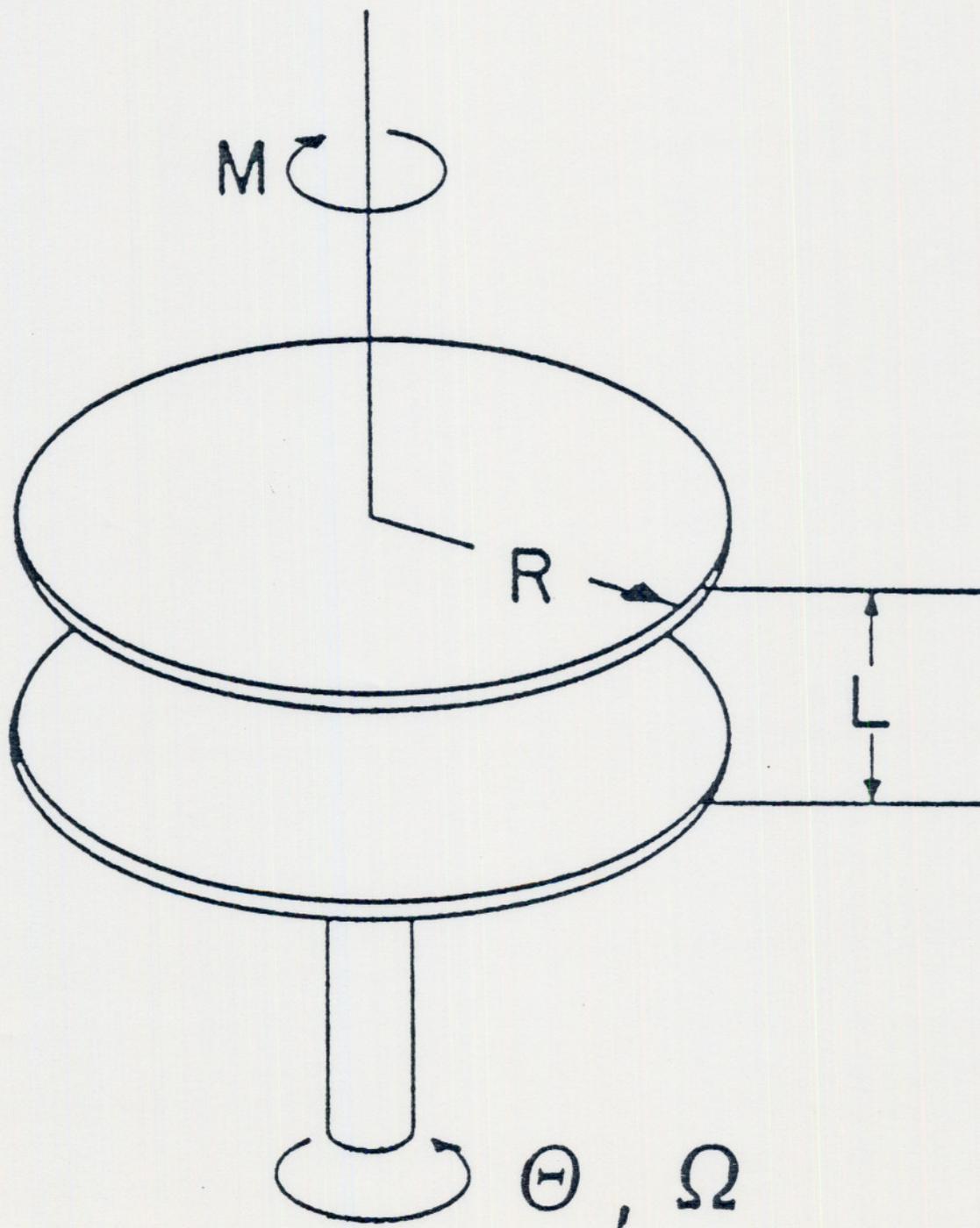
L'auteur veut remercier M. Olivier Scrivener de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université Louis Pasteur pour avoir attiré son attention sur ce problème. Il remercie aussi M. François Kern de l'Institut de Physique pour son aide précieuse pendant la rédaction de cet article.

#### REFERENCES

1. J. M. Burgers, First Report on Viscosity and Plasticity, Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappi, Amsterdam, pp 73-109.
2. B. Rabinowitsch, Z. physik. Chem. 154A, 1 (1929).
3. I. M. Krieger and M. E. Woods, J. Appl. Phys. 37, 4703 (1966).

## LISTE DE FIGURES

1. Représentation schématique du rhéomètre rotatif à plateaux parallèles.



GRUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

La RHEOLOGIE est la Science des DEFORMATIONS et des ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine, et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions. Son impact économique est donc considérable.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique fondée en 1964 et régie par la Loi de 1901, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIFS de contribuer au DEVELOPPEMENT de études et recherches relatives à la Rhéologie et de favoriser la DIFFUSION ou le TRANSFERT des progrès accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE:

- organise des REUNIONS où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations,
- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES DE RHEOLOGIE d'autres pays,
- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL,
- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes,
- contribue à la clarification du langage par l'établissement d'un DICTIONNAIRE
- etc..

\*\*\*\*\*

GRUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE  
Secrétariat Général  
Institut de Mécanique des Fluides  
Avenue du Professeur Camille Soulas  
34000 TOULOUSE