

Les Cahiers de Rhéologie

Volume VII , Numéro 2

juillet 1988

Edités par:

Le Groupe Français de Rhéologie

Les Cahiers de Rhéologie

COMITE DE REDACTION

Secrétariat:

O. SCRIVENER
I.M.F.S.
2, rue Boussingault
67083 STRASBOURG Cedex

COMITE DE LECTURE

EN

COURS DE

CONSTITUTION

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Président: D. BOURGOIN

Trésorier: D. GEIGER

Secrétaire: R. GAUDU
I.M.F.T.
Avenue du Prof Camille Soula
31400 TOULOUSE
Tel: 61.28.58.96

SOUSCRIPTION AUX CAHIERS ET ABONNEMENTS

Les Cahiers paraissent au moins trois fois par an.

Les membres du G.F.R. les reçoivent gratuitement. Les non membres peuvent obtenir les numéros des Cahiers en s'adressant au Secrétariat du Groupe moyennant une participation aux frais.

PUBLICITE

Les Cahiers de Rhéologie sont ouverts aux annonces commerciales. Seules peuvent être acceptées les annonces ayant un lien avec la rhéologie.

Pour tous renseignements s'adresser au Secrétariat du Comité de Rédaction ou au Secrétariat du GFR.

CONSIGNES AUX AUTEURS

1. Généralités

En vue de publication dans *Les Cahiers de Rhéologie* le Comité de rédaction souhaite recevoir des articles dans tous les domaines de la rhéologie théorique et expérimentale des solides et des fluides. Des résultats de recherche dans ces domaines ou dans des domaines voisins mais faisant appel à la rhéologie seront pris en considération de même que les contributions d'auteurs pourtant sur l'"état de l'art" dans l'un ou l'autre des domaines de la rhéologie.

La langue officielle du Journal *Les Cahiers de Rhéologie* est le français mais des articles en anglais pourront être acceptés. Les auteurs soumettant des articles doivent s'assurer que ces articles n'ont pas été publiés ou soumis à un autre journal.

Les articles sont soumis à l'approbation d'un Comité de Lecture. Il peut être demandé aux auteurs de réviser leur article en fonction des remarques des rapporteurs. La décision finale de publication appartient au Comité de Rédaction.

2. Soumission des articles

2.1. Les articles étant reproduits directement à partir de l'original envoyé par les auteurs il est nécessaire que le plus grand soin soit apporté à la présentation de ces articles et que les auteurs respectent scrupuleusement les instructions.

2.2. Le manuscrit original et 2 copies de chaque article doivent être envoyés à l'adresse du Secrétariat du Comité de Rédaction.

La frappe doit être faite, si possible, en caractère ELITE 12, avec un double interligne. Une machine équipée d'un ruban carbone est recommandée. Les textes réalisés en traitement de texte sont acceptés sous réserve que la frappe soit effectuée avec une imprimante de très bonne qualité: qualité courrier, imprimante Laser. Une marge de 25 mm doit être laissée autour de la feuille.

Le manuscrit doit comprendre:

- Le titre en majuscules centré en haut de page à 35 mm du bord supérieur de la feuille,
- deux lignes en dessous, centrés, le nom du ou des auteurs, suivis, à la ligne suivante de leur appartenance,
- cinq lignes en dessous, un résumé en français suivi d'un résumé en anglais de 5 lignes au maximum chacun. L'ordre sera inversé pour un article anglais.
- l'introduction de l'article suivie du texte,
- les conclusions,
- si nécessaire, la liste des notations et symboles,
- une liste de références bibliographiques complètes.

Une liste de 5 Mots Clé devra figurer sur la dernière page, après l'article et avant les figures si celles-ci ne sont pas incluses dans le texte.

La longueur normale du texte ne devrait pas dépasser 15 pages au format A4, y compris les résumés, les formules et les illustrations et la bibliographie. Certains articles plus longs pourront être acceptés si le sujet le justifie et sous réserve de l'accord préalable du Comité de Rédaction. Des articles plus courts, éventuellement sous forme de "notes", seront également les bienvenus. Les figures doivent être fixées de préférence en place dans le texte ou éventuellement en fin d'article. Les photos doivent être évitées dans la mesure du possible.

Les auteurs peuvent obtenir un modèle de présentation en écrivant au Comité de rédaction.

EDITORIAL

Vous n'êtes pas sans savoir que les CAHIERS DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE ont eu une fréquence de parution assez aléatoire. Après avoir remis ses finances en ordre, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE a décidé de s'attaquer au problème des publications. Le DICTIONNAIRE DE RHEOLOGIE paraîtra bientôt dans sa nouvelle version, les CAHIERS paraîtront plus régulièrement en moyenne 2 à 3 fois par an et seront ouverts à tous les auteurs souhaitant faire paraître un article ayant des liens avec la rhéologie.

Pour cela, il fallait rompre un peu avec la tradition tout en laissant aux auteurs la possibilité de publier des résultats de recherche même lorsque le travail n'est pas achevé. Il y aura désormais deux rubriques différentes: une rubrique ARTICLES réservée aux contributions et une rubrique NOTES réservée aux exposés de travaux en cours. Les ARTICLES seront soumis à un COMITE DE LECTURE.

Il fallait aussi que les CAHIERS ne soient pas le moyen de communication des seuls Membres du GFR. Pour cela nous avons pensé qu'il fallait solliciter aussi les auteurs de pays de langue française (Belges, Canadiens, Suisses, pays Africains etc.) afin qu'ils nous proposent des articles et qu'il fallait aussi publier de temps en temps des articles en langue étrangère de Rhéologues dont la réputation n'est plus à faire.

Quant au contenu des articles, nous souhaitons que l'on nous propose de temps en temps des articles de fond présentant l' "Etat de l'Art" dans l'un ou l'autre des domaines de la rhéologie. Pourquoi ne pas nous proposer des articles présentant les problèmes liés à la rhéologie rencontrés dans telle ou telle industrie ?

Lorsque l'on veut montrer qu'il y a un changement il ne faut pas seulement modifier l'intérieur mais aussi l'aspect extérieur. Pour cela nous avons pensé changer la dénomination des CAHIERS DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE pour les appeler désormais:

Les Cahiers de Rhéologie.

Envoyez nous vos articles, sollicitez vos collègues français et étrangers, nous ferons de notre mieux pour que leur publication soit assurée dans les délais les plus courts.

Le Comité de Rédaction

Les Cahiers de Rhéologie

Tome VII , Numéro 2

Juillet 1988

Editeur: Groupe Français de Rhéologie

SOMMAIRE

<u>ARTICLES</u>	Pages
Evaluation des possibilités de l'étude du comportement rhéologique des poudres de lait à partir d'essais de compression triaxiale, par J. Scher, J. Hardy, J.C. Roth	39
Energie libre et le potentiel de dissipation associés à la loi de Norton-Hoff, par A. Labzae et J.D. Weber	51
Une équation d'amplitude pour l'écoulement d'un fluide de Bingham entre cylindres coaxiaux tournants, par B. Nsom Eyenga, T. Wydro et J.P. Decruppe	59
Simulation numérique de l'écoulement et de la convection laminaire entre deux plaques parallèles pour des fluides complexes thermodépendants, par V.T. Nguyen, A. Elouardighi et M. Lebouche	66
 <u>NOTES</u>	
Elasticité des solides hétérogènes et viscosité des fluides hétérogènes, par J.D. Weber	75

EVALUATION DES POSSIBILITES DE L'ETUDE
DU COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES POUDRES DE LAIT

A PARTIR D'ESSAIS DE COMPRESSION TRIAXIALE

J. SCHER ⁽¹⁾, J. HARDY ⁽¹⁾, J.C. ROTH ⁽²⁾

(1) Laboratoire de Physico-chimie et Génie alimentaires
E.N.S.A.I.A. - 2, av. de la Forêt de Haye - 54500 VANDOEUVRE les NANCY

(2) Laboratoire d'Energétique et Mécanique Théorique et Appliquée
E.N.S.E.M. - 2, rue de la Citadelle - 54000 NANCY

RESUME

Il est démontré que la compression peut être utilisée pour caractériser les poudres alimentaires au regard de leurs propriétés de cohésion. Cette méthode qui met en évidence l'influence de la pression sur la densité volumique est appliquée à des poudres de lait par une machine de compression triaxiale, dont nous testons les possibilités d'utilisation.

INTRODUCTION

Les ensembles de particules dénommées "poudres" peuvent être considérées sur le plan rhéologique comme des corps solides poreux et divisés qui, se comportent de manière complexe, en combinant à la fois des propriétés de solides et de fluides.

Dans l'industrie, ces matériaux doivent être manipulés, transportés, stockés, conditionnés. Ils doivent autant que possible s'écouler de manière régulière.

D'autre part, les caractéristiques de cohésion entre particules influencent la rigidité du lit de poudre. Elles peuvent être la cause de nombreux incidents à l'ensachage, de prises en masse, de collages dans les lignes de transport pneumatique ou au stockage.

Bien que la production de produits laitiers en poudre soit quantitativement importante, leurs propriétés physiques sont relativement mal connues ; on a davantage étudié leurs propriétés de réhydratation que leurs propriétés rhéologiques (1), (2).

On ne peut aborder l'étude des propriétés d'écoulement ou de cohésion des poudres de lait sans comprendre la structure (l'empilement) du lit et les propriétés des particules elles-mêmes.

Divers chercheurs se sont surtout intéressés à décrire l'influence de différents facteurs technologiques sur la densité du tas. PISECKY (1978) (3) a montré le rôle de la porosité des particules elles-mêmes et de celle du tas.

Selon l'empilement des particules, la porosité du tas change. DEWISE (1974) (4) à partir d'un raisonnement théorique et SJOLLEMA (1963) (5) à partir d'expérimentations sur des poudres de lait entier pensent que l'on peut décrire deux porosités de tas extrêmes : une lâche et une cohérente.

En ce qui concerne les propriétés des particules elles-mêmes FIGLARZ et al. (1967) (6) soulignent la très grande hétérogénéité de forme et de surface d'une poudre à une autre et quelque fois à l'intérieur d'un même échantillon.

HAYASHI et al. (1965) (7) ont ainsi montré que l'aptitude à l'écoulement libre de poudres de lait s'améliorait avec une augmentation de la taille des particules.

DEWISE (1974) (4) montre également que des aiguilles ou des particules anguleuses s'écoulent plus difficilement que des particules sphériques ou ovales. Ce phénomène s'explique simplement par le fait que, pour un même volume, la sphère développe la plus petite surface donc la possibilité d'un seul point de contact entre deux sphères.

L'activité de l'eau est l'un des facteurs qui affecte le plus l'état de surface des particules et éventuellement leur forme. SALTMARCH et LABUZA (1980) (8) montrent que les isothermes d'adsorption de certaines poudres de lait ne contenant que du lactose amorphe présentent une cassure pour une activité de l'eau comprise entre 0,33 et 0,44. L'étude microscopique des particules montre qu'à partir de cette gamme, le lactose cristallise à la surface de la particule (9), (10), (11) élevant la rugosité de la particule et entraînant une augmentation des forces de cohésion et de friction. Cela conduit à une diminution de la fluidité de la poudre (12).

Ainsi pour une poudre de lait écrémé, HAYASHI et al. (1978) (13) montrent que la teneur en eau a une influence sur la force de cohésion à partir de 7 %.

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour étudier les propriétés de cohésion et d'écoulement des poudres de lait.

Certaines sont empiriques. C'est le cas de la méthode de CARR (1965) (14) qui détermine l'aptitude à l'écoulement à partir de quatre mesures simples :

- l'angle de repos
- la compressibilité
- l'angle de spatule
- le pouvoir de cohésion

Par cette méthode, HAYASHI et al. (1978) (13) obtiennent des valeurs de ces différents indices pour les poudres de lait (voir tableau 1).

	Angle de repos (0°)	Compressibilité (%)	Angle de spatule (0°)	Pouvoir de cohésion (%)
Poudre de lait écrémé	39,2	28,6	64,1	8,5
Poudre de lait entier	51,2	42	76,3	15,8

Tableau 1 - Aptitude à l'écoulement des poudres de lait
mesurée selon la méthode de CARR

D'autres sont plus fondamentales. C'est le cas des essais de compression triaxiale ou des essais de cisaillement après consolidation. En employant une méthode de calcul utilisant les cercles de MOHR, on peut déterminer une cohésion et un angle de frottement interne.

PELEG et al. (1973) (15) en utilisant une boîte de cisaillement de JENIKE pour étudier une poudre de lait écrémé trouvent les valeurs présentées dans le tableau 2.

Humidité de la poudre %	Consolidation kg	Cohésion g/cm ²	Angle de frottement interne (0°)
4,4	4,5	1,6	41,0
4,4	6,5	9,6	38,9
4,4	8,0	10,9	38,1
4,4	10,5	16,9	36,7

Tableau 2 - Valeurs trouvées par PELEG et al. (1973)
en employant une méthode de calcul utilisant les cercles de MOHR
pour une poudre de lait écrémé

PELEG (1977) (16) montre également que, contrairement à de nombreuses autres substances alimentaires ayant un comportement analogue à ceux des milieux granuleux tels que les sables, la poudre de lait présente un effet "Slip Stick" déjà mis en évidence par JENIKE (1970), mais jamais étudié jusqu'à présent.

Dans ce travail, on s'est interrogé sur les possibilités d'étudier ce comportement particulier des poudres de lait à l'aide d'une machine de compression triaxiale. On a également recherché les facteurs propres au lit de poudre de lait ou aux particules qui sont susceptibles de le modifier.

Cette étude, à caractère préliminaire, vise surtout à prospector les capacités de la machine comme outil d'investigation de l'effet Slip-Stick particulier aux poudres de lait et à mettre au point une méthodologie d'expérimentation.

II - MATERIELS ET METHODES

1. L'appareil à compression triaxiale

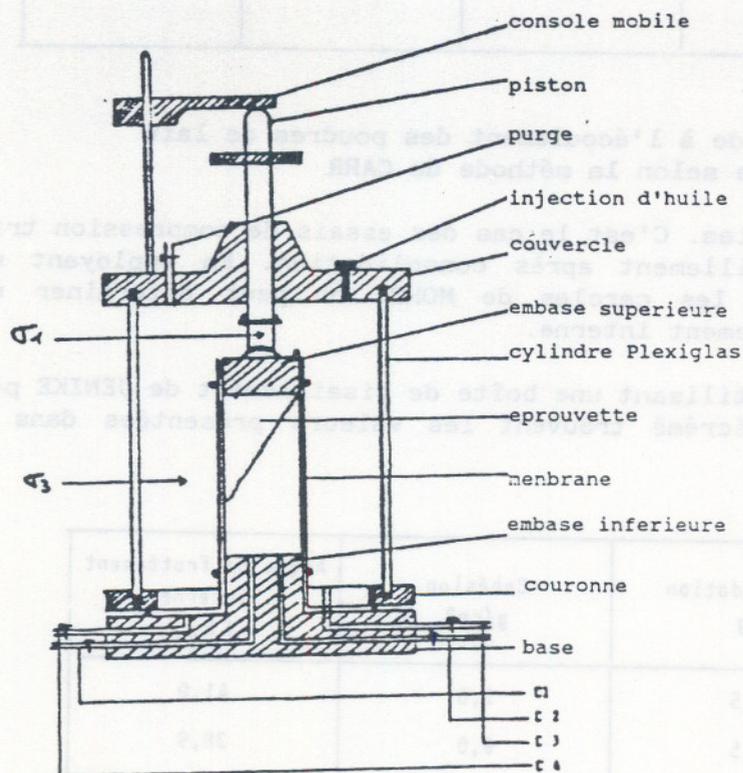


Figure 1 Echantillon placé dans une cellule à compression triaxiale

Dans l'appareil à compression triaxiale, l'échantillon a la forme d'un cylindre allongé. Il est soumis à un champ de contraintes cylindrique. L'échantillon est placé dans une cellule (figure 1) qui contient un fluide sous pression, de l'eau en général, il est donc soumis, sur sa surface latérale, à une contrainte radiale σ_3 , égale à la pression qui règne dans la cellule. D'autre part, un piston qui traverse la partie supérieure de la cellule permet de charger verticalement l'échantillon qui est ainsi soumis également à une contrainte longitudinale σ_1 . Ces deux contraintes ont une obliquité nulle, ce sont donc des contraintes principales. En jouant séparément sur la pression de la cellule et la force transmise par le piston, on peut réaliser une large gamme de combinaisons de contraintes.

Dans cette étude, on obtient la rupture de l'échantillon en maintenant constante la contrainte radiale σ_3 et en faisant croître la contrainte longitudinale σ_1 .

2. Caractérisation des particules

2.1. Analyse granulométrique

On utilise une tamiseuse électromagnétique (analysette 3. FRITSCH) ayant une fréquence de vibration de 3 000 oscillations/min. et une amplitude de 2 mm. La durée du tamisage est de 75 minutes.

Pour faciliter le tamisage, des billes d'agate de 10 mm de diamètre sont ajoutées dans chaque tami. Les tamis utilisés ont un diamètre de maille de 45, 63, 75, 90 et 106 μ m.

2.2. Analyse morphométrique

Deux techniques ont été utilisées pour étudier et mesurer la forme des particules de poudre de lait :

- la microscopie à balayage
- l'analyse d'images (caméra SONY) par traitement informatique (ordinateur périphérique PLESSEY). Cette technique permet de déterminer les valeurs de 2 axes perpendiculaires d'une projection bidimensionnelle des particules.

2.3. Propriétés physico-chimiques

2.3.1. Aw et teneur en eau

La mesure de l'activité de l'eau est réalisée par la méthode dite "des microclimats" qui constitue une modification de la méthode d'interpolation graphique de LANDROCK et PROCTOR (1951) (17). L'usage de solutions d'acide sulfurique est remplacé par celui de solutions saturées de divers sels minéraux.

La teneur en eau est déterminée par la méthode officielle de la Fédération Internationale de Laiterie (F.I.L. - I.D.F., 1958).

2.3.2. Origine des produits étudiés

Les manipulations ont porté sur 2 catégories de poudre de lait ayant été obtenus au moyen de deux traitements thermiques différents mais présentant une même composition chimique. Elles sont dénommées A et B.

III - RESULTATS ET DISCUSSION

1. Optimisation des protocoles d'essais

1.1. Problèmes relatifs aux échantillons

1.1.1. Nécessité d'ajuster la granulométrie

Les résultats de l'analyse granulométrique des 2 poudres sont présentés dans le tableau 3.

Catégorie (μm)	% particule poudre A	% particule poudre B
> 106	3,55	0,40
106-90	7,25	0
90-80	10,20	5,20
80-75	3,50	1,40
75-63	23,20	20,15
63-45	41,10	39,75
< 45	11,20	33,10

Tableau 3 - Pourcentage de particule des poudres de lait A et B en fonction de leur catégorie

Ils montrent l'hétérogénéité de la taille des particules au sein d'une même poudre ainsi qu'une répartition en dimension différente entre les deux types de poudre. La poudre B renferme un pourcentage de fines particules ($< 45 \mu\text{m}$) nettement supérieur à celui de la poudre A. Un ajustement de la granulométrie est donc nécessaire afin d'obtenir des échantillons comparables.

1.1.2. Nécessité d'ajuster l' A_w

La mesure de l'activité de l'eau, en fonction de la classe granulométrique ou du type de poudre présente de grandes variations, dues surtout à l'agitation pendant la séparation granulométrique ainsi qu'à l'"histoire" de la poudre à partir de sa fabrication.

Les expériences réalisées sans ajustement d' A_w ont montré que pour une même densité de l'échantillon et à même contrainte radiale σ_3 , plus l' A_w était grande, plus l'effort axial σ_1 pour obtenir le cisaillement était faible. Il est donc également nécessaire de régler l' A_w des échantillons pour obtenir des résultats exploitables.

1.1.3. Préparation des échantillons et ajustement de la densité

La préparation des échantillons est certainement la phase la plus délicate des manipulations. Elle doit être toujours très soignée et reproductible afin d'éviter une répartition de densité trop hétérogène lors du remplissage de la membrane par la poudre de lait, car celle-ci est fonction de la vigueur avec laquelle l'expérimentateur densifie la poudre avant compression. Aussi, pour obtenir des échantillons toujours identiques, nous avons utilisé une plaque vibrante soumise à des oscillations verticales par électro-aimant. Différents essais ont montré que 1000 oscillations d'amplitude 1,5 mm permettaient une stabilisation du volume de l'échantillon.

La variation dans la mesure de la densité après tassement entre divers échantillons d'un même produit était de 5 %. Variation due aux nombreuses vacuoles que contient chaque particule de poudre de lait et qui sont difficilement mesurable (microphotographies 1 et 2).

2. Allure générale des courbes. Effet "Slip-Stick"

2.1. Graphe effort axial - déformation axiale

La figure 2 montre deux comportements très différents. La poudre de lait B donne une courbe très régulière, l'état limite étant bien marqué, la déformation de cisaillement se fait à effort axial et à déformation axiale plus faible que pour la poudre de lait A qui, elle, présente de très nombreuses irrégularités correspondant à l'effet "Slip-Stick".

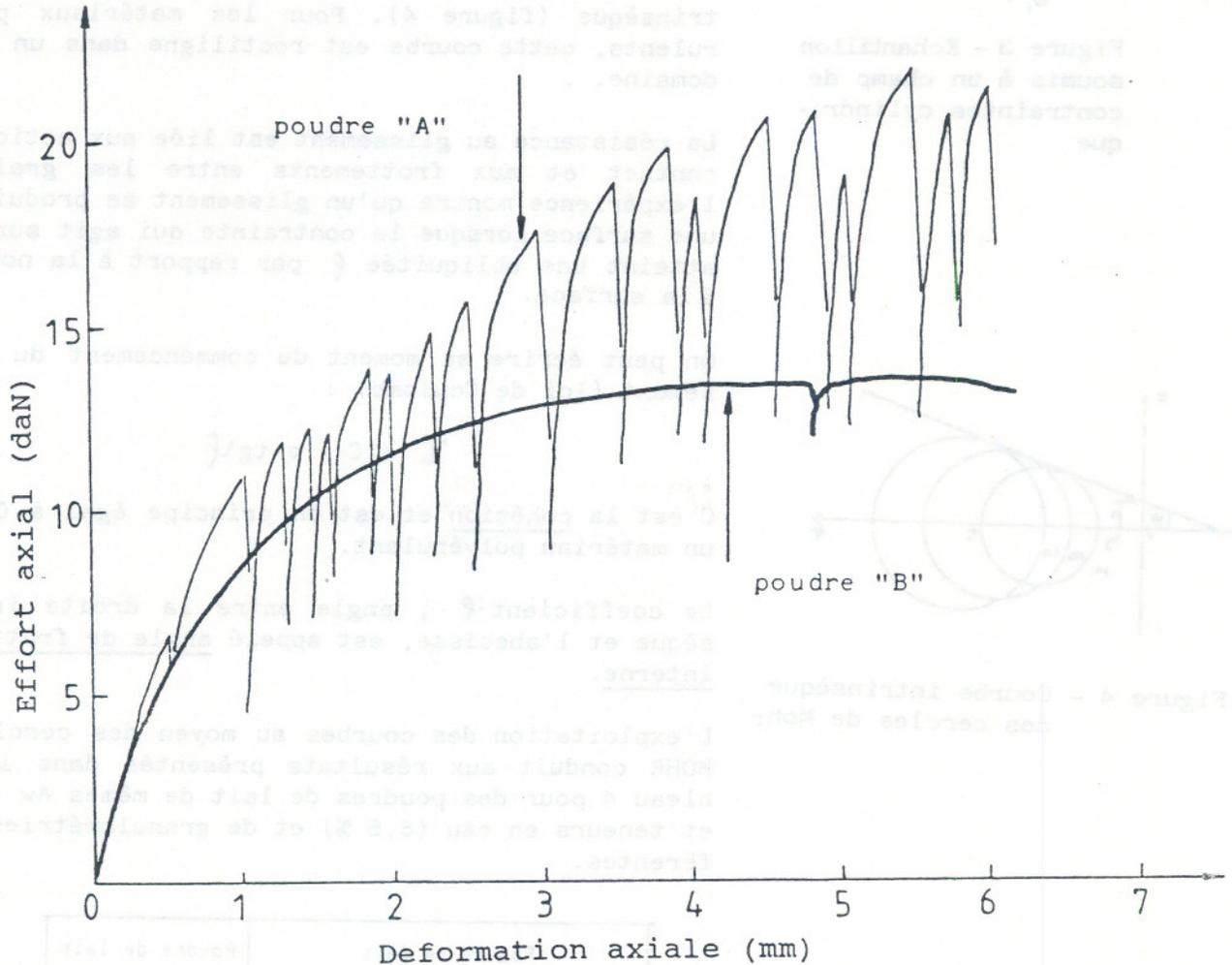


Figure 2 : Courbe effort axial - déformation axiale en fonction du type de poudre

2.2. Calcul de l'angle de frottement interne

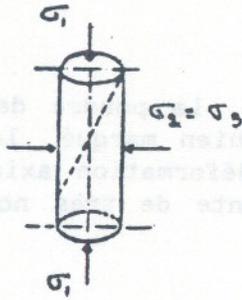


Figure 3 - Echantillon soumis à un champ de contraintes cylindrique

L'échantillon (figure 3) soumis à un champ de contraintes cylindrique présente une rupture qui se matérialise par une déformation excessive ou par un plan de glissement à 45°. Cet essai permet de déterminer le cercle de Mohr de l'équilibre ultime. Chacun de ces cercles peut être défini par l'abscisse de son centre $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ et par son rayon $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ou, ce qui revient au même, par les 2 contraintes principales σ_1 et σ_3 .

L'enveloppe des cercles de Mohr est la courbe intrinsèque (figure 4). Pour les matériaux pulvérulents, cette courbe est rectiligne dans un large domaine.

La résistance au glissement est liée aux actions de contact et aux frottements entre les grains ; l'expérience montre qu'un glissement se produit sur une surface lorsque la contrainte qui agit sur elle atteint une obliquité φ par rapport à la normale à la surface.

On peut écrire au moment du commencement du glissement (loi de Coulomb) :

$$\tau = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi$$

c est la cohésion et est en principe égal à 0 pour un matériau pulvérulent.

Le coefficient φ , angle entre la droite intrinsèque et l'abscisse, est appelé angle de frottement interne.

L'exploitation des courbes au moyen des cercles de MOHR conduit aux résultats présentés dans le tableau 4 pour des poudres de lait de mêmes A_w (0,33) et teneurs en eau (6,5 %) et de granulométries différentes.

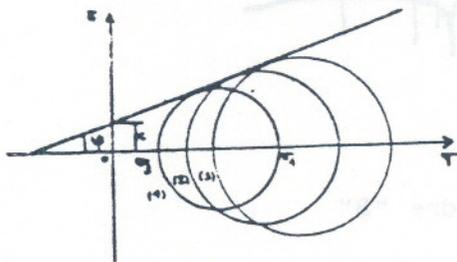


Figure 4 - Courbe intrinsèque des cercles de Mohr

	Poudre de lait A				Poudre de lait B	
	45-63	63-75	80-90	90-106	45-63	80-90
Granulométrie (μm)	45-63	63-75	80-90	90-106	45-63	80-90
Densité moyenne des échantillons avant compression	0,365	0,390	0,380	0,360	0,510	0,470
Angle de frottement interne ($^\circ$)	36,5 *	39,35	42,30	44,70	30,54	37,60

Tableau 4 - Valeur de l'angle de frottement interne en fonction de la catégorie de poudre

($A_w = 0,33$, teneur en eau = 6,5 %)

* : valeur estimée

Dans les deux types de poudre, on observe une augmentation de l'angle de frottement avec une augmentation de la taille des particules. On peut donc dire que plus les particules sont grosses, plus le rapport entre surface de contact et surface totale de la particule est faible et meilleur en est l'écoulement. Par contre, la comparaison des propriétés rhéologiques des deux laits n'est pas facile en raison de la trop grande différence de densité tassée que présentaient les deux produits.

Bien que la cohésion soit généralement considérée comme nulle pour les matériaux pulvérulents, les courbes intrinsèques des deux types de poudre à différentes granulométries semblent montrer le contraire. Toutefois la méthode graphique du tracé de la courbe intrinsèque par les tangentes aux cercles de MOHR ne permet pas une précision suffisante pour en donner des valeurs et des évolutions correctes.

3. Recherche des causes de l'effet "Slip Stick"

3.1. Influence de la granulométrie

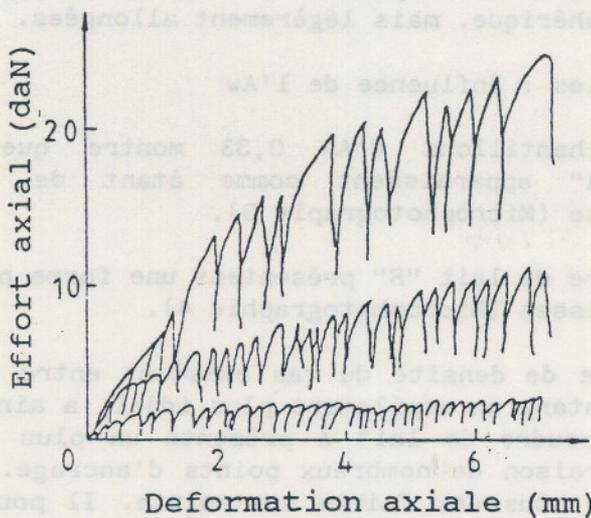


Figure 5 - Poudre de lait A
Granulométrie 45-63 µm
 σ_3 : 0,1 ; 0,3 ; 0,6 b

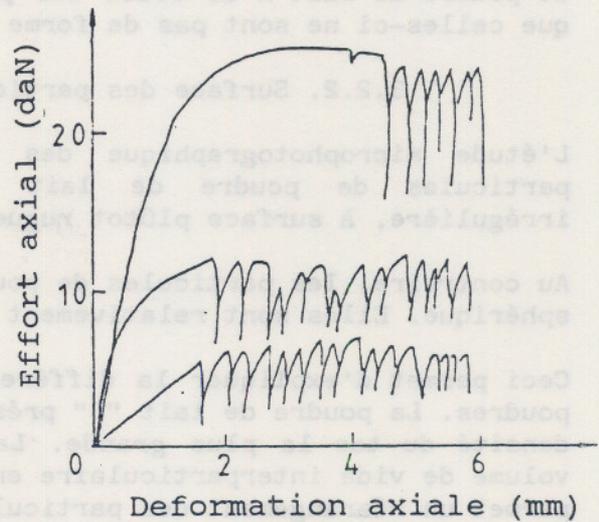


Figure 6 - Poudre de lait A
Granulométrie 80-90 µm
 σ_3 : 0,1 ; 0,3 ; 0,6 b

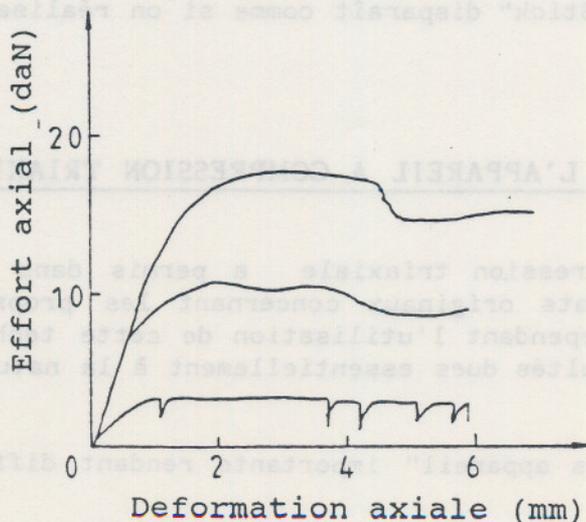


Figure 7 - Poudre de lait B
Granulométrie 45-63 µm
 σ_3 : 0,1 ; 0,3 ; 0,6 b

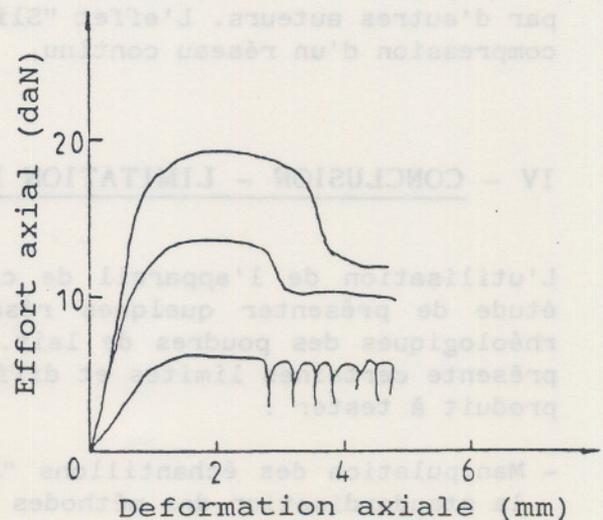


Figure 8 - Poudre de lait B
Granulométrie 80-90 µm
 σ_3 : 0,1 ; 0,3 ; 0,6 b

L'effet "Slip Stick" est très important pour la poudre de lait "A" de faible granulométrie (figure 5). Cet effet diminue avec l'augmentation de la taille des particules (figure 6) pour devenir nul à partir de la classe granulométrique 90-106 μ m (ne sont appelés effet "Slip Stick" que les irrégularités de la courbe observées avant la déformation de cisaillement, après celle-ci les irrégularités sont dues essentiellement au glissement des particules les unes sur les autres dans le plan de cisaillement à 45°).

La poudre de lait "B" ne présente pas d'effet "Slip Stick", même pour les fines particules ($<$ à 45 μ m) (figures 7 et 8). Cet effet dépend donc d'autres caractéristiques que la simple taille des particules.

3.2. Relation avec la structure des particules

3.2.1. Forme des particules

L'analyse et le calcul des rapports x/y (largeur sur longueur) du listing résultant de l'analyse d'images donne la valeur de 0,85 pour les deux types de poudre. Si cette valeur ne permet pas de différencier la forme des particules de poudre de lait A de celle des particules de poudre de lait B, il apparaît que celles-ci ne sont pas de forme sphérique, mais légèrement allongées.

3.2.2. Surface des particules : Influence de l'Aw

L'étude microphotographique des échantillons d'Aw 0,33 montre que les particules de poudre de lait "A" apparaissent comme étant de forme irrégulière, à surface plutôt rugueuse (Microphotographie 3).

Au contraire, les particules de poudre de lait "B" présentent une forme plutôt sphérique. Elles sont relativement lisses (Microphotographie 4).

Ceci permet d'expliquer la différence de densité du tas existant entre les 2 poudres. La poudre de lait "B" présentant un empilement plus idéal, a ainsi la densité du tas la plus grande. La poudre de lait A présente un plus grand volume de vide interparticulaire en raison de nombreux points d'ancrage. Ceci permet un réarrangement des particules sous une faible contrainte. Il pourrait être une des causes de l'effet "Slip-Stick".

Pour des valeurs d'Aw supérieure à 0,33 les microphotographies 5 et 6 montrent des particules dont l'état de surface est parsemée d'aiguilles. Elles correspondent à la formation de cristaux de lactose comme cela a été montré par d'autres auteurs. L'effet "Slip-Stick" disparaît comme si on réalisait la compression d'un réseau continu.

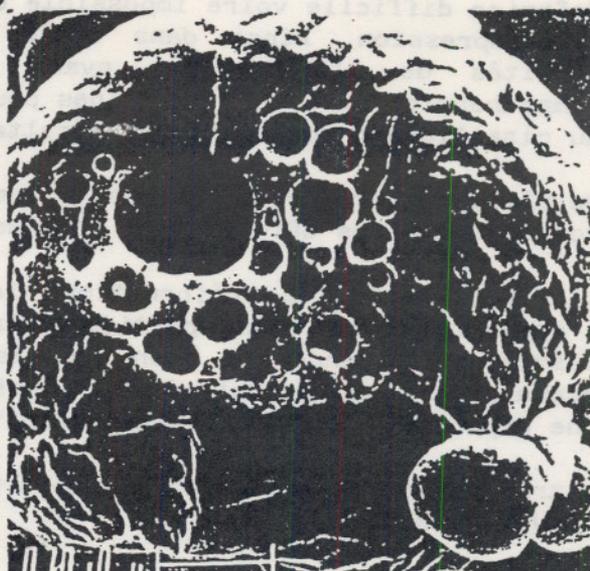
IV - CONCLUSION - LIMITATION DE L'APPAREIL A COMPRESSION TRIAXIALE

L'utilisation de l'appareil de compression triaxiale a permis dans cette étude de présenter quelques résultats originaux concernant les propriétés rhéologiques des poudres de lait. Cependant l'utilisation de cette technique présente certaines limites et difficultés dues essentiellement à la nature du produit à tester :

- Manipulation des échantillons "hors appareil" importante rendant difficile la standardisation des méthodes ;



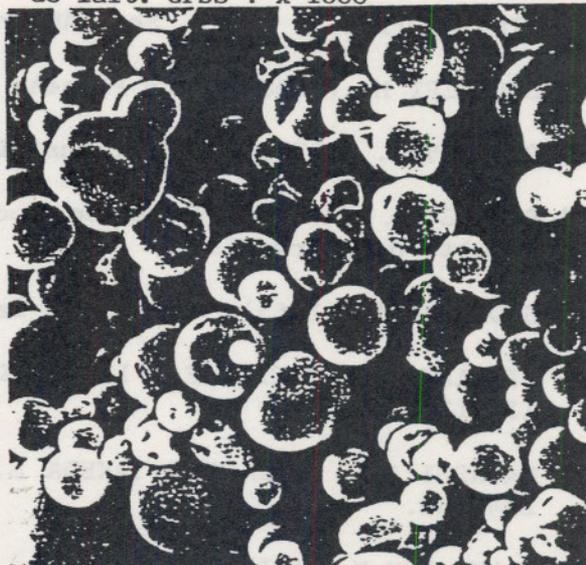
Microphotographie 1 - Structure interne poreuse d'une particule de poudre de lait. Gros. : x 700



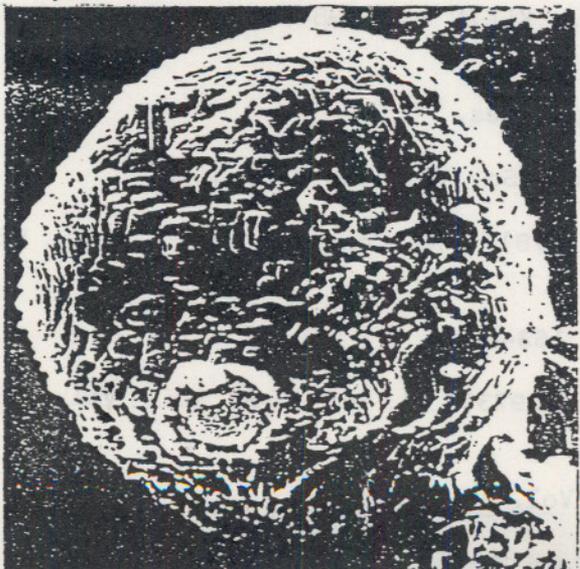
Microphotographie 2 - Structure interne poreuse d'une particule de poudre de lait. Gros : x 1000



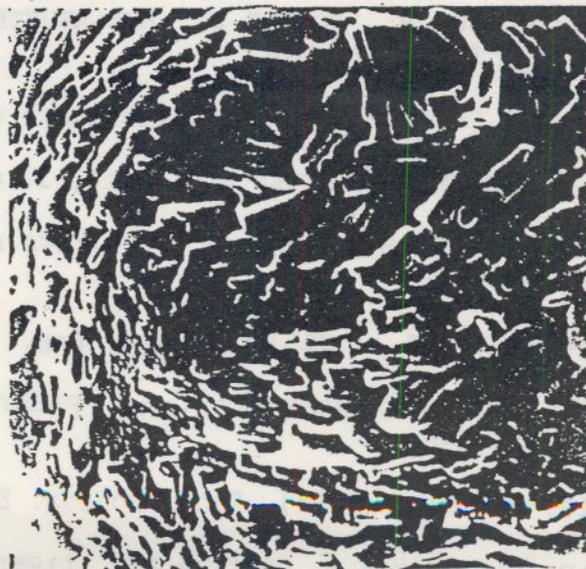
Microphotographie 3 - Particules de poudre de lait A ; 63-75 μm , Aw : 0,33. Gros : x 500



Microphotographie 4 - Particules de poudre de lait B ; < 45 μm , Aw : 0,33. Gros : x 500



Microphotographie 5 - Particule de poudre de lait, Aw : 0,75. Gros. : x 3000



Microphotographie 6 - Surface d'une particule de poudre de lait, Aw : 0,75 Gros. : x 6000

- Maîtrise difficile voire impossible de certains paramètres physiques pendant la compression. Ainsi dans cette étude n'ont été considérées que les densités de l'échantillon avant la compression. Pour une meilleure compréhension du comportement des poudres, un calcul de la densité au moment du cisaillement donnerait des résultats plus intéressants.

De plus, des gradients de densité semblent apparaître dans l'échantillon qui conduisent à des déformations locales difficilement contrôlables.

- L'hétérogénéité de déformation le long de l'axe de l'échantillon, l'apparition dans les parties extrêmes du cylindre de zones fortement tassées, l'absence de plan de cisaillement net avec certaines classes granulométriques conduit à une imprécision dans les calculs réalisés et à une exploitation difficile des résultats.

Des travaux sont en cours pour améliorer la technique et pallier à ces divers inconvénients.

REFERENCES

- (1) KING N. (1966), Dairy Sci. Abstr. 28 (3), 105-18.
- (2) SCHUBERT H. (1980), Food Process Eng. Vol. 1, 675-684.
- (3) PISECKY J. (1978), Dairy Industries inter. Vol. 43, n° "2.
- (4) DEVISE B. (1974), Thèse de doctorat d'Etat, Université de Lille II, Faculté de Pharmacie.
- (5) SJOLLEMA A. (1963), Neth. Milk Dairy J. 17, 245-259.
- (6) FIGLARZ M., VINCENT F., LECAILLE C., AMIEL J. (1967), Powder Techno. 1, 121-128.
- (7) HAYASHI H., HANDA M., TAKEDA S. (1978), XXe Congrès inter. Lait, B5, 344-345.
- (8) SALTMARCH M., LABUZA T.P. (198), Vol. 45, J. of Food Sc., 1231-1242.
- (9) ROETMAN K. (1979), Neth. Milk Dairy, J. 33, 1-11.
- (10) WURSCH P., ROSSET J., KOLLREUTTER B., KLEIN A. (1984), Michwissenschaft 39 (10), 579-582.
- (11) LE FLECHER R. (1985), Résultats non publiés.
- (12) MOREYRA R., PELEG M. (1981), J. of Food Sc. Vol. 46, 1918-1922.
- (13) HAYASHI H., HANDA M., HORIKAWA M. (1978), XXe Congrès inter. Lait, B5, 337-338.
- (14) CARR R.L. (1965), Chemical Eng., 18, 163-168.
- (15) PELEG M., MANNHEIM C.H., PASSY N. (1973), J. of Food Sci. Vol. 38, 959-964.
- (16) PELEG M. (1977), Food Process. Eng. Vol. 1, 303-328.
- (17) LANDROCK A.H. PROCTOR B.E. (1951), Food Techno. 5, (8), 332-337.

ENERGIE LIBRE ET LE POTENTIEL DE DISSIPATION ASSOCIES A LA LOI
RHEOLOGIQUE DE NORTON-HOFF.

par Allal LABZAE et Jean-Daniel WEBER*.

RESUME

On montre que la loi de Norton-Hoff définit le comportement rhéologique en traction et compression d'un matériau standard à deux variables internes dont on donne l'expression de l'énergie libre et du potentiel de dissipation.

ABSTRACT

It is shown that Norton-Hoff law defines the rheological behaviour in traction and compression of a standard material with two internal state variables for which the expression of free energy and potential of dissipation are given.

1. Introduction.

1.1. La théorie des milieux standards [1] [2] qui se situe dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, apparaît tout d'abord comme une généralisation naturelle de la théorie de l'élasticité.

Soit Φ l'énergie libre relative à l'unité de volume dans la configuration initiale. Un comportement élastique isotherme peut être défini par l'expression de Φ en fonction du tenseur F caractérisant le gradient de la transformation. F a pour composantes :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$$

* Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, Faculté des Sciences de METZ. Ile du Saulcy 57045 METZ CEDEX.

où a_i sont les coordonnées initiales, x_i en coordonnées actuelles relativement à un même repère orthonormé.

Pour les matériaux standards, $\Phi = \Phi(F, p)$ où p représente l'ensemble des variables internes.

Les 9 composantes de F peuvent être appelées variables commandées.

L'évolution des variables p est déterminée par l'expression du potentiel de dissipation $\Omega(p, X)$, fonction des p et des variables indépendantes X appelées forces thermodynamiques.

La condition de dissipativité

$$(1) \quad X \frac{\partial \Omega}{\partial X} \geq 0$$

doit être vérifiée pour tout p et tout X .

La vitesse des variables internes est donnée par l'équation

$$\dot{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial X}$$

dans laquelle on doit ensuite remplacer X par $-\frac{\partial \Phi}{\partial p}$.

Le principe d'objectivité prend la forme :

$$\Phi(F, p) = \Phi(rF, p)$$

relation qui doit être vérifiée quel que soit le tenseur orthogonal r à déterminant positif.

Le tenseur des contraintes de Bousinesq est :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_{ij}}$$

1.2. Ce formalisme permet de décrire le comportement de tout assemblage de ressorts et d'amortisseurs lorsque cet assemblage présente de l'élasticité instantanée.

On peut supposer que chaque variable interne p^α définit l'état d'un amortisseur A^α , c'est-à-dire la position du piston dans le cylindre. On voit alors que Ω dépend de p et X , sans dépendre explicitement de F . Quels que soient les p , on doit avoir :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = 0 \quad \text{pour } X = 0.$$

On peut admettre en outre que $\Omega = 0$ pour $X = 0$.

La convexité de Ω par rapport aux X est assurée lorsque pour chaque amortisseur A^α , p^α est fonction croissante de X^α à p^α fixé. Dans certaines réactions chimiques en phase gazeuse, loin de l'équilibre, Ω peut n'être pas convexe. [3].

1.3. Supposons que pour de petites déformations les variables internes se réduisent aux six composantes du tenseur de déformation plastique e_{ij}^p . Les coefficients d'élasticité étant désignés par $\lambda_{i,j,ke}$, on a alors

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda_{i,j,ke} (e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ke} - e_{ke}^p)$$

et les $-\partial\Phi/\partial e_{ij}^p$ ne sont autres que les contraintes σ_{ij} .

Si Ω est tel qu'il existe un domaine d'élasticité D dans l'espace des contraintes, e_{ij}^p est normal à la frontière de D lorsque les contraintes franchissent cette frontière.

1.4. Considérons un état F, p tel que $X = 0$: c'est ce qu'on peut appeler un état d'équilibre interne. Généralisant un résultat donné dans [1] p. 88, on peut démontrer une propriété fondamentale de la relaxation du voisinage de cet état. Supposons que $F_{i,j}$ subisse à partir de cet état l'accroissement infiniment petit $l_{i,j}$ à l'instant t_0 , et redevienne constant pour $t \geq t_0$. On a alors à l'instant $t_0 + 0$ les inégalités :

$$\dot{\theta}_{i,j} l_{i,j} \leq 0, \quad \theta_{i,j} l_{i,j} \geq 0, \quad \dot{\theta}'_{i,j} l_{i,j} \geq 0, \dots$$

En particulier en traction simple dans la direction $0x_1$, avec $l_{11} > 0$, la contrainte de traction σ vérifie à l'instant $t_0 + 0$

$$\dot{\sigma} \leq 0 ; \sigma \geq 0 ; \dot{\sigma}' \leq 0 \dots$$

Ces inégalités, bien vérifiées par l'expérience, sont un des arguments les plus sérieux en faveur du modèle standard. Nous proposons de montrer ici qu'un milieu obéissant à l'équation de Norton-Hoff est un milieu standard.

2. Cas d'un milieu obéissant à l'équation de Norton-Hoff.

2.1 Nous écrivons l'équation de Norton-Hoff en traction et compression simple sous la forme :

$$(2) \quad \sigma = \lambda \epsilon_c^n \operatorname{sgn} \dot{\epsilon}_p |\dot{\epsilon}_p|^m$$

ϵ_p est la déformation plastique, $\dot{\epsilon}_p$ la vitesse de déformation plastique. ϵ_c est la déformation plastique cumulée, dont l'évolution est déterminée par l'équation :

$$\dot{\epsilon}_c = |\dot{\epsilon}_p|$$

λ est une constante ; les exposants m et n sont strictement positifs.

Admettons que le module d'Young E du matériau soit fonction de la seule déformation plastique cumulée ϵ_c et qu'il diminue lorsque ϵ_c augmente, suivant la loi :

$$E = E_0 - f(\epsilon_c)$$

où E_0 est le module d'Young pour $\epsilon_c = 0$ et où f est une fonction croissante de ϵ_c : $f' = df/d\epsilon_c > 0$

Il est naturel de prendre pour expression de l'énergie libre :

$$\Phi = \frac{1}{2} (E_0 - f)(\epsilon - \epsilon_p)^2$$

Φ dépend des deux variables internes ϵ_p et ϵ_c .

Les forces thermodynamiques correspondantes sont désignées par X_p et X_c . Nous avons :

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_p} = (E_0 - f)(\epsilon - \epsilon_p) = \sigma$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_c} = \frac{1}{2} f'(\epsilon - \epsilon_p)^2$$

Posons $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ avec :

$$\Omega_1 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2m}) \lambda^{\frac{1}{2m}} \epsilon_c^{\frac{1}{2m}}} |X_p|^{1 + \frac{1}{m}}$$

$$\Omega_2 = \frac{(E_0 - f)^{\frac{1}{2m}}}{(1 + \frac{1}{2m}) \lambda^{\frac{1}{2m}} \epsilon_c^{\frac{1}{2m}} \left(\frac{1}{2} f'\right)^{\frac{1}{2m}}} |X_c|^{1 + \frac{1}{2m}}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X_p} = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2m}} \epsilon_c^{\frac{1}{2m}}} \operatorname{sgn} X_p |X_p|^{\frac{1}{m}}$$

et avec
$$X_p = - \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_p} = \sigma$$

on obtient :

$$(3) \quad \dot{\epsilon}_p = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{n}} \epsilon_c^{\frac{n}{n-1}}} \operatorname{sgn} \sigma |\sigma|^{\frac{1}{n}}$$

de même :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X_c} = \frac{(E_0 - f)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^{\frac{1}{n}} \epsilon_c^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{2} f'\right)^{\frac{1}{n}}} \operatorname{sgn} X_c |X_c|^{\frac{1}{n}}$$

et avec :
$$X_c = \frac{1}{2} f' (\epsilon - \epsilon_p)^2, \quad \text{il vient :}$$

$$\dot{\epsilon}_c = \frac{(E_0 - f)^{\frac{1}{n}}}{\lambda^{\frac{1}{n}} \epsilon_c^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{1}{2} f'\right)^{\frac{1}{n}}} \left(\frac{1}{2} f' (\epsilon - \epsilon_p)^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{(E_0 - f)^{\frac{1}{n}} |\epsilon - \epsilon_p|^{\frac{1}{n}}}{\lambda^{\frac{1}{n}} \epsilon_c^{\frac{n}{n-1}}}$$

$$= \frac{|\sigma|^{\frac{1}{n}}}{\lambda^{\frac{1}{n}} \epsilon_c^{\frac{n}{n-1}}}$$

$$= |\dot{\epsilon}_p|$$

ϵ_c est donc bien la déformation plastique cumulée, et (3) s'identifie à l'équation de Norton-Hoff (2). On vérifie que la condition de dissipativité (1) est remplie. En outre Ω est ici une fonction convexe des X .

2.2. Des mesures de l'évolution de E en fonction de la déformation plastique ont été effectués sur certains métaux, du moins dans des déformations résultants d'une traction simple, pour lesquelles

$$\epsilon_c = \epsilon_p > 0$$

Une décroissance de E a été mise en évidence lorsque $\epsilon_c = \epsilon_p$ augmente.

[4]. Mais pour de petites déformations cet effet n'est pas assez marqué pour se prêter à des mesures. Il se pourrait d'ailleurs que dans des essais de traction suivis de compression, la très petite variation

de E dépende non seulement de ϵ_c mais aussi d'autres paramètres, par exemple de ϵ_p . Cependant, sans être en contradiction avec l'expérience, on peut admettre que f est une fonction infiniment petite croissante de ϵ_c ; le terme Ω_2 du potentiel de dissipation est alors le produit d'une fonction infiniment grande par $|\chi_c|^{1+\frac{1}{2}m}$

3. Conclusion.

Nous avons démontré l'existence d'un modèle standard pour le corps de Norton-Hoff, dans le cas où f est une fonction infiniment petite croissante de la déformation plastique cumulée. Ce corps possède donc les propriétés indiqués dans l'introduction.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J.D. WEBER
 "Mécanique des milieux déformables non linéaires".
 Editions Eyrolles, 1972.
- [2] B. HALPHEN et NGUYEN QUOC SON
 "Sur les matériaux standards généralisés".
 Journal de Mécanique, Vol. 14, n° 1, 1975, pp. 39-69
- [3] J.D. WEBER et M. BASSOUT-LELLICH
 "Deux applications de la théorie des milieux standards généralisés".
 Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, tome 6. n° 6, décembre
 1985, pp. 17-30.
- [4] J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE, Mécanique des Matériaux solides, Dunod,
 p. 351, 1985.
- [5] A. FRIAA. La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et
 viscoplasticité. Thèse d'Etat, université Pierre et Marie Curie,
 Paris, 1979.

UNE EQUATION D'AMPLITUDE POUR L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DE BINGHAM ENTRE CYLINDRES COAXIAUX TOURNANTS

B.NSOM EYENGA, T.WYDRO, J.P.DECRUPPE
Laboratoire de Physique des Polymères.
Faculté des Sciences. Ile du Saulcy.
57045 Metz Cedex

I-INTRODUCTION

Le modèle de Bingham décrit le comportement d'un fluide qui s'écoule en suivant la loi de Newton, lorsque la contrainte est supérieure à une valeur seuil τ_0 .

Sa loi de comportement s'écrit :

$$\tau - \tau_0 = \mu \dot{\epsilon} \quad (1)$$

Celle-ci peut être mise en évidence dans certaines peintures, certaines encres d'imprimerie, et plus généralement dans des suspensions et dans des émulsions concentrées.

Considérons un fluide de Bingham contenu entre deux cylindres coaxiaux, tels que le cylindre intérieur ait une vitesse de rotation supérieure à celle du cylindre extérieur (écoulement de Couette-Taylor).

L'étude linéaire de la stabilité de cet écoulement est présentée en [1,2], dans le cas d'un espace annulaire étroit. Lorsque le nombre de Reynolds excède une valeur critique, il apparaît un mouvement secondaire dans des cellules toroïdales. Cette perturbation est axisymétrique et périodique le long de l'axe des cylindres. Elle se superpose à l'écoulement laminaire stable (de base).

Au cours du temps, la forme exponentielle $f(\vec{x})\exp(\sigma t)$ admise par l'analyse linéaire pour la perturbation rend non-négligeable en régime supercritique, la présence dans les équations du mouvement, des termes quadratiques de la perturbation.

Ces effets non-linéaires donnent naissance à une suite infinie d'harmoniques, et à une distorsion du mouvement moyen. Ce dernier transfère en permanence de l'énergie aux harmoniques, le mode fondamental jouant le rôle de "catalyseur".

En fait, ces effets non-linéaires se mesurent par une amplitude qui multiplie la forme admise par les théories linéaires pour la vitesse de la perturbation.

Le but de notre travail est de proposer une loi de variation de l'amplitude des tourbillons de Taylor dans un fluide de Bingham, analogue à celle connue pour le fluide newtonien [3,4,5]

2- EQUATION D'AMPLITUDE

Pour établir l'équation d'amplitude, nous utilisons la méthode classique, basée sur une décomposition du champ de vitesses de la perturbation en une série de Fourier par rapport à la coordonnée axiale (fig.1).

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,t) \cos(n\lambda z) \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,t) \cos(n\lambda z) \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r,t) \sin(n\lambda z) \end{aligned} \quad (2)$$

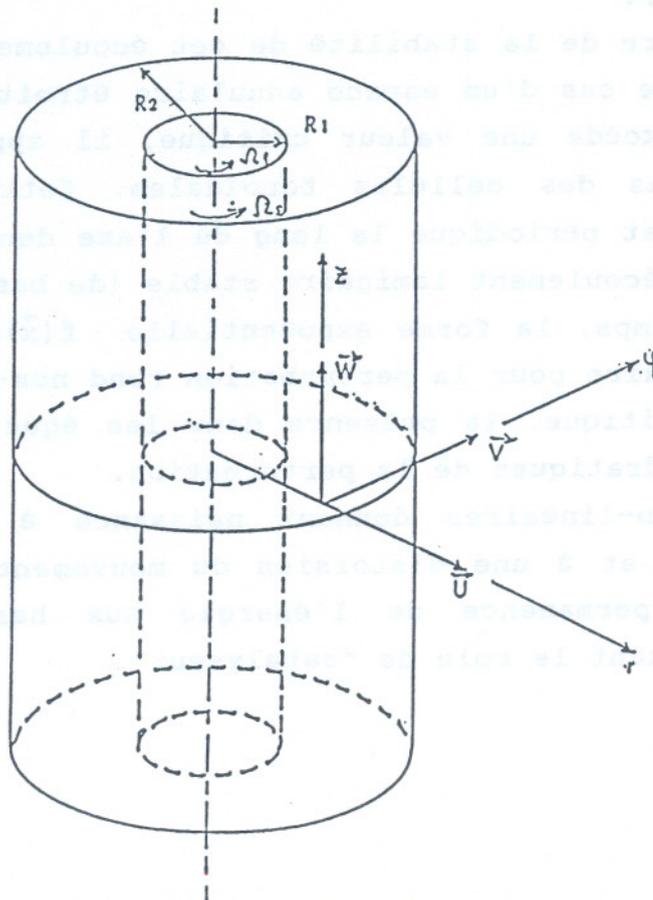


Figure 1 : Ecoulement entre cylindres coaxiaux tournants

Ainsi, à partir des équations non-linéaires de l'écoulement, [1,2] nous établissons celles du mouvement moyen :

$$-\frac{1}{r} v^2 - \frac{\langle v^2 \rangle}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle u^2 \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \langle uv \rangle) = (\nabla^2 - \frac{1}{r^2}) \left[\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\tau_0}{I} \right) \right] v \quad (3)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

$$I \# \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}$$

Il est aisé de déduire alors l'équation d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iint - (u'^2 + v'^2 + w'^2) r dr dz = \\ & = - \iint \left(\mu + \frac{\tau_0}{I} \right) (-u'v') \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) r dr dz \dots \\ & - \iint \left(\mu + \frac{\tau_0}{I} \right) (\xi'^2 + \eta'^2 + L'^2) r dr dz \dots \\ & - \iint (u'\chi_{11} + v'\chi_{21} + w'\chi_{31}) r dr dz \quad (5) \end{aligned}$$

Les intégrales sont prises sur les cylindres en r , et sur une longueur d'onde en z .

u' (de même que v' et w') désigne la somme des harmoniques impaires de u (v et w , respectivement), c'est-à dire en λ , 3λ , 5λ , etc. et u'' , (v'' , w''), la somme des harmoniques paires, c'est à dire en 2λ , 4λ , 6λ .

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2ru'u'') + \frac{\partial}{\partial z} (u'w'' + u''w') - \frac{2v'v''}{r} \\ \chi_{21} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u'v'' + r^2 u''v') + \frac{\partial}{\partial z} (v'w'' + v''w') \quad (6) \end{aligned}$$

$$\chi_{31} = u' \frac{\partial}{\partial r} w'' + u'' \frac{\partial}{\partial r} w' + \frac{\partial}{\partial z} w'w''$$

$$\xi' = -\frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial r}, \quad L' = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv') \quad (7)$$

La signification de l'équation d'énergie précédente est la même qu'en fluide newtonien: la variation de l'énergie cinétique des harmoniques impaires de la perturbation est égale à l'énergie transmise par le mouvement moyen, diminuée de l'énergie de dissipation, et de celle transmise des harmoniques impaires aux harmoniques paires de la perturbation.

Donnons au champ de vitesses de l'écoulement, la forme suivante:

$$u_n(r, t) = A^n(t) \left[u_n(r) + \sum_{m=1}^{\infty} A^{2m}(t) u_{nm}(r) \right], \quad n \geq 1$$

$$v_n(r, t) = A^n(t) \left[v_n(r) + \sum_{m=1}^{\infty} A^{2m}(t) v_{nm}(r) \right], \quad n \geq 1 \quad (8)$$

$$v = v_1(r) + \sum_{m=1}^{\infty} A^{2m}(t) f_m(r)$$

Avec ces relations, l'équation d'énergie conduit à l'équation d'amplitude suivante, à l'ordre σ (équation de Landau):

$$\frac{dA^2}{dt} =$$

$$\sigma A^2 + 2A^4 \left(-\frac{1}{\rho} \left(\mu + \frac{\tau_0}{I} \right) \int (\langle u_1 \rangle v_1 f'_1 + \langle u_{11} \rangle v_1 v'_{11} + u_1 v_{11} v'_{11}) r dr \right.$$

$$\left. \frac{1}{\rho} - \left(\mu + \frac{\tau_0}{I} \right) \left(2 \int v_1 \langle v_{11} \rangle r dr + \int v'_1 v'_{11} r dr \dots \dots \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left[\int \langle u_1 \rangle v_1 \langle v'_2 \rangle r dr + \int \langle u_2 \rangle v_1 v'_{11} r dr + \int v_1^2 \langle u'_2 \rangle r dr + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int \langle u_1 \rangle v_1 \langle v_2 \rangle r dr + \int \langle u_2 \rangle v_1^2 r dr \right] \right) \frac{1}{\int v_1^2 r dr} \quad (9)$$

Dans cette équation, la valeur moyenne est prise sur une longueur d'onde axiale.

Les équations gouvernant les fonctions $u_i, u_{ij}, v_i, v_{ij}, f_i$ s'obtiennent sans difficultés, en introduisant les expressions (8) dans les équations de la perturbation (obtenues par soustraction des équations du mouvement moyen (3) de celles générales de l'écoulement résultant).

De même, la condition d'adhérence aux parois des cylindres conduit à des conditions aux limites homogènes pour ces fonctions.

3. CONCLUSION

Nous avons établi une équation d'amplitude pour les tourbillons de Taylor dans un fluide de Bingham.

Dans cette équation, la contrainte seuil apparaît toujours en addition de la viscosité du fluide. Ce résultat confirme les conclusions de l'étude de l'étude linéaire qui énoncent l'effet stabilisant de la plasticité dans l'écoulement.

La détermination du couple agissant sur le cylindre extérieur serait une suite intéressante au présent travail.

NOTATIONS

- ρ :Masse volumique du fluide
 P, V :Champs de pression et de vitesse de l'écoulement laminaire stable
 u, v, w :Composantes radiale, tangentielle et axiale du champ de vitesse de la perturbation
 μ :Viscosité dynamique du fluide
 r, θ, z :Système de coordonnées cylindriques
 t :Temps
 τ :Contrainte en cisaillement
 τ_0 :Contrainte seuil en cisaillement
 λ :Longueur d'onde axiale de la perturbation
 A :Amplitude de la perturbation
 $\dot{\epsilon}$:Taux de déformation en cisaillement

REFERENCES

- 1 GRAEBEL, W.P. Proc. Intern. Symp. on 2nd order effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics. Haifa (1962) - Pergamon (1964)
- 2 NSOM EYENGA, B. Thèse, Metz (1987)
- 3 WATSON, J. Jour. Fluid Mech. 9, 371 (1960)
- 4 STUART, J.T. Jour. Fluid Mech. 9, 353, (1960)
- 5 DAVEY, A. Jour. Fluid Mech. 14, 336 (1962)

RESUME

Nous proposons une équation d'amplitude pour les tourbillons de Taylor dans un fluide de Bingham. Pour ce faire, nous établissons, à partir des équations non-linéaires de l'écoulement, l'équation d'énergie du mouvement. Une hypothèse appropriée sur la forme de la perturbation permet alors d'écrire l'équation de Landau à l'ordre σ pour les tourbillons de Taylor.

NOTATIONS

- ρ : Masse volumique du fluide
 P : Charge de pression et de vitesse de l'écoulement laminaire stable
 r, θ, z : Coordonnées radiales, tangentielle et axiale du champ de vitesse de la perturbation
 μ : Viscosité dynamique du fluide
 Ω : Système de coordonnées cylindriques
 t : Temps
 τ : Contrainte en cisaillement
 τ_0 : Contrainte seuil en cisaillement
 λ : Longueur d'onde axiale de la perturbation
 A : Amplitude de la perturbation
 $\dot{\epsilon}$: Taux de déformation en cisaillement

**SIMULATION NUMERIQUE DE L'ÉCOULEMENT ET DE LA CONVECTION
LAMINAIRE ENTRE DEUX PLAQUES PARALLELES POUR DES FLUIDES
COMPLEXES THERMODEPENDANTS.**

V.T. NGUYEN, A. ELOUARDIGHI, M. LÉBOUCHE

LABORATOIRE D'ENERGETIQUE ET DE MECANIQUE THEORIQUE ET APPLIQUEE
C.N.R.S. UA 875
24-30 RUE LIONNOIS - BP 3137 - 54013 NANCY CEDEX

RESUME

Nous présentons des résultats numériques relatifs à l'écoulement laminaire, entre deux plaques parallèles de fluides newtoniens et non newtoniens thermodépendants. Le chauffage de ces fluides provoque d'importantes variations radiales de leurs viscosités au voisinage de la surface d'échange ; il en résulte des modifications des profils de vitesse qui modifient à leur tour le transfert de chaleur. Dans cette étude, on s'intéressera à l'influence de la thermodépendance sur les profils de vitesse et du coefficient local de transfert de chaleur par convection.

ABSTRACT

Numerical results relative to laminar flow for newtonian and non newtonian fluids with temperature dependent properties, between parallel-plates are studied. Heating causes an important variation in viscosity in the vicinity of the wall. This leads to a strong deformation of velocity profile and consequently of heat transfer. In this work, we are interested in the effects of thermodépendance on velocity profile and local Nusselt number.

I - INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME.

On considère le problème du transfert de chaleur en écoulement laminaire lors d'un chauffage pariétal à densité de flux de chaleur imposée. Les résultats sont relatifs à un fluide newtonien (solution de sirop de glucose 64% en masse de matière sèche) et un fluide non newtonien (C.M.C. à 3% en masse). Ces deux fluides ont été étudiés expérimentalement dans notre laboratoire [1]. Des rhéogrammes à différentes températures montrent que leurs comportements rhéologiques peuvent être approchés en cisaillement simple par la loi puissance d'Ostwald :

$$\tau = K(T) (\partial u / \partial y)^n$$

Ces fluides sont fortement thermodépendants et une loi de type Arrhénius peut être adoptée :

$$K(T) = a e^{-b/T}$$

On suppose qu'à l'entrée de la zone chauffée, le régime dynamique est établi et que la température est uniforme.

II - EQUATIONS ET METHODE DE RESOLUTION.

Les équations régissant l'écoulement sont :

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

L'équation du mouvement :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

L'équation de l'énergie :

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau \frac{\partial u}{\partial y}$$

A ce système, nous pouvons ajouter l'équation exprimant la conservation du débit :

$$\int_{-1}^1 u \, dy = Cte$$

avec les conditions aux limites :

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0$$

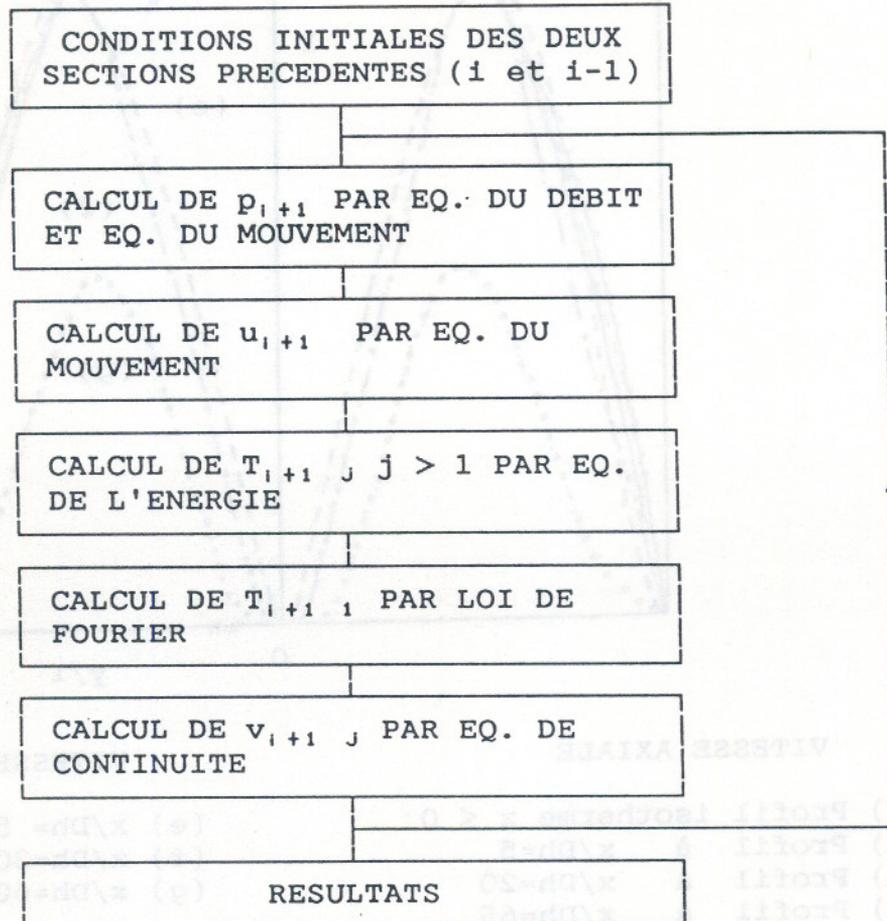
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, \pm 1) = \frac{\varphi_p}{\lambda}$$

$$T(0, y) = T_e$$

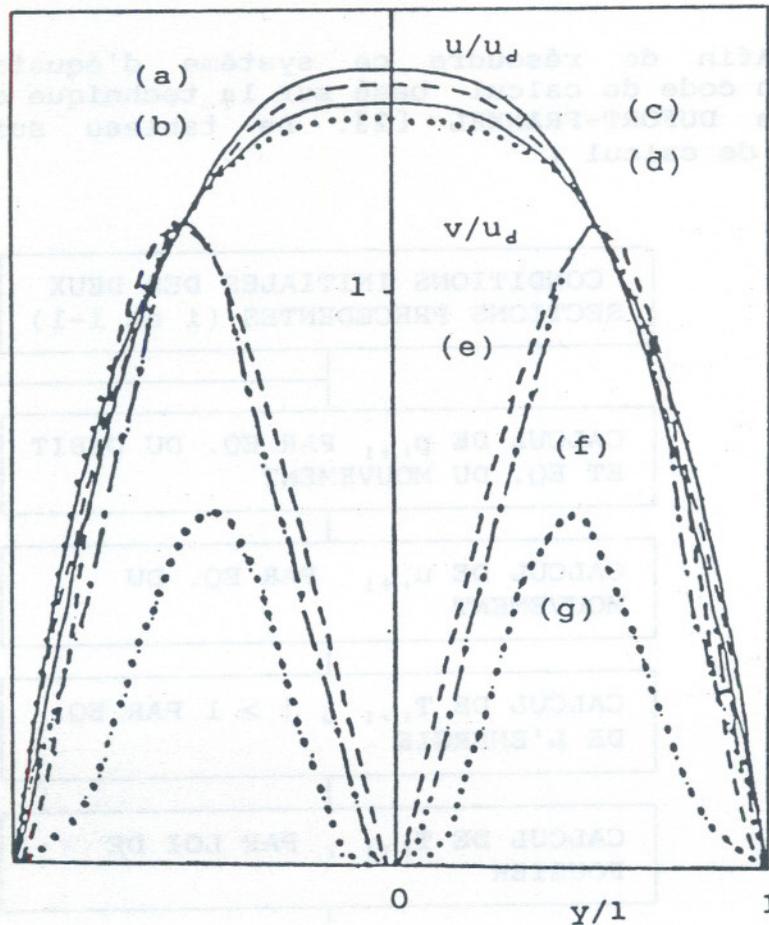
$$u(0, y) = \frac{3n+1}{4n} \left[1 - \left(\frac{y}{-1} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] u_d$$

Afin de résoudre ce système d'équations nous avons utilisé un code de calcul basé sur la technique des différences finies de DUFORT-FRANKEL [2]. Le tableau suivant donne la procédure de calcul :



III - RESULTATS ET DISCUSSIONS.

Dans une première partie, nous présentons des résultats concernant l'effet de la thermodépendance sur les profils de vitesse. Ainsi, en présence de chauffage, on note un accroissement de la vitesse au voisinage de la paroi chaude, compensé par une diminution de la vitesse vers la zone axiale. Cette réorganisation s'effectue de manière similaire avec les deux fluides ; elle se traduit par un transfert de masse du coeur vers les parois. L'évolution du profil de vitesse axiale le long de la conduite montre que la déformation est beaucoup plus rapide en amont (Figure 1, courbes a, b, c, d), ce qui induit des valeurs non négligeables de la vitesse transversale en début de la zone chauffée (courbes e, f, g), là où les gradients thermiques sont importants. Cependant, cette vitesse reste très faible devant la vitesse axiale. Elle aura néanmoins un effet positif sur le transfert de chaleur.



VITESSE AXIALE

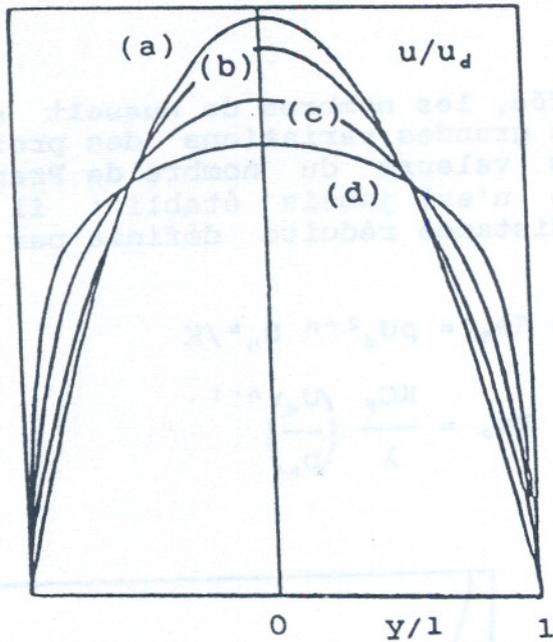
VITESSE TRANSVERSALE

- (a) Profil isotherme $x \leq 0$;
 (b) Profil à $x/Dh=5$
 (c) Profil à $x/Dh=20$
 (d) Profil à $x/Dh=65$

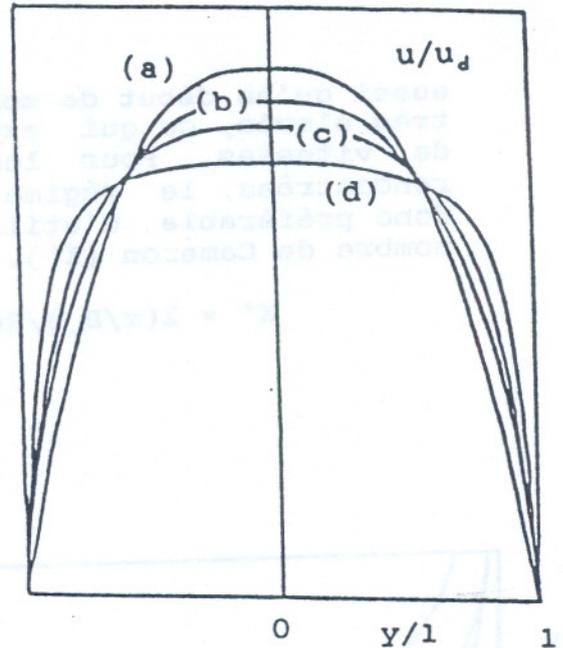
- (e) $x/Dh=5$ $\max(v/u_d)=1.10^{-4}$
 (f) $x/Dh=30$ $\max(v/u_d)=2.10^{-5}$
 (g) $x/Dh=60$ $\max(v/u_d)=1.10^{-5}$

FIGURE 1 : PROFILS REDUITS DE VITESSES
 AXIALE ET TRANSVERSALE

Les figures 2 et 3 donnent l'influence du nombre de Reynolds et de la densité de flux de chaleur sur les profils de vitesse pour le fluide newtonien (figure 2) et le fluide non newtonien (figure 3). Ainsi, à nombre de Reynolds donné, ce profil correspondant au cas isotherme (courbe a) est d'autant plus déformé que le chauffage est intense (courbes c,d). Ce résultat attendu, s'explique par l'augmentation de la fluidité près des parois chaudes. En revanche, à densité de flux donnée, ce même profil est moins déformé quand le nombre de Reynolds augmente (courbes b,c). Ceci s'explique par l'augmentation de la vitesse axiale qui réduit l'effet de la thermodépendance sur les profils de vitesse.



FLUIDE NEWTONNIEN
($n=1$)



FLUIDE NON NEWTONNIEN
($n=0.55$)

a) : Profil isotherme

- Influence du nombre de Reynolds : $\varphi_p = 10 \text{ kw/m}^2$

b) : $Re = 500$

c) : $Re = 50$

- Influence de la densité de flux : $Re = 50$

e) : $\varphi_p = 10 \text{ kw/m}^2$

d) : $\varphi_p = 20 \text{ kw/m}^2$

FIGURES 2,3 : PROFILS REDUITS DE VITESSE AXIALE

La deuxième partie de nos résultats concerne le transfert de chaleur. Ce dernier est caractérisé par le nombre de Nusselt qu'on définit par la formule usuelle :

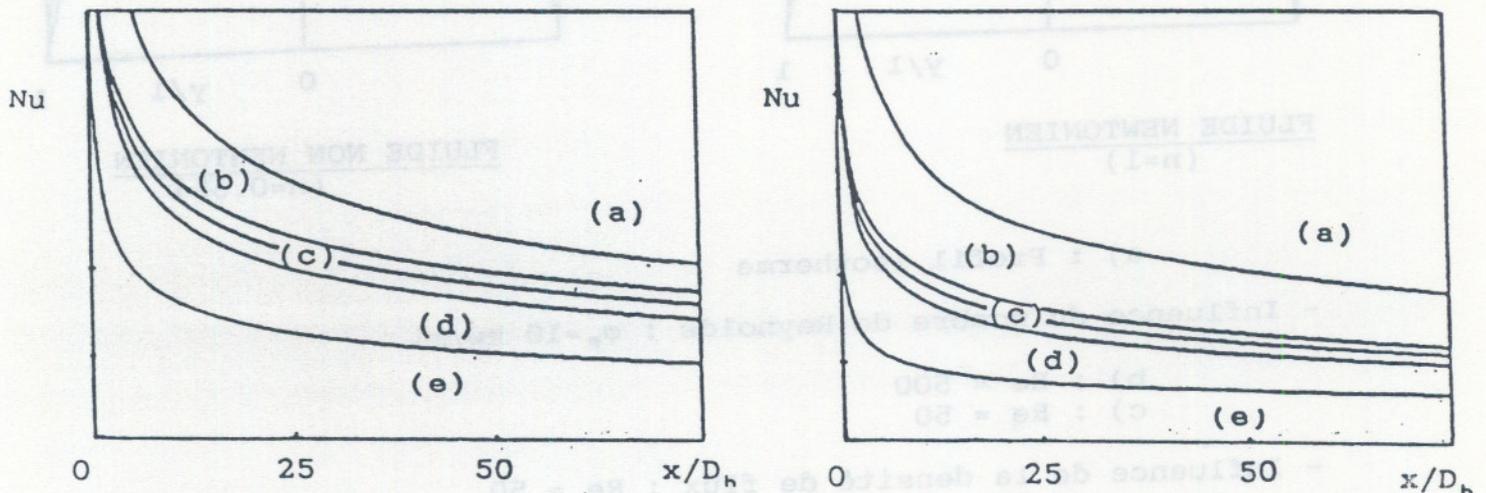
$$Nu(x) = \frac{\varphi_p Dh}{\lambda [T_p(x) - T_m(x)]}$$

où $T_m(x)$ est la température de mélange dans la section considérée déterminée par un bilan thermique. Les figures 4 et 5 donnent l'évolution du Nombre de Nusselt en fonction de la distance axiale réduite. On peut remarquer l'effet favorable des fortes densités de flux (courbes b, c, d) et des forts débits (courbes a, b, e), sur l'amélioration du transfert de chaleur. On note

aussi qu'en début de zone chauffée, les nombres de Nusselt sont très élevés, ce qui explique les grandes variations des profils de vitesses. Pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl rencontrées, le régime thermique n'est jamais établi ; il est donc préférable d'utiliser la distance réduite définie par le nombre de Caméron (X^*).

$$X^* = 2(x/D_h)/Re_0 Pr_0 \text{ avec } Re_0 = \rho U_d^{2-n} D_h^n / K$$

$$\text{et } Pr_0 = \frac{K C_p}{\lambda} \left(\frac{U_d}{D_h} \right)^{n-1}$$



FLUIDE NEWTONIEN

FLUIDE NON NEWTONIEN

- Influence du nombre de Reynolds : $\varphi_p = 10 \text{ kw/m}^2$

(a) : $Re = 500$

(b) : $Re = 50$

(e) : $Re = 5$

- Influence de la densité de flux : $Re = 50$

(b) : $\varphi_p = 30 \text{ kw/m}^2$

(c) : $\varphi_p = 20 \text{ kw/m}^2$

(d) : $\varphi_p = 10 \text{ kw/m}^2$

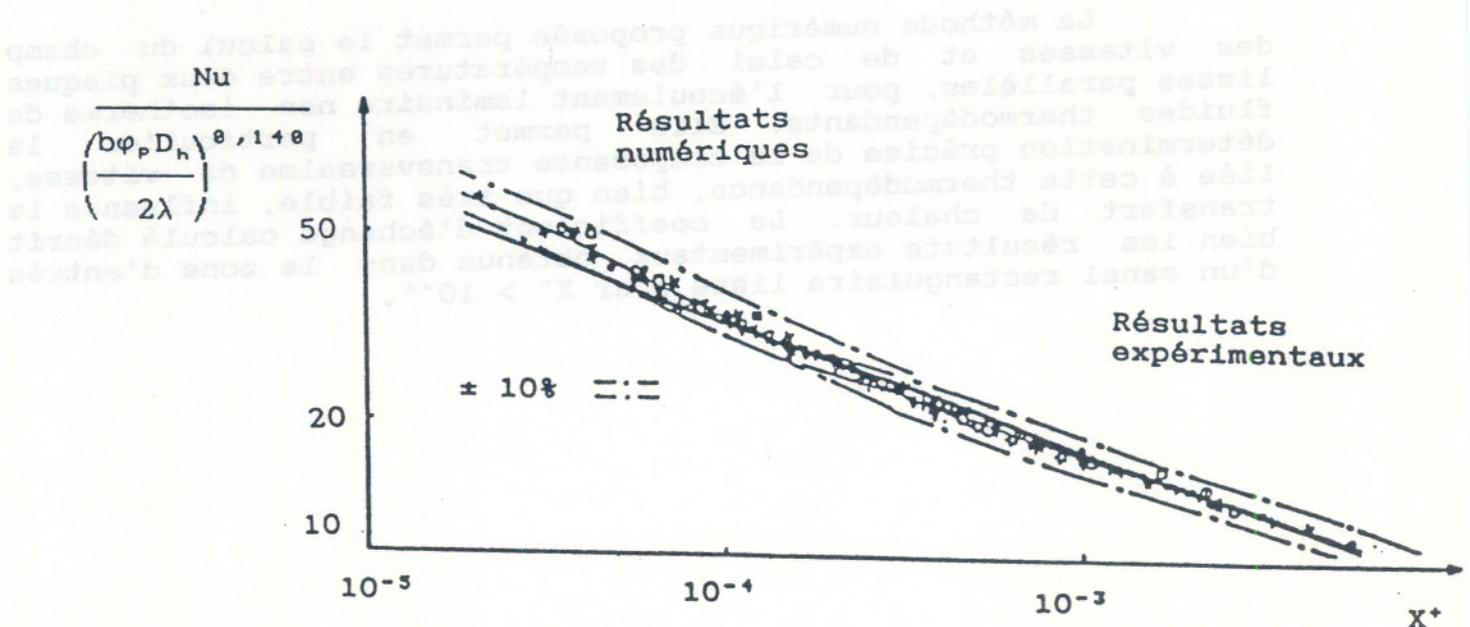
FIGURES 4 et 5 : EVOLUTION DU NOMBRE DE NUSSLETT EN FONCTION DE LA DISTANCE REDUITE x/D_h .

On remarque que l'introduction du Nombre de Cameron rend bien compte de la dépendance au nombre de Reynolds mais reste insuffisant pour quantifier la thermodépendance. Nous sommes ainsi conduit à introduire une grandeur adimensionnelle supplémentaire liant la densité de flux de chaleur et les variations des propriétés du fluide avec la température. Pour cela, on utilise le groupement utilisé par JOSHI et BERGLES [3] et repris par SCIROCCO [4] $(b \varphi_p D_h)/2\lambda$, où b est la dérivée logarithmique de la consistance par rapport à la température. Nous comparons nos résultats théoriques à ceux obtenus expérimentalement par SOURLIER [1] (figures 6, 7). On note que nos résultats concordent bien avec l'expérience pour des valeurs $X^+ \geq 10^{-4}$. Ce qui permet de proposer pour chacun des fluides étudiés une corrélation unique :

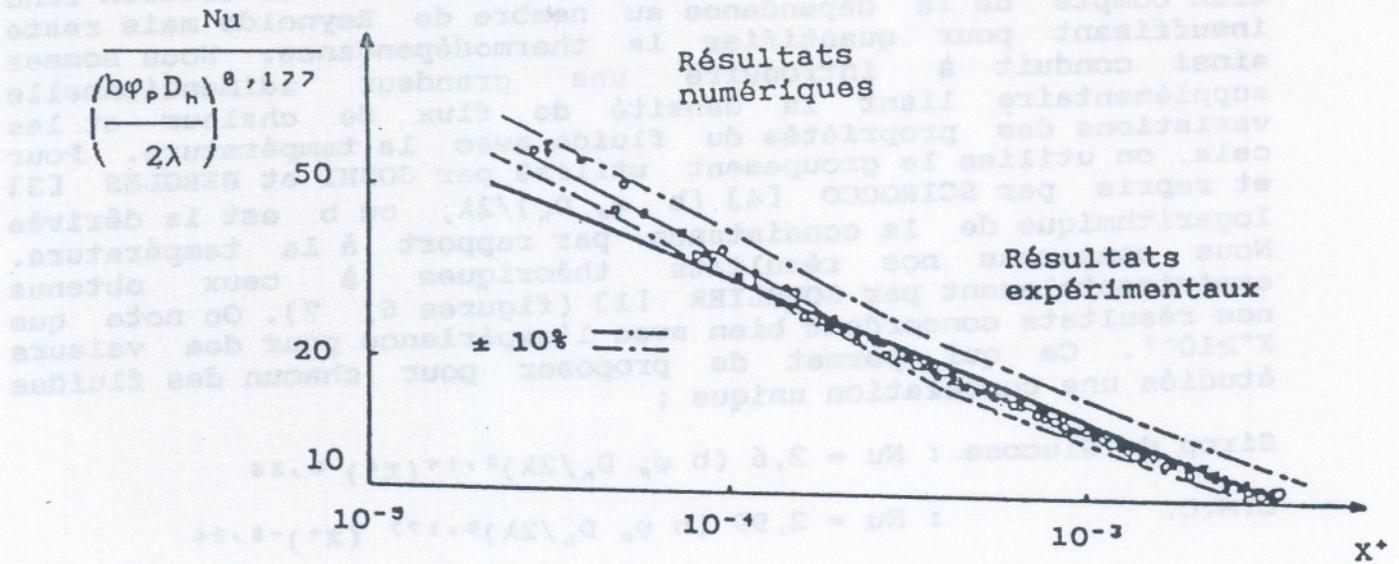
$$\text{Sirop de Glucose : } Nu = 2,6 (b \varphi_p D_h / 2\lambda)^{0,14} (X^+)^{-0,26}$$

$$\text{C.M.C. : } Nu = 2,99 (b \varphi_p D_h / 2\lambda)^{0,177} (X^+)^{-0,26}$$

Cependant, nous n'avons pas détecté de rupture de pente comme le laisse voir l'expérience. Pour expliquer cette différence, il est important de noter que l'expérience a été réalisée dans un canal rectangulaire de rapport d'aspect égal à 20, donc présentant des effets de bord. L'influence de zones tridimensionnelles qui existent dans les coins du canal peut expliquer le changement de pente. Cette influence est plus marquée à l'entrée, là où les couches limites thermiques sont très minces. On constate bien sur les figures 6 et 7 une divergence entre les résultats numériques et expérimentaux pour $X^+ < 10^{-4}$. un schéma tridimensionnel devient alors nécessaire.



FLUIDE NON NEWTONIEN



FLUIDE NEWTONIEN

FIGURES 6,7 : EVOLUTION DU NOMBRE DE NUSSELT EN FONCTION DU NOMBRE DE CAMERON X⁺

IV - CONCLUSION

La méthode numérique proposée permet le calcul du champ des vitesses et de celui des températures entre deux plaques lisses parallèles, pour l'écoulement laminaire non isotherme de fluides thermodépendants. Elle permet en particulier la détermination précise de la composante transversale de vitesse, liée à cette thermodépendance, bien que très faible, influence le transfert de chaleur. Le coefficient d'échange calculé décrit bien les résultats expérimentaux obtenus dans la zone d'entrée d'un canal rectangulaire lisse pour $X^+ > 10^{-4}$.

NOMENCLATURE

a, b	:	coefficients intervenant dans la loi de variation de la consistance K avec la température.
$2l$:	distance entre les deux plaques.
C_p	:	chaleur spécifique
D_h	:	diamètre hydraulique
K	:	indice de consistance
Nu	:	nombre de Nusselt
T	:	température
T_e	:	température d'entrée
T_p	:	température de paroi
T_m	:	température de mélange
u	:	vitesse axiale
u_d	:	vitesse débitante
v	:	vitesse axiale
X^+	:	nombre de Cameron
τ	:	contrainte de cisaillement
ρ	:	masse volumique
φ_p	:	densité de flux de chaleur.

REFERENCES

- [1] P.SOURLIER Thèse Université NANCY I (soutenance Juin 1988)
- [2] E.C.DUFORT, S.P.FRANKEL Math. Tables Aids Comput., 7, 135 (1953)
- [3] S.D.JOSHI, A.E.BERGLES J.Heat Transfer, 3, 51 (1982)
- [4] V.SCIROCCO, R.DEVIENNE, M.LEBOUCHE Int.J.Heat Mass Transfer 1, 91 (1985).

ELASTICITE DES SOLIDES HETEROGENES ET VISCOSITE DES FLUIDES HETEROGENES.

*
* *

par Jean-Daniel WEBER

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux

Faculté des Sciences, Ile du Saulcy, 57045 METZ CEDEX

*
* *

1) Soit un solide élastique hétérogène avec :

C_1 : fraction volumique de la matrice

μ_1 : module de cisaillement de la matrice

C_2 : fraction volumique des inclusions

μ_2 : module de cisaillement des inclusions

μ : module de cisaillement effectif du solide hétérogène.

a) On a les bornes de Voigt et Reuss [1]

$$\frac{1}{\frac{C_1}{\mu_1} + \frac{C_2}{\mu_2}} < \mu < C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2$$

b) Le modèle self-consistent conduit à une bonne estimation de μ par la formule [2]

$$\frac{5\mu C_1}{3\mu + 2\mu_1} + \frac{5\mu C_2}{3\mu + 2\mu_2} = 1$$

Cette formule découle de la solution théorique du problème de l'inclusion sphérique dans un milieu élastique infini soumis à une contrainte uniaxiale :

$$\epsilon_i = \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_1} \epsilon_\infty$$

c) En particulier pour C_2 petit, $\mu_2 = \infty$, on a la formule :

$$\mu = \mu_1 (1 + 2.5C_2)$$

analogue à la formule d'Einstein pour une suspension de particules rigides dans un fluide visqueux.

2) Les résultats 1) a) b) s'appliquent aux fluides visqueux hétérogènes en remplaçant le module du cisaillement μ par le coefficient de viscosité η , du moins pour des fluides newtoniens en mouvement quasistatique. La décroissance de η en fonction du gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ parfois observée reste à expliquer.

3) Rhéologie et thermodynamique des processus irréversibles (TPI). [3][4]

Pour les fluides et les solides purement visqueux, pour lesquels $\dot{\epsilon}_{ij}$ est une fonction du seul tenseur contraintes σ_{ke} , la TPI conduit aux relations

$$\frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial \sigma_{ke}} = \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ke}}{\partial \sigma_{ij}}$$

(Lorsqu'il y a un domaine d'élasticité, on en déduit le principe du travail maximal).

Le potentiel de dissipation est une fonction des σ_{ke} telle que :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}}$$

Par exemple avec $J = 1/2 s_{ij} s_{ij}$ (s_{ij} : déviateur des contraintes) en posant :

$$\Omega = 1/2 \eta J$$

on décrit un fluide newtonien incompressible.

Plus généralement $\Omega = f(J)$ conduit à des représentations simples de fluides non-newtoniens et de solides viscoplastiques.

- b) Un travail théorique a été fait au LPMM de METZ [5] pour représenter le corps de Maxwell dans le cadre de la TPI. On utilise la décomposition classique $F = F_e F_p$. La variable interne p est un tenseur symétrique fonction du tenseur F_p caractérisant la configuration relâchée par rapport à la configuration initiale.
- L'énergie libre φ et le potentiel de dissipation Ω sont des fonctions des invariants de $F_e^T F_e$; on doit exprimer φ en fonction de la variable commandée F et de la variable interne p ; d'autre part on doit exprimer Ω en fonction de p et des forces thermodynamiques $P = - \partial \varphi / \partial p$.

REFERENCES.

- [1] J. MANDEL et P. DANTU, "Contribution à l'étude théorique et expérimentale du coefficient d'élasticité d'un milieu hétérogène mais statistiquement homogène", Annales des Ponts et Chaussées, vol 2 (1963).
- [2] M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, "Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes", n° spécial des cahiers du Groupe Français de Rhéologie, p. 175-198, (octobre 1981),
- [3] J. D. WEBER, "Mécanique des milieux déformables non linéaires", Ed. Eyrolles, Paris, (1972).
- [4] J. MANDEL, "Variables cachées, puissance dissipé, dissipativité normale. n° spécial des cahiers du Groupe Français de Rhéologie, p. 37-49, (janvier 1980).
- [5] M. BASSOUT-LELLICH, "Sur la théorie des milieux viscoélastiques standards". Thèse soutenue le 6 février 1986 à la faculté des Sciences de Metz.

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

La Rhéologie est la science des DEFORMATIONS et ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine, et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions. Son impact économique est donc considérable.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE, qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ses disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique fondée en 1964 et régie par le loi de 1901, le GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIF de contribuer au DEVELOPPEMENT des études et recherches relatives à la Rhéologie, et de favoriser la DIFFUSION ou le TRANSFERT des progrès accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le Groupe Français de Rhéologie

- organise des REUNIONS où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations ;
- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES DE RHEOLOGIE d'autres pays ;
- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL ;
- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes ;
- contribue à la clarification du langage par l'établissement d'un DICTIONNAIRE ;
- etc.

Cette activité vous intéresse et vous souhaitez devenir membre ou obtenir de plus amples renseignements, écrivez à l'adresse ci-dessous :

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Secrétaire Général
Institut de Mécanique des Fluides
Avenue du Professeur Camille Soula
31400 TOULOUSE

Anciens Présidents du G.F.R.

J. MANDEL (Président Fondateur, 1964-1967)

M. JOLY (1967-1970)

B. PERSOZ (1970-1973)

P. HABIB (1973-1976)

R. COURTEL (1976-1979)

C. HUET (1979-1983)

J.D. WEBER (1983-1987)

Président actuel : D. BOURGOIN (1987-)

Association régie par la loi du 1.07.1901, J.O. du 30.07.1964

CCP Paris 8045-90 K

Les Cahiers de Rhéologie

SOMMAIRE DU VOLUME VII, NUMERO 2

ARTICLES

Pages

Evaluation des possibilités de l'étude du comportement rhéologique des poudres de lait à partir d'essais de compression triaxiale,

par J. Scher, J. Hardy, J.C. Roth 39

Energie libre et le potentiel de dissipation associés à la loi de Norton-Hoff,

par A. Labzae et J.D. Weber 51

Une équation d'amplitude pour l'écoulement d'un fluide de Bingham entre cylindres coaxiaux tournants,

par B. Nsom Eyenga, T. Wydro et J.P. Decruppe 59

Simulation numérique de l'écoulement et de la convection laminaire entre deux plaques parallèles pour des fluides complexes thermodépendants,

par V.T. Nguyen, A. Elouardighi et M. Lebouche 66

NOTES

Elasticité des solides hétérogènes et viscosité des fluides hétérogènes,

par J.D. Weber 75

Les Colloques annuels du Groupe Français de Rhéologie :

1	- Rhéologie des systèmes à 2 phases	1965
2	- Aspects énergétiques en Rhéologie	1966
3	- Progrès récents des effets du 2ème ordre	1967
4	- Rhéologie en relation avec la structure	1968
5	- Comportements mécaniques des matériaux composites	1969
6	- Influence de la température et de la pression sur les comportements rhéologiques	1970
6 bis	- Rhéologie et hydrotechnique	1970
7	- Viscoplasticité	1971
8	- Rhéologie des bétons	1973
9	- Phénomènes de surface	1974
10	- Influence de la température sur les comportements rhéologiques	1975
11	- Rhéologie des corps mous	1976
12	- Thermodynamique des comportements rhéologiques	1977
13	- Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture	1978
14	- Rhéologie des couches minces	1979
15	- Comportements rhéologiques et structure des matériaux	1980
16	- Application de la rhéologie aux problèmes de fabrication industrielle	1981
17	- Comportements rhéologiques sous sollicitations rapides ou dynamiques	1982
18	- Méthodes et appareils de mesures rhéologiques	1983
19	- Rhéologie des matériaux anisotropes	1984
20	- Vingt ans de Groupe Français de Rhéologie : Progrès récents	1985
21	- Rhéologie des fluides hétérogènes	1986
22	- Rhéologie des fluides industriels	1987
23	- Endommagement et rhéologie des solides	1988