

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME 6 N°6
DECEMBRE 1985

THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES
ET CORPS DE MAXWELL (*)

par
M. BASSOUT-LELLICH (**)

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
Faculté des Sciences - Ile du Saucy - 57000 METZ - FRANCE

SOMMAIRE

RESUME

En reprenant dans cet article que la théorie des milieux standards généralisés peut être appliquée à la détermination d'une équation rhéologique du corps de Maxwell en grandes déformations.

Le variable interne est un tenseur symétrique qui caractérise la transformation entre l'état initial et l'état actuel; on explicite les conditions de dissipation et de convexité. Ce formalisme est compatible

THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES ET CORPS DE MAXWELL M. BASSOUT-LELLICH	5
DEUX APPLICATIONS DE LA THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES J.D. WEBER, M. BASSOUT-LELLICH	17
CROISSANCE LENTE DE FISSURE DANS LE PIN MARITIME A. D'ALMEIDA, G. VALENTIN	31
TRANSCONFORMATION DE MACROMOLECULES FLEXIBLES ET CONSEQUENCES SUR LE COMPORTEMENT NON NEWTONIEN D. DUPUIS, C. WOLFF	43
APPLICATION DU CRITERE DE LA DENSITE D'ENERGIE AU BOIS DE CHARPENTE G. VALENTIN, F. LAHNA	57
MESURE DU MODULE COMPLEXE PAR POINCONNEMENT G. RAMOND, M.PASTOR, D. MAUGIS, M. BARQUINS	67
ECOULEMENTS ELONGATIONNELS DE SOLUTIONS DE POLYMERES : ASPECTS EXPERIMENTAUX ET NUMERIQUES A. LYAZID, O. SCRIVENER	75
RHEOLOGIE DES PRODUITS ALIMENTAIRES : LA RHEOLOGIE EXPERIMENTALE DANS L'INDUSTRIE LAITIERE J.C. ROTH, J. HARDY, J.P. RAMET	87

THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES
ET CORPS DE MAXWELL (*)

par
M. BASSOUT-LELLICH (**)

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
Faculté des Sciences - Ile du Saulcy - 57000 METZ - FRANCE

RESUME

On montre dans cet article que la théorie des milieux standards généralisés peut être appliquée à la détermination d'une équation rhéologique du corps de Maxwell en grandes déformations.

La variable interne est un tenseur symétrique qui caractérise la transformation entre l'état initial et l'état relâché, on explicite les conditions de dissipativité et de convexité. Ce formalisme est compatible avec les principes de thermodynamique et le principe d'Onsager.

ABSTRACT

We show in this paper that the theory of generalized standard media is applied to the determination of rheological equation of a Maxwell body for large deformations.

The internal state variable is a symmetrical tensor characterizing the transformation of relaxed state from initial state. This formalism is compatible with the principals of thermodynamics and the principal of Onsager. The conditions of dissipativity and convexity are made clear.

1. INTRODUCTION

Deux fonctions sont nécessaires pour décrire un comportement rhéologique $[\epsilon, \xi]$; l'énergie libre $\phi(\epsilon, \xi, T)$ qui dépend de la déformation ϵ , d'un nombre fini de variables internes ξ , et de la température T ; le

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 4 octobre 1984.

(**) Ce travail fait une partie de thèse de doctorat ès sciences physiques actuellement en préparation au L.P.M.M. à la Faculté des Sciences de METZ.

pseudopotentiel de dissipation $\Omega(\xi, X, T)$ où $X = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ est la force thermodynamique associée à chaque variable interne ξ . On suppose pour simplifier que ϕ et Ω sont relatifs à un élément matériel de volume-unité dans la configuration initiale [3, 4].

L'évolution des variables internes ξ et du tenseur des contraintes σ (conjugué du tenseur ϵ) est déterminée par les équations :

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial X}$$

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$$

La première constitue une généralisation des relations d'Onsager. La seconde est l'équation de Coleman, valable puisque le milieu présente de l'élasticité instantanée [2].

Les déformations peuvent être infiniment petites ou finies. Notons qu'une discontinuité de ϵ et T entraîne une discontinuité de $\dot{\xi}$ mais pas de discontinuité de ξ [5, 6].

Mandel [6] a établi l'expression correcte de puissance dissipée lorsque le milieu ne présente pas d'élasticité instantanée (cas du solide de Kelvin par exemple).

Nous avons choisi Ω fonction de ξ et X et T [5] d'après une hypothèse faite par Rice [7] et suggérée par Mandel [6]. Cette hypothèse est confirmée par l'étude des modèles rhéologiques constitués par des ressorts et des amortisseurs; chaque variable interne définit alors l'état d'un amortisseur.

Pour les milieux standards généralisés, nous avons les deux conditions suivantes :

- 1- $X \frac{\partial \Omega}{\partial X} \geq 0$ dissipativité - nécessaire
- 2- $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \geq 0$ avec $\dot{\xi} = 0$ pour $X = 0$ convexité

Lorsqu'il y a plusieurs variables internes, ces deux conditions s'expriment par :

- 1'- $X_i \frac{\partial \Omega}{\partial X_i} \geq 0$ dissipativité
- 2'- La matrice $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \partial X_j}$ est positive avec $\dot{\xi}_i = 0$
pour $X_i = 0$ convexité

La convexité entraîne la dissipativité, mais la réciproque est inexacte. Le présent article, faisant suite à notre article [5], donne une nouvelle présentation de l'équation rhéologique du corps de Maxwell pour des grandes déformations, dans le formalisme des milieux standards généralisés [1, 4].

2. MILIEUX STANDARDS GENERALISES ET CORPS DE MAXWELL

2.1 Description du corps de Maxwell

Le comportement du corps de Maxwell pour des déformations infiniment petites est donné par les équations :

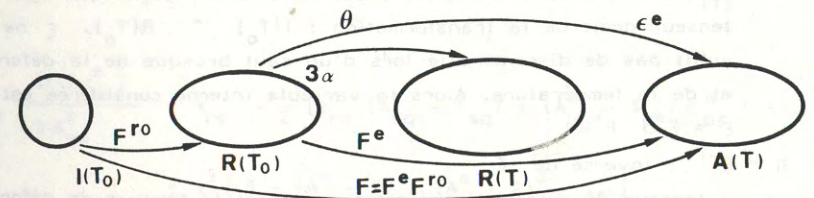
$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^P)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = g(J_2) s_{ij}$$

où g est une fonction positive et croissante du second invariant J_2 du déviateur des contraintes s_{ij} .

Nous adopterons les notations suivantes décrivant un élément matériel dans différents états. Les déformations sont supposées homogènes.

- $I(T_0)$: configuration initiale à la température T_0 - $I(T_0)$ a un volume unité
- $R(T_0)$: configuration relâchée à la température T_0 - $R(T_0)$ a un volume unité
- $R(T)$: configuration relâchée à la température T
- $A(T)$: configuration actuelle à la température T



2.2 Expression de ϕ et Ω du corps de Maxwell

L'énergie libre ϕ du corps de Maxwell est :

$$\phi = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3\alpha)^2 + \mu (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij}) (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij}) - \int S(T) dT$$

Le pseudopotentiel de dissipation est :

$$\Omega = f(J_2, T) ; J_2 = 2 \epsilon_{ih} \epsilon_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\epsilon_{ij} X_{ij})^2$$

où

Φ : énergie libre d'un élément matériel dans $A(T)$

λ, μ : coefficients de Lamé de l'élasticité instantanée supposée toujours isotrope; ce sont des fonctions de la température T

l_r : longueur d'un segment matériel dans $R(T)$

l_{r_0} : longueur de ce segment dans $R(T_0)$

V_r : volume de $R(T)$

V_{r_0} : volume de $R(T_0)$

α : dilatation thermique linéaire $\log \frac{l_r}{l_{r_0}}$ de la transformation $R(T_0) \rightarrow R(T)$

3α : dilatation thermique volumique $\log \frac{V_r}{V_{r_0}}$ de la transformation $R(T_0) \rightarrow R(T)$

$S(T)$: entropie de la configuration relâchée

$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$: tenseur gradient de la transformation $I(T_0) \rightarrow A(T)$. a_i sont les coordonnées initiales, x_i les coordonnées finales relativement à un même repère orthonormé. On désigne aussi le tenseur F_{ij} par F , et on pose $G = F^{-1}$.
Soit $F^r \alpha I(T_0) \rightarrow R(T_0)$ et $F^e : R(T_0) \rightarrow A(T)$
Alors F se décompose comme suit :

$$F = F^e \cdot F^r_0$$

θ : dilatation volumique $\log \frac{V_r}{V_{r_0}}$ de la transformation $R(T_0) \rightarrow A(T)$.
On a $\theta = \log \det F$

ξ : variable interne tensorielle. C'est un tenseur symétrique égal au tenseur droit de la transformation : $I(T_0) \rightarrow R(T_0)$. ξ ne subit pas de discontinuité lors d'un saut brusque de la déformation et de la température. Alors la variable interne considérée est $\xi = F^r_0 F^r_0$

$\eta = \xi^{-1}$: inverse de ξ

e_{ij}^e : tenseur de déformation élastique ; c'est le tenseur de déformation logarithmique de la transformation : $R(T_0) \rightarrow A(T)$.
 e^e a les expressions équivalentes suivantes :

$$e^e = \frac{1}{2} \log (F^e F^{eT}) = -\frac{1}{2} \log (G^T \xi G) = \frac{1}{2} \log (F \eta F^T)$$

$$A^e = G^T \xi G$$

$$B^e = F \eta F^T = (A^e)^{-1} = A^{e-1}$$

$X_{ij} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{ij}}$: force thermodynamique associée à la variable interne ξ_{ij}

$J_2 = 2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2$. On verra que c'est le second invariant du déviateur des contraintes de Kirchhoff, l'état de référence étant $R(T)$

f', f'' : dérivée première et seconde de f par rapport à J_2 . On verra que le comportement est dissipatif pour $f' \geq 0$. Il est convexe pour $f' \geq 0$ et $f'' \geq 0$.

$\dot{\xi}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial X_{ij}}$: équation d'évolution de la variable interne ξ_{ij}

2.3 La force thermodynamique X_{ij}

$$X_{ij} = -\mu \frac{\partial \beta}{\partial \xi_{ij}}$$

$$\beta = (\epsilon_{pq}^e - \alpha \delta_{pq}) (\epsilon_{pq}^e - \alpha \delta_{pq})$$

$$-2\epsilon^e = \log A^e$$

$$-2\epsilon_{pq}^e = A_{pq}^e - \delta_{pq} - \frac{1}{2} (A_{pr}^e - \delta_{pr}) (A_{rq}^e - \delta_{rq})$$

$$+ \frac{1}{3} (A_{pr}^e - \delta_{pr}) (A_{rs}^e - \delta_{rs}) (A_{sq}^e - \delta_{sq}) - \dots$$

$$\frac{\partial (-2\epsilon_{pq}^e)}{\partial A_{rs}^e} = \delta_{pr} \delta_{qs} - \frac{1}{2} [\delta_{pr} \delta_{us} (A_{uq}^e - \delta_{uq}) + (A_{pu}^e - \delta_{pu}) \delta_{ur} \delta_{qs}] + \dots \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{pq}^e \frac{\partial (-2\epsilon_{pq}^e)}{\partial A_{rs}^e} &= \epsilon_{rs}^e - \frac{1}{2} [\epsilon_{rq}^e (A_{sq}^e - \delta_{sq}) + (A_{pr}^e - \delta_{pr}) \epsilon_{ps}^e] + \dots \\ &= \epsilon^e [11 - (A^e - 11) + (A^e - 11)^2 - \dots] \\ &= \epsilon^e B^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \xi_{ij}} &= 2(\epsilon_{pq}^e - \alpha \delta_{pq}) \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial \xi_{ij}} \\ &= 2 \epsilon_{pq}^e \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial \xi_{ij}} - 2\alpha \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial \xi_{ij}} \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\frac{\partial(-2\varepsilon_{pp}^e)}{\partial A_{rs}^e}$ à partir de (1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-2\varepsilon_{pp}^e)}{\partial A_{rs}^e} &= \delta_{rs} - \frac{1}{2} [\delta_{pr} \delta_{us} (A_{up}^e - \delta_{up}) + (A_{pu}^e - \delta_{pu}) \delta_{ur} \delta_{ps}] + \dots \\ &= \delta_{rs} - (A_{rs}^e - \delta_{rs}) + \dots \\ &= \mathbb{1} - (A^e - \mathbb{1}) + (A^e - \mathbb{1})^2 - \dots \\ &= B^e \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-2\varepsilon_{pp}^e)}{\partial \xi_{ij}} &= \frac{\partial(-2\varepsilon_{pp}^e)}{\partial A_{rs}^e} \frac{\partial A_{rs}^e}{\partial \xi_{ij}} = B_{rs}^e G_{ir} G_{js} \\ &= GB^e G^T \\ &= GF \eta F^T G^T \\ &= \eta_{ij} \end{aligned}$$

Calculons ensuite :

$$\frac{\partial(\varepsilon_{pq}^e \varepsilon_{pq}^e)}{\partial \xi_{ij}} = 2\varepsilon_{pq}^e \frac{\partial \varepsilon_{pq}^e}{\partial A_{rs}^e} \frac{\partial A_{rs}^e}{\partial \xi_{ij}} = -\varepsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js}$$

Finalement, on obtient l'expression de la force thermodynamique

$$X_{ij} = \mu \varepsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} - \alpha \mu \eta_{ij}$$

2.4 Evolution de variable interne ξ_{ij} :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{ij} &= f' \frac{\partial J_2}{\partial X_{ij}} \\ &= 4f' (\xi_{ih} \xi_{jk} X_{hk} - \frac{1}{3} \xi_{ij} \xi_{hk} X_{hk}) \\ &= 4\mu f' (\xi_{ih} \xi_{jk} \varepsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{hr} G_{ks} - \frac{1}{3} \xi_{ij} \varepsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{hr} \xi_{hk} G_{ks}) \\ &\quad + 4\mu \alpha f' (\frac{1}{3} \xi_{ij} \xi_{hk} \eta_{hk} - \xi_{ih} \xi_{jk} \eta_{hk}) \end{aligned}$$

En effet, nous avons :

$$\varepsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} \xi_{ij} G_{js} = \varepsilon_{ru}^e B_{us}^e A_{rs}^e = \varepsilon_{ru}^e \delta_{ur} = \varepsilon_{rr}^e = \theta \quad (2)$$

$$\xi_{ij} \eta_{ij} = 3 \quad \xi_{ih} \eta_{hk} \xi_{jk} = \delta_{ik} \xi_{jk} = \xi_{ij} \quad \frac{1}{3} \xi_{ij} \xi_{hk} \eta_{hk} = \xi_{ij}$$

Alors :

$$\dot{\xi}_{ij} = 4\mu f' (\xi_{ih} G_{hk} \varepsilon_{kr}^e F_{rj} - \frac{\theta}{3} \xi_{ij}) \quad (3)$$

2.5 Invariance de volume de $R(T_0)$

Démontrons que le volume de $R(T_0)$ est invariable :

En fait, il suffit de démontrer que [3, 5] :

$$\frac{d}{dt} \log \det \xi = 0$$

nous avons $\frac{d}{dt} \log \det \xi = \dot{\xi}_{ij} \eta_{ij}$

$$\dot{\xi}_{ij} \eta_{ij} = 4\mu f' (\xi_{ih} \eta_{ij} G_{hk} \varepsilon_{kr}^e F_{rj} - \frac{\theta}{3} \xi_{ij} \eta_{ij})$$

mais $\xi_{ih} \eta_{ij} = \delta_{hj}$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \dot{\xi}_{ij} \eta_{ij} &= 4\mu f' (G_{jk} \varepsilon_{kr}^e F_{rj} - \theta) \\ &= 4\mu f' (\varepsilon_{rr}^e - \theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.6 Le déviateur s du tenseur des contraintes de Kirchhoff

Pour simplifier, supposons que F soit un tenseur diagonale dans un repère fixe et que le corps élastique soit sans contraintes pour $F = \mathbb{1}$. Faisons-lui subir de façon isotherme des dilatations logarithmiques $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Admettons que son énergie libre ait pour expression

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} \theta^2 + \mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

On en déduit

$$d\Phi = \lambda \theta \left(\frac{dF_1}{F_1} + \frac{dF_2}{F_2} + \frac{dF_3}{F_3} \right) + 2\mu (\varepsilon_1 \frac{dF_1}{F_1} + \varepsilon_2 \frac{dF_2}{F_2} + \varepsilon_3 \frac{dF_3}{F_3})$$

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les contraintes principales de Cauchy :

$$d\Phi = \sigma_1 F_2 F_3 dF_1 + \sigma_2 F_3 F_1 dF_2 + \sigma_3 F_1 F_2 dF_3$$

d'où $F_1 F_2 F_3 \sigma_1 = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_1$ etc...

Au premier membre se trouve le tenseur des contraintes de Kirchhoff, produit du tenseur des contraintes de Cauchy par dét F. Le résultat est valable pour la déformation élastique $\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij}$ à partir de R(T)

$$t_{ij} = \lambda(\theta - 3\alpha) \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij})$$

Le déviateur s de t est :

$$s_{ij} = -\frac{2\mu}{3} \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e$$

2.7 Expression de deuxième invariant du tenseur des contraintes de Kirchhoff

Nous allons établir la formule fondamentale suivante :

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = 2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2 \quad (4)$$

En fait,

Il suffit de démontrer que :

$$2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2 = 2\mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e \right) \quad (5)$$

nous avons pour le troisième membre de (4) :

$$2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} = 2\mu^2 \xi_{ih} \xi_{jk} (\epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} - \alpha \eta_{ij}) (\epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e G_{hr'} G_{ks'} - \alpha \eta_{hk}) \quad (6)$$

pour 1er terme de (6), on a :

$$\xi_{ih} \xi_{jk} \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e G_{hr'} G_{ks'} \quad (7)$$

$$G_{ir} \xi_{ih} G_{hr'} = A_{rr'}^e$$

$$G_{js} \xi_{jk} G_{ks'} = A_{ss'}^e$$

Alors (7) devient :

$$\epsilon_{ru}^e B_{us}^e \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e A_{rr'}^e A_{ss'}^e$$

$$\text{mais } B_{u's'}^e A_{ss'}^e = \delta_{u's}$$

Donc (7) devient :

$$\epsilon_{ru}^e B_{uu'}^e \epsilon_{r'u'}^e A_{rr'}^e$$

ϵ^e, A^e, B^e ont mêmes directions propres et commutent.

On obtient

$$(7) = \epsilon_{ru}^e \epsilon_{ru}^e$$

Pour 2ème terme de (6), on a :

$$-\alpha \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} \xi_{ih} \xi_{jk} \eta_{hk} G_{js} = -\alpha \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} \xi_{ij} G_{js} = -\alpha \theta \quad (8)$$

(voir (2))

Même chose pour 3ème terme de (6) :

$$-\alpha \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e G_{hr'} \xi_{ih} \xi_{jk} \eta_{jk} G_{ks'} = -\alpha \theta \quad (9)$$

Et pour 4ème terme de (6), on a :

$$\alpha^2 \xi_{ih} \xi_{jk} \eta_{ij} \eta_{hk} = \alpha^2 \xi_{ih} \delta_{ki} \eta_{hk} = 3\alpha^2 \quad (10)$$

Donc de (7), (8), (9), et (10) on obtient pour (6) :

$$2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} = 2\mu^2 (\epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e - 2\alpha\theta + 3\alpha^2) \quad (11)$$

Ensuite, pour le 2ème terme de 1er membre de (5), on a :

$$-\frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2 = -\frac{2}{3} \mu^2 (\epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} \xi_{ij} G_{js} - \alpha \xi_{ij} \eta_{ij})^2 = -\frac{2}{3} \mu^2 (\theta - 3\alpha)^2 \quad (12)$$

De (11) et (12), on obtient :

$$2 \xi_{ih} \xi_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{2}{3} (\xi_{ij} X_{ij})^2 = 2\mu^2 (\epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e - 2\alpha\theta + 3\alpha^2 - \frac{\theta^2}{3} + 2\alpha\theta - 3\alpha^2) = 2\mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e \right) \quad (13)$$

$$s_{ij} s_{ij} = \left(-\frac{2\mu}{3} \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e \right) \left(-\frac{2\mu}{3} \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e \right) = 4\mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e \right) \quad (14)$$

Finalement, en comparant (13), et (14), on obtient (5).

2.8 Comportement lorsque le tenseur gradient des vitesses est constant, symétrique et de trace nulle

On étudie, alors, le cas où :

$$\epsilon^e = \frac{1}{2} \log G^T \xi G = \text{cte}$$

$$G^T \xi G + G^T \dot{\xi} G + G^T \xi \dot{G} = 0$$

avec $\dot{F}F^{-1} = D$

soit $\dot{F}G = D \quad \dot{C}F = -D \quad \dot{G} = -DG \quad \dot{C}^T = -G^T D$

On peut appliquer (3), et comme F, G, ξ , ϵ^e ont mêmes directions principales, donc :

$D = f's$

En effet, pour :

$f = \frac{1}{2\gamma} J_2 \quad D = \frac{1}{2\gamma} s$

et pour :

$f = KJ_2^a \quad (K, a \text{ fonctions de } T) \quad D = KaJ_2^{a-1} s$

2.9 Dissipativité et convexité.

On a :

$\frac{\partial \Omega}{\partial X_{ij}} = 4f' (\epsilon_{ih} \epsilon_{jk} X_{hk} - \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{hk} X_{hk})$

$X_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial X_{ij}} = 4f' [\epsilon_{ih} \epsilon_{jk} X_{ij} X_{hk} - \frac{1}{3} (\epsilon_{ij} X_{ij})^2]$

Alors, la condition nécessaire et suffisante de dissipativité est $f' \geq 0$, en plus la fonction de dissipation est égale à $2f'J_2$.

D'autre part :

$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_{ij} \partial X_{hk}} = 4f'' (\epsilon_{ih} \epsilon_{jk} - \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{hk})$

$+ 16f''' (\epsilon_{ih'} \epsilon_{jk'} X_{h'k'} - \frac{1}{3} \epsilon_{ij} \epsilon_{h'k'} X_{h'k'}) (\epsilon_{rh} \epsilon_{sk} X_{rs} - \frac{1}{3} \epsilon_{hk} \epsilon_{r's'} X_{r's'})$

Alors, la condition nécessaire et suffisante pour la convexité est :

$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_{ij} \partial X_{hk}} Y_{ij} Y_{hk} \geq 0 \quad \forall Y_{ij}$

c'est-à-dire $f' \geq 0$ et $f'' \geq 0$.

Ainsi pour $f = KJ_2^a$ le comportement est dissipatif pour $a \geq 0$ et convexe pour $a \geq 1$.

Par exemple, le fait qu'un alliage superplastique ait en traction simple un comportement $\sigma = c \dot{\epsilon}^m$ avec $m \leq 1$ prouve que son comportement est convexe.

Remarquons que, lorsqu'on donne F(t), T(t) et la valeur initiale ξ_0 de ξ avec $\det \xi_0 = 1$, la fonction tensorielle $\xi(t)$ peut être calculée par (3). ϵ^e et θ sont connus, et le tenseur des contraintes de Kirchhoff est :

$t_{ij} = \lambda(\theta - 3\alpha) \delta_{ij} + 2\mu(\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij})$

On pourrait aussi calculer le tenseur des contraintes de Bousinesq

$\frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$

3. CONCLUSION

Cette application d'un modèle rhéologique en viscoélasticité non linéaire illustre l'intérêt de la théorie des milieux standards généralisés dans le cas d'une variable interne tensorielle. Nous avons ainsi présenté une étude nouvelle du corps de Maxwell pour des déformations finies, et des températures variables dans un cadre thermodynamique rationnel.

L'auteur tient à remercier M. le professeur J.D. WEBER pour ses suggestions et précieux conseils.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. HALPHEN et NGUYEN QUOC SON
Sur les matériaux standards généralisés.
Journal de Mécanique vol 14 N°1, 1975 - p. 39-63
- [2] J.D. WEBER
Mécanique des milieux déformables non linéaires
Edition Eyrolles 1972
- [3] J.D. WEBER
Hypothèse des variables internes et représentations de certains fluides viscoélastiques. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, 15 nov. 1975
- [4] J.D. WEBER and A. EBERHARDT
Internal state variables and normality in viscoplastic flow.
Rhéol. Acta 21, 403-405 (1982)
- [5] J.D. WEBER et M. BASSOUT-LELLICH
Deux applications de la théorie des milieux standards généralisés.
Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 24 mai 1984,
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, à paraître.
- [6] J. MANDEL
Variables cachées Puissance dissipée
Dissipation normale
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie
Numéro spécial Janvier 1980 p. 37
- [7] J.R. RICE
Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity
J. Mech. Phys. Solids 1971. vol. 19 p. 433-455

DEUX APPLICATIONS DE LA THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES (*)

TWO APPLICATIONS OF THE THEORY OF GENERALIZED STANDARD MEDIA

J. D. WEBER et M. BASSOUT-LELLICH

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
Faculté des Sciences - Ile du Saulcy - 57 000 METZ - FRANCE

RESUME

On montre que la théorie des milieux standards généralisés peut être appliquée à la description de la cinétique des réactions chimiques élémentaires en phase gazeuse (variable interne scalaire) et à la détermination d'une équation rhéologique du fluide de Maxwell (variable interne tensorielle). Ces représentations sont compatibles avec les principes de la thermodynamique et le principe d'Onsager. On compare les conditions de dissipativité et de convexité.

ABSTRACT

The theory of generalized standard media is applied to the description of elementary gas phase chemical reactions (scalar internal state variable), and to the determination of the rheological equation of a Maxwell fluid (tensorial internal state variable); these representations are compatible with the principles of thermodynamics and the principle of Onsager. The conditions of dissipativity and convexity are compared.

1. INTRODUCTION

Dans la théorie des milieux standards généralisés [1] on a besoin de deux fonctions pour décrire un comportement rhéologique : l'énergie libre $\phi(\epsilon, p)$ qui dépend de la déformation ϵ et d'un nombre fini de variables internes, notées collectivement p ; le pseudopotentiel de dissipation $\Omega(p, P)$ où $P = -\frac{\partial \phi}{\partial p}$ est la force thermodynamique associée à chaque variable interne p (on suppose pour simplifier que ϕ et Ω sont relatifs à un élément matériel de volume unité dans la configuration initiale). L'évolution des variables internes p et du tenseur des contraintes σ (conjugué du tenseur ϵ) est alors régie par les équations :

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial P} \quad \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$$

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 24 mai 1984

La première constitue une généralisation des relations d'Onsager. La seconde est l'équation de Coleman, valable puisque le milieu présente de l'élasticité instantanée. ϕ et Ω dépendent aussi de la température T . Les déformations peuvent être infiniment petites ou finies. Notons qu'un saut brusque de ϵ et T change la valeur de p , mais n'entraîne pas de discontinuité de p . C'est là une propriété caractéristique des variables internes. Le comportement n'est pas modifié lorsqu'on ajoute à Ω une fonction quelconque des p . En la choisissant convenablement, on peut toujours supposer que $\Omega = 0$ pour $P = 0$ quels que soient les p .

Ce formalisme a été généralisé par Mandel [6] pour des milieux sans élasticité instantanée tels que le solide de Kelvin. Nous nous en tiendrons ici aussi milieux doués d'élasticité instantanée.

Suivant une hypothèse faite par Rice [7] et suggérée également par Mandel [6] nous avons admis que \dot{p} est une fonction des variables internes p et des forces thermodynamiques P , cette fonction ne dépendant pas explicitement de ϵ . Cela revient à choisir Ω fonction des p et P [5]. Ce point de vue est d'ailleurs confirmé par l'étude des assemblages de ressorts et d'amortisseurs linéaires ou non linéaires (modèles rhéologiques). Chaque variable interne décrit alors la configuration d'un amortisseur [3].

Ω doit nécessairement vérifier la condition de dissipativité

$$p \frac{\partial \Omega}{\partial P} \geq 0 \quad (1)$$

qui résulte du second principe de la thermodynamique ($\frac{1}{T}P \frac{\partial \Omega}{\partial P}$ est le taux de production intrinsèque d'entropie).

Mais pour les milieux standards généralisés, on a

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial P^2} \geq 0 \quad (2)$$

avec en outre

$$\frac{\partial \Omega}{\partial P} = 0 \quad \text{pour } P = 0 \quad (3)$$

Nous appelons condition de convexité l'ensemble des conditions (2) et (3).

Lorsqu'il y a plusieurs variables internes, (1) s'écrit aussi $P_i \frac{\partial \Omega}{\partial P_i} \geq 0$ et (2) exprime que la matrice $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial P_i \partial P_j}$ est positive.

La convexité entraîne la dissipativité, mais la réciproque est inexacte. Rappelons que la théorie de la viscoélasticité linéaire est obtenue lorsque ϕ est fonction quadratique de ϵ et p et lorsque Ω est indépendant des p et fonction quadratique des P . Dissipativité et convexité sont alors deux conditions équivalentes. On en déduit en particulier les restrictions bien connues $f \geq 0 \quad \dot{f} \leq 0 \quad \ddot{f} \geq 0 \dots$ pour la fonction de fluage $f(t)$.

La théorie des milieux standards généralisés fournit d'autre part un cadre rationnel pour décrire la viscoélasticité non linéaire et de la viscoplasticité.

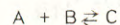
En cinétique chimique, nous précisons dans quelques cas particuliers les conditions de dissipativité et de convexité.

Nous donnerons ensuite les fonctions ϕ et Ω d'un fluide de Maxwell linéaire ou non linéaire, pour des déformations finies et des températures variables.

Nous nous appuyerons sur un article de Sidoroff [8], en donnant pour le fluide de Maxwell une forme explicite aux représentations qu'il a proposées.

2. MILIEUX STANDARDS GENERALISES ET CINETIQUE CHIMIQUE

Soit une réaction chimique élémentaire ([2], § 5, 14) entre gaz parfaits de la forme



où A, B, C sont des molécules ou des radicaux libres. L'évolution est supposée isotherme.

On désigne par n_A^0, n_B^0, n_C^0 les nombres de moles de A, B, C à l'instant 0 et

par n_A, n_B, n_C les nombres de moles à l'instant t .

Nous appelons degré d'avancement de la réaction à l'instant t , la quantité ξ telle que

$$n_A = n_A^0 - \xi \quad n_B = n_B^0 - \xi \quad n_C = n_C^0 + \xi$$

Nous prendrons ξ pour variable interne. On doit en effet choisir pour variable interne une grandeur qui ne subisse pas de discontinuité dans un changement brusque du volume et de la température, changement dans lequel se manifeste l'élasticité instantanée du mélange gazeux.

Soit v le volume dans lequel se produit la réaction, et soit P_A, P_B, P_C les pressions partielles des gaz A, B, C .

Nous supposons que la réaction obéisse à la cinétique

$$r = \frac{\dot{\xi}}{v} = K_1 P_A P_B - K_2 P_C$$

où K_1 et K_2 sont des constantes.

Nous allons montrer qu'une telle cinétique est dissipative et convexe.

L'énergie libre ϕ du mélange gazeux est la somme des énergies libres ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C des gaz A, B, C .

Pour P_A fixé, ϕ_A doit être une variable extensive. On en déduit l'existence d'une constante K_A telle que

$$\phi_A = n_A RT \log \frac{K_A n_A}{v} = (n_A^0 - \xi) RT \log \frac{K_A (n_A^0 - \xi)}{v}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \phi_A}{\partial \xi} = - RT \log \frac{K_A (n_A^0 - \xi)}{v} - RT$$

$$\text{de même} \quad \phi_B = (n_B^0 - \xi) RT \log \frac{K_B (n_B^0 - \xi)}{v}$$

$$\frac{\partial \phi_B}{\partial \xi} = - RT \log \frac{K_B (n_B^0 - \xi)}{v} - RT$$

$$\text{et} \quad \phi_C = (n_C^0 + \xi) RT \log \frac{K_C (n_C^0 + \xi)}{v}$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial \xi} = RT \log \frac{K_C (n_C^0 + \xi)}{v} + RT$$

L'affinité X de la réaction n'est autre que la force thermodynamique associée à la variable ξ :

$$X = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = RT \log K \frac{P_A P_B}{P_C}$$

avec
$$K = \frac{e}{RT} \frac{K_A K_B}{K_C}$$

À l'équilibre, on a la loi d'action de masse

$$K \frac{P_A P_B}{P_C} = 1$$

Cette égalité doit avoir lieu pour

$$K_1 P_A P_B - K_2 P_C = 0$$

d'où la relation classique $K = \frac{K_1}{K_2}$

X est alors toujours du même signe que $\dot{\xi}$, quels que soient n_A^0 , n_B^0 , n_C^0 et ξ : le milieu est bien dissipatif.

Examinons maintenant la condition de convexité.

Le pseudopotential de dissipation $\Omega(\xi, X)$ doit vérifier

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} \geq 0$$

et en outre $\dot{\xi}$ doit s'annuler en même temps que X.

Cette dernière condition résulte de la relation $K = \frac{K_1}{K_2}$

Nous allons mettre $\dot{\xi}$ sous la forme

$$\dot{\xi} = f(\xi, X)$$

La condition de convexité se réduira à

$$\frac{\partial f}{\partial X} \geq 0$$

Pour ξ fixé, nous allons exprimer le volume v en fonction de l'affinité X au moyen de

$$X = RT \log K \frac{P_A P_B}{P_C}$$

d'où

$$e^{\frac{X}{RT}} = K \cdot RT \cdot \frac{(n_A^0 - \xi)(n_B^0 - \xi)}{n_C^0 + \xi} \cdot \frac{1}{v} \quad (4)$$

d'autre part

$$\dot{\xi} = K_1 P_A P_B v - K_2 P_C v = K_1 (RT)^2 (n_A^0 - \xi)(n_B^0 - \xi) \frac{1}{v} - K_2 RT (n_C^0 + \xi) \quad (5)$$

En éliminant v entre les relations (4) et (5), il vient

$$\dot{\xi} = f(\xi, X) = K_2 RT (n_C^0 + \xi) \left(e^{\frac{X}{RT}} - 1 \right)$$

Il s'agit bien d'une fonction croissante de X pour ξ fixé : la condition de convexité est vérifiée.

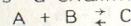
Notons que le pseudopotential de dissipation est

$$\Omega = K_2 (RT)^2 (n_C^0 + \xi) \left(e^{\frac{X}{RT}} - \frac{X}{RT} \right) + g(\xi)$$

On peut choisir la fonction $g(\xi)$ pour que Ω s'annule pour $X = 0$:

$$\Omega = K_2 (RT)^2 (n_C^0 + \xi) \left(e^{\frac{X}{RT}} - \frac{X}{RT} - 1 \right)$$

Nous venons d'examiner le cas de la réaction



dans laquelle deux molécules se transforment en une molécule.

Plus généralement, une réaction chimique élémentaire dans laquelle m molécules se transforment en n molécules suivant la cinétique

$$r = \frac{\dot{\xi}}{v} = K_1 P_A P_B \dots - K_2 P_L P_M \dots$$

est toujours dissipative.

Elle est en outre convexe si $m = 1$ ou si $n = 1$ ou si $m = n$.

Elle est dissipative mais non convexe dans les autres cas.

Ainsi, une réaction $A + B + C \rightleftharpoons D + E$

avec $r = K_1 P_A P_B P_C - K_2 P_D P_E$

serait dissipative mais non convexe.

Notons que le cas $m = n$ est singulier. En effet, pour ξ fixé, X ne peut prendre qu'une seule valeur X_0 . La vitesse $\dot{\xi}$ est alors définie de façon unique pour $m = n = 1$, mais elle est indéterminée pour $m = n > 1$ (on peut simplement affirmer que $\dot{\xi}$ et X_0 sont de même signe). On voit qu'il s'agit d'un cas limite de comportement convexe.

Nous remarquons qu'en particulier les réactions élémentaires unimoléculaires et bimoléculaires sont convexes.

3. MILIEUX STANDARDS GENERALISES ET FLUIDE DE MAXWELL

3. 1. Les fonctions ψ et Ω pour le fluide de Maxwell

L'étude du fluide de Maxwell dans le formalisme des variables internes a déjà été abordée dans [4]

Nous apportons ici deux éléments nouveaux :

- l'effet d'une variation de température est pris en compte
- le comportement du fluide peut être non linéaire.

Pour des déformations infiniment petites, le comportement du fluide de Maxwell est donné par

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^P)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = g(J_2) s_{ij}$$

g est une fonction positive et croissante du second invariant J_2 du déviateur des contraintes s_{ij} .

Nous décrivons ici un fluide de Maxwell, pour des températures variables et des déformations finies au moyen de l'expression suivante de l'énergie libre ϕ et du pseudopotentiel de dissipation Ω :

$$\phi = \frac{\lambda}{2} (\theta - 3\alpha + \beta)^2 + \mu (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij}) (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij}) - \int S(T) dT$$

$$\Omega = f(J_2, T)$$

ϕ : énergie libre d'un élément matériel dans l'état actuel, c'est-à-dire déformé et porté à la température T ; cet élément a un volume unité dans la configuration initiale, qui est une configuration sans contraintes à la température T_0 .

λ, μ : coefficients de Lamé de l'élasticité instantanée supposée toujours isotrope ; ce sont des fonctions de la température T .

θ : dilatation volumique $\log \frac{v}{v_{r0}}$ dans la transformation faisant passer de l'état relâché à la température T_0 , à l'état actuel à la température T . On a $\theta = \log \det F$ et $v_{r0} = 1$.

ϵ_{ij}^e : tenseur de déformation élastique ; c'est le tenseur de déformation logarithmique dans la transformation faisant passer de l'état relâché à la température T_0 , à l'état actuel à la température T .

α : dilatation thermique linéaire $\log \frac{l_r}{l_{r0}}$ dans la transformation faisant passer de l'état relâché à la température T_0 , à l'état relâché à la température T .

3α : dilatation thermique volumique $\log \frac{v_r}{v_{r0}}$ dans la transformation faisant passer de l'état relâché à la température T_0 , à l'état relâché à la température T .

$S(T)$: entropie de la configuration relâchée.

$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$: tenseur gradient de la transformation entre l'état initial à la température T_0 et l'état actuel à la température T . a_i sont les coordonnées initiales x_i les coordonnées finales relativement à un même repère orthonormé. On désigne aussi le tenseur F_{ij} par F , et on pose $G = F^{-1}$.

p : variable interne tensorielle. C'est un tenseur symétrique égal au tenseur droit de la transformation faisant passer de l'état initial à la température T_0 à l'état relâché à la température T_0 . p ne subit pas de discontinuité lors d'un saut brusque de la déformation et de la température.

$$q = p^{-1}$$

$\beta = \frac{\mu}{3\lambda} \log(\det p)$: on verra que ce terme est nul en raison de l'invariance du volume de la configuration relâchée ramenée à la température T_0 . Sa présence dans ϕ modifie l'expression des P_{ij} et simplifie l'expression de Ω .

$\epsilon^e = -\frac{1}{2} \log(G^T p G)$: expressions équivalentes du tenseur de déformation élastique ϵ^e . Soit F^{r0} la transformation faisant passer de l'état initial à la température T_0 , à l'état relâché à la température T_0 ; soit d'autre part F^e la transformation faisant passer de l'état relâché à la température T_0 à l'état actuel à la température T . On a :

$$F = F^e F^{r0} \quad p = F^{r0T} F^{r0}$$

$$\epsilon^e = \frac{1}{2} \log(F^e F^{eT}) = -\frac{1}{2} \log(G^T p G) = \frac{1}{2} \log(F q F^T)$$

$$A^e = G^T p G$$

$$B^e = F q F^T = A^e - 1$$

$P_{ij} = -\frac{\partial \phi}{\partial p_{ij}}$: force thermodynamique associée à la variable interne p_{ij} .

$J_2 = 2p_{ih} p_{jk} p_{ij} p_{hk}$: on verra que c'est le second invariant du déviateur des contraintes de Kirchhoff, l'état de référence étant l'état relâché à la température T (le tenseur de Kirchhoff est le produit du tenseur de Cauchy par le quotient $\frac{v}{v_r}$ de deux éléments de volume homologues dans la configuration actuelle (v) et dans la configuration de référence (v_r)).

$\Omega = f(J_2, T)$: pseudopotentiel de dissipation

f', f'' : dérivée première et seconde de f par rapport à J_2 . Le comportement est dissipatif pour $f' > 0$. Il est convexe pour $f' > 0$ et $f'' > 0$.

$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_{ij}}$: équation d'évolution de la variable interne p_{ij} .

3. 2. Expression de P_{ij}

$$P_{ij} = -\lambda (\theta - 3\alpha + \beta) \frac{\mu}{3\lambda} q_{ij} - \mu \frac{\partial \eta}{\partial p_{ij}}$$

$$\eta = (\epsilon_{pq}^e - \alpha \delta_{pq}) (\epsilon_{pq}^e - \alpha \delta_{pq})$$

$$- 2\epsilon^e = \log A^e$$

$$-2\epsilon_{pq}^e = A_{pq}^e - \delta_{pq} - \frac{1}{2} (A_{pr}^e - \delta_{pr}) (A_{rq}^e - \delta_{rq}) + \frac{1}{3} (A_{pr}^e - \delta_{pr}) (A_{rs}^e - \delta_{rs}) (A_{sq}^e - \delta_{sq}) - \dots$$

$$\frac{\partial(-2\epsilon_{pq}^e)}{\partial A_{rs}^e} = \delta_{pr} \delta_{qs} - \frac{1}{2} [\delta_{pr} \delta_{us} (A_{uq}^e - \delta_{uq}) + (A_{pu}^e - \delta_{pu}) \delta_{ur} \delta_{qs}] + \dots \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{pq}^e \frac{\partial(-2\epsilon_{pq}^e)}{\partial A_{rs}^e} &= \epsilon_{rs}^e - \frac{1}{2} [\epsilon_{rq}^e (A_{sq}^e - \delta_{sq}) + (A_{pr}^e - \delta_{pr}) \epsilon_{ps}^e] + \dots \\ &= \epsilon^e (\eta - (A^e - \eta) + (A^e - \eta)^2 - \dots) \\ &= \epsilon^e B^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial p_{ij}} &= 2 (\epsilon_{pq}^e - \alpha \delta_{pq}) \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial p_{ij}} \\ &= 2\epsilon_{pq}^e \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial p_{ij}} - 2\alpha \frac{\partial \epsilon_{pp}^e}{\partial p_{ij}} \end{aligned}$$

Nous calculons $\frac{\partial(-2\epsilon_{pp}^e)}{\partial A_{rs}^e}$ à partir de (6).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-2\epsilon_{pp}^e)}{\partial A_{rs}^e} &= \delta_{rs} - \frac{1}{2} [\delta_{pr} \delta_{us} (A_{up}^e - \delta_{up}) + (A_{pu}^e - \delta_{pu}) \delta_{ur} \delta_{ps}] + \dots \\ &= \delta_{rs} - (A_{rs}^e - \delta_{rs}) + \dots \\ &= \eta - (A^e - \eta) + (A^e - \eta)^2 - \dots \\ &= B^e \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-2\epsilon_{pp}^e)}{\partial p_{ij}} &= \frac{\partial(-2\epsilon_{pp}^e)}{\partial A_{rs}^e} \frac{\partial A_{rs}^e}{\partial p_{ij}} = B_{rs}^e G_{ir} G_{js} \\ &= GB^e G^T \\ &= GFqF^T G^T \\ &= q_{ij} \end{aligned}$$

Calculons ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial p_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial p_{ij}} &= 2\epsilon_{pq}^e \frac{\partial \epsilon_{pq}^e}{\partial A_{rs}^e} \frac{\partial A_{rs}^e}{\partial p_{ij}} \\ &= -\epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} P_{ij} &= -\frac{\mu}{3} (\theta - 3\alpha + \beta) q_{ij} + \mu \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} - \alpha \mu q_{ij} \\ &= -\frac{\mu}{3} (\theta + \beta) q_{ij} + \mu \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} \end{aligned}$$

3. 3. Expression de \dot{p}_{ij}

Nous pouvons alors transformer l'expression de \dot{p}_{ij}

$$\begin{aligned} \dot{p}_{ij} &= f' \frac{\partial J_2}{\partial p_{ij}} = 4 f' p_{ih} p_{jk} p_{hk} \\ &= 4f' p_{ih} p_{jk} \left(-\frac{\mu}{3} (\theta + \beta) q_{hk} + \mu \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{hr} G_{ks} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\dot{p}_{ij} = 4f' \mu \left(-\frac{1}{3} (\theta + \beta) p_{ij} + p_{ih} G_{hk} \epsilon_{kr}^e F_{rj} \right) \quad (7)$$

3. 4. Invariance du volume de la configuration relâchée (à la température T_0)

Démontrons l'invariance du volume de la configuration relâchée (ramenée à la température T_0), soit

$$\frac{d}{dt} \log \det p = 0$$

on a $\frac{d}{dt} \log \det p = \dot{p}_{ij} q_{ij}$

$$\dot{p}_{ij} q_{ij} = 4f' \mu \left(-\frac{1}{3} (\theta + \beta) \dot{p}_{ij} q_{ij} + p_{ih} q_{ij} G_{hk} \epsilon_{kr}^e F_{rj} \right)$$

$$P_{ij} q_{ij} = 3 \quad P_{ih} q_{ij} = \delta_{hj}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{ij} q_{ij} &= 4f' \mu (-\theta - \beta + \delta_{jh} G_{hk} \epsilon_{kr}^e F_{rj}) \\ &= 4f' \mu (-\theta - \beta + G_{jk} \epsilon_{kr}^e F_{rj}) \\ &= 4f' \mu (-\theta - \beta + \epsilon_{rr}^e) \\ &= -4 f' \mu \beta \end{aligned}$$

Si $\beta = 0$ à l'instant initial, β reste nul à tout instant ultérieur

3. 5. Expression de J_2

$$\text{Montrons que } P_{ih} P_{jk} P_{ij} P_{hk} = \mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e \right)$$

$$\begin{aligned} P_{ih} P_{jk} P_{ij} P_{hk} &= \mu^2 P_{ih} P_{jk} \left(\frac{\theta}{3} q_{ij} - \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\theta}{3} q_{hk} - \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e G_{hr'} G_{ks'} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\theta^2}{9} P_{ih} P_{jk} q_{ij} q_{hk} = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{3} P_{ih} P_{jk} \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} q_{hk} \\ &= \frac{\theta}{3} P_{ih} \delta_{jh} \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} \\ &= \frac{\theta}{3} P_{ih} \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{hs} \\ &= \frac{\theta}{3} A_{rs}^e \epsilon_{ru}^e B_{us}^e \end{aligned}$$

Ces trois tenseurs ont mêmes directions propres ; ils commutent

$$\text{Il reste } \frac{\theta}{3} \epsilon_{ss}^e = \frac{\theta^2}{3}$$

De même

$$\frac{\theta}{3} P_{ih} P_{jk} \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e G_{hr'} G_{ks'} q_{ij} = \frac{\theta^2}{3}$$

Calculons enfin

$$P_{ih} P_{jk} \epsilon_{ru}^e B_{us}^e G_{ir} G_{js} \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e G_{hr'} G_{ks'}$$

$$\text{on a : } G_{ir} P_{ih} G_{hr'} = A_{rr'}^e$$

$$G_{js} P_{jk} G_{ks'} = A_{ss'}^e$$

il vient :

$$\epsilon_{ru}^e B_{us}^e \epsilon_{r'u'}^e B_{u's'}^e A_{rr'}^e A_{ss'}^e$$

$$\text{or } B_{u's'}^e A_{ss'}^e = \delta_{u's}$$

Il reste

$$\epsilon_{ru}^e B_{uu'}^e \epsilon_{r'u'}^e A_{rr'}^e$$

ϵ^e, A^e, B^e ont mêmes directions propres et commutent

On obtient

$$\epsilon_{ru}^e \epsilon_{ru}^e$$

d'où la formule annoncée.

Démontrons enfin que $2 P_{ih} P_{jk} P_{ij} P_{hk} = J_2$ est le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes de Kirchhoff, lorsqu'on prend pour état de référence l'état relâché à la température T .

Supposons pour simplifier que F soit un tenseur diagonal dans un repère fixe et que le corps élastique soit sans contraintes pour $F = 11$. Faisons-lui subir de façon isotherme des dilatations logarithmiques $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Admettons que son énergie libre ait pour expression

$$\phi = \frac{\lambda}{2} \theta^2 + \mu (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2)$$

On en déduit

$$d\phi = \lambda \theta \left(\frac{dF_1}{F_1} + \frac{dF_2}{F_2} + \frac{dF_3}{F_3} \right) + 2\mu \left(\epsilon_1 \frac{dF_1}{F_1} + \epsilon_2 \frac{dF_2}{F_2} + \epsilon_3 \frac{dF_3}{F_3} \right)$$

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les contraintes principales de Cauchy :

$$d\phi = \sigma_1 F_2 F_3 dF_1 + \sigma_2 F_3 F_1 dF_2 + \sigma_3 F_1 F_2 dF_3$$

d'où $F_1 F_2 F_3 \sigma_1 = \lambda \theta + 2\mu \epsilon_1$ etc...

Au premier membre se trouve le tenseur des contraintes de Kirchhoff, produit du tenseur des contraintes de Cauchy par $\det F$. Le résultat est valable pour la déformation élastique

$\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij}$ à partir de l'état relâché à la température T :

$$t_{ij} = \lambda (\theta - 3\alpha) \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij})$$

Le déviateur de t_{ij} est

$$s_{ij} = -\frac{2\mu}{3} \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e$$

d'où

$$\begin{aligned} s_{ij} s_{ij} &= \left(-\frac{2\mu}{3} \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e\right) \left(-\frac{2\mu}{3} \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^e\right) \\ &= 4\mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e\right) \end{aligned}$$

et finalement

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = 2\mu^2 \left(-\frac{\theta^2}{3} + \epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e\right) = 2 p_{ih} p_{jk} p_{ij} p_{hk}$$

3. 6. Comportement lorsque le tenseur gradient des vitesses est constant, symétrique et de trace nulle.

On étudie le cas où $\epsilon^e = \frac{1}{2} \log G^T p G = cte$

$$\dot{G}^T p G + G^T \dot{p} G + G^T p \dot{G} = 0$$

avec $\dot{F} F^{-1} = D$ (tenseur gradient de vitesse, supposé symétrique)

$$\text{soit } \dot{F} G = D \quad \dot{G} F = -D \quad \dot{G} = -DG \quad \dot{G}^T = -G^T D$$

En appliquant la formule (7)

$$\dot{p} = 4 f' \mu \left(-\frac{\theta}{3} p + p G \epsilon^e F\right)$$

puisque F, G, p, ϵ^e ont mêmes directions principales

$$D = f' s$$

s est le déviateur du tenseur des contraintes de Kirschhoff en prenant pour état de référence l'état relâché à la température T.

$$\text{Pour } f = \frac{1}{2\eta} J_2 \quad D = \frac{1}{2\eta} s$$

$$\text{Pour } f = K J_2^a \quad (K, a \text{ fonctions de } T)$$

$$D = K a J_2^{a-1} s$$

3. 7. Dissipativité et convexité

$$\text{On a } \frac{\partial \Omega}{\partial P_{ij}} = 4 f' p_{ih} p_{jk} p_{hk}$$

$$P_{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial P_{ij}} = 4 f' p_{ih} p_{jk} p_{ij} p_{hk}$$

La condition nécessaire et suffisante de dissipativité (1) est donc $f' \geq 0$. La dissipation est égale à $2 f' J_2$.

D'autre part

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial P_{ij} \partial P_{hk}} = 4 f'' p_{ih} p_{jk} + 16 f'' p_{in} p_{jm} p_{mn} p_{hr} p_{ks} p_{rs}$$

Pour qu'on ait (2), il faut et il suffit que quel que soit X_{ij}

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial P_{ij} \partial P_{hk}} X_{ij} X_{hk} \geq 0$$

Ceci doit avoir lieu pour toute valeur de P_{ij} , d'où l'on déduit

$$f' \geq 0 \quad \text{et} \quad f'' \geq 0$$

Ainsi pour $f = K J_2^a$ le comportement est dissipatif pour $a \geq 0$ et convexe pour $a \geq 1$. Par exemple, le fait qu'un alliage superplastique ait en traction simple un comportement $\sigma = \lambda \epsilon^m$ avec $m \leq 1$ prouve que son comportement est convexe.

3.8. Calcul des contraintes lorsqu'on donne F(t), T(t)

On suppose connue la valeur initiale p_0 de p avec bien entendu $\det p_0 = 1$. On a donc \dot{p} par (7) d'où p(t) par intégration, puisque F et G sont connus à tout instant et que θ, ϵ^e s'expriment en fonction de F, G, p. Le tenseur des contraintes de Kirchhoff est alors (en prenant pour état de référence, l'état relâché à la température T)

$$t_{ij} = \lambda (\theta - 3\alpha) \delta_{ij} + 2\mu (\epsilon_{ij}^e - \alpha \delta_{ij})$$

On pourrait aussi calculer le tenseur des contraintes de Boussinesq $\frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$

4. CONCLUSION

Les exemples donnés dans cet article font ressortir la simplicité et la souplesse du formalisme dissipatif et du formalisme convexe.

La condition de dissipativité est toujours nécessaire.

La condition de convexité, plus restrictive, est en général vérifiée mais ne doit pas être considérée comme strictement obligatoire.

Les auteurs tiennent à remercier MRS les professeurs A. MOLINARI et G.M. COME pour leurs conseils et suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. HALPHEN et NGUYEN QUOC SON
Sur les matériaux standards généralisés.
Journal de Mécanique vol 14 n° 1, 1975 - p. 39 - 63
- [2] G.M. COME et M. NICLAUSE - Cinétique chimique
Techniques de l'ingénieur 12 - 1980 p.J 1111 - 7
- [3] J.D. WEBER
Mécanique des milieux déformables non linéaires
Edition Eyrolles 1972
- [4] J.D. WEBER
Hypothèse des variables internes et représentations de certains fluides viscoélastiques. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, 15 nov. 1975
- [5] J.D. WEBER and A. EBERHARDT
Internal state variables and normality in viscoplastic flow.
Rhéol. Acta 21, 403 - 405 (1982)
- [6] J. MANDEL
Variables cachées Puissance dissipée
Dissipation normale
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie
Numéro spécial Janvier 1980 p. 37
- [7] J. R. RICE
Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity
J. Mech. Phys. Solids 1971. vol. 19 p. 433 - 455
- [8] F. SIDOROFF
Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire.
Journal de Mécanique, vol 13 n° 4 - décembre 1974

CROISSANCE LENTE DE FISSURE DANS LE PIN MARITIME.*

A. D'ALMEIDA, Ingénieur - G. VALENTIN, Maître-Assistant.**

RESUME

Une approche par la mécanique de la rupture est faite sur du pin maritime considéré comme un matériau orthotrope, homogène et viscoélastique linéaire. A partir de certaines hypothèses sur l'expression de la complaisance en fluage, le taux de restitution d'énergie G est présenté comme le paramètre décrivant les champs de contraintes et de déformations en fond de fissure.

Des mesures de valeurs critiques G_C en mode I sur des éprouvettes DCB ont été effectuées dans des conditions de croissance lente de fissure à différentes vitesses. Il en résulte une grandeur spécifique G_{CS} appelée "résistance statique" à la rupture du matériau.

ABSTRACT

A fracture mechanics approach is made on maritime pine (pinus pinaster) considered as an homogeneous, orthotropic viscoelastic material.

From particular hypothesis on compliance function in creep, the energy release rate G is shown to be a parameter describing stress and strain distribution at the tip of the crack.

Experiments on critical values G_C in mode I on double cantilever beam specimen (DCB) have been conducted under slow crack growth conditions for various strain rates.

A specific quantity G_{CS} named "static strength for fracture" is evidenced.

Introduction.

Un intérêt particulier est accordé, en France, ces temps-ci au bois en tant que matériau de construction. Les normes existantes prévoient de larges coefficients de sécurité qui ne permettent pas de réduire les dimensions des différentes pièces obtenues dans ce matériau. Pour une meilleure utilisation du bois et en particulier du pin maritime, principale ressource de la région Aquitaine, une étude approfondie mettant en oeuvre des techniques modernes est nécessaire.

Le présent travail, traitant de la rupture différée du pin maritime, constitue une première étape d'un projet de calcul de durée de vie des constructions dans lesquelles intervient ce bois. Ce dernier est supposé comporter des défauts ou fissures issus du séchage ou des différents usinages ou simplement de la croissance de l'arbre. De plus, les courbes expérimentales force-déplacement obtenues sur des éprouvettes en pin maritime montrent que, même lorsque celui-ci est sec à l'air, son comportement n'est pas élastique linéaire ; ce qui peut

*Communication au Groupe Français de Rhéologie le 6 octobre 1983

**Laboratoire de Génie Civil de l'IUT "A" de Bordeaux (E.R.A. CNRS 769).

être imputable à des effets de plasticité ou d'élasticité non linéaire [1], de microfissuration ou encore, comme cela sera envisagé ici, à une manifestation viscoélastique locale en fond de fissure. Une méthode expérimentale fondée sur la mesure du taux de restitution d'énergie G lors d'une propagation lente de fissure a été mise au point sur des éprouvettes DCB (Double Cantilever Beam) de configuration TL (tangentielle-longitudinale) pour déterminer les conditions d'évolution du défaut.

1. PRESENTATION D'UN MODELE DU MATERIAU.

Le modèle retenu pour l'étude du pin maritime est celui d'un matériau viscoélastique, linéaire, homogène et orthotrope.

Viscoélasticité.

Le bois anhydre est à peu près élastique à la température ambiante. Cependant, même avec une faible teneur en eau correspondant par exemple à l'équilibre atteint lorsqu'il est abrité (10 à 15%) ce matériau devient viscoélastique. Ce qui explique sa tendance au fluage dans les différentes constructions.

Linéarité.

Les charges maximales appliquées lors des essais restent faibles de sorte que le milieu continu autour de la fissure ne subit pas de déformation plastique, sauf dans une zone très limitée au voisinage du fond de fissure. Les déformations demeurent elles aussi faibles.

Orthotropie.

Le bois possède naturellement trois directions orthogonales de symétrie : \vec{r} , \vec{t} , \vec{T} . L'hypothèse d'orthotropie (existence de trois plans de symétrie droite orthogonaux entre eux) sera considérée comme vérifiée sur des échantillons issus de grumes dont les cerne ont un rayon de courbure suffisamment grand. Ainsi, le repère $(\vec{r}, \vec{t}, \vec{T})$ reste le même en tous les points de l'échantillon.

Homogénéité.

Cette hypothèse est sans doute la plus contestable pour le pin maritime. En général, un bois est considéré comme homogène s'il ne comporte pas de noeuds ni d'autres défauts apparents et s'il existe peu de contraste entre le bois de printemps et le bois d'été. C'est essentiellement le cas pour les bois tropicaux. Cette hypothèse d'homogénéité est pourtant conservée sur le pin maritime tant que la largeur des couches annuelles reste petite devant les autres dimensions de l'échantillon.

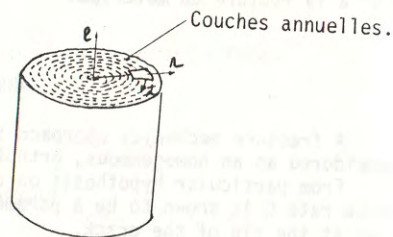


Fig. 1

2. ASPECTS THEORIQUES.

2.1. Taux de restitution d'énergie G.

Soit un matériau fissuré soumis à des forces extérieures (fig. 2) ; A l'aire fissurée. Si par un chargement quasistatique l'aire fissurée est amenée à la valeur $A + dA$, le principe de conservation de l'énergie totale permet d'écrire :

$$dW_{el} + dW_{ext} + dE_C + dR + 2\gamma dA = 0$$

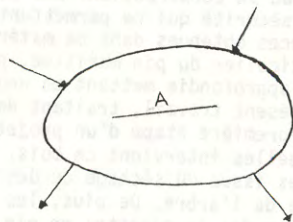


Fig. 2

W_{el} : énergie élastique emmagasinée dans le matériau,

W_{ext} : énergie potentielle des forces extérieures,

R : énergie dissipée par viscoélasticité,

γ : énergie de surface,

E_C : énergie cinétique.

Comme dans une transformation quasistatique, la variation de l'énergie cinétique est négligeable :

$$- \frac{d}{dA} (W_{el} + W_{ext}) = \frac{dR}{dA} + 2\gamma$$

Le premier membre de cette égalité est par définition le taux de restitution d'énergie G ; le second membre est G_C , résistance à la propagation de fissure du matériau.

Ce critère a été appliqué par Griffith, dans les années 1920, aux matériaux fragiles pour lesquels la dissipation d'énergie R , par exemple celle intervenant lors des rotations des chaînes de molécules, est pratiquement nulle ; d'où la relation :

$$G_C = 2\gamma$$

connue sous le nom de théorie de Griffith.

2.2. Autres expressions de G.

Pour un matériau élastique (linéaire ou non) homogène, le taux de restitution d'énergie G admet une forme intégrale J proposée par Rice :

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} ds$$

Γ : contour s'appuyant sur les lèvres de la fissure,

\vec{T} : contraintes sur le contour Γ ,

\vec{U} : déplacements des points du contour Γ ,

W : densité d'énergie élastique,

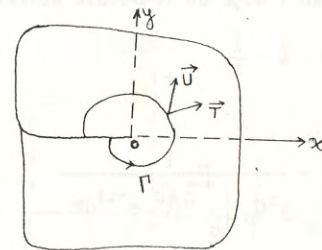


Fig. 3

Cette expression de G s'adapte bien au calcul numérique avec sa propriété fondamentale d'invariance par rapport au contour Γ .

Pour les mesures expérimentales et dans le cas du matériau élastique linéaire, elle est utilisée sous la forme suggérée par Irwin [8] :

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{\partial C}{\partial a}$$

C : complaisance de l'éprouvette,

a : longueur de la fissure,

P : charge appliquée,

B : largeur de l'éprouvette.

2.3. Approximation des champs de contraintes et de déformations en fond de fissure.

Lorsque l'instant de mise en charge est pris comme origine du temps, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique s'écrit :

$$e(t) = \int_0^t C(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau$$

ou : $\sigma(t) = \int_0^t M(t-\tau) \frac{de(\tau)}{d\tau} d\tau$

- e : déformation en un point du matériau,
- σ : contrainte au même point du matériau,
- C : complaisance en fluage,
- M : module de relaxation.

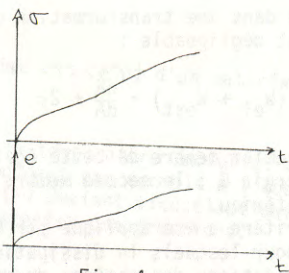


Fig. 4

Pour de nombreux polymères [14], la fonction $C(t)$ vérifie, dans la phase de fluage primaire, une loi puissance de la forme :

$$C(t) = C_0 t^m, \quad m \ll 1.$$

Dans le cas du bois sa composition, pour environ 70% de polymères se présentant sous forme de cellulose et d'hemicellulose, permet d'espérer des résultats analogues. Dans ces conditions, la relation fonctionnelle liant la complaisance en fluage et le module de relaxation en viscoélasticité linéaire :

$$\bar{M} \cdot \bar{C} = \frac{1}{s^2}$$

s : variable de Laplace,
 \bar{M}, \bar{C} : transformées de Laplace des fonctions M et C.

donne :

$$M = \frac{1}{s^2 C_0 \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt}$$

en faisant le changement de variable : $x = st$

$$M = \frac{1}{C_0 s^{1-m} \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx} = \frac{1}{C_0 \Gamma(1+m) s^{1-m}} \quad (1)$$

où, Γ désigne l'intégrale d'Euler :

$$\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

comme d'autre part :

$$\int_0^{+\infty} t^{-m} e^{-st} dt = \frac{1}{s^{1-m}} \Gamma(1-m)$$

En comparant cette dernière relation à (1), il résulte que :

$$M(t) = \frac{t^{-m}}{C_0 \Gamma(1+m) \Gamma(1-m)} = \frac{\sin m \pi}{m \pi} \frac{t^{-m}}{C_0} \quad \text{pour } m < 1$$

La relation effort-déformation lors d'une charge à vitesse de déformation constante devient :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{\sin m \pi}{m \pi} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-m}}{C_0} \frac{de}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{\sin m \pi}{m \pi} \frac{t^{-m}}{(1-m)C_0} e(t) \end{aligned}$$

soit :

$$e(t) = c(t) \sigma(t) |1 - m + o(m^2)|$$

pour les faibles valeurs de m.

L'erreur faite en négligeant l'histoire de chargement du matériau et en écrivant :

$$e(t) = c(t) \sigma(t)$$

est de l'ordre de m. Ce résultat s'étend aux autres modes de chargement par une procédure de calcul identique [13].

Les champs de contraintes et de déformations au voisinage du fond de fissure ont alors la même formulation qu'en élasticité [6] avec les constantes élastiques qui sont remplacées par des fonctions du temps :

$$e_{ij}(t) = \left| \frac{G(t)}{r \sigma_0(t)} \right|^{\frac{1}{2}} E_{ij}(\theta, t) \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_0(t) \left| \frac{G(t)}{r \sigma_0(t)} \right|^{\frac{1}{2}} \Sigma_{ij}(\theta, t) \quad (3)$$

e_{ij} : déformation en M (r, θ)

σ_{ij} : contrainte en M (r, θ)

Pour un matériau isotrope σ_0 est le module d'Young et les fonctions E_{ij} et Σ_{ij} ne dépendent que de θ

Dans le cas du matériau orthotrope σ_0 , E_{ij} et Σ_{ij} sont également des fonctions des autres modules élastiques du matériau [4] qui dépendent eux-mêmes du temps. Les relations (2) et (3) montrent que G demeure le seul paramètre décrivant les champs de contraintes et de déformations en fond de fissure et sa valeur critique G_c est tout à fait indiquée pour être considérée comme critère de rupture.

2.4. Stabilité de la propagation de fissure.

Après l'amorçage de la fissuration, se pose le problème des conditions de son évolution. La stabilité de la propagation de fissure peut également être décrite à partir de considérations énergétiques suivant le théorème de Berry [2].

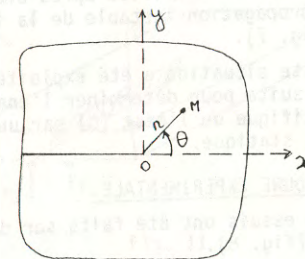


Fig. 5

Supposons connue la courbe d'équilibre Σ du matériau (lieu des points d'amorçage de la fissure dans le plan P- Δ) Fig. 6

Cette courbe partage le plan en deux zones : l'une de stabilité, l'autre d'instabilité et en tous ses points G est égal à G_c . Deux cas principaux

peuvent se présenter lors d'un chargement à vitesse de déplacement imposée :

a - Soit la courbe d'équilibre est traversée dans sa partie supérieure (cas d'une éprouvette comportant une fissure courte et chargée à une vitesse de déplacement du point d'application de la charge relativement élevée) la fissure se propage alors de façon instable (trajet OADE) avec un gain d'énergie cinétique qui porte sa longueur de a_0 à a_1 .

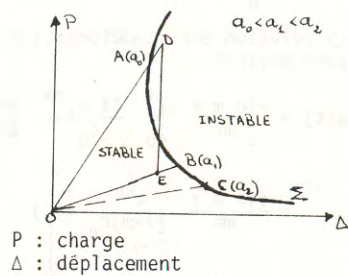


Fig. 6

b - Soit la courbe d'équilibre est atteinte par le trajet OC avec une vitesse lente. Dans ce cas, la rupture évolue suivant la courbe d'équilibre et la fissuration est dite contrôlée. Le taux de restitution d'énergie mesurée dans ces conditions est l'énergie spécifique d'initiation de fissure du matériau.

Entre ces deux états extrêmes, il est aisé d'imaginer, pour des vitesses de déplacement et des longueurs de fissures convenablement choisies, un processus suivant lequel l'énergie cinétique acquise par la fissure reste faible et le matériau se retrouve dans la zone de stabilité après une courte propagation instable de la fissure (fig. 7).

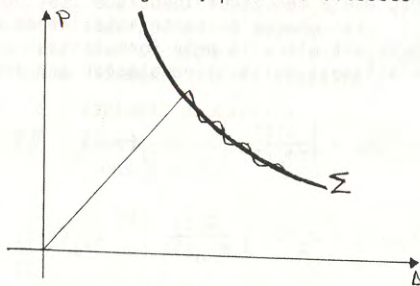


Fig. 7

Cette situation a été exploitée dans la suite pour déterminer l'énergie spécifique de l'état (b) par une approche statique.

3. PROCEDURE EXPERIMENTALE.

Les essais ont été faits sur des échantillons de pin maritime de configuration TL (fig. 8).

Ils comportent :

- une détermination de l'exposant m de la loi puissance de la complaisance en fluage,
- une mesure de G_c pour différentes vitesses de déplacement du point d'application de la charge.

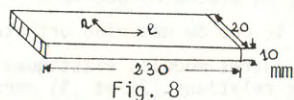


Fig. 8

3.1. Essais de fluage et de relaxation.

Ils ont été effectués sur des éprouvettes de dimensions 10x20x230 (en mm) (fig. 9) en flexion trois points à la température de 20°C. La teneur en eau des échantillons, obtenue par pesée, est d'environ 10%.

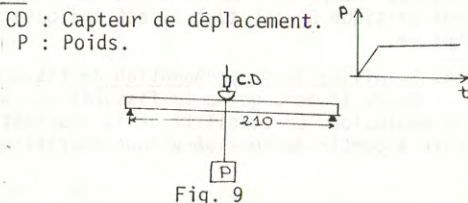
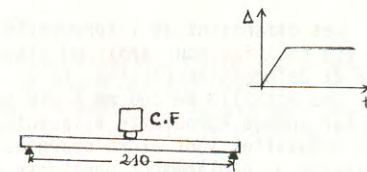


Fig. 9

En fluage (fig. 9) l'éprouvette est chargée en son milieu par un poids de 10N. Un capteur inductif placé sur la ligne de charge et relié à une table traçante permet d'enregistrer le déplacement dans le plan médian de l'éprouvette. Un lissage logarithmique de la courbe obtenue fournit la valeur de m.



C.F. : Capteur de force

Lors de l'essai de relaxation (fig. 10) fait sur une presse, une déformation initiale a été imposée à l'éprouvette et la mesure de la charge au cours du temps a été effectuée.

Fig. 10

Des précautions ont été prises pour réduire et estimer la variation de complaisance de la machine au cours de l'essai : la machine a été chargée 12 heures avant l'essai au double de la charge initiale imposée à l'éprouvette. Après chaque essai l'éprouvette en bois est remplacée par une éprouvette en acier de mêmes dimensions et chargée dans les mêmes conditions. La relaxation mesurée alors s'est révélée négligeable devant celle du bois.

3.2. Mesure de G_c

La détermination des critères de rupture K_{IC} ou G_{IC} en propagation lente de fissure a été déjà menée sur différents matériaux avec des éprouvettes DT (double torsion) [5][7] (fig. 11). Cette éprouvette a été utilisée pour le bois par Barrett[1]. Elle a comme avantages que les paramètres K_I ou G_I sont indépendants de la longueur de fissure et qu'il existe une relation simple, dans l'essai de relaxation, entre la charge P et la vitesse à de propagation de fissure. Les courbes K_I (ou G_I) - à sont ainsi

obtenues sans avoir à mesurer les longueurs de fissures. Un tel résultat nécessite néanmoins les hypothèses suivantes :

- les deux branches de l'éprouvette se comportent comme des poutres encastées en fond de fissure et soumises à la torsion pure.
- la largeur du front de fissure reste constante lors de la propagation.

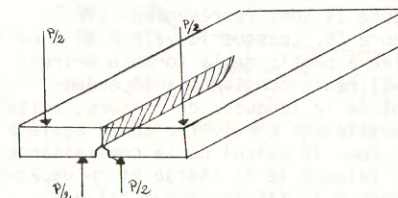


Fig. 11

Ces hypothèses, particulièrement la seconde, sont loin d'être vérifiées dans la pratique et diverses corrections sont alors faites sur les résultats [5]. Le choix de la DCB (fig. 12) permet d'éviter la détermination du profil du fond de fissure. Sur cette éprouvette une relation du type obtenu sur la DT entre \dot{a} et P en relaxation peut être également établie [12] mais elle est plus complexe que sur la DT.

Les dimensions de l'éprouvette ont été choisies pour avoir un état plan de déformation [9] (fig. 12.)

Une entaille de 100 mm a été usinée sur chaque éprouvette à la scie. Ces éprouvettes sont alors chargées à vitesse de déplacement constante et la valeur de la charge en fonction du temps est enregistrée.

Les courbes obtenues ont l'allure représentée sur la figure 13. Elles présentent généralement trois régions distinctes :

- une zone linéaire (1) où la longueur de la fissure usinée reste constante.
- une zone (2), où il y a propagation de fissure et où la charge P continue de croître.
- une zone (3), où la propagation de fissure se poursuit avec une décroissance de la charge.

La mesure de G a été faite dans la zone (3) où il s'établit un équilibre entre l'énergie fournie à l'éprouvette et l'énergie absorbée lors de la propagation de fissure. Ceci correspond au processus décrit dans 2-4. Les variations de l'énergie potentielle totale W définie sur la figure 14 sont représentées sur la figure 15. Lorsque la valeur de G calculée à partir de la formule d'Irwin (2-2) reste constante indépendamment de la longueur de fissure, cette quantité est considérée comme égale à G_C . Pour le calcul de la complaisance les valeurs de la charge et du déplacement à la fin de chaque palier (fig. 13) ont été choisies : ce sont les points (du type (A) ou (B)) où l'énergie G atteint sa valeur critique G_C .

La longueur de fissure est mesurée directement sur l'éprouvette à l'aide d'une loupe et d'une règle graduée sur chaque face de l'éprouvette et c'est la valeur moyenne qui est prise en compte; un lissage polynomial de degré deux de ces points expérimentaux est largement suffisant et a permis d'obtenir

$\frac{\partial C}{\partial a}$ puis G , par la formule d'Irwin.

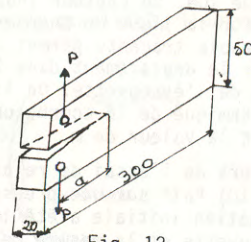


Fig. 12

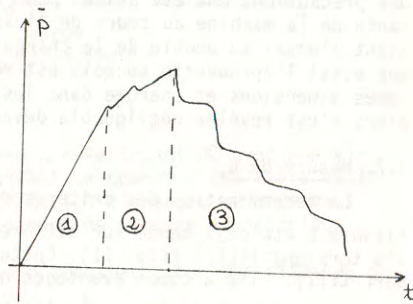


Fig. 13

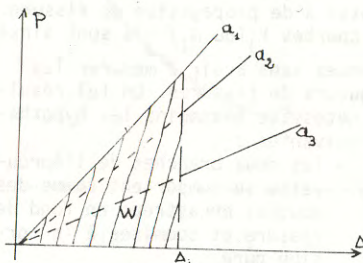


Fig. 14

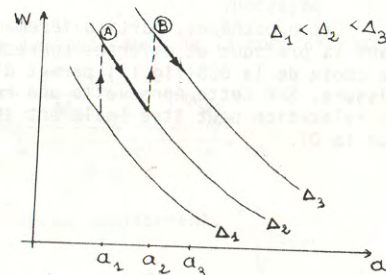


Fig. 15

4. RESULTATS ET DISCUSSION.

Les valeurs de m mesurées en fluage et en relaxation sont regroupées dans le tableau I pour trois éprouvettes. L'hypothèse d'une loi puissance t^m de la fonction de fluage se vérifie de façon satisfaisante sur le pin maritime. La figure 16, est typique d'une courbe de fluage et la figure 17 se rapporte à la relaxation.

Malgré la dispersion des valeurs obtenues pour m , ces essais donnent l'ordre de grandeur de ce paramètre, dans les conditions de teneur en eau et de température retenues, et par conséquent du niveau d'approximation lorsque les calculs seront faits en viscoélasticité linéaire avec les valeurs instantanées des contraintes, des déformations et des modules. Ici, il serait de l'ordre de 1%. Sur les polymères, une valeur de m inférieure à $5 \cdot 10^{-2}$ est fréquemment obtenue [14]. Ce qui est comparable au présent résultat.

Pour la détermination de G_C , les valeurs moyennes données dans le tableau II sont calculées sur deux éprouvettes dans le cas des vitesses V_1 et V_2 et sur une seule éprouvette (avec un minimum de 12 points) pour chacune des vitesses V_3 et V_4 .

La figure 18 montre la décroissance de G_C lorsque la vitesse de déformation croît. Ceci est conforme aux observations déjà faites sur des métaux et des polymères [3] pour de faibles vitesses de propagation de fissure. Les valeurs élevées de G_C peuvent être attribuées aux pertes par viscosité.

TABLEAU I

Eprouvette	Fluage		Relaxation	
	A	B	C	
m	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	

Fig. 16

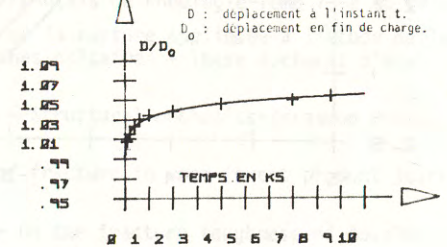


Fig. 17

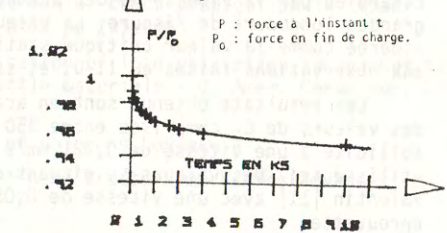


TABLEAU II

Vitesse en mm/s	$v_1 = 1,67 \cdot 10^{-3}$	$v_2 = 0,75 \cdot 10^{-3}$	$v_3 = 0,15 \cdot 10^{-3}$	$v_4 = 0,067 \cdot 10^{-3}$
G_C en J/m^2	447	508	619	657
σ écart-type	18	32	23	28

En effet, contrairement aux matériaux élastiques où toute l'énergie fournie participe à l'extension de la fissure, dans le cas des matériaux viscoélastiques il y a une dissipation d'une partie de cette énergie. Ce qui nécessite une énergie plus grande pour le même résultat. Cet effet est plus sensible aux faibles vitesses.

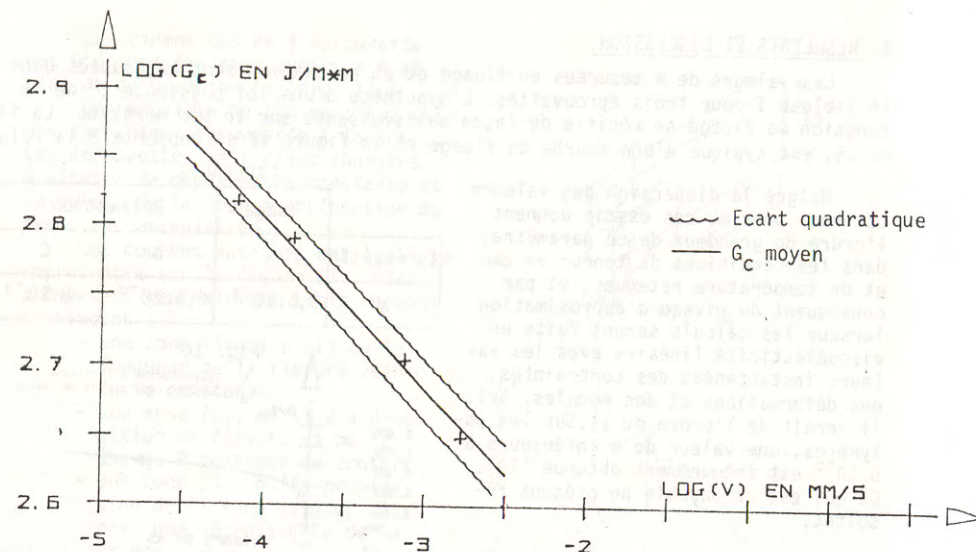


Fig. 18

Pour la vitesse minimale de $0,067 \cdot 10^{-3}$ mm/s, la fissuration est quasiment contrôlée par la vitesse de déplacement de la traverse, en particulier pour les grandes longueurs de fissure. La valeur de G_c obtenue à cette vitesse sera considérée comme la valeur critique statique de G pour le pin maritime conformément aux observations faites au II-D, et sera notée G_{cs} .

Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de Schniewind [10] qui trouve des valeurs de G_c comprises entre 350 J/m^2 et 400 J/m^2 sur du sapin de Douglas sollicité à une vitesse de $0,021$ mm/s soit 12 fois la vitesse la plus élevée utilisée ici. Des valeurs se situant dans la même fourchette ont été obtenues par Valentin [11] avec une vitesse de $0,083$ mm/s sur le pin sylvestre et la même éprouvette.

Ces résultats laissent supposer l'existence d'un minimum dans les variations de G_c pour ces vitesses moyennes. Ce qui n'a pas pu être établi lors des essais présentés dans cette étude par suite de rupture instable observée sur les échantillons utilisés lorsqu'ils sont chargés à une vitesse de déplacement de la traverse de $0,0083$ mm/s.

CONCLUSION.

- A ce niveau des investigations, deux résultats essentiels sont acquis :
- l'obtention de la résistance à la rupture statique G_{cs} du pin maritime ou encore énergie d'initiation de fissure en mode I, dans la configuration TL, à la température et à l'air ambiants.
 - la connaissance de l'évolution de la résistance à la fissuration du pin maritime en fonction de la vitesse de déformation qui est d'un grand intérêt en calcul de durée de vie : en reliant, par la suite, la vitesse de déplacement V à la vitesse moyenne de propagation de fissure à pour les faibles vitesses où la fissure démarre, et en appliquant des techniques analogues à celles utilisées sur la DT [5][1] il sera possible de passer au calcul de la durée de vie.

Ce sera l'objet d'un article en préparation.

REFERENCES

- (1) BARRETT J.D., MINDESS S., NADEAU J.S 1975 - Slow crack growth in Douglas-fir - Wood science 8(1) : 389-396.
- (2) BERRY J.P. 1960 Some kinetic considerations of the Griffith criterion for fracture I and II. J. Mech. Physics solids pp 194, 216, Vol 8, n° 3.
- (3) BLUHM J.I. 1969 - Fracture arrest - Fracture Liebowitz Vol. V pp. 2-60.
- (4) CORTEN H.T. 1972 - Fracture mechanics of composites - Fracture Liebowitz Vol. VII pp 676-767.
- (5) EVANS A.G. 1972 - A method for evaluating the time dependent failure characteristics of brittle materials and its application to polycrystalline alumina J. Mater sc. 7, pp 1137-1146.
- (6) FRANCOIS, D 1979 - Cahiers du Groupe Français de Rhéologie-Tome V, 2 pp 49-57.
- (7) HENRY J.P. 1978 - Mécanique linéaire de la rupture appliquée à l'étude de la fissuration et de la fracture des roches calcaires - Thèse doctorat d'état Univ. des sc. et tech. de Lille.
- (8) IRWIN G.R. 1960 - Fracture mechanics - Structural mechanics-Pergamon Press Long Island city, N.Y.
- (9) PORTER A.W. 1964 - On the mechanics of fracture in wood forest product journal-tome 13 pp 325-331.
- (10) SCHNIEWIND A.P., POZNIACK R.A. 1971 - On the fracture toughness of douglas fir wood - Engineering fracture mechanics, Vol. 2, pp 223-233.
- (11) VALENTIN, G., MORLIER P. 1982 - A criterion of crack propagation in timber-Matériaux et Constructions, Vol. 15 n°88 pp 291-298
- (12) VIRKAR A.V., GRODON, R.S 1976 - Application of load relaxation techniques to study subcritical crack growth in brittle materials - J. Amer. Ceram Soc, 59 pp 68-71.
- (13) WILLIAMS J.G. 1973 - Stress analysis of polymers Longman.-
- (14) WILLIAMS J.G. 1978 - Applications of linear fracture mechanics. Advances in polymer sc. 27 pp 67-120.

REFERENCES

(1) BARRETT J.B., MINDESS S., MADRU J.S. 1975 - slow crack growth in Douglas fir - Wood Science 5(1) - 322-326.

(2) BERRY J.P. 1966 Some kinetic considerations of the brittle-ductile transition in fracture I and II. J. Mech. Physics 10(1) pp 121-130.

(3) BLUM J. 1969 - Fracture arrest - Fracture Mechanics Vol. V pp. 3-60.

(4) COHEN H.T. 1975 - Fracture mechanics of composites - Fracture Mechanics Vol. VII pp 675-725.

(5) TYMAN A.G. 1975 - A method for evaluating the time dependent failure characteristics of brittle materials and its application to polyethylene fracture. J. Mater. Sci. 7, pp 1137-1146.

(6) KANGNIS G. 1978 - Cahiers du Groupe Français de Rhéologie - Tome V, 2 pp 49-57.

(7) HENRY J.P. 1978 - Mécanisme théorique de la rupture appliquée à l'étude de la fissuration et de la fracture des roches calcaires - Thèse doctorale, Univ. des sc. et techn. de Lille.

(8) DAVIS G.W. 1978 - Fracture mechanics - [unpublished] mechanical-Engineering Press.

(9) PORTER A.W. 1964 - On the mechanics of fracture in wood forest product journals. J. Appl. Polym. Sci. 8, pp 325-331.

(10) SCHWENK A.P., KOZINACK R.A. 1971 - On the fracture toughness of Douglas fir wood. J. Appl. Polym. Sci. 15, pp 2225-2237.

(11) VALERIEU J. 1975 - Fracture mechanics of wood - J. Appl. Polym. Sci. 19, pp 2225-2237.

(12) VIRBA A.V., GARDON J. 1970 - Fracture mechanics of wood - J. Appl. Polym. Sci. 14, pp 2225-2237.

(13) WILLIAMS J.G. 1975 - Fracture mechanics of wood - J. Appl. Polym. Sci. 19, pp 2225-2237.

(14) ...

TRANSFORMATION DE MACROMOLECULES FLEXIBLES ET CONSEQUENCES SUR LE COMPORTEMENT NON NEWTONIEN (*)

D. DUPUIS, C. WOLFF
E.N.S.I.T.M. 11 rue Alfred Werner 68093 MULHOUSE CEDEX

RESUME

Le rhéoépaississement des solutions diluées de polymères peut avoir plusieurs origines. Nous envisageons ici une hypothèse basée sur un changement de conformation de la macromolécule. Le calcul -limité au premier ordre- de la viscosité réduite de la solution est effectué dans trois cas : polymère polydispersé en écoulement de cisaillement simple à gradient constant, polymère monodisperse et polydispersé en écoulement de Poiseuille. Les résultats obtenus prévoient le comportement rhéoépaississant de la solution ainsi que l'influence de différents paramètres.

ABSTRACT

Shear thickening of dilute polymer solutions can be explained in different ways. Here, we assume a limited coil -stretch transition of the macromolecule. The calculation -limited to the first order- of the reduced viscosity of the solution is done for three situations : polydisperse polymer in a simple shear flow at a constant shear rate, monodisperse and polydisperse polymer in a Poiseuille flow. The results predict the shear thickening behaviour of the solution and the influence of different parameters.

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie
le 6 Octobre 1983

NOTATIONS ET DEFINITIONS.

- M : masse moléculaire
 Rg : rayon de giration de la macromolécule
- Viscosité spécifique : $\eta_{sp} = \frac{\eta - \eta_s}{\eta_s} = \frac{\eta}{\eta_s} - 1$
 avec : η_s = viscosité du solvant
 η = viscosité de la solution
- Viscosité réduite : $\eta_{red} = \eta_{sp}/c$
 avec : c = concentration de la solution
- Viscosité intrinsèque : $[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \eta_{sp}/c$
- Viscosité intrinsèque à gradient nul : $[\eta]_0 = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} [\eta]$
 avec : $\dot{\gamma}$ = gradient de vitesse
- Nombre de Deborah : $\beta = \frac{M[\eta]_0 \eta_s \dot{\gamma}}{RT}$
 avec : R = constante des gaz parfaits
 T = température absolue
- $[\eta]_0$ étant fonction de M, pour un solvant et une température donnés : $\beta = \beta(M, \dot{\gamma})$.

1. INTRODUCTION.

Le rhéoépaississement i.e. l'augmentation de la viscosité avec la contrainte de cisaillement dans un écoulement de cisaillement simple est un phénomène relativement courant, du moins lorsqu'il s'agit de suspensions concentrées [1]. Dans ce cas, l'explication du phénomène relève de la formation de structures dans l'écoulement. Encore n'est-il pas toujours facile de cerner l'effet du temps qui, indépendamment de la contrainte, peut être à l'origine de ces structures. Souvent, ce type de rhéoépaississement s'accompagne d'une variation de volume du fluide, d'où l'appellation, alors justifiée, de dilatance.

Nous nous intéressons ici à une situation très différente de la précédente.

Le fluide est une solution diluée de polymère dont la concentration c est inférieure à la valeur $c^* = 1,3 \cdot 10^{-2,5} M/Rg^3$ (g/cm³) qui sépare le domaine dilué du domaine semi-dilué. M et Rg sont respectivement la masse moléculaire et le rayon de giration de la macromolécule. Ceci correspond à une viscosité relative $\eta/\eta_s \leq 1,5$ [2].

Intuitivement, on imagine difficilement la formation de structures dans une telle situation. Cependant, des résultats expérimentaux montrent que, sous un certain nombre de conditions, des solutions diluées de macromolécules flexibles sont également susceptibles de présenter un comportement rhéoépaississant [3] [4] [5]. Cette propriété peut avoir des conséquences dans de nombreuses applications et leur interprétation : lubrification, réduction de

frottement, récupération assistée du pétrole.

Plusieurs hypothèses, macroscopique ou microscopique, ont été avancées pour expliquer ce phénomène.

Dès 1926, un rhéoépaississement avait été observé avec des solutions semi-diluées de polymères et interprété comme une turbulence avancée ("early turbulence") [6] ; cette hypothèse a été reprise dans les années 1970 pour les solutions diluées [7] mais elle n'a été étayée ni théoriquement, ni par un plan d'expériences systématiques. L'hypothèse imputant le rhéoépaississement à des effets d'inertie [8] et lui faisant par conséquent correspondre un nombre de Reynolds critique, n'est pas vérifiée pour tous les systèmes présentant ce phénomène.

On pourrait également mettre en cause les formations éventuelles d'une couche de déplétion ou d'un profil de concentration pour lesquels des calculs sont en cours.

A la seconde catégorie d'hypothèses se rattache la formation d'associations réversibles de macromolécules. Il résulte, entre autres, du calcul théorique correspondant que le comportement rhéoépaississant de la solution doit dépendre de la concentration [9] [10]. Ceci est en accord avec certaines données expérimentales [4] [11] qui semblent être parmi les seules couvrant de façon précise le domaine dilué et une large plage de gradient de vitesse.

Le changement de conformation subi par la macromolécule lorsqu'elle est soumise à un taux de cisaillement, peut aussi être une cause de rhéoépaississement. C'est l'hypothèse retenue dans le cadre du présent exposé où l'on examinera les cas d'un écoulement de cisaillement simple à gradient constant et celui d'un écoulement de Poiseuille, ainsi que l'influence de la polydispersité.

2. HYPOTHESES DE CALCUL.

2.1. Transition pelote - pelote déformée.

Considérons une macromolécule en solution, de masse moléculaire M. Au repos, elle se présente sous la forme d'une "pelote" dont l'enveloppe est souvent assimilée à celle d'une sphère.

Dans un écoulement de cisaillement simple, le comportement moyen est le plus souvent assimilable, dans le cas d'un mauvais solvant, à celui d'un ellipsoïde d'allongement voisin de 3 [12]. On peut supposer que cette conformation subsiste à gradient nul.

Supposons maintenant le fluide en écoulement à gradient constant.

La solution étant diluée, le comportement dynamique global de la macromolécule est caractérisé par son temps de relaxation de Zimm :

$$\tau_z = \frac{0,4 M [\eta]_0 \eta_s}{RT} \quad (1)$$

La molécule tourne sur elle-même et, de plus, est alternativement comprimée et étirée deux fois par tour. Mais, si $\dot{\gamma}$ devient supérieur à une valeur critique $\dot{\gamma}^*$ donnée par :

$$\dot{\gamma}^* = \pi / \tau_z \quad (2)$$

on peut supposer que la molécule, du fait de son temps de relaxation fini, ne peut plus subir que très partiellement ces déformations successives [4] [13]. On admettra qu'elle prend alors la forme d'un ellipsoïde rigide d'allongement $p=3$, son volume restant constant. Cette valeur de $\dot{\gamma}^*$ correspond à un nombre de Deborah

$$\beta(M, \dot{\gamma}^*) = \frac{M[\eta]_0 \eta_s \dot{\gamma}^*}{RT} = \frac{\pi}{0.4} \simeq 8 \quad (3)$$

De la même manière, si l'on se fixe une valeur de $\dot{\gamma}$ et si l'on considère une distribution de masses M , on peut définir une masse critique M^* correspondant à $\beta(M^*, \dot{\gamma}) = 8$. Pour cette valeur donnée de $\dot{\gamma}$, toutes les molécules de masse supérieure à M^* seront sous forme d'ellipsoïdes, les autres sous forme de pelotes.

2.2. Loi de comportement.

La solution étant diluée, on admettra que la viscosité intrinsèque suit la loi asymptotique [14] :

$$\frac{[\eta]}{[\eta]_0} = 1 - \frac{\dot{\gamma}}{\alpha \dot{\gamma} + B}$$

a et B sont des constantes caractéristiques du couple solvant-polymère qui rendent compte respectivement les comportements à l'infini et à l'origine de la fonction $[\eta] = [\eta](\dot{\gamma})$.

On notera $a_c, B_c, [\eta]_{0c}, [\eta]_c$ (respectivement $a_e, B_e, [\eta]_{0e}, [\eta]_e$) les constantes caractéristiques et les viscosités intrinsèques relatives à l'état pelote (respectivement pelote déformée).

On a alors les relations :

$$[\eta]_c = [\eta]_{0c} \left(1 - \frac{\dot{\gamma}}{\alpha_c \dot{\gamma} + B_c} \right) ; \quad [\eta]_e = [\eta]_{0e} \left(1 - \frac{\dot{\gamma}}{\alpha_e \dot{\gamma} + B_e} \right) \quad (4) \quad (5)$$

La transition pelote \rightarrow pelote déformée se faisant à volume constant, on peut écrire :

$$[\eta]_{0e} = [\eta]_{0c} \frac{\Lambda(p_e)}{\Lambda(p_c)}$$

$\Lambda(p)$ est le facteur de viscosité de l'ellipsoïde d'allongement p . C'est une fonction tabulée de p . [15]. p_c et p_e sont respectivement les allongements de la "pelote" et de la pelote déformée. En ce qui concerne cette dernière, les calculs ont été limités à $4 < p < 10$.

Il semble en effet impossible que, dans un écoulement de cisaillement simple (écoulement "faible"), la déformation puisse excéder $p = 10$.

Pour une pelote sphérique, la loi d'Einstein donnerait $\Lambda(p_c) = \Lambda(1) = 2.5$. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, $p_c = 3$ i.e. $\Lambda(p_c) = 4$. On prendra donc :

$$[\eta]_{0e} = [\eta]_{0c} \frac{\Lambda(p)}{4}$$

Par ailleurs, on adoptera pour $[\eta]_{0c}$ la relation de Mark - Houwink - Sakurada :

$$[\eta]_{0c} = K_c M^\alpha$$

K_c et α sont des constantes qui ne dépendent que de la nature du polymère, du solvant et de la température. Pour les polymères flexibles, α est compris entre 0,5 et 0,8.

2.3. Loi d'addition des viscosités.

Les solutions étant diluées, leur viscosité est donnée par la loi de Huggins :

$$\eta = \eta_s (1 + [\eta]_c c + k_H [\eta]_c^2 c^2 + O(c^3))$$

$$\text{ou } \eta_{sp} = [\eta]_c c + k_H [\eta]_c^2 c^2 + O(c^3)$$

Si plusieurs composants, différant uniquement par leur masse moléculaire ou leur forme, sont en présence :

$$\eta_{sp} \simeq \sum_i [\eta]_i c_i + k_H (\sum_i [\eta]_i c_i)^2 \quad (6)$$

où $[\eta]_i$ et c_i désignent respectivement la viscosité intrinsèque et la concentration du i ème composant.

En se limitant au 1er ordre, la relation ci-dessus s'écrit :

$$\eta_{sp} = \sum_i [\eta]_i c_i = [\bar{\eta}] \sum_i c_i \quad \text{ou}$$

l'on définit une viscosité intrinsèque moyenne par : $[\bar{\eta}] = (\sum_i [\eta]_i c_i) / (\sum_i c_i)$

Dans le cas où se trouvent en présence des pelotes et des pelotes déformées, cette relation s'écrit :

$$[\bar{\eta}] = (\sum_i [\eta]_{ic} c_{ic} + \sum_i [\eta]_{ie} c_{ie}) / \sum_i (c_{ic} + c_{ie}) \quad (7)$$

où $[\eta]_{ic}$ et $[\eta]_{ie}$ sont obtenues à l'aide des formules (4) et (5); c_{ic} et c_{ie} sont les concentrations du i ème composant sous forme de "pelote" et sous forme de "pelote déformée".

2.4. Distribution de Lansing et Kraemer.

Parmi les nombreuses fonctions de distribution de la masse moléculaire existant dans la littérature (Zimm, Schultz, ... [16]), nous avons choisi celle de Lansing et Kraemer [17] déjà utilisée par l'un d'entre nous au cours de travaux antérieurs [18]. Nous pensons d'ailleurs que ce choix est sans incidence sur l'aspect qualitatif de nos résultats.

Cette distribution est caractérisée par deux paramètres :

- la masse de référence M_0 qui correspond au maximum de la distribution en masse,

- la largeur s reliée au facteur de polydispersité M_w/M_n par la relation : $M_w/M_n = e^{s^2/2}$ (M_w est la masse moyenne en poids ; M_n est la masse moyenne en nombre).

Si l'on pose $M = M_0 e^{s/2}$, $f(M) dM = (\sqrt{\pi})^{-1} e^{-(s/2)^2} ds$ représente le poids de molécules de masse moléculaire comprise entre M et $M + dM$.

Les applications numériques présentées dans ce qui suit correspondront à des valeurs de s comprises entre 0.1 et 1.353, c'est-à-dire à $M_w/M_n \leq 2.5$.

3. RESULTATS.

3.1. Solution de polymère polydisperse dans un champ de vitesse à gradient constant.

Les viscosités intrinsèques seront exprimées en fonction du paramètre

$$\beta_{exp} = \frac{M_w \langle [\eta]_{oc} \rangle \eta_s \delta}{RT}$$

dont tous les termes sont mesurables expérimentalement.

$$\langle [\eta]_{oc} \rangle = \langle K_c M^\alpha \rangle = \int_0^\infty K_c M^\alpha f(M) dM$$

représente la viscosité intrinsèque de la forme "pelote" à gradient nul. M_w s'obtient directement, par diffusion de lumière, par exemple. α a été choisi égal à 0.5.

Les formules (4) et (5) deviennent alors :

$$[\eta]_c = [\eta]_{oc} \left(1 - \frac{\beta_{exp}}{a_c \beta_{exp} + b_c} \right) = K_c M^\alpha \left(1 - \frac{\beta_{exp}}{a_c \beta_{exp} + b_c} \right)$$

$$[\eta]_e = [\eta]_{oe} \left(1 - \frac{\beta_{exp}}{a_e \beta_{exp} + b_e} \right) = \frac{\Lambda(p)}{4} K_c M^\alpha \left(1 - \frac{\beta_{exp}}{a_e \beta_{exp} + b_e} \right)$$

avec

$$b_c = B_c \frac{M_w \langle [\eta]_{oc} \rangle \eta_s}{RT} ; \quad b_e = B_e \frac{M_w \langle [\eta]_{oc} \rangle \eta_s}{RT}$$

Pour le calcul de a_e et b_e , on utilisera les relations [19]:

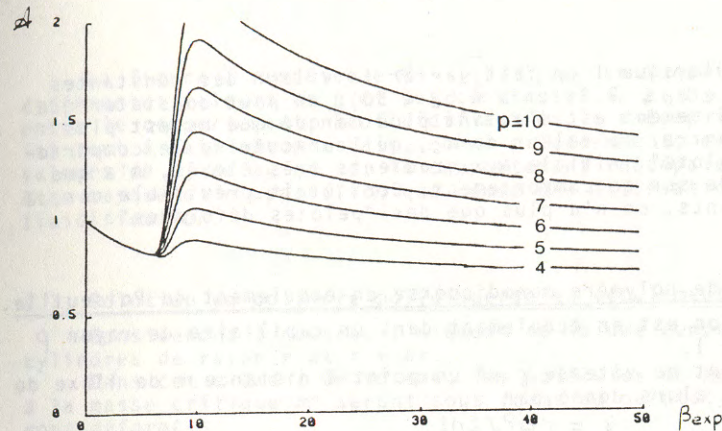
$$a_e = 1.175 + 7.7/p^{1.5}$$

$$b_e = 9.8 a_e$$

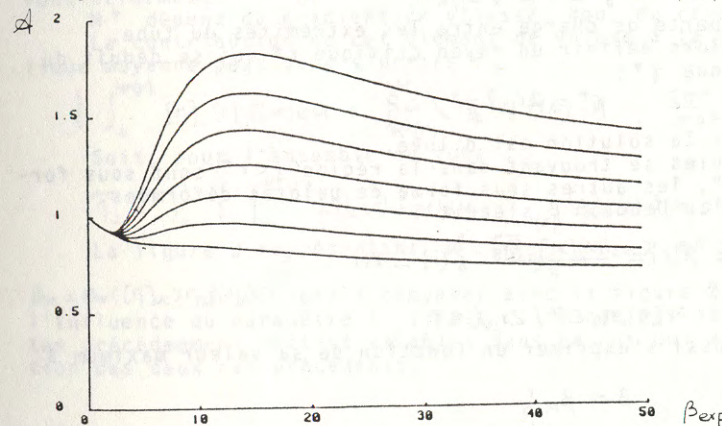
Compte-tenu des hypothèses formulées au paragraphe précédent, la viscosité intrinsèque moyenne s'écrit :

$$\langle \eta \rangle (\beta_{exp}) = \int_0^{M^*(\beta_{exp})} [\eta]_c(M, \beta_{exp}) f(M) dM + \int_{M^*(\beta_{exp})}^{\infty} [\eta]_e(M, \beta_{exp}) f(M) dM \quad (8)$$

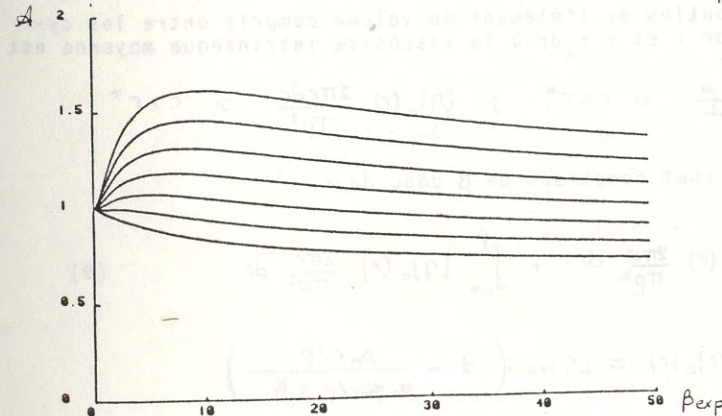
La figure 1 montre la variation de la quantité adimensionnelle $A = \langle \eta \rangle / \langle [\eta]_{oc} \rangle$ en fonction de β_{exp} pour différentes valeurs de p et de s . On voit que, lorsque s augmente, la position du minimum de la viscosité intrinsèque moyenne est déplacée vers les faibles valeurs de β_{exp} tandis que son "amplitude" décroît. Il s'ensuit que, lorsque la polydispersité augmente, le rhéoépaississement peut être masqué, en tout cas si la déformation de la macromolécule est faible ($p \leq 5$).



- a -



- b -



- c -

Fig. 1 : Solution de polymère polydisperse en écoulement à gradient constant. $A = \langle \eta \rangle / \langle [\eta]_{oc} \rangle$ en fonction de β_{exp} ; $p = 4$ à 10 ; $a_c = 2$; $b_c = 20$; a) $s = 0.1$; b) $s = 0.5$; c) $s = 1.353$.

De plus, lorsque l'on fait varier la valeur des constantes a_c et b_c ($1.8 \leq a_c \leq 2.9$; $5 \leq b_c \leq 50$), on peut constater que le rhéoépaississement est d'autant plus marqué que b_c est plus grand ; par contre, la valeur de a_c , qui caractérise le comportement de la "pelote" initiale aux gradients très élevés, n'a que peu d'incidence sur ce comportement. Ceci était prévisible car, à de tels gradients, on n'a plus que des "pelotes déformées".

3.2. Solution de polymère monodisperse en écoulement de Poiseuille.

La solution est en écoulement dans un capillaire de rayon ρ et de longueur l .

Le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ en un point à distance r de l'axe du capillaire est alors donné par :

$$\dot{\gamma} = r \Delta P / 2\eta l$$

où ΔP est la perte de charge entre les extrémités du tube.

On peut alors définir un rayon critique r^* qui se déduit du gradient critique $\dot{\gamma}^*$:

$$r^* = 2\eta_s l \dot{\gamma}^* / \Delta P$$

avec $\eta \approx \eta_s$ car la solution est diluée.

Les molécules se trouvant dans la région $r < r^*$ sont sous forme de "pelotes", les autres sous forme de pelotes déformées.

Le nombre de Deborah β s'écrit :

$$\beta = \beta(r) = \frac{M[\eta]_0 \eta_s}{RT} \dot{\gamma}(r) = Hr$$

avec $H = M[\eta]_0 \eta_s \Delta P / 2\eta_s l RT$

β peut aussi s'exprimer en fonction de sa valeur maximum à la paroi β_M :

$$\beta = \beta_M \frac{r}{\rho}$$

La contribution de l'élément de volume compris entre les cylindres de rayon r et $r + dr$ à la viscosité intrinsèque moyenne est :

$$[\eta]_c(r) \frac{2\pi r dr}{\pi \rho^2} \quad \text{si } r < r^* \quad ; \quad [\eta]_e(r) \frac{2\pi r dr}{\pi \rho^2} \quad \text{si } r > r^*$$

$[\eta]_c$ et $[\eta]_e$ sont fonctions de β donc de r .

$$[\bar{\eta}] = \int_0^{r^*} [\eta]_c(r) \frac{2\pi r}{\pi \rho^2} dr + \int_{r^*}^{\rho} [\eta]_e(r) \frac{2\pi r}{\pi \rho^2} dr \quad (9)$$

avec

$$[\eta]_c(r) = [\eta]_{oc} \left(1 - \frac{\beta_M r / \rho}{a_c \beta_M r / \rho + b_c} \right)$$

$$[\eta]_e(r) = \frac{\Lambda(\beta)}{4} [\eta]_{oc} \left(1 - \frac{\beta_M r / \rho}{a_c \beta_M r / \rho + b_c} \right)$$

La figure 2 représente $\mathcal{A} = \frac{[\bar{\eta}]}{[\eta]_{oc}}$ en fonction de β_M pour différentes valeurs de p et des constantes a_c et b_c . La transition entre le comportement rhéofluidifiant et le rhéoépaississement est ici tout à fait abrupte. Mais, comme précédemment, en fonction des valeurs de p , de a_c et b_c , le comportement rhéoépaississant peut être masqué et n'apparaître que comme une atténuation de la rhéofluidification.

3.3. Solution de polymère polydisperse en écoulement de Poiseuille.

Considérons à nouveau l'élément de volume compris entre les cylindres de rayon r et $r + dr$.

Dans cet élément de volume, les molécules de masse inférieure à la masse critique M^* seront sous forme de pelotes, les autres seront déformées.

M^* dépend du gradient de vitesse, donc du rayon r .

La contribution de cet élément de volume à la viscosité spécifique moyenne peut donc s'écrire :

$$\left\{ \int_0^{M^*(r)} [\eta]_c(r) f(M) dM + \int_{M^*(r)}^{\infty} [\eta]_e(r) f(M) dM \right\} \frac{2\pi r}{\pi \rho^2} dr$$

Soit, pour l'ensemble du tube :

$$[\bar{\eta}] = \int_0^{\rho} \left\{ \int_0^{M^*(r)} [\eta]_c(r) f(M) dM + \int_{M^*(r)}^{\infty} [\eta]_e(r) f(M) dM \right\} \frac{2r}{\rho^2} dr \quad (10)$$

La figure 3, représentant $\mathcal{A} = \frac{[\bar{\eta}]}{[\eta]_{oc}}$ en fonction de

$\beta_M = M_w \langle [\eta]_{oc} \rangle \eta_s \dot{\gamma}(\rho) / RT$ est à comparer avec la figure 2.a et montre l'influence du paramètre s . Il est clair que les observations faites précédemment restent valables dans ce cas qui est la superposition des deux cas précédents.

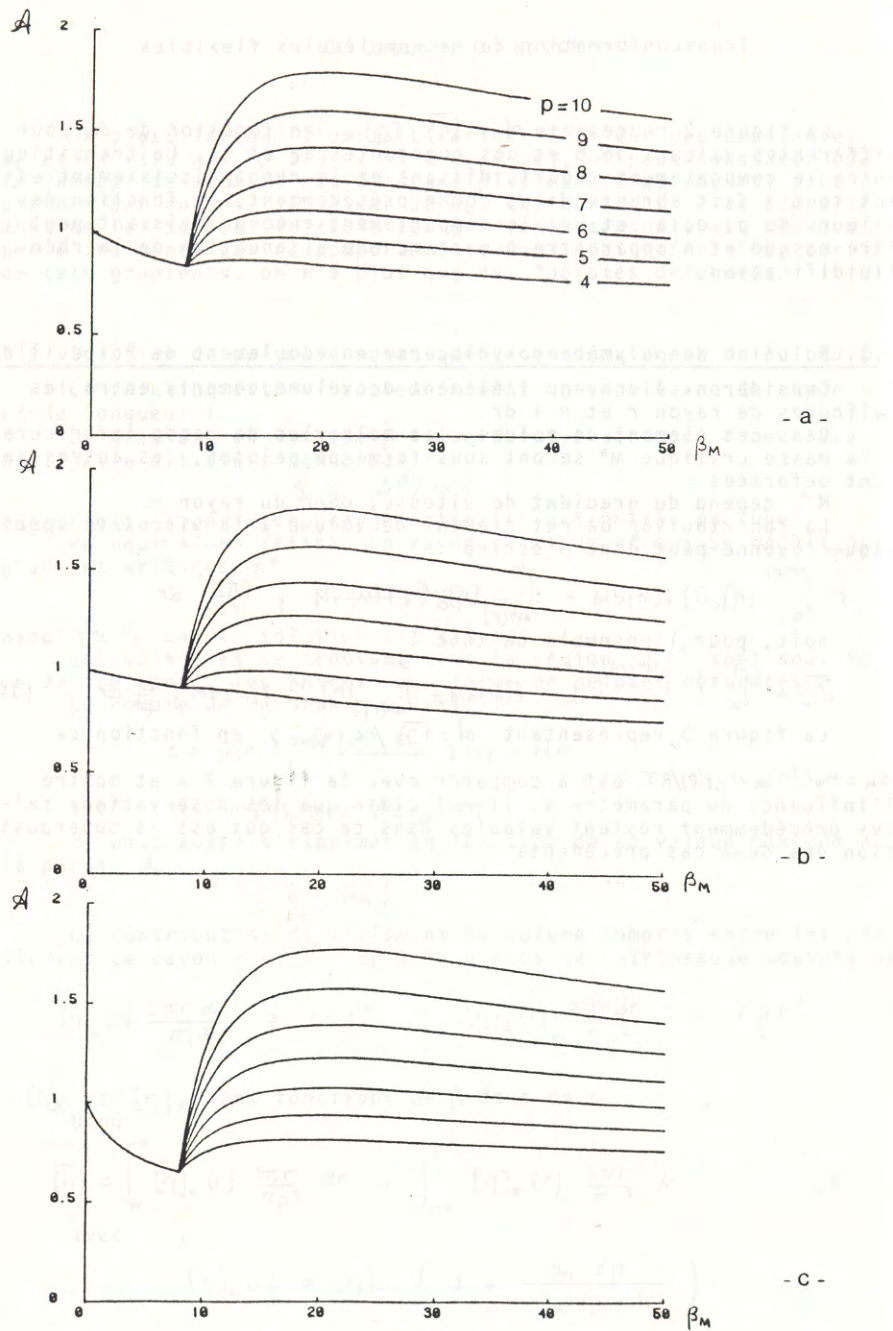


Fig. 2 : Solution de polymère monodisperse en écoulement de Poiseuille. $A = [\eta] / \langle [\eta] \rangle_{oc}$ en fonction de β_M ; $p = 4$ à 10 ; a) $a_c = 2$; $b_c = 20$; b) $a_c = 1.8$, $b_c = 50$; c) $a_c = 1.8$, $b_c = 5$.

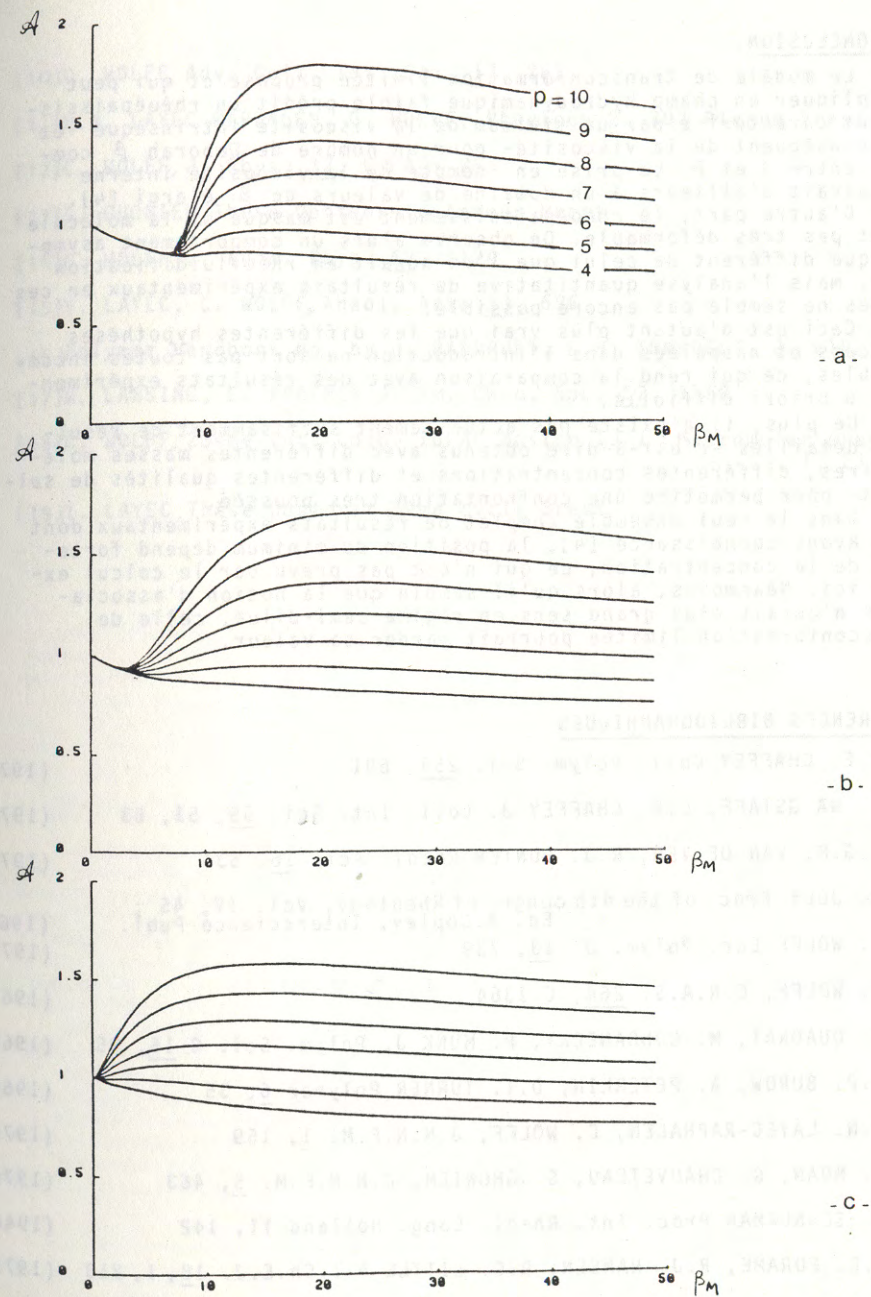


Fig. 3 : Solution de polymère polydisperse en écoulement de Poiseuille. $A = [\eta] / \langle [\eta] \rangle_{oc}$ en fonction de β_M ; $p = 4$ à 10 ; $a_c = 2$, $b_c = 20$; a) $s = 0.1$, b) $s = 0.5$, c) $s = 1.353$.

4. CONCLUSION.

Le modèle de transconformation limitée proposé et qui peut s'appliquer en champ hydrodynamique faible prédit un rhéoépaississement caractérisé par un minimum de la viscosité intrinsèque -et par conséquent de la viscosité- pour un nombre de Deborah β compris entre 0 et 8. La prise en compte de la viscosité interne conduirait d'ailleurs à un domaine de valeurs de β élargi [4].

D'autre part, le rhéoépaississement est masqué si la molécule n'est pas très déformable. On observe alors un comportement asymptotique différent de celui que l'on aurait en rhéofluidification pure, mais l'analyse quantitative de résultats expérimentaux en ces termes ne semble pas encore possible.

Ceci est d'autant plus vrai que les différentes hypothèses avancées et rappelées dans l'introduction ne sont pas toutes incompatibles, ce qui rend la comparaison avec des résultats expérimentaux a priori difficile.

De plus, il n'existe pas actuellement suffisamment de résultats détaillés -c'est-à-dire obtenus avec différentes masses moléculaires, différentes concentrations et différentes qualités de solvants- pour permettre une confrontation très poussée.

Dans le seul ensemble complet de résultats expérimentaux dont nous avons connaissance [4], la position du minimum dépend fortement de la concentration, ce qui n'est pas prévu par le calcul exposé ici. Néanmoins, alors qu'il semble que la notion d'associations n'aurait plus grand sens en régime semi-dilué, celle de transconformation limitée pourrait garder sa valeur.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C.E. CHAFFEY, Coll. Polym. Sci. 255, 691 (1977)
 I. WA GSTAFF, C.E. CHAFFEY J. Coll. Int. Sci. 59, 53, 63 (1977)
 T.G.M. VAN DE VEN, R.J. HUNTER Rheol. Acta 16, 534 (1977)
 M. JOLY Proc. of the 4th Congr. of Rheology, Vol. IV, 45 ;
 Ed. A. Copley, Interscience Publ. (1965)
 [2] C. WOLFF Eur. Polym. J. 13, 739 (1977)
 [3] C. WOLFF, C.R.A.S. 264, C 1364 (1967)
 O. QUADRAT, M. BOHDANECKY, P. MUNK J. Polym. Sci. C 16, 95 (1967)
 S.P. BUROW, A. PETERLIN, D.T. TURNER Polymer 6, 35 (1965)
 [4] M.N. LAYEC-RAPHALEN, C. WOLFF, J.N.N.F.M. 1, 159 (1976)
 [5] M. MOAN, G. CHAUVETEAU, S. GHONIEM, J.N.N.F.M. 5, 463 (1979)
 [6] R. SCHNURMAN Proc. Int. Rheol. Cong. Holland II, 142 (1948)
 [7] P.C. FORAME, R.J. HANSEN, R.C. LITTLE A.I.Ch.E.J. 18, 1, 213 (1972)
 [8] G. CHAUVETEAU, S. GHONIEM, M. MOAN CRAS. B, 286, 343 (1978)
 [9] C. WOLFF, A. SILBERBERG, Z. PRIEL, M.N. LAYEC-RAPHALEN Polymer 20, 281 (1979)

- [10] C. WOLFF, Adv. Coll. Int. Sci. 17, 263 (1982)
 [11] M.N. LAYEC RAPHALEN, C. WOLFF, Rheology 2, 303 Plenum Press (1980)
 [12] C. WOLFF, J. Phys. 32, C 5 A - 263 (1971)
 [13] S. GHONIEM, Thèse Docteur-Ingénieur Brest (1979)
 [14] C. WOLFF, J. Chim. Phys. 63, 1174 (1962)
 [15] Y. LAYEC, C. WOLFF, Rheol. Acta 13, 696 (1974)
 [16] Polymer Handbook ed. by J. BANDRUPT, E.H. IMMERGUT, J. WILEY (1975)
 [17] W. LANSING, E. KRAEMER J. Am. Chem. Soc. 57, 1369 (1935)
 [18] C. WOLFF, 23ème Int. Cong. IUPAC Boston 1971 ; Macromolar preprint I, 23
 [19] Y. LAYEC, Thèse Doctorat 3ème cycle Brest (1972)

APPLICATION DU CRITERE DE LA DENSITE D'ENERGIE AU BOIS
DE CHARPENTE*

G. VALENTIN, Maître-Assistant, F. LAHNA, 3e cycle**

RESUME

L'approximation du matériau homogène linéaire élastique orthotrope a été choisie pour l'étude de la propagation de fissure dans le bois de pin (*pinus sylvestris*) sous sollicitation mixte (I + II).

Le critère de SIH de la densité d'énergie a été envisagé. La direction de propagation et la valeur critique calculées pour différentes orientations de la charge (β) et des cernes annuels (ξ) et des longueurs de fissure (a), traduisent convenablement les expériences.

ABSTRACT

An approximation of homogeneous linear elastic orthotropic material has been chosen for studies on crack propagation in pine (*pinus sylvestris*) under mixed mode loading (I + II).

Strain energy density theory of SIH has been used. The directions of propagation and critical values have been computed for different direction of loading (β) and growth rings (ξ) and different crack lengths (a) and give a good agreement with experiments.

1. INTRODUCTION

La mécanique de la rupture est appliquée depuis de nombreuses années au bois pour étudier la propagation de défauts ou de fissures [1,2,3]. Cependant, si en mode I, la mécanique de la rupture établit des résultats assez fiables bien qu'encore difficilement transposables aux structures réelles, le domaine des sollicitations mixtes reste peu connu [4].

Le travail présenté ci-dessous a pour but d'étudier l'influence de l'orientation de la charge sur la propagation de fissures situées dans la direction des fibres (longitudinale) qui sont couramment rencontrées en charpente bois.

Il est également recherché dans quelle mesure l'orientation des cernes annuels peut modifier les résultats.

Afin de simplifier, le matériau est supposé homogène, linéaire élastique et orthotrope. Par rapport à des modèles considérant le matériau comme non linéaire ou viscoélastique, cette modélisation est jugée suffisamment fine, compte tenu des difficultés rencontrées.

Le critère de densité d'énergie introduit par SIH [5] pour les matériaux anisotropes peut alors être appliqué commodément aux résultats expérimentaux.

* Communication présentée au Groupe Français de Rhéologie, le 6 octobre 1983

** Laboratoire de Génie Civil, I.U.T.A, Bordeaux (E.R.A. CNRS n° 769).

Afin de se rapprocher le plus possible des éléments de charpente bois qui sont des éléments poutres, les expériences sont effectuées sur l'éprouvette dite double bande en clivage (double cantilever beam ou DCB) modifiée pour l'application de la sollicitation mixte.

2. THEORIE DE LA DENSITE D'ENERGIE

Un critère de rupture exprimé en termes d'énergie paraît bien adapté à l'étude de la propagation de fissure sous chargement complexe.

Le critère de la densité d'énergie introduit par SIH [6] tout d'abord sur des matériaux isotropes est assez controversé.

Il a été appliqué à des matériaux composites [5] selon les deux approches classiques : dans la première approche, le matériau est supposé élastique orthotrope homogène ; dans la deuxième, le matériau globalement inhomogène est supposé constitué de deux matériaux homogènes isotropes. L'aspect mathématique pour une fissure située à l'interface ou dans l'un des deux matériaux est assez compliqué mais les résultats sont plus proches des expériences.

Dans le matériau bois, les caractéristiques mécaniques des constituants, par exemple le bois de printemps et le bois d'été, sont difficilement mesurables et seule la première approche est envisagée dans cet article.

Dans tous les cas, le critère de SIH présente la même expression qui est résumée ci-dessous.

La figure 1 définit un système de coordonnées en fond de fissure et les contraintes agissant sur l'élément de surface d A (volume d'épaisseur unité).

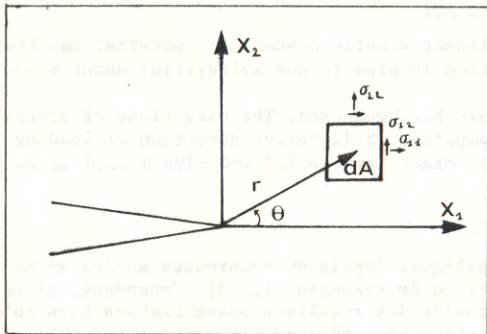


Figure 1

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + 2 \sigma_{12} \varepsilon_{12})$$

où les σ_{ij} et ε_{ij} sont respectivement les composantes du tenseur des contraintes et des déformations.

Les contraintes en fond de fissure s'expriment en fonction des facteurs d'intensité de contrainte K_I et K_{II} .

Les relations établies par PARTS et SIH [7] dans un matériau homogène anisotrope conduisant alors à :

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{1}{r} \{ A_{11} K_I^2 + A_{22} K_{II}^2 + 2 A_{12} K_I K_{II} \}$$

Avec :

$$A_{11} = \frac{1}{4} \{ \alpha_{11} A^2 + \alpha_{22} C^2 + \alpha_{66} E^2 + 2 \alpha_{12} A.C + 2 \alpha_{16} A.E + 2 \alpha_{26} C.E \}$$

$$A_{22} = \frac{1}{4} \{ \alpha_{11} B^2 + \alpha_{22} D^2 + \alpha_{66} F^2 + 2 \alpha_{12} B.D + 2 \alpha_{16} B.F + 2 \alpha_{26} D.F \}$$

$$A_{12} = \frac{1}{4} \{ \alpha_{11} A.B + \alpha_{22} C.D + \alpha_{66} E.F + \alpha_{12} (A.D + B.C) + \alpha_{16} (A.F + B.E) + \alpha_{26} (C.F + D.E) \}$$

Avec (Re désignant la partie réelle de l'expression)

$$A = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{z_2} - \frac{\mu_1}{z_1} \right) \right\} ; B = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{z_2} - \frac{\mu_1^2}{z_1} \right) \right\}$$

$$C = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{z_2} - \frac{\mu_2}{z_1} \right) \right\} ; D = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) \right\}$$

$$E = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \right\} ; F = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{z_1} - \frac{\mu_2}{z_2} \right) \right\}$$

Les coefficients μ_i , complexes, sont solutions de l'équation caractéristique

$$\alpha_{11} \mu^4 - 2 \alpha_{16} \mu^3 + (2 \alpha_{12} + \alpha_{66}) \mu^2 - 2 \alpha_{26} \mu + \alpha_{22} = 0$$

$$\text{et } z_k = (\cos \theta + \mu_k \sin \theta)^{1/2}$$

Les α_{ij} étant les coefficients de complaisance tels que dans le plan on ait :

$$\varepsilon_{11} = \alpha_{11} \sigma_{11} + \alpha_{12} \sigma_{12} + \alpha_{16} \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{22} = \alpha_{12} \sigma_{11} + \alpha_{22} \sigma_{22} + \alpha_{26} \sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{12} = \alpha_{16} \sigma_{11} + \alpha_{26} \sigma_{22} + \alpha_{66} \sigma_{12}$$

$$\alpha_{11} = (1 - n \nu_{13} \nu_{31}) / E_1 ; \quad \alpha_{22} = (1 - n \nu_{23} \nu_{32}) / E_2$$

$$\alpha_{12} = - (+ \nu_{12} + n \nu_{13} \nu_{32}) / E_1 ; \quad \alpha_{66} = 1/G_{12} ; \quad \alpha_{16} = \alpha_{26} = 0$$

$n = 0$ en contrainte plane et 1 en déformation plane.

SIH pose alors que la densité d'énergie est $S = r \cdot \frac{\partial W}{\partial A}$, r peut représenter la longueur critique dont il a été parlé au début.

Ainsi :

$$S = A_{11} K_I^2 + A_{22} K_{II}^2 + 2 A_{12} K_I K_{II}$$

La direction de propagation θ_0 est obtenue lorsque S atteint une valeur stationnaire :

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en} \quad \theta = \theta_0$$

La fissure se propage dans la direction θ_0 , lorsque S atteint une valeur critique :

$$S(K_I, K_{II}) = S_c \quad \text{pour} \quad \theta = \theta_0$$

3. MISE EN OEUVRE DU CRITERE DE DENSITE D'ENERGIE

Ce critère nécessite la connaissance précise, des modules d'élasticité et des facteurs d'intensité de contrainte au moment de la rupture.

3.1. Essais de rupture

Les essais sont effectués sur les éprouvettes "double bande en clivage" (DCB) dont les dimensions sont données sur la figure 2.

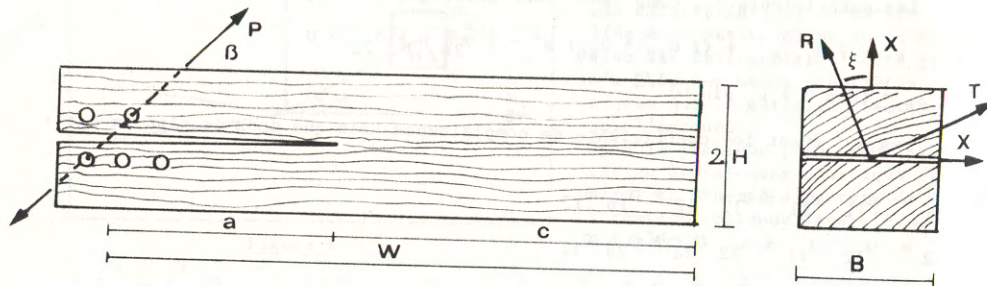
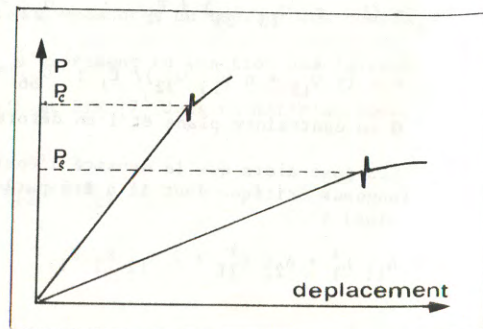


Fig. 2 : Eprouvette DCB modifiée et orientation des cernes annuels

L'angle β correspond à la direction du chargement, a est la longueur de fissure et ξ correspond à l'inclinaison des cernes annuels. Les courbes force-déplacement sont enregistrées (fig. 3)

Fig. 3



Ces courbes ne servent en fait qu'à vérifier la linéarité. Ceci est important car le critère de SIH ne s'applique que dans le domaine de la rupture fragile. Ainsi seule la force critique à l'amorçage de la fissuration est utile pour déterminer K_I et K_{II} .

3.2. Détermination des modules d'élasticité

Ils ont été obtenus à partir d'essais de compression sur des cubes équipés de jauges en rosettes à 45°.

Pour une bonne fiabilité des résultats, une simple identification des coefficients est insuffisante notamment pour les coefficients ν_{ij} .

En sollicitant 3 cubes, taillés différemment successivement suivant 2 directions, on obtient 30 valeurs numériques de pentes correspondant à 30 équations ne contenant que 12 coefficients inconnus (qui se réduisent à 9 si on pose que $\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$).

Une méthode de minimisation des écarts par les moindres carrés a conduit aux résultats ci-dessous pour le pin sylvestre à 12 % d'humidité [8]. Ces valeurs sont comparées à la bibliographie [9].

Module	E_l MPa	E_t	E_r	G_{rt}	G_{rl}	G_{tl}	ν_{rt}	ν_{tr}	ν_{rl}	ν_{lr}	ν_{tl}	ν_{lt}
[8]	19770	920	1410	60	1800	1190	0,62	0,35	0,053	0,56	0,039	0,64
[9]	16610	580	1120	70	1780	680	0,61	0,31	0,031	0,46	0,015	0,44

On peut noter le très bon accord avec les relations théoriques $\frac{\nu_{ij}}{E_i} / \frac{\nu_{ji}}{E_j}$ qui donnent sans ajustement supplémentaire respectivement 1,14 ; 1,06 et 1,10 au lieu de l'unité.

3.3. Evolution des constantes élastiques par rotation d'angle ξ

Lorsque l'angle repérant l'inclinaison des cernes annuels ξ (fig. 2) est modifié, le tenseur des complaisances d'un matériau orthotrope subit une transformation. Les directions longitudinales l et l restant confondus, la matrice P de passage associée à la rotation ξ s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & \sin \xi \\ 0 & -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix}$$

La matrice de complaisance $|S|$ est transformée en une matrice

$$|\bar{S}| = |P| |S| |P^{-1}| \quad \text{qui contient les complaisances "apparentes" } \alpha_{ij}.$$

Ainsi :

$$|S| = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{bmatrix} \quad |\bar{S}| = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{bmatrix}$$

Pour des sollicitations dans le plan 1.2, il n'y a pas de couplage entre les contraintes normales et les glissements ni entre les cissons et les déformations, ce qui n'est pas le cas dans les autres plans.

3.4. Facteurs d'intensité de contrainte

Pour un milieu isotrope, les facteurs d'intensité de contrainte sont connus pour les formes courantes d'éprouvettes [10].

Pour les milieux orthotropes, même pour une fissure dont le plan passe par un axe matériel, ils peuvent être différents des facteurs en milieu isotrope selon la forme de l'éprouvette considérée. Ainsi l'éprouvette DCB est très sensible aux effets de l'anisotropie [11].

Des calculs par éléments finis ont été conduits en découplant les sollicitations de mode I et II.

Par ailleurs des hypothèses simplificatrices ont permis de modéliser l'éprouvette à partir de la théorie des poutres sur appuis élastiques [12].

Deux expressions analytiques qui sont très bien corrélées avec les résultats obtenus en éléments finis sont données ci-dessous.

$$K_I = \frac{2 P \sqrt{3}}{b h^{3/2}} \cdot \frac{\left\{ \frac{\text{sh}^2 \lambda c - \sin^2 \lambda c}{\text{sh}^2 \lambda c - \sin^2 \lambda c} a + \frac{\text{sh} \lambda c - \text{ch} \lambda c - \sin \lambda c - \cos \lambda c}{\lambda (\text{sh}^2 \lambda c - \sin^2 \lambda c)} \right\}^2 \alpha_{11} + \frac{h^2}{10} \alpha_{66}}{\left[\frac{\alpha_{11} \alpha_{22}}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2 \alpha_{12} + \alpha_{66}}{2 \alpha_{11}} \right\} \right]^{1/4}}$$

$$K_{II} = \frac{2 P}{b h^{1/2}} / \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2 \alpha_{12} + \alpha_{66}}{2 \alpha_{11}} \right] \right\}^{1/4}$$

B épaisseur de l'éprouvette ; c = w - a ; λ = $\frac{1}{h} \cdot (6 \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}})^{1/4}$

Ces expressions sont introduites dans l'expression de S, les valeurs critiques étant obtenues en prenant P à l'amorçage.

4. RESULTATS CONCERNANT LE PIN SYLVESTRE

4.1. Variation de S autour de la pointe de fissure

La courbe S(θ) calculée pour une charge unité a été portée sur la figure 4 pour différents angles de chargement et une orientation des cernes de 55°.

La longueur de fissure a est prise ici égale à 100 mm.

Le minimum de la courbe, obtenu pour l'angle θ₀, dépend de l'angle de chargement.

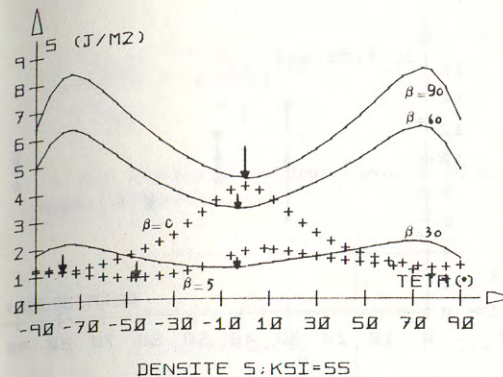


Fig. 4 : S fonction de θ

D'autres angles d'inclinaison des cernes ont été envisagés notamment à 0° (sens transversal longitudinal TL), 25°, 80°, 90° (sens radial longitudinal RL). Les courbes présentent toutes un extrémum qui est alors un maximum. L'angle θ dépend également de l'angle de sollicitation β.

Sur le tableau ci-dessous, sont résumés tous les résultats ainsi que ceux du milieu isotrope comme comparaison.

Angle d'orientation des cernes ξ	0°	25°	55°	80°	90°	Isotrope
Angle de charge β	TL				RL	
0°	± 80°	± 80°	± 80°	± 80°	± 80°	
5°	3°		- 46°	+ 6°	+ 5°	- 56°
30°	+ 5°	7°	- 9°	+ 10°	+ 9°	- 21°
45°	+ 3°	5°	- 6°	+ 8°	+ 7°	- 15°
60°	+ 3°	4°	- 4°	+ 7°	+ 6°	- 8°
90°	0°	0°	0°	0°	0°	0°

Les résultats numériques pour les faibles angles β (0° et 5°) ne peuvent être vérifiés expérimentalement sur l'éprouvette DCB.

4.2. Densité d'énergie critique fonction de la longueur de fissure

Les valeurs de S_c calculées pour la charge critique et suivant l'angle de bifurcation calculé précédemment sont portées sur la figure 5 pour ξ = 80° et β = 60° en fonction de la longueur de fissure a.

La valeur moyenne S_c égale à 97 Joules/m² est obtenue avec une dispersion de 15 %.

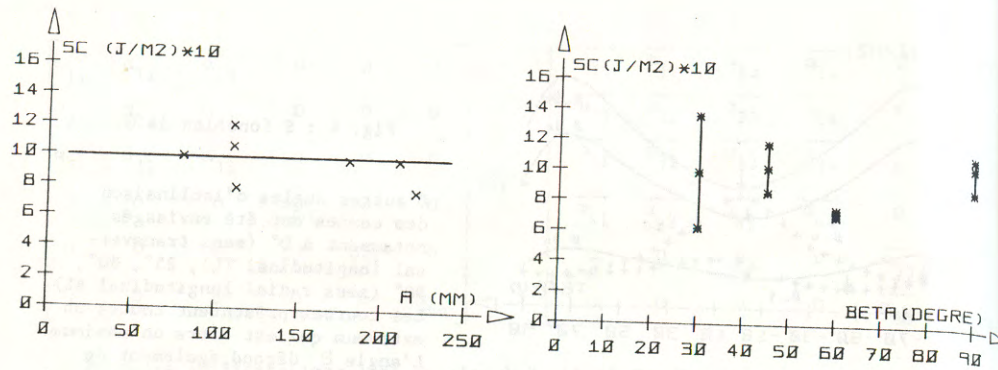


Fig. 5 : Densité d'énergie critique fonction de la longueur de fissure, $\xi = 80, \beta = 60^\circ$

Fig. 6 : Densité d'énergie critique en fonction de $\beta, \xi = 55^\circ, a = 100$ mm

4.3. Densité d'énergie critique fonction de l'inclinaison β de la charge

Les valeurs moyennes de S_C calculées comme précédemment ont été portées sur la figure 6 précédente pour $\xi_C = 55^\circ$ en fonction de l'inclinaison β de la charge. Les barres d'écart type ont été ajoutées et la dispersion est jugée très acceptable compte tenu du matériau. Les valeurs calculées pour les autres valeurs de ξ sont comparables.

4.4. Préviation du rapport K_{IIC}/K_{IC}

L'éprouvette de cisaillement compacte dite CS due à JONES et décrite par ailleurs [13] est utilisée en mode II pur. S_C se présentant comme un critère indépendant de l'angle de chargement, on a recherché sa valeur en mode II pur à partir de cette éprouvette.

$$S_{IIC} = A_{22} (\theta_{02}) \cdot K_{IIC}^2$$

θ_{02} , angle de bifurcation théorique en mode II

En mode I pur,

$$S_{IC} = A_{11} (\theta_{01}) \cdot K_{IC}^2$$

θ_{01} , angle de bifurcation théorique en mode I.

Si on a bien $S_{IC} = S_{IIC} = S_C$, on peut en déduire que :

$$\frac{K_{IIC}}{K_{IC}} = \left\{ \frac{A_{11} (\theta_{01})}{A_{22} (\theta_{02})} \right\}^{1/2}$$

En supposant que le critère de mode II pur reste égal à G_C , (taux de restitution d'énergie), comme en mode I, WILLIAM et BIRCH [14] ont trouvé :

$$\frac{K_{IIC}}{K_{IC}} = \left(\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \right)^{1/2}$$

Les résultats des deux théories et des expériences sont portés dans le tableau ci-dessous.

	K_{IIC} / K_{IC}
Critère de S_C	2,1
Critère de G_C [14]	1,75
Expérience	2,05

La théorie du S_C est beaucoup plus proche des expériences.

5. CONCLUSIONS

Le critère de densité d'énergie, d'utilisation assez lourde, a été appliqué au bois de pin sylvestre. Le critère prévoit de très faibles angles de bifurcation quelle que soit l'orientation des cernes annuels. Expérimentalement, la fissure est restée dans la direction des fibres mais pour les angles β faibles la surface de rupture est assez irrégulière. S_C a été trouvé sensiblement constant en fonction de la longueur de fissure, de la direction du chargement et de l'orientation des cernes annuels. Il peut constituer un critère de propagation de fissure pour le pin sylvestre dans les conditions de teneur en eau étudiées.

BIBLIOGRAPHIE

- PORTER A.W. - On the mechanics of fracture in wood. Forest Product Journal, tome 13, 1964.
- AMEEN A., MORLIER P., VALENTIN G. - Détermination expérimentale de l'intégrale de Rice critique V_C dans le bois de charpente. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, tome V, n° 2, 1979.
- TRIBOULOT P., JODIN P., PLUVINAGE G. - Mesure des facteurs d'intensité de contrainte critiques et des taux de restitution d'énergie dans le bois sur éprouvettes entaillées. Annales Scientifiques Forestières, 39 (1), 1982.

- [4] SAINT-JOHN C., SIGETY P. - Comportement mécanique des fissures sollicitées en mode I et II.
Rapport D.G.R.S.T., 1976.
- [5] SIH G.C., CHEN E.P. - Cracks in composite materials, ch I.
Nijhoff Publishers, 1981.
- [6] SIH G.C. - Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems.
Int. Jal of Fracture, vol. 10, n° 3, 1974.
- [7] SIH G.C., PARIS P.C., IRWIN G.R. - On cracks in rectilinear anisotropic bodies.
Int. Jal of Fracture, tome 1, 1965.
- [8] F. LAHNA - Mécanique de la rupture des matériaux orthotropes. Application au bois.
Thèse Bordeaux, 1983.
- [9] BODIG J., JAYNE B.A. - Mechanics of wood and wood composites.
Van Nostrand Reinhold, 1982.
- [10] MANDELL J.F., Mc GARRY F.J., WANG S.S., IM J. - Stress intensity factor for anisotropic fracture test specimens of several geometries.
J. Compos. Mat., vol. 8, 1974.
- [11] WALSH P.F. - Linear fracture mechanics in orthotropic materials.
Eng. Fract. Mech., vol. 4, 1972.
- [12] VALENTIN G., LAHNA F. - Facteur d'intensité de contrainte de l'éprouvette DCB en milieu orthotrope.
A paraître.
- [13] MORLIER P., VALENTIN G. - Rupture du bois en mode mixte.
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, tome V, n° 6, 1982.
- [14] WILLIAMS J.G., BIRCH M.W. - Mixed mode fracture in anisotropic media.
Cracks and fracture, A.S.T.M. STP 601, 1976.

MESURE DU MODULE COMPLEXE PAR POINÇONNEMENT (*)

G. RAMOND¹, M. PASTOR¹, D. MAUGIS², M. BARQUINS²

- 1 - Section des Liants Routiers du L.C.P.C.
2 - Equipe de recherche de Mécanique des Surfaces du C.N.R.S.

R E S U M E

Dans le cadre d'une étude de l'adhérence d'un élastomère polyuréthane, nous avons tenté de lier le facteur dissipatif de la cinétique de décollement aux propriétés viscoélastiques du matériau et plus particulièrement à son module complexe.

Le module complexe a été mesuré par indentation des plaques de polyuréthane à l'aide d'un poinçon cylindrique rigide à base plane circulaire monté sur un viscoélasticimètre. Le déplacement sinusoïdal était imposé au poinçon soumis préalablement à un léger enfoncement statique.

Les résultats ont été interprétés à partir de la théorie de BOUSSINESQ. Ils ont montré, d'une part qu'à basse fréquence on retrouve la valeur du module d'élasticité statique donnée dans la littérature, et que d'autre part, la variation, en fonction de la fréquence, de la composante imaginaire du module complexe est directement liée à celle des pertes viscoélastiques avec la vitesse de décollement.

MEASUREMENT OF THE COMPLEX MODULUS BY PUNCHING

A B S T R A C T

In the context of an investigation of the adherence of a polyurethane elastomer, we attempted to relate the dissipative factor of the kinetics of unsticking to the viscoelastic properties of the material, in particular its complex modulus.

The complex modulus was measured by indentation of slabs of polyurethane using a rigid cylindrical punch with a flat circular base mounted on a viscoelastimeter. A sinusoidal movement was applied to the punch, superimposed on a small static indentation of the material.

The results were interpreted in the light of Boussinesq's theory. They showed: that at low speed we find the value of the modulus of static elasticity given in the literature; and that the variation of the imaginary component of the complex modulus versus frequency is directly related to the variation of viscoelastic losses with the rate of unsticking.

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 2 juin 1983.

1. INTRODUCTION

Il arrive très fréquemment que l'on désire tester, du point de vue rhéologique, de petits échantillons sous forme de plaques. Il est alors nécessaire, soit de découper une éprouvette de dimensions déterminées, soit de la mouler après fusion. Ces deux techniques présentent deux inconvénients majeurs :

- a - la découpe d'une éprouvette n'est pas toujours aisée et conduit souvent à une surface latérale irrégulière,
- b - le moulage ne peut être envisagé que si le produit supporte l'élévation de température nécessaire sans se décomposer chimiquement ni changer de structure.

Par ailleurs, dans les deux cas, l'essai est destructif. Aussi, a-t-on cherché, à l'occasion d'une étude sur la cinétique d'adhérence d'un élastomère polyuréthane, à s'affranchir de la nécessité de tester une éprouvette de forme et de dimensions déterminées pour travailler directement sur une lame d'élastomère.

2. ETUDE DE LA CINÉTIQUE D'ADHÉRENCE

La séparation de deux solides élastiques en contact, soumis à un effort de traction normal à l'interface, commence dès que le taux de restitution de l'énergie G devient supérieur à l'énergie d'adhérence de DUPRE w . [1].

Le bord de la zone de contact peut être considéré comme un front de fissure qui se propage en mode I à l'interface.

La différence $G - w$ représente la force appliquée par unité de longueur : c'est l'énergie motrice de la fissure qui se propage à une vitesse fonction de la température et telle que [2].

$$G - w = w \varphi (a_T v)$$

a_T étant le facteur de translation de FERRY,

v étant la vitesse de propagation.

Le terme $w \varphi (a_T v)$, exprimant le freinage dû aux pertes viscoélastiques localisées en tête de fissure, est proportionnel à w , [3, 4].

Nous avons montré que la fonction $\varphi (a_T v)$ est une caractéristique du matériau liée à la dépendance en fréquence de la partie imaginaire du module complexe, la partie réelle n'intervenant que dans l'expression de G .

Les mesures d'adhérence effectuées, tant par pelage que par déchargement d'un poinçon rigide à base plane circulaire, ou d'un poinçon sphérique, ont montré que le terme de freinage varie comme $v^{0,6}$ (fig. 1), dans une large gamme de vitesses au voisinage de la température ambiante [2]. Il était donc intéressant de les comparer avec les variations du module élastique et du module de perte en fonction de la fréquence.

De plus, étant donné le but même de l'étude, il nous a été tout naturel de tenter d'utiliser la théorie de BOUSSINESQ pour la mesure des propriétés viscoélastiques de l'élastomère.

3. PRINCIPE DE LA MESURE DU MODULE PAR POINÇONNEMENT

Un cylindre rigide à base plane circulaire appuyant avec une force F sur un demi espace élastique provoque une déformation (fig. 2). Le déplacement vertical est donné par la formule [5]:

$$d = \frac{1 - \nu^2}{2E} \cdot \frac{F}{a} \quad (1)$$

d étant le déplacement vertical des points de la surface sous le cylindre,

F étant la force verticale appliquée,

ν " le coefficient de Poisson,

E " le module d'élasticité,

a " le rayon du cylindre.

La contrainte verticale σ_z dans l'aire de contact, pour un point situé à une distance r de son axe est de :

$$\sigma_z = \frac{F}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}$$

elle est donc infinie, à la périphérie du contact.

La figure 3 représente les isovaleurs de la contrainte principale σ_3 [6], calculée pour $\nu = 1/2$ et pour la pression moyenne de $P_m = F/\pi a^2$, qui est équivalente à σ_z en surface et sur l'axe de symétrie.

Le déplacement d'un point de la surface situé à une distance $r > a$ est donné par :

$$u_z = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \cdot \frac{F}{a} \text{Arcsin} \frac{a}{r} \quad (3)$$

en sorte que :

$$\frac{d}{dr}(u_z) = - \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \cdot \frac{F \cdot a}{a^2 r^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}$$

Ce qui implique que le raccordement de la surface du massif élastique au cylindre rigide se fait verticalement (fig.2).

Si l'on donne au cylindre un déplacement sinusoïdal, il se crée une force sinusoïdale et la formule (1) devient en notation complexe :

$$d^* = \frac{1 - \nu^2}{2E^*} \cdot \frac{F^*}{a} \quad (4)$$

avec $d^* = d_0 e^{i\omega t}$ et $F^* = F_0 e^{i\omega t + i\varphi}$

mais :

$$E^* = |E^*| e^{i\varphi}$$

donc :

$$\frac{F_0}{d_0} e^{i\varphi} = \frac{2aF^*}{1 - \nu^2} = \frac{2a}{1 - \nu^2} |E^*| e^{i\varphi} \quad (5)$$

raideur $K = F_0/d_0$ et déphasage peuvent être mesurés au viscoélastimètre.

4. PRINCIPE DU VISCOELASTICIMETRE

La partie mécanique du viscoélasticimètre se compose d'une embase fixe montée sur un capteur de force et d'une tête mobile entraînée par un excitateur électrodynamique, à niveau d'excitation contrôlable, délivrant un signal sinusoïdal dont les fréquences sont en progression géométrique de raison 2 dans la bande de 7,8 à 1000 Hz.

L'échantillon à tester étant rendu solidaire des têtes de mesures, l'appareil affiche à chaque instant le rapport K de l'amplitude de la force à celle du déplacement et l'angle de phase φ . Il permet également de donner à l'échantillon une légère précontrainte statique contrôlable.

5. MODE OPERATOIRE ET MESURES PRELIMINAIRES

En pratique, nous sommes partis d'un parallélépipède de dimensions (3/3/1,2 cm) placé sur l'embase fixe comportant le capteur de force, l'adhérence entre le métal de l'embase et l'élastomère étant excellente il n'a pas été nécessaire d'utiliser de colle.

Le cylindre métallique, de diamètre donné, fixé sur la tête mobile délivrant le signal sinusoïdal, a ensuite été amené au contact du parallélépipède à tester.

Afin d'assurer une bonne adhérence et par conséquent un bon contact entre le poinçon cylindrique et l'élastomère, une légère précontrainte a été appliquée provoquant un enfoncement initial d'environ 50 μm , valeur nettement supérieure aux amplitudes de déplacement imposées ultérieurement. On peut alors, après thermostatation, commencer l'essai proprement dit en créant un déplacement sinusoïdal et en recueillant force, raideur et angle de phase.

Les mesures préliminaires ont amené à vérifier que :

1 - La précontrainte initiale est sans influence sur les résultats.

Les mesures effectuées, à 7,8 Hz et à une température de 22°C pour un déplacement imposé d'amplitude 5 μm dans une gamme d'enfoncements initiaux variant entre 20 et 140 μm ont été reportées dans le tableau 1.

- TABLEAU 1 -

Enfoncement initial (μm)	K (N/m)	φ (°)
20	$2,4 \cdot 10^4$	35,5
50	$2,4 \cdot 10^4$	36,5
80	$2,4 \cdot 10^4$	36
100	$2,4 \cdot 10^4$	35,5
140	$2,4 \cdot 10^4$	35,5

Son examen montre que la précontrainte, dans la gamme testée, est sans influence.

2 - Force et déplacement restent proportionnels dans une large gamme de déplacements.

Cette proportionnalité a été étudiée à 15,6 Hz, avec un enfoncement statique de 100 μm , à une température de 22°C, pour des amplitudes de déplacement variant entre 2 et 50 μm (voir tableau 2, et figure 4).

TABLEAU 2

Amplitude [d*] (μm)	F (N)	K (N/M)	φ (°)
2	< 0,1	$2,3 \cdot 10^4$	-
5	{ 0,11 0,12	$2,2 \cdot 10^4$	32,7
10	0,22	$2,2 \cdot 10^4$	31,7
25	0,53	$2,2 \cdot 10^4$	31,7
50	1,1	$2,2 \cdot 10^4$	32

Il faut également noter que pour un déplacement imposé de 2 μm , la réponse en force reste très faible, ne permettant pas d'obtenir une valeur précise de l'angle de phase. Sans doute la valeur de K est-elle alors légèrement entachée d'erreur.

3 - La force à déplacement constant, et par conséquent la raideur est fonction linéaire du diamètre du cylindre.

Cette linéarité a été vérifiée, à température ambiante, et pour des fréquences variant de 7,8 à 250 Hz, en se servant de cylindres de diamètre 0,2 ; 0,28 ; 0,38 ; et 0,5 cm. Les figures 5 et 6 représentent les résultats, on peut constater que :

- l'angle de phase reste indépendant du diamètre,
- les droites représentant la variation de la raideur en fonction du diamètre ne passent pas par l'origine.

Différentes explications peuvent être données à ce phénomène mais elles ne sont pas entièrement satisfaisantes :

- variation de la température à l'intérieur du massif (sous le cylindre rigide) due à l'énergie dissipée lors du mouvement : l'énergie globale dissipée est d'autant plus grande que la force est importante, donc que le poinçon est large. Il serait alors normal de trouver, toutes proportions gardées, des valeurs de raideur d'autant plus faibles que le poinçon est plus large. Malheureusement, cette hypothèse ne résiste guère à l'observation des angles de phase qui devraient également être affectés par des variations de température ;

- défaut de surface des cylindres :
les cylindres utilisés n'ont pas été spécialement traités pour cet usage et présentent de petits défauts de surface. La surface de contact réelle peut alors être inférieure à la section du cylindre mais dans ces conditions on s'explique mal que la linéarité soit globalement respectée.
- déformations élasto-plastiques :
cette hypothèse est a priori intéressante mais on aurait déjà dû les détecter lors des expérimentations préliminaires précédentes.

Par ailleurs, comme le montre la figure 7, la répétabilité des essais avec un cylindre est bonne, les petites différences éventuelles sont essentiellement attribuables à de légères variations de température comme le montre l'examen simultané des valeurs de modules et d'angles.

6. COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS PAR POINÇONNEMENT ET PAR TRACTION-COMPRESSION SUR EPROUVETTE.

La comparaison des résultats obtenus d'une part par poinçonnement et d'autre part sur une petite éprouvette parallélépipédique découpée dans le matériau est montrée dans les figures 8 et 9. L'erreur maximale obtenue est de l'ordre de 20 % sur $[E^*]$, elle est beaucoup plus faible en ce qui concerne l'angle de phase.

7. ETUDE DES PROPRIETES VISCOELASTIQUES DE L'ELASTOMERE POLYURETHANNE

Les mesures ont été effectuées dans une large gamme de températures (20 à 50°C) et de fréquence (7,8 à 250 Hz) grâce à un poinçon cylindrique de 0,2 cm sur 2 lames superposées et parfaitement adhérentes de polyuréthane. Les figures 10, 11, 12, 13, montrent les résultats.

On peut constater :

- 1 - que le module d'élasticité est de l'ordre de $4 \cdot 10^6$ Pa, la valeur annoncée par le fabricant étant de $5 \cdot 10^6$.
- 2 - que la pente de la courbe représentant $\log E_2$ en fonction du logarithme de la fréquence est de l'ordre de 0,6 sur un très grand intervalle de fréquence pour des températures au voisinage de l'ambiante. Cette valeur correspond à celle trouvée en pelage lorsque l'on porte $\varphi(a_T v)$ en fonction de v , ce qui conforte bien la théorie selon laquelle $\varphi(a_T v)$ représente les pertes viscoélastiques en tête de fissure.

On trouvera, par ailleurs, dans la figure 14 une représentation dans l'espace de BLACK qui met bien en évidence le caractère de solide viscoélastique du polyuréthane et donne une idée de son spectre de relaxation.

8. APPLICATION AU BITUME

Dans l'optique de la caractérisation des liants purs, ou modifiés par des polymères, et de leur évolution, nous avons tenté d'appliquer cette technique aux bitumes classiques.

Le bitume présentant un caractère visqueux très marqué, il est évidemment impossible d'effectuer des mesures dans la zone de température où ce comportement est dominant. Par ailleurs, pour éviter tout "poinçonnement" trop important durant le temps de thermostation, il ne faut imposer que des précontraintes extrêmement faibles

ou quasi nulles. Le contact n'est alors réalisé que grâce à l'adhésion du bitume sur une surface extrêmement faible d'où de nombreux "décrochements" par rupture du contact.

La méthode n'est donc acceptable que dans un domaine étroit de rigidité au-dessus duquel on observe une rupture du contact et au-dessous duquel le poinçonnement cesse d'être élastique. Elle n'en reste pas moins intéressante puisque couvrant le domaine classique d'étude des bitumes, à savoir une gamme de température variant de 10°C à environ 35°C.

La figure 15 montre la bonne corrélation entre des valeurs obtenues par les méthodes classiques (traction-compression ou cisaillement) et celles mesurées par poinçonnement.

9. CONCLUSION

Cette méthode de détermination du module est basée sur la mesure de la force nécessaire pour imposer un déplacement donné à un cylindre rigide s'appuyant sur un massif viscoélastique.

Après avoir vérifié la proportionnalité entre la force recueillie et le déplacement imposé, l'influence de la précontrainte statique et la linéarité de la force en fonction du diamètre du cylindre ont été étudiées. Cette étape préliminaire franchie, on a pu comparer les résultats obtenus par cette technique avec ceux résultant d'un essai classique de traction-compression sur éprouvette.

La méthode a ensuite été appliquée à deux cas particuliers :

- un élastomère polyuréthane,
- un bitume.

On a pu, en ce qui concerne l'élastomère polyuréthane, établir une bonne corrélation entre la partie imaginaire du module complexe et le facteur $\varphi(a_T v)$, terme de freinage de la propagation des fissures en milieu viscoélastique.

Cette technique semble intéressante lorsqu'il est nécessaire de tester de petits échantillons à partir desquels il est malaisé de mouler ou de découper des éprouvettes de dimensions géométriques bien définies.

Son application est toutefois limitée par :

- la nécessité d'obtenir une bonne adhérence entre le poinçon et le produit testé,
- la nature même du produit : le poinçon ne doit pas pénétrer dans le matériau à tester.

De plus, compte tenu de la sensibilité de l'appareillage utilisé et de la nature des échantillons testés, nous avons été contraints dans certains cas d'imposer de très faibles déplacements, ce qui conduisait à une mesure peu précise de l'angle de phase.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. MAUGIS, M. BARQUINS et R. COURTEL "Fissure de GRIFFITH et adhésion des solides élastiques". METAUX-CORROSION-INDUSTRIE, 51 (1976) p. 1-1a.
- [2] D. MAUGIS and M. BARQUINS : "Fracture mechanics and the adherence of viscoelastic bodies". J. Phys. D : Appl. Phys, 11 (1978) p. 1989-2023.

- [3] A.N. GENT and J. SCHULTZ : "Effect of wetting liquids on the strength of adhesion of viscoelastic materials", J.Adhesion, 3 (1972)p. 281-294.
- [4] E.H. ANDREWS and A.J. KINLOCH : "Mechanics of adhesive failure" Proc. Roy. Soc. Lond. A 332 (1973) p. 385-399.
- [5] J. BOUSSINESQ "Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques". 1885. (Paris : Gauthier-Villars) (Nouveau tirage 1969 Paris : Blanchard)p.208.
- [6] I.N. SNEDDON : "The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile". Int. J. Engng. Sci 3 (1965) p. 47-57.

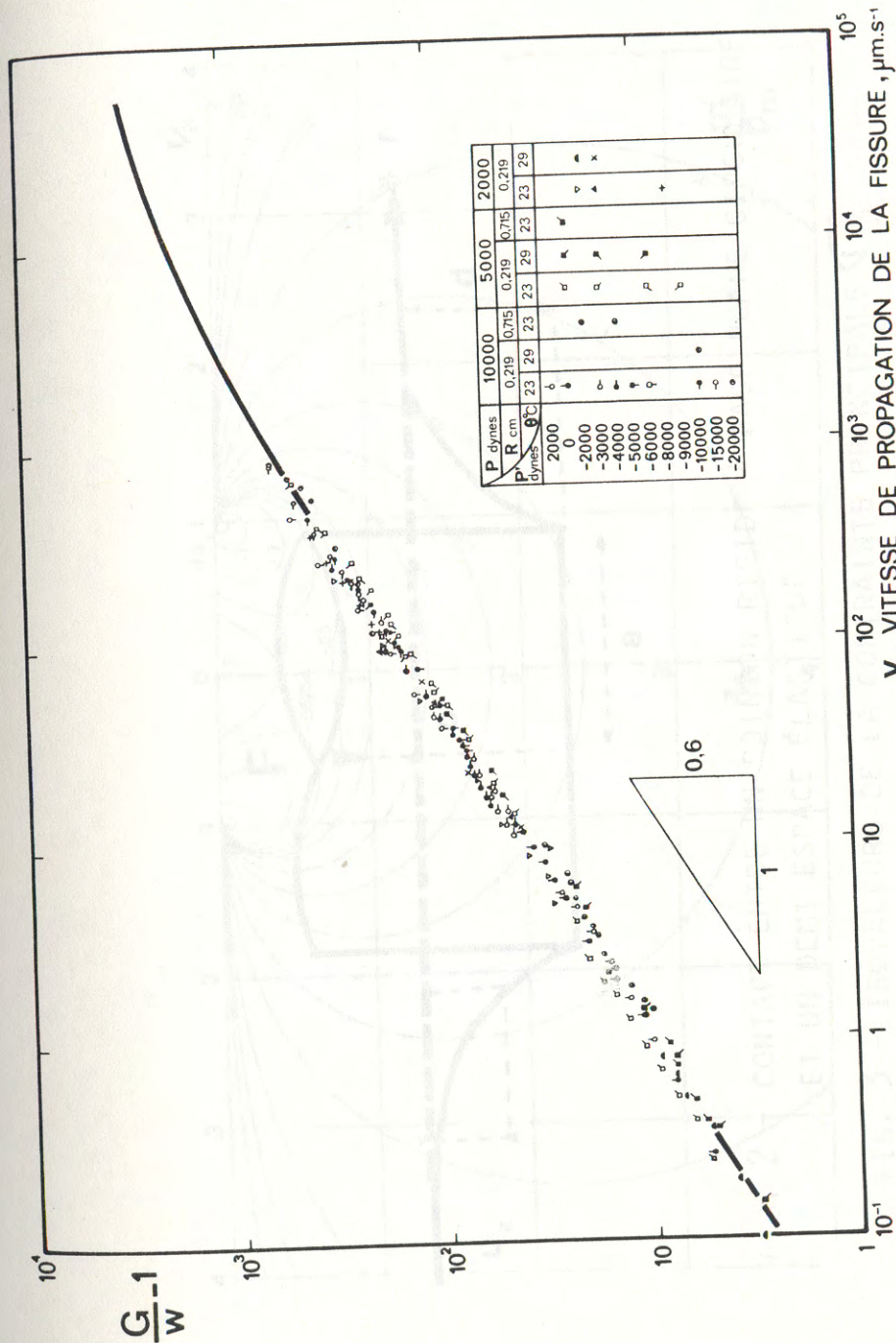


FIG. 1 - ÉNERGIE MOTRICE NORMALISÉE DE LA FISSURE EN FONCTION DE LA VITESSE DE PROPAGATION.

DE L'ALLESSE DE POLYMERISATION
 DE L'ALLESSE DE POLYMERISATION DE LA LIGNE DE CONTACT

ET UN DEMI ESPACE ÉLASTIQUE
 FIG. 5 - CONTACT ENTRE UN CYLINDRE BUCIDE Y BASE CIRCULAIRE

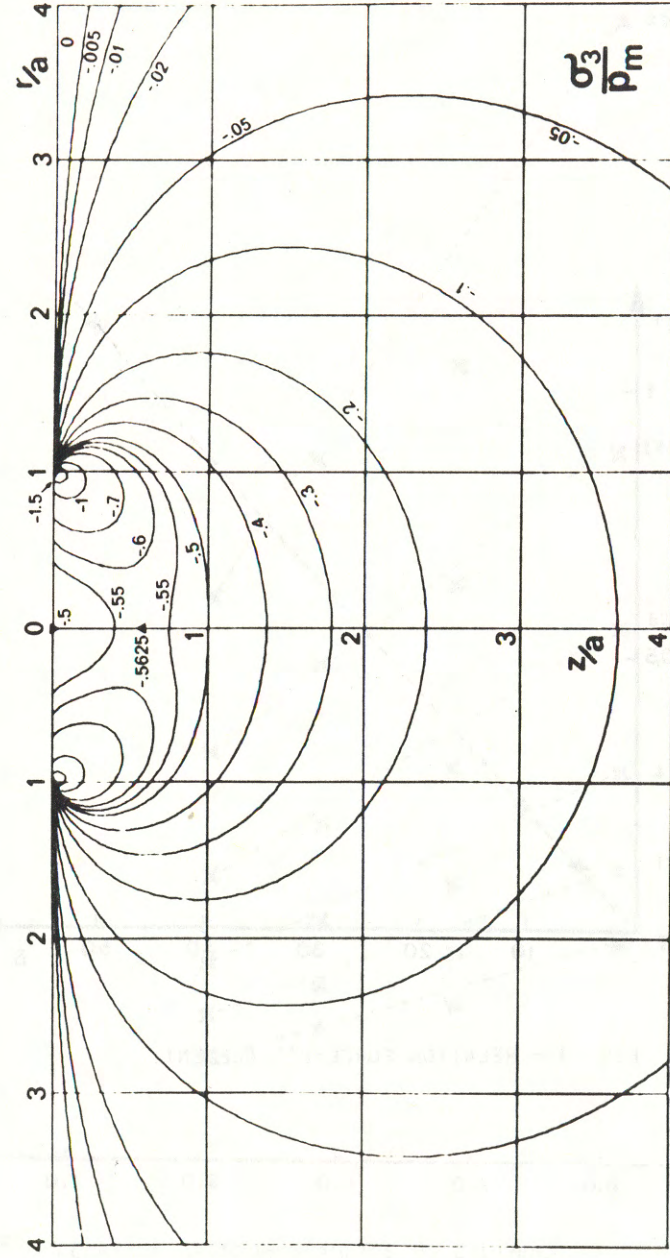
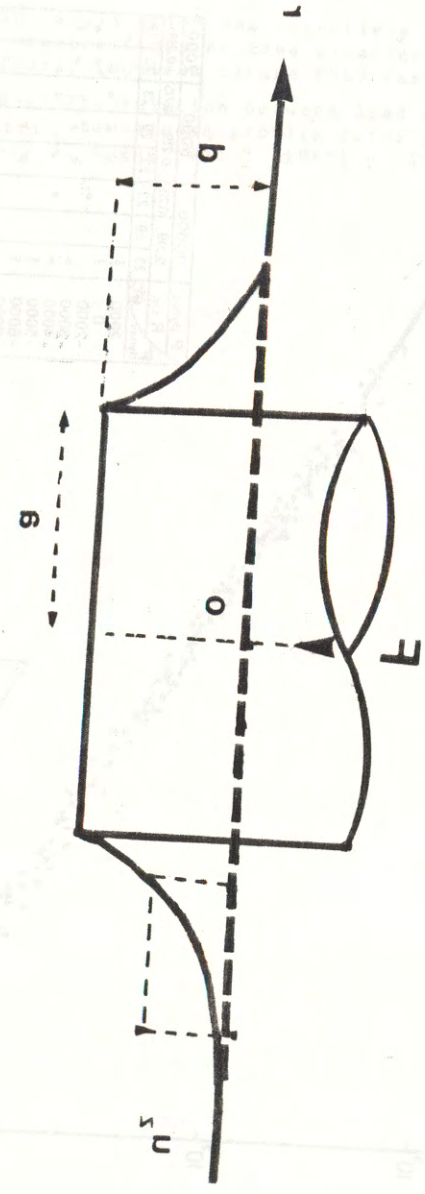


FIG. 3 - ISOVALEURS DE LA CONTRAINTE PRINCIPALE σ_3

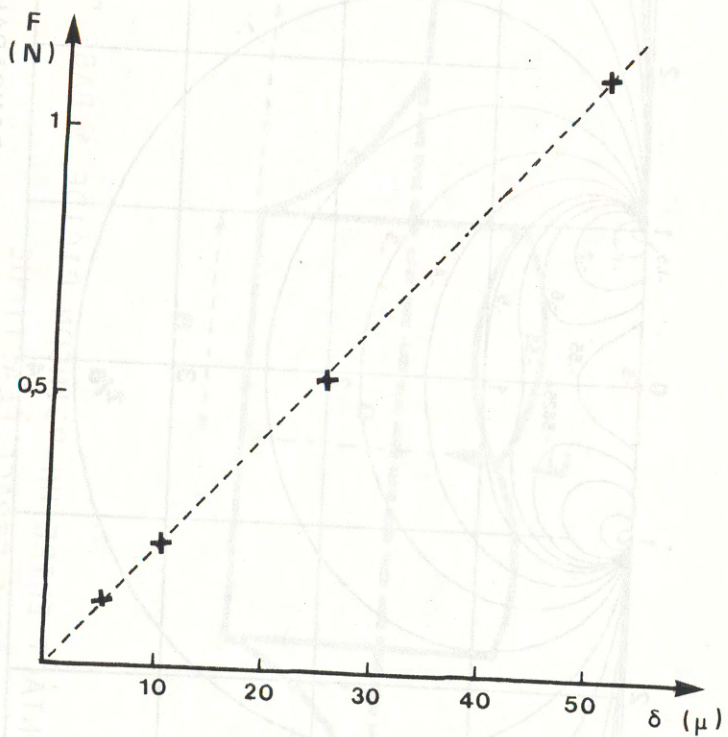


FIG. 4 - RELATION FORCE-DÉPLACEMENT.

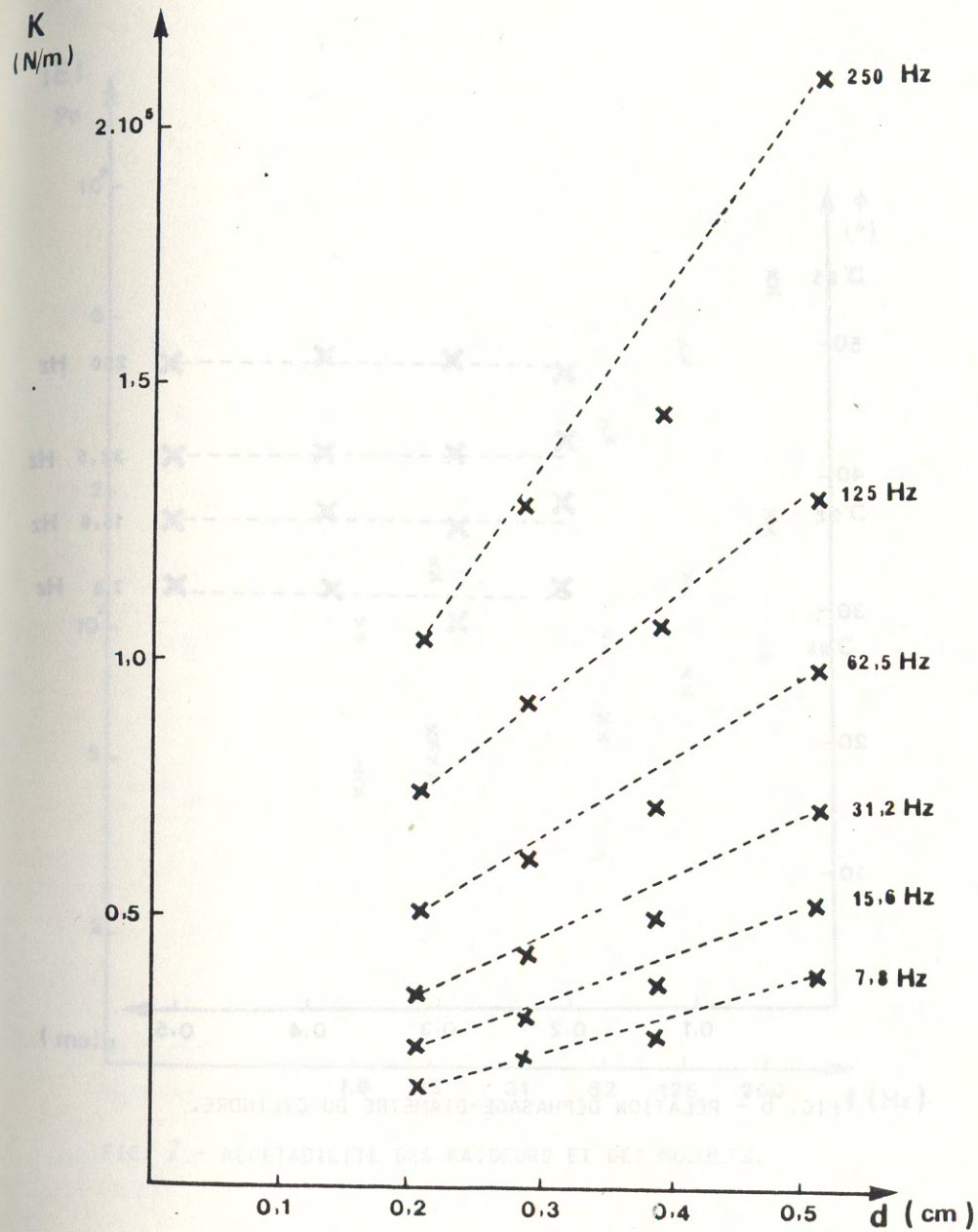


FIG. 5 - RELATION RAIDEUR-DIAMÈTRE DU CYLINDRE.

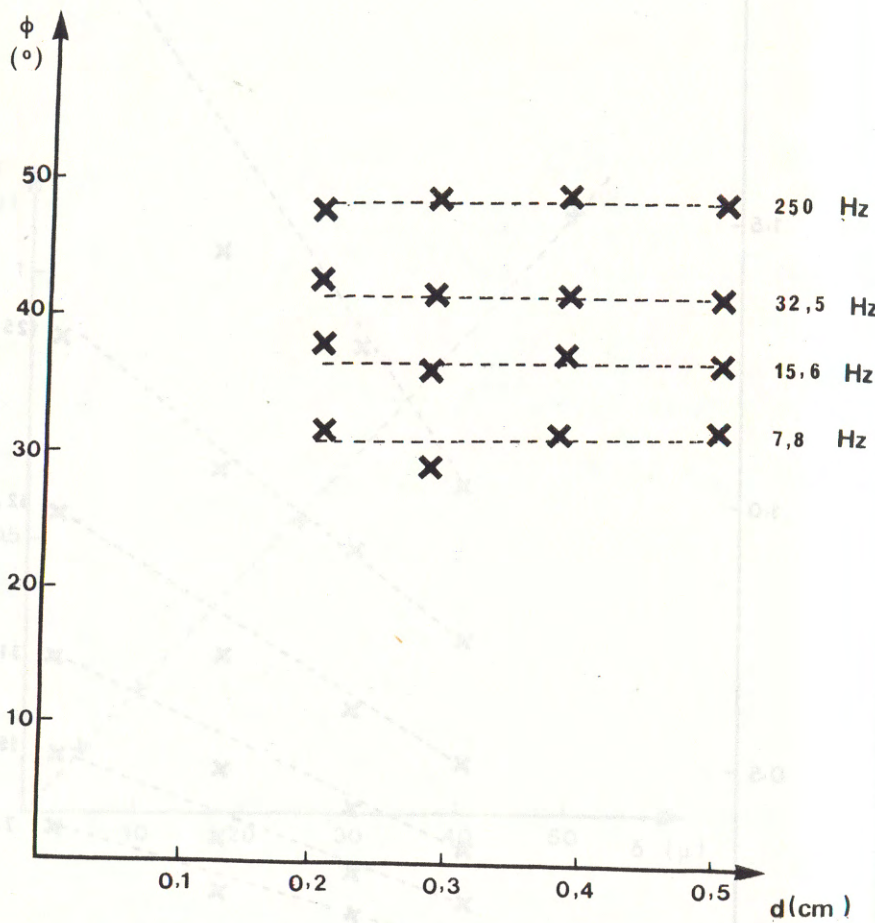


FIG. 6 - RELATION DÉPHASAGE-DIAMÈTRE DU CYLINDRE.

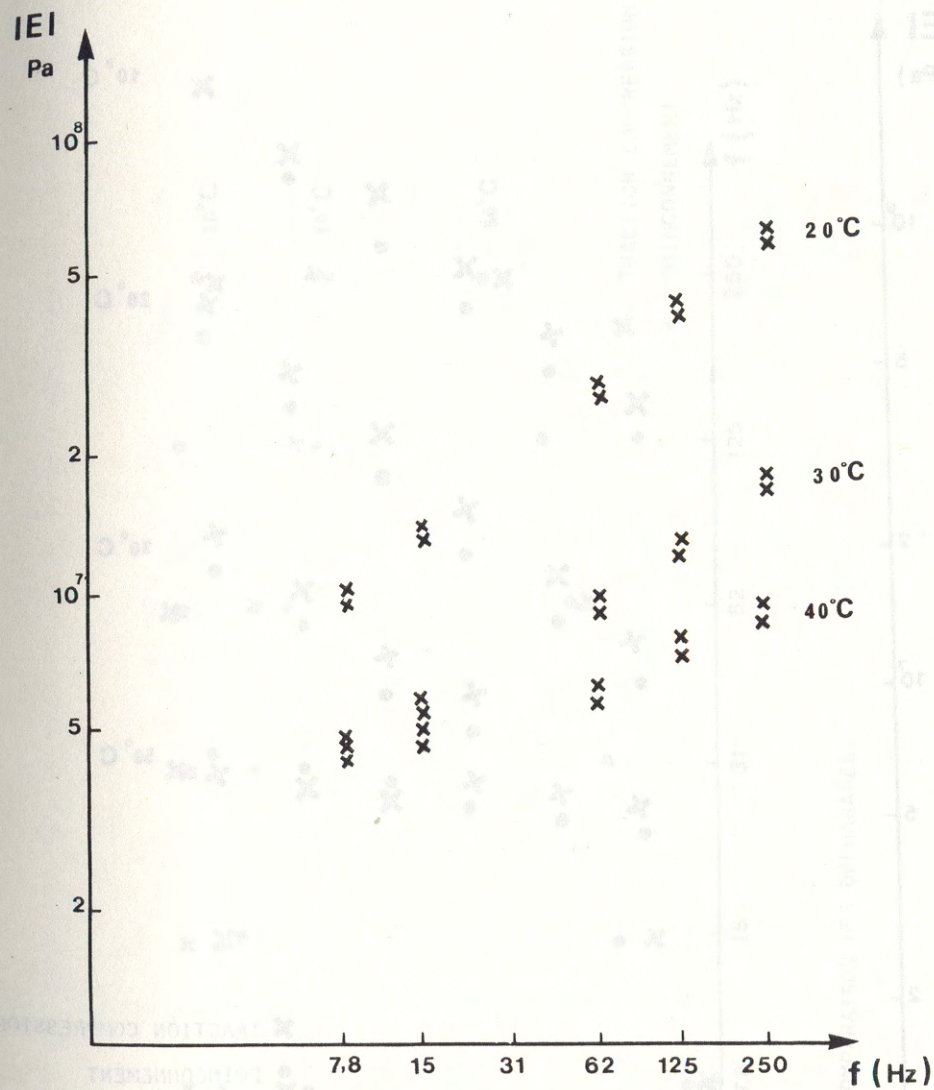


FIG. 7 - RÉPÉTIBILITÉ DES RAIDEURS ET DES MODULES.

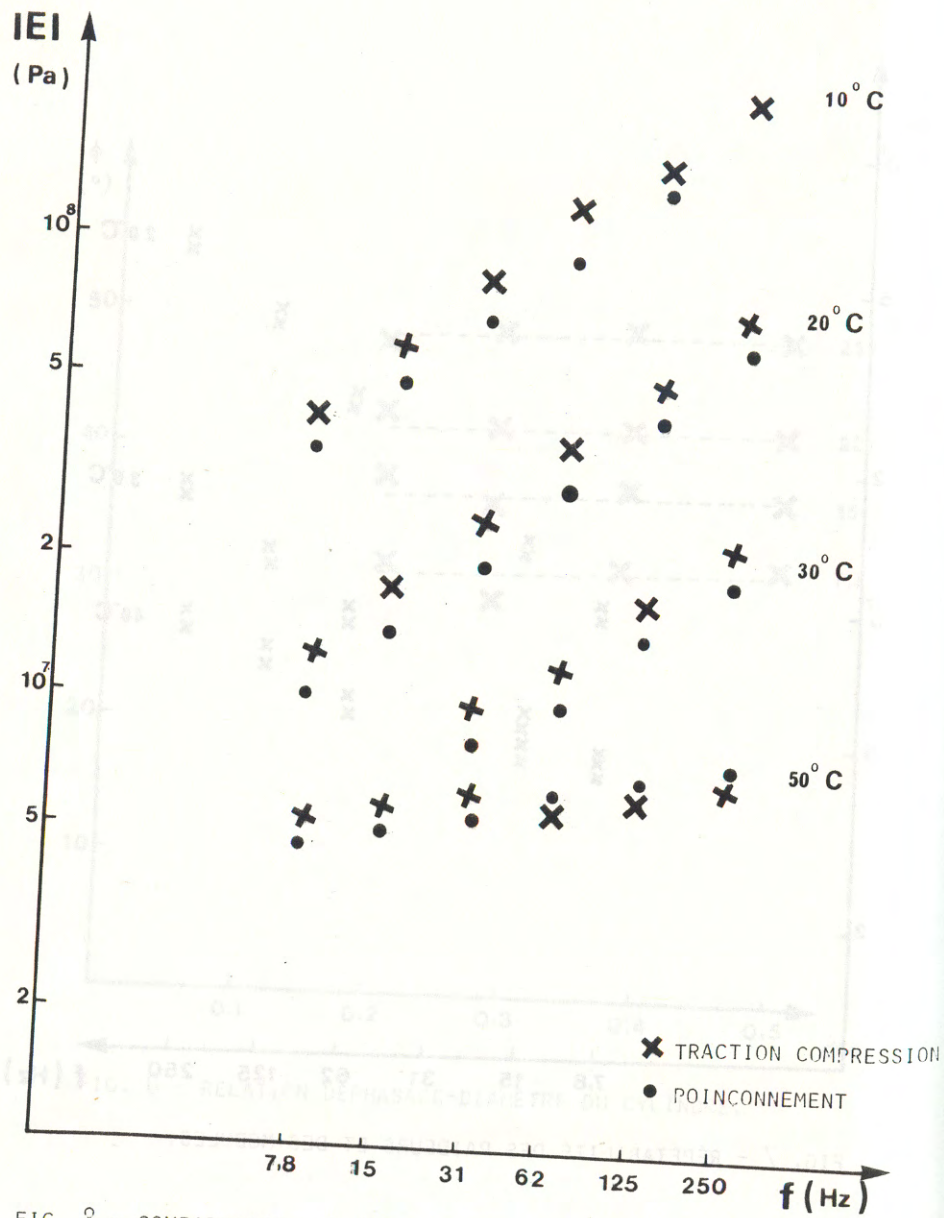


FIG. 8 - COMPARAISON DES MODULES DU POLYURÉTHANNE

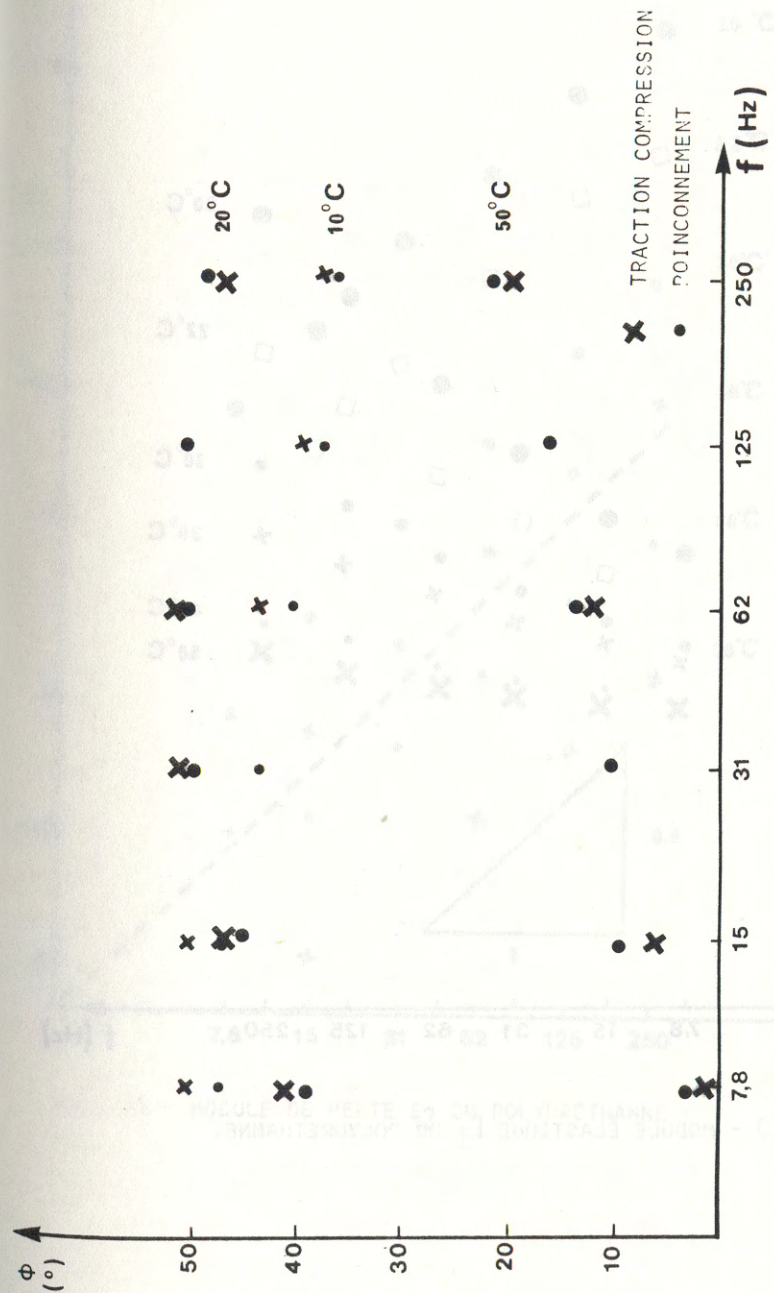


FIG. 9 - COMPARAISON DES DÉPHASAGES.

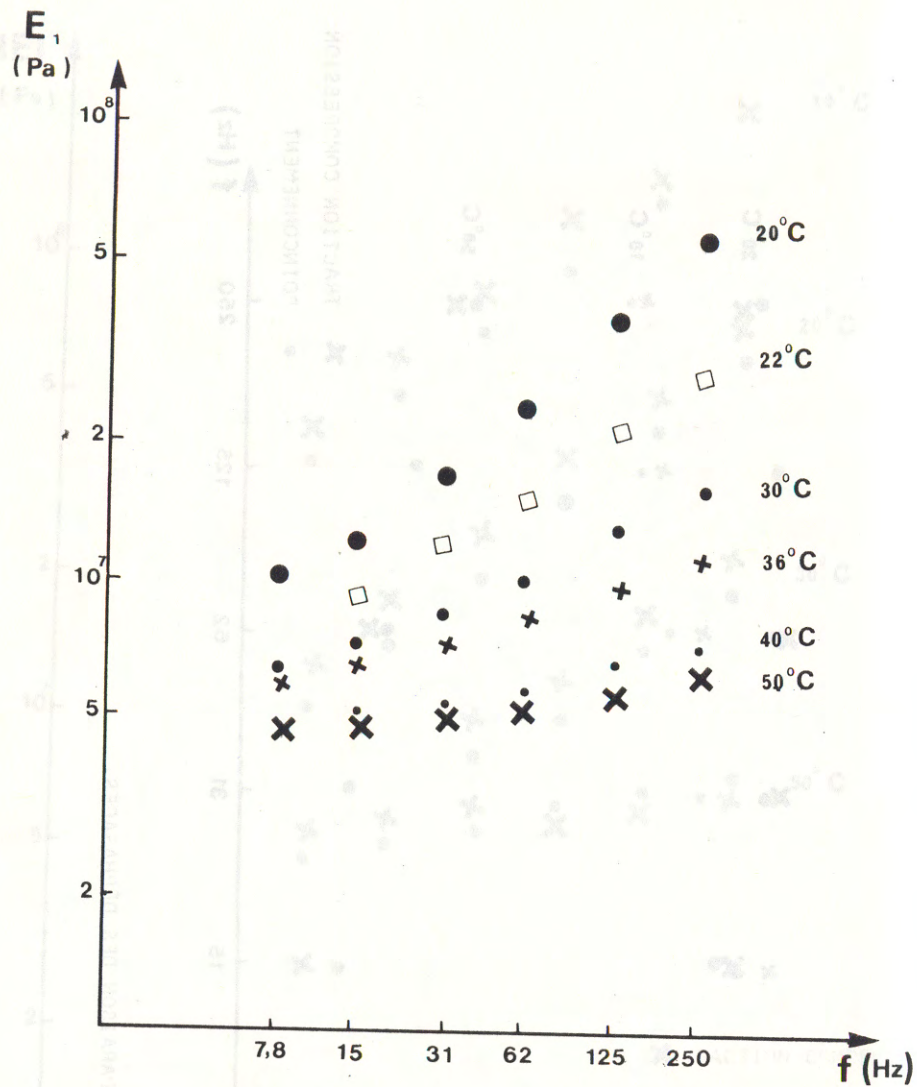


FIG. 10 - MODULE ÉLASTIQUE E_1 DU POLYURÉTHANNE.

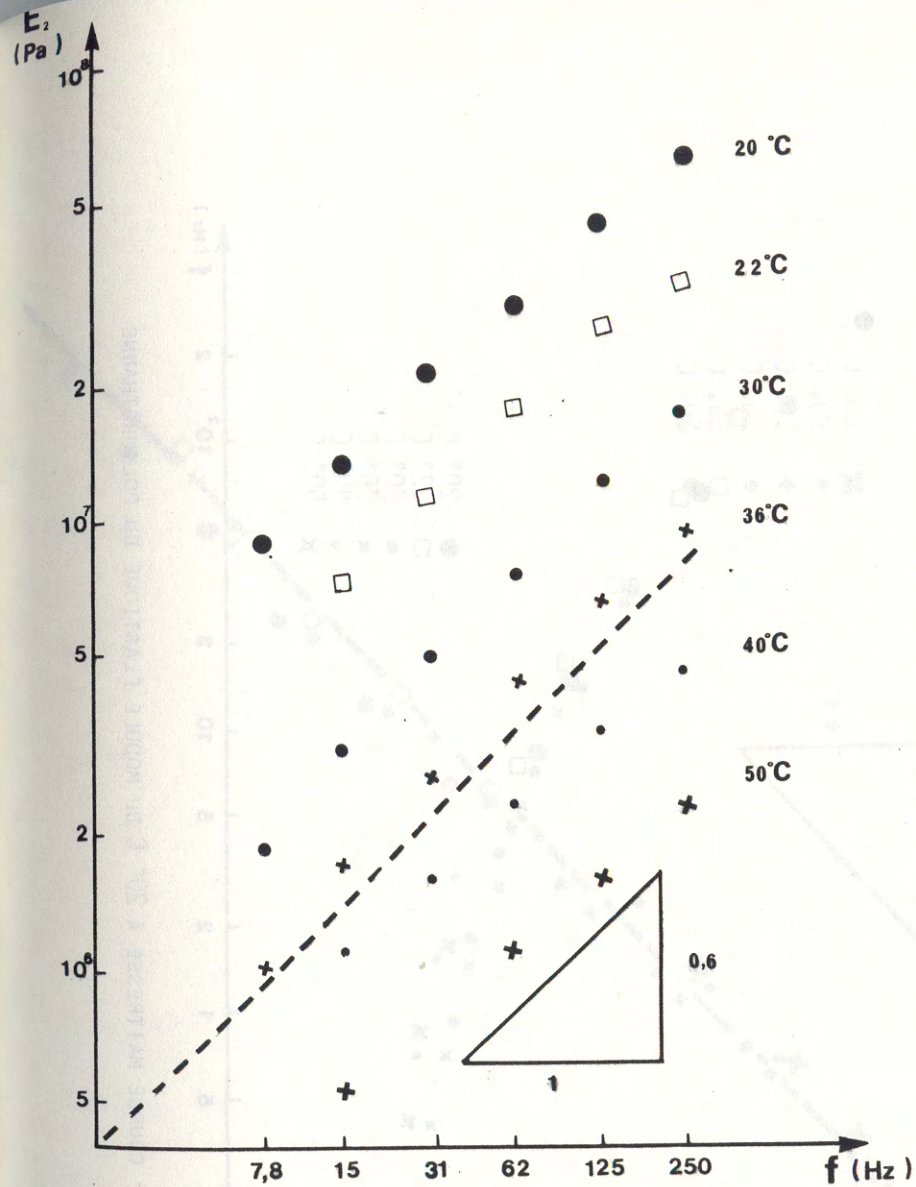


FIG. 11 - MODULE DE PERTE E_2 DU POLYURÉTHANNE.

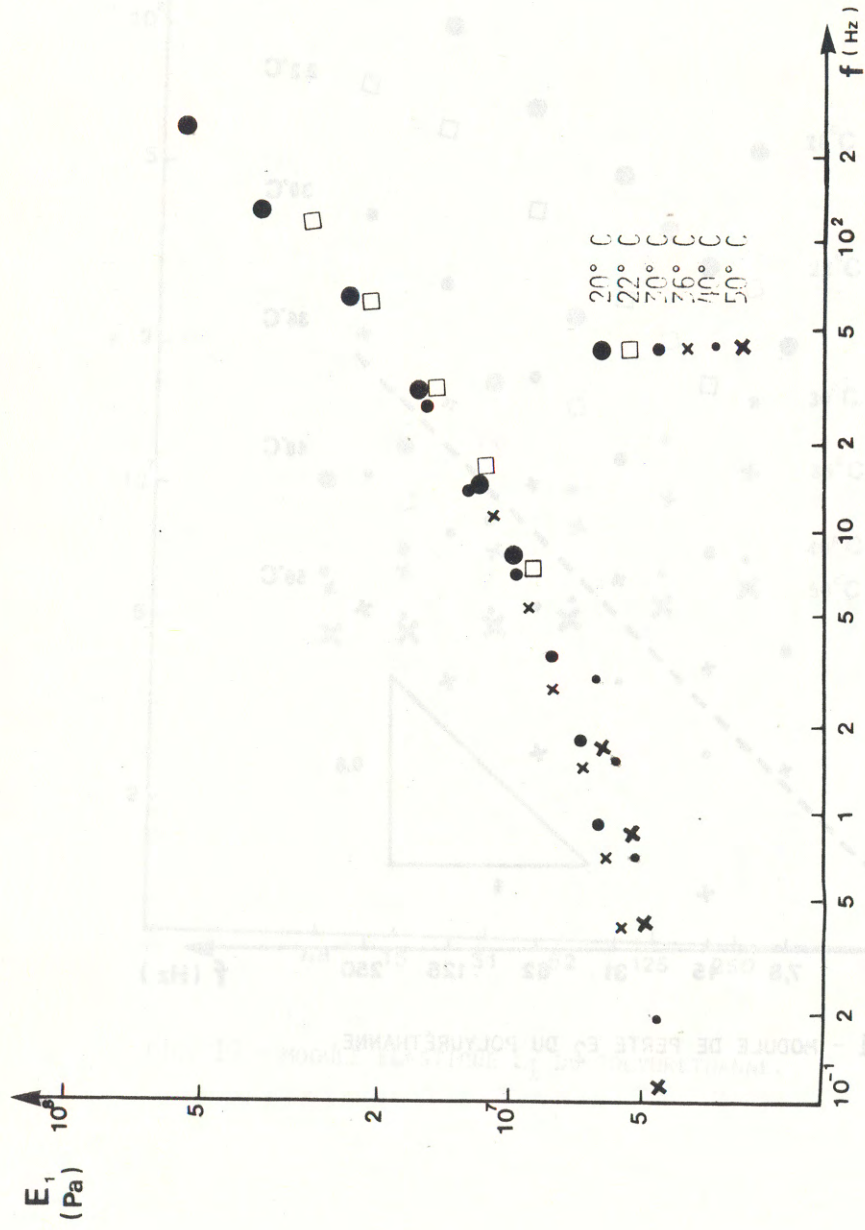


FIG. 12 - COURBE MAITRESSE A 20° C DU MODULE ÉLASTIQUE DU POLYURÉTHANE

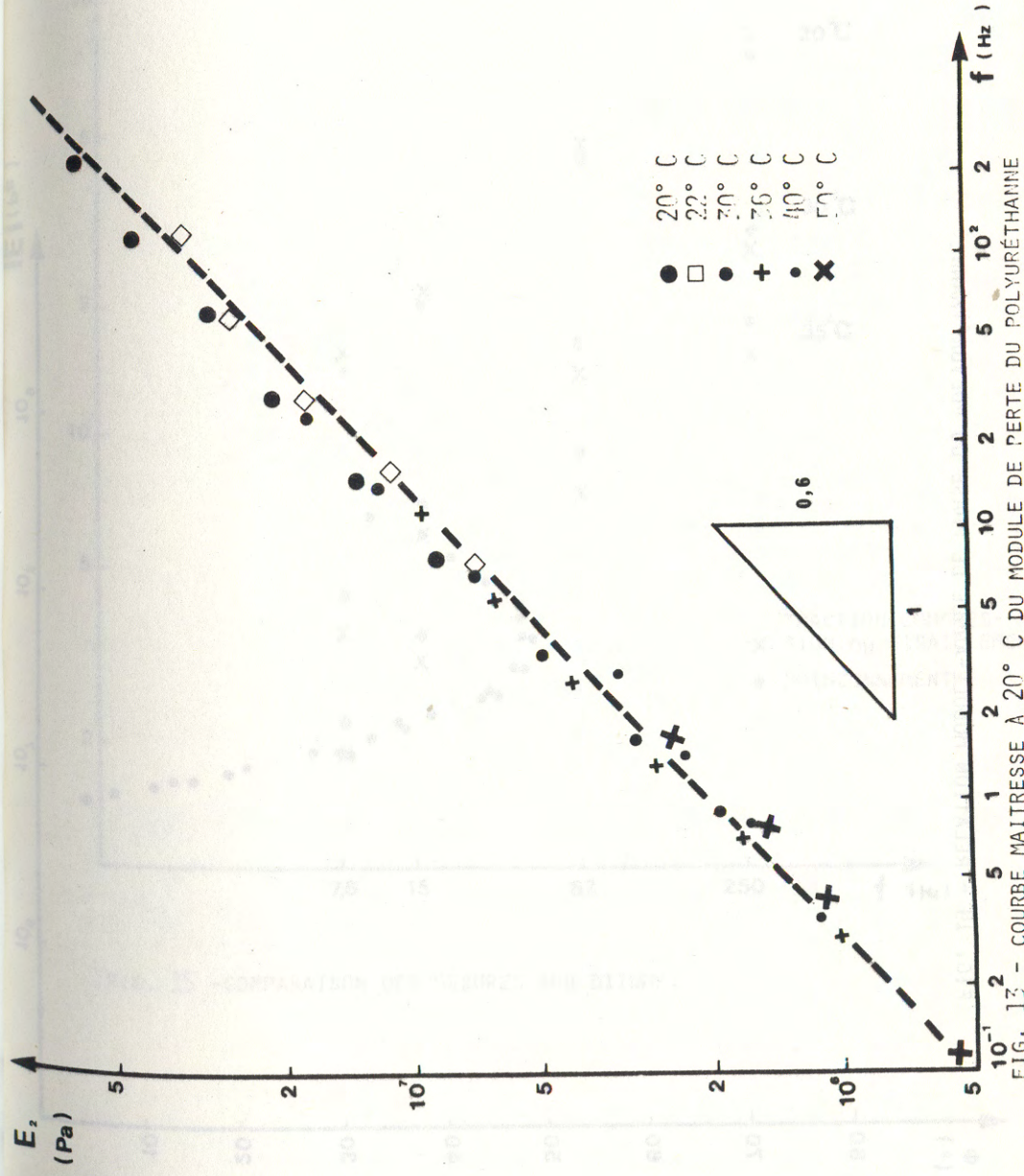


FIG. 13 - COURBE MAITRESSE A 20° C DU MODULE DE PERTE DU POLYURÉTHANE

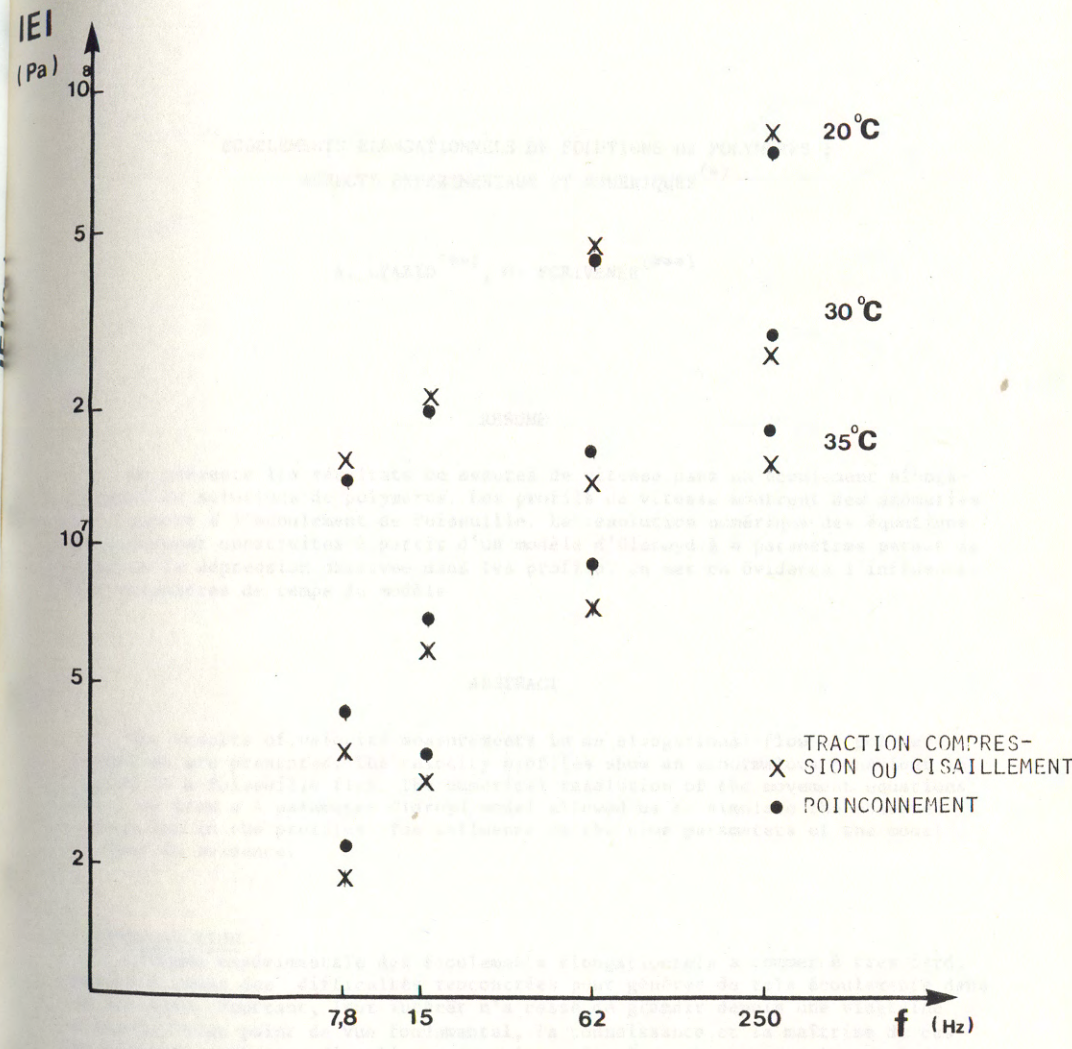
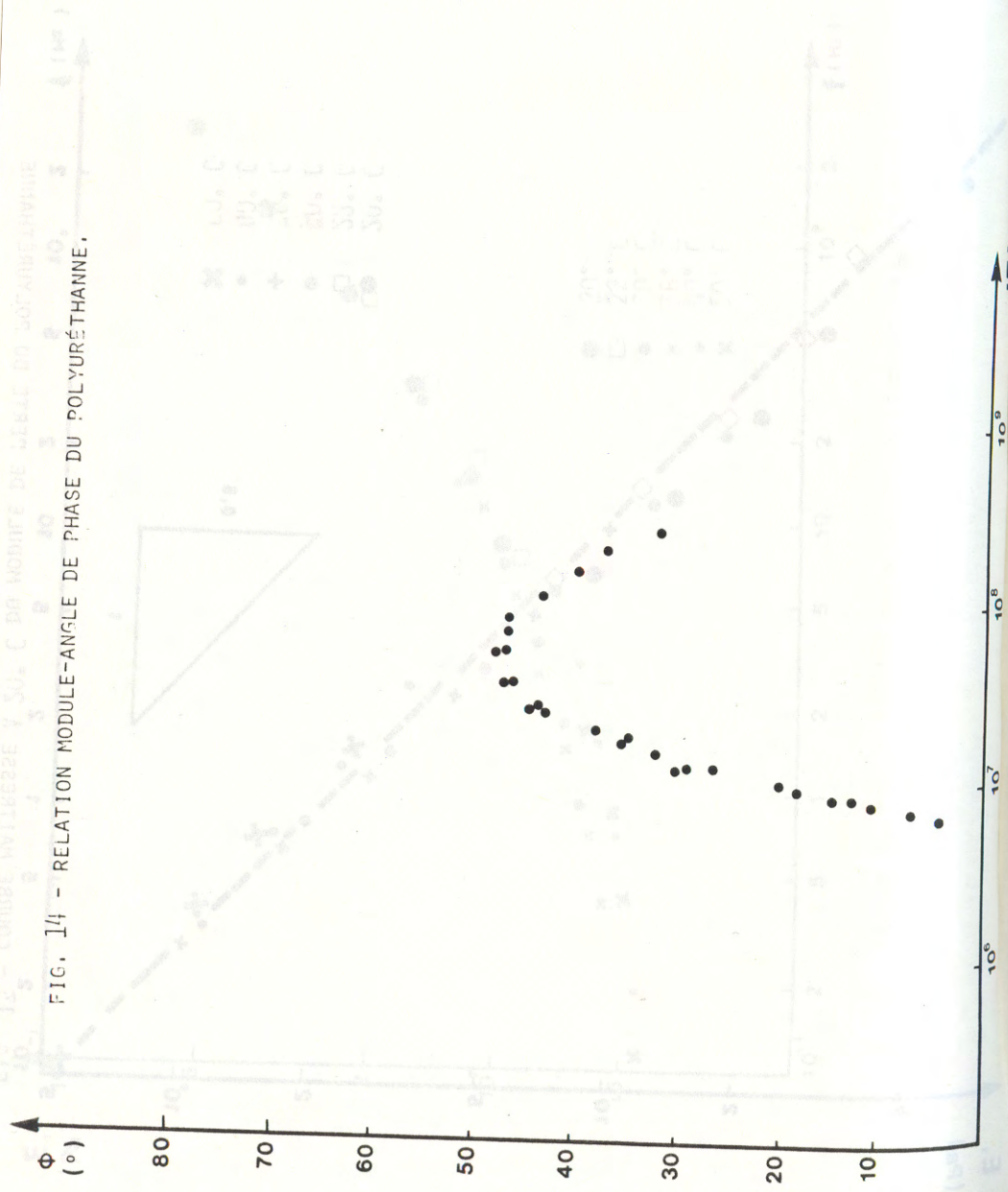


FIG. 15 - COMPARAISON DES MESURES SUR BITUME.

ÉCOULEMENTS ÉLONGATIONNELS DE SOLUTIONS DE POLYMERES :
ASPECTS EXPERIMENTAUX ET NUMERIQUES (*)

A. LYAZID (**), O. SCRIVENER (***)

RESUME

On présente les résultats de mesures de vitesse dans un écoulement élongationnel de solutions de polymères. Les profils de vitesse montrent des anomalies par rapport à l'écoulement de Poiseuille. La résolution numérique des équations du mouvement construites à partir d'un modèle d'Oldroyd à 4 paramètres permet de simuler la dépression observée dans les profils. On met en évidence l'influence des paramètres de temps du modèle.

ABSTRACT

The results of velocity measurements in an elongational flow of polymer solutions are presented. The velocity profiles show an abnormalous behaviour in regard to a Poiseuille flow. The numerical resolution of the movement equations built up from a 4 parameter Oldroyd model allowed us to simulate the observed depression in the profiles. The influence of the time parameters of the model is put in evidence.

1. INTRODUCTION

L'étude expérimentale des écoulements élongationnels a commencé très tardivement à cause des difficultés rencontrées pour générer de tels écoulements dans la pratique. Pourtant, leur intérêt n'a cessé de grandir depuis une vingtaine d'années. D'un point de vue fondamental, la connaissance et la maîtrise de ces écoulements permettra d'expliquer certains phénomènes physiques tels que la réduction de frottement et la suppression de la cavitation dans les écoulements turbulents (1, 2, 3). Ces écoulements élongationnels occupent une place importante dans les processus de transformation industriels tels que l'injection et le

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 2 juin 1983.

(**) Ecole d'Application des Hauts Polymères, Strasbourg.

(***) Institut de Mécanique des Fluides, ERA CNRS 0594, Strasbourg.

moulage des matières plastiques, l'extrusion des polymères ainsi que la récupération assistée du pétrole. Les résultats obtenus par différents auteurs sont nombreux et variés en raison de la diversité et de la complexité des géométries utilisées (4, 5, 6). Mais, on pense que ces phénomènes sont liés aux effets de la viscosité élongationnelle dont l'importance dépend de l'élasticité du matériau utilisé.

Notre contribution dans ce domaine consiste à étudier les conditions d'extension des macromolécules flexibles dans un écoulement élongationnel sous l'effet d'un gradient élongationnel. Cette étude se fait en collaboration avec le Laboratoire d'Optique Moléculaire de l'Université de Metz (7, 8). Elle a pour but de rapprocher et de comparer les résultats hydrodynamiques et optiques obtenus dans des conditions expérimentales identiques.

2. DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Pour générer l'écoulement élongationnel, nous avons utilisé une cellule en croix comportant deux entrées et deux sorties (Fig. 1). Le liquide y pénètre par deux canaux situés face à face et s'échappe par les deux autres canaux orientés à 90°. L'ensemble est parfaitement symétrique. La largeur de chaque canal est de 2 mm et la profondeur est de 30 mm. La caractéristique essentielle de cette géométrie est le point de stagnation situé au centre de la cellule. A partir de ce point, on arrive à soumettre le fluide à une forte accélération dans les canaux de sortie.

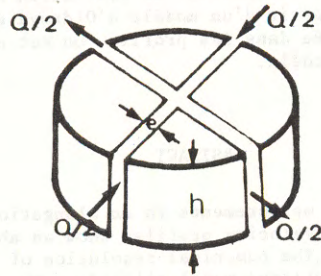


Fig. 1 : Dispositif expérimental : cellule en "croix"

Pour étudier cet écoulement, différents travaux ont montré la nécessité d'utiliser des polymères de haut poids moléculaire, de préférence linéaires et flexibles. Pour effectuer les essais, nous avons choisi le polyoxide d'éthylène WSR 301 commercial dont le poids moléculaire se situe aux environs de 4×10^6 . Le choix de ce polymère a été motivé par sa solubilité dans l'eau et par la grande quantité de produit nécessaire pour réaliser les expériences. Celles-ci ont été effectuées avec des solutions dont les concentrations varient de 0.05 à 0.4 % en p./vol. Des études viscosimétriques sur le Polyox WSR 301 ont été réalisées avec un viscosimètre tournant RV3 de HAAKE* (Fig. 2). L'évolution de ces courbes montre, de façon marquée, le caractère pseudoplastique du Polyox.

* Mesures effectuées au Centre de Recherche sur les Macromolécules de Strasbourg dans le Laboratoire de M. GALOT que nous remercions vivement.

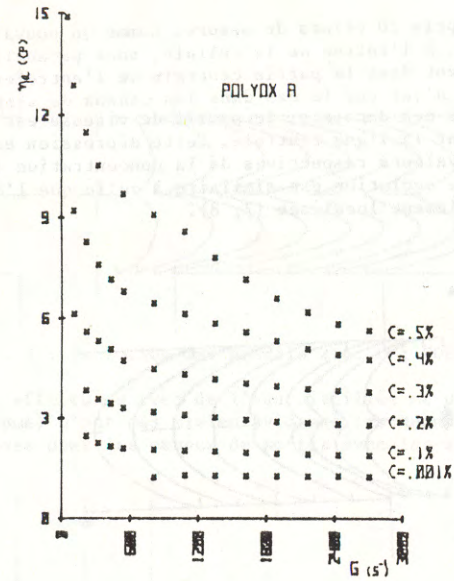


Fig. 2 : Evolution de la viscosité du Polyox WSR 301 à $\theta = 20^\circ C$

3. DETERMINATION DU CHAMP DES VITESSES

Le champ de vitesses a été déterminé dans des conditions d'écoulement correspondant au régime laminaire. Le nombre de Reynolds maximum, calculé à partir de la viscosité du solvant, ne dépasse pas 200. La technique de mesure utilisée est l'anémométrie laser. Pour effectuer les mesures on a utilisé comme traceurs des particules dont le diamètre est inférieur au μm . Pour chaque profil

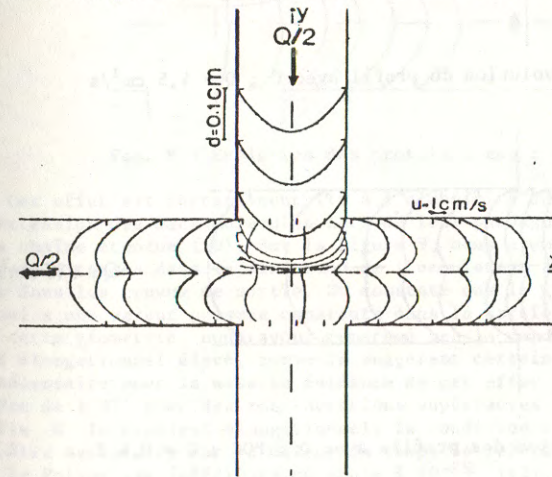


Fig. 3 : Profils de vitesse à l'entrée et à la sortie
 $C = 0,4 \%$ $Q = 2,6 \text{ cm}^3/\text{s}$

de vitesses nous avons pris 20 points de mesure. Comme on pouvait s'y attendre, les profils de vitesses, à l'entrée de la cellule, sont paraboliques avec une tendance à l'aplatissement dans la partie centrale de l'entrefer au voisinage du point de stagnation. Ce n'est pas le cas dans les canaux de sortie comme le montre la figure 3. Dans ces derniers, le profil de vitesse est caractérisé par une dépression située sur la ligne centrale. Cette dépression est plus ou moins importante suivant les valeurs respectives de la concentration (fig. 4, 5) et du débit (fig. 6, 7). Cette évolution est similaire à celle que l'on observe dans la biréfringence d'écoulement localisée (7, 8).

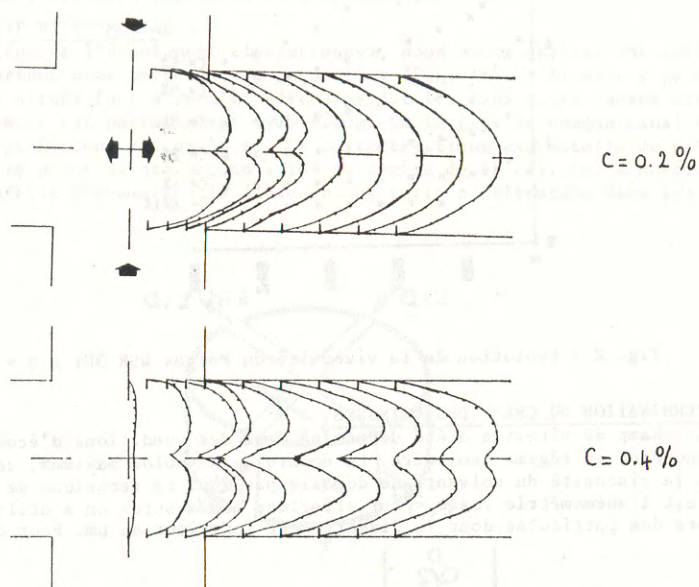


Fig. 4 et 5 : Evolution du profil avec C ; $Q = 4,5 \text{ cm}^3/\text{s}$

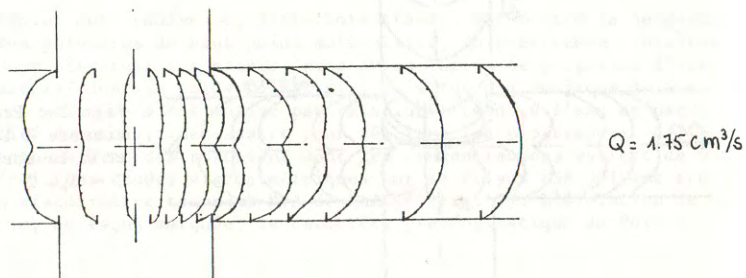


Fig. 6 : Evolution des profils avec Q ; POE ; $C = 0,4 \%$

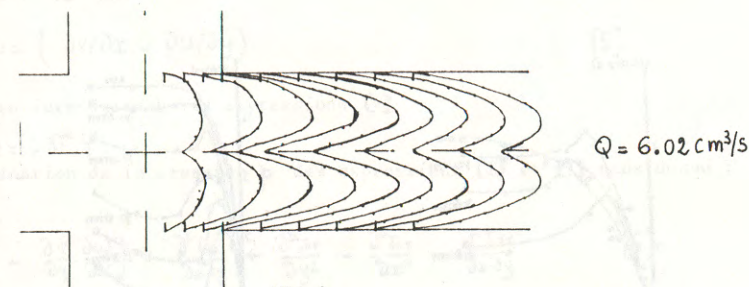


Fig. 7 : Evolution des profils avec Q ; POE ; $C = 0,4 \%$

Des mesures effectuées avec de l'eau distillée et une solution de glycérine-eau (60 % en volume) n'ont pas mis en évidence les anomalies observées dans les profils de vitesses dans les canaux de sortie avec les solutions de polymères (Fig. 8).

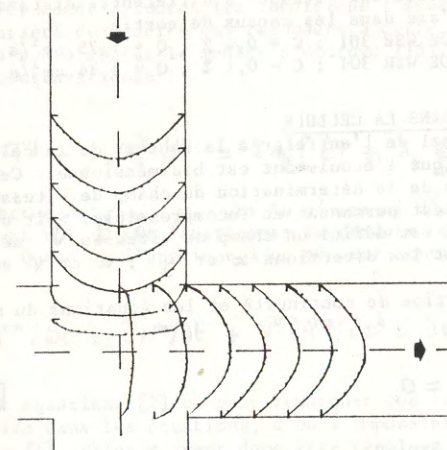


Fig. 8 : Evolution des profils ; eau ; $Q = 2,03 \text{ cm}^3/\text{s}$

Cet effet est certainement lié à l'élasticité du polymère et correspondrait à l'extension des macromolécules lors de leur passage de l'état de pelote à celui de la chaîne étendue (10). Sur la figure 9, nous avons représenté l'évolution du champ de vitesses dans la direction de l'écoulement à différentes distances de l'axe dans les canaux de sortie. On constate que le gradient de vitesses longitudinal a une valeur presque constante dans la partie centrale de l'écoulement. Dans cette géométrie, nous avons remarqué que la condition d'obtention d'un gradient élongationnel élevé, comme le suggèrent certains auteurs (11, 12), n'était pas nécessaire pour la mise en évidence de cet effet (ce gradient peut être de l'ordre de 1 S^{-1} pour des concentrations supérieures à 0.2 %). En effet, si on appelle G le gradient élongationnel, la condition d'extension $Gt > 1$ ne peut plus être satisfaite car la valeur du temps de relaxation τ (de Zimm ou Rouse) pour le Polyox est inférieure ou égale à 10^{-2} S (13). De plus, cet effet atteint son maximum au niveau des coins de sortie. Outre le temps de résidence de la macromolécule (12), ce phénomène est le résultat de la combinaison du gradient longitudinal et du gradient transversal (14, 11).

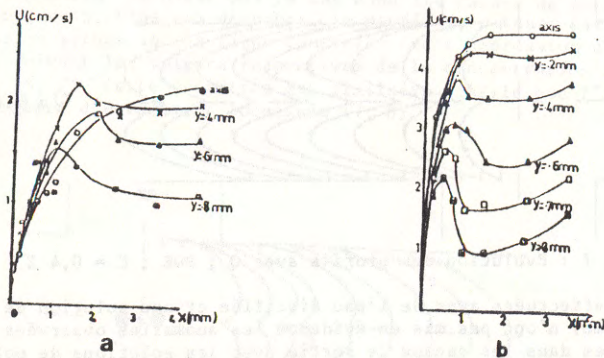


Fig. 9 : Evolution des vitesses à différentes distances de l'axe dans les canaux de sortie.
 a) POE WSR 301 ; C = 0,4 % ; Q = 1,75 cm³/s
 b) POE WSR 301 ; C = 0,1 % ; Q = 3,34 cm³/s

4. EQUATIONS DU MOUVEMENT DANS LA CELLULE

Le rapport adimensionnel de l'entrefer à la hauteur de la cellule étant très faible, on peut considérer que l'écoulement est bidimensionnel. Cette hypothèse a été largement vérifiée lors de la détermination du champ de vitesses. On suppose, en outre, que l'écoulement est permanent et incompressible. Soit un repère cartésien (o, x, y) dans lequel est défini un champ de vitesses \vec{V} de composantes u et v suivant respectivement les directions x et y ; u et v sont des fonctions de x et de y.

Dans ce repère, l'équation de continuité et les équations du mouvement s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad [1]$$

et

$$\rho [u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad [2]$$

$$\rho [u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}] = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad [3]$$

T_{ij} représente les composantes du tenseur des contraintes visqueuses et p une pression isotrope. Ces 2 grandeurs sont liées par la relation :

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

τ_{ij} étant le tenseur total des contraintes et δ_{ij} le tenseur métrique relatif au système de coordonnées choisi.

Pour résoudre les équations [1], [2] et [3] on introduit la fonction de courant ψ et la vorticité ω .

Comme l'écoulement est bidimensionnel, on définit la fonction de courant ψ par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [4]$$

et la vorticité ω par :

$$\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad [5]$$

ou encore, en introduisant les expressions [4]

$$\omega = - \nabla^2 \psi$$

L'élimination de la pression p des expressions [2] et [3] nous donne :

$$\rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 T_{xx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_{yy}}{\partial x \partial y} \quad [6]$$

Pour parachever la résolution des équations [5] et [6], il faut introduire une loi de comportement et les conditions aux limites.

5. LOIS CONSTITUTIVES

La cellule en croix que nous avons utilisée pour effectuer nos expériences est class e dans les géométries dites complexes. De ce fait, le choix d'un modèle rhéologique répondant à toutes les conditions d'écoulement est impératif. Il existe une variété de modèles qui répondent à cette nécessité. Pour diverses raisons, nous avons choisi le modèle d'Oldroyd (15)   4 paramètres qui s'écrit, en notation contravariante :

$$T^{ij} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} T^{ij} + \mu_0 T_k^k \dot{E}^{ij} = 2 \eta_0 [\dot{E}^{ij} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \dot{E}^{ij}] \quad [7]$$

ou les paramètres λ_1 , λ_2 , μ_0 ont la dimension d'un temps et η_0 est la viscosité à gradient nul. $\partial/\partial t$ représente la dérivée convectée introduite par Oldroyd (16). Quand on l'applique à un tenseur contravariant A^{mn} , elle s'écrit :

$$\partial A^{mn} / \partial t = \partial A^{mn} / \partial t + v^k \partial A^{mn} / \partial x^k - \partial v^m / \partial x^k A^{kn} - \partial v^n / \partial x^k A^{mk}$$

Dans les équations [7] on peut remarquer que les contraintes apparaissent de façon implicite dans les équations, d'où l'impossibilité de les introduire dans les équations [6]. Elles doivent donc être r solv es séparément.

6. CONDITIONS AUX LIMITES

Il faut imposer des conditions aux limites pour la vitesse et pour les contraintes.

Le long des parois solides on impose la condition d'adhérence. On suppose que les canaux d'entrée et de sortie sont suffisamment longs pour que le profil de vitesse soit parabolique.

Sur les lignes centrales on considère que la contrainte tangentielle T_{xy} est nulle. A partir, des équations [7] et tenant compte des conditions aux limites sur la vitesse, on en déduit des conditions aux limites variables pour les contraintes sur les parois solides. L'existence de la symétrie nous permet d'utiliser les conditions de Neumann pour les composantes des contraintes normales T_{xx} et T_{yy} .

L'équation [6] combinée avec les équations [5] et [7] ne possède pas de solution analytique. Nous avons donc opté pour une simulation numérique.

7. SIMULATION NUMERIQUE

L'étude expérimentale a permis de mettre en évidence le comportement inattendu des profils de vitesses dans les canaux de sortie pour des solutions de polymères. Cet effet dépend fortement de la concentration et du débit. Cependant, ces 2 paramètres s'avèrent insuffisants pour expliquer l'effet observé expérimentalement. Ces anomalies sont certainement liées à l'élasticité du polymère utilisé. Afin de cerner les paramètres élastiques responsables de ce phénomène, nous avons entrepris le calcul numérique de l'écoulement. Nous avons utilisé une méthode aux différences finies pour la discrétisation des équations [5], [6] et [7]. Ce choix a été motivé, d'une part, par la géométrie de la cellule. D'autre part, cette méthode numérique a été expérimentée avec succès par WALTERS et collaborateurs (17, 18) dans des géométries similaires et sur le même modèle rhéologique (15, 16).

Les équations aux différences obtenues, après discrétisation, sont résolues par une méthode itérative (19). Pour la résolution des équations [5] et [6], nous avons utilisé une méthode de surrelaxation successive alors que pour les équations [7], nous avons appliqué une méthode de sous-relaxation successive. Pour ce calcul, nous avons suivi le schéma proposé par PERERA (20). L'ensemble du calcul consiste en trois étapes. Chaque étape correspond à 2 boucles d'itération comportant chacune un test de convergence.

Initialement, on calcule les conditions aux limites pour la fonction de courant ψ et la vorticité ω . Ensuite, on résout l'équation [5] en ψ jusqu'à convergence. Les valeurs obtenues sont injectées dans le système d'équations [7] dont la résolution fournit les valeurs des composantes T_{ij} . Ces dernières valeurs ainsi que celles de ψ sont introduites dans l'équation [6] pour obtenir les valeurs de ω . Chaque étape de calcul comporte 2 tests de convergence : par exemple, pour ψ , si on appelle k le nombre d'itérations, le premier test de convergence est donné par :

$$|\psi^{(k+1)} - \psi^{(k)}| < \epsilon, \quad \epsilon \text{ étant la tolérance choisie.}$$

Si ce test est satisfait, la solution obtenue, notée $\psi^{(m)}$, est lissée de la manière suivante :

$$\psi^{(m)} = \alpha \psi^{(m-1)} + (1-\alpha) \psi^{(m)} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

De la même manière, on teste les valeurs des composantes T_{ij} ainsi que la vorticité ω . Si le deuxième test de convergence n'est pas satisfait pour l'une des trois boucles, on recommence le cycle d'itérations.

Le calcul a été effectué sur le quart de la cellule avec un pas de maillage de 1/10, la matrice totale du maillage étant de 50 x 40.

La simulation numérique a été effectuée avec les valeurs réelles des paramètres obtenues à partir de résultats expérimentaux.

Les résultats présentés ci-dessus ont été obtenus pour les valeurs des paramètres suivantes :

$$\eta_0 = 0.5 \text{ poise}, \quad \lambda_1 = 0.06 \text{ s}, \quad \lambda_2 = 0.01 \text{ s}, \quad \mu_0 = 0.05 \text{ s}, \quad Q = 1.2 \text{ cm}^3/\text{s}$$

La figure 10 montre l'évolution des profils de vitesses dans le canal de sortie pour un écoulement non newtonien (en trait continu) et pour un écoulement newtonien (en tirés). Dans le cas non newtonien, on voit apparaître une dépression du profil de vitesse comparable à celle observée expérimentalement.

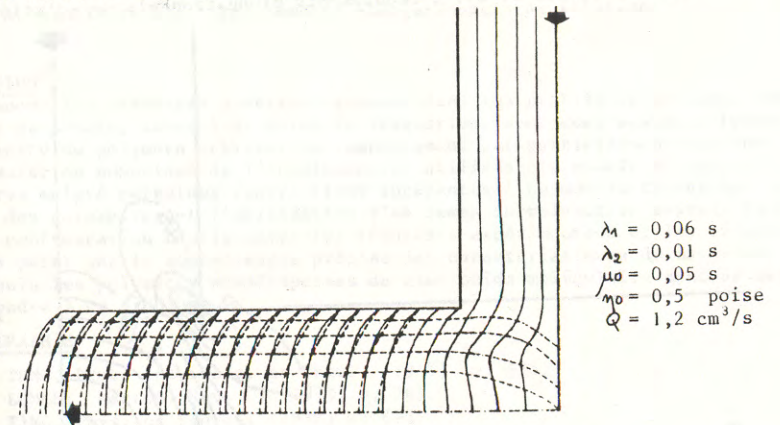


Fig. 10 : Simulation numérique du profil des vitesses

Sur les figures 11 et 12, on a représenté les lignes isocontraintes. Dans le cas des contraintes tangentielles le maximum est obtenu au coin de la cellule et le long de la paroi rigide. La première différence des contraintes normales fait apparaître une zone de compression dans la zone centrale du canal d'entrée qui augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche du point de stagnation alors que la zone centrale du canal de sortie est le siège d'une élongation.

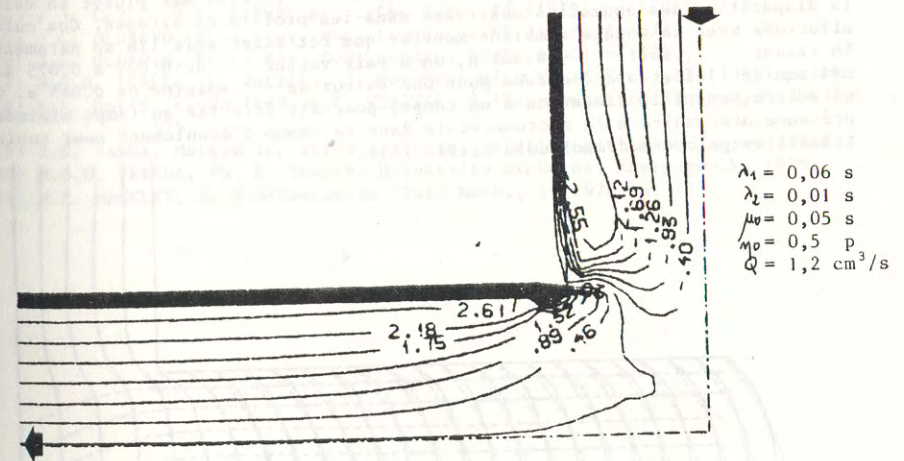


Fig. 11 : Profil des contraintes T_{xy}

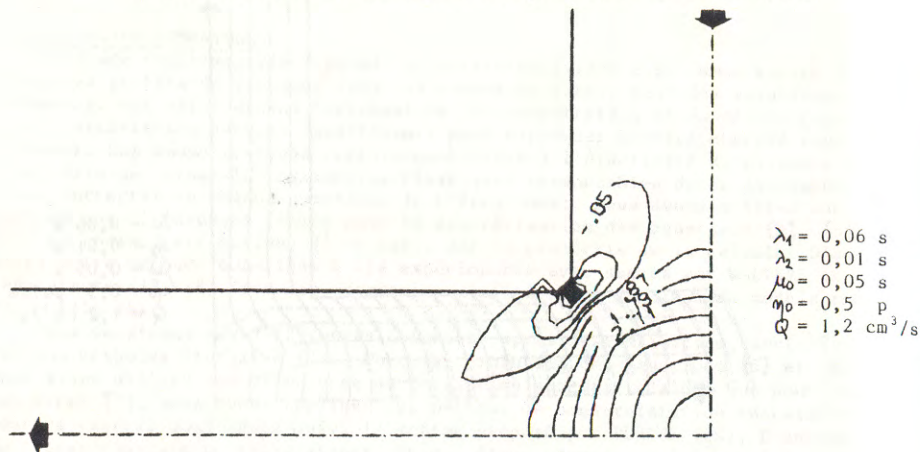


Fig. 12 : Différence des contraintes normales $\tau_{xx} - \tau_{yy}$

Le temps caractéristique d'un polymère, représenté par dans le modèle décrit par les équations (7), joue un rôle fondamental dans les phénomènes de transition de la macromolécule de l'état de pelote à celui de la macromolécule étendue. Nous avons fait varier ce paramètre en maintenant le débit constant. On devrait donc observer une évolution de l'effet comme le prévoit l'expérience. Or, la figure 13 correspondant à la valeur de de 0.09 met plutôt en évidence la disparition des anomalies observées dans les profils de vitesse. Ces calculs effectués avec ce modèle semblent montrer que cet effet soit lié au paramètre. En fixant , soit = 0.006 s, on a fait varier de 0.025 à 0.075 s. Le maximum de l'effet a été obtenu pour une valeur de voisine de 0.045 s. Ce paramètre, ayant la dimension d'un temps, pourrait être lié au temps minimum de présence nécessaire à la macromolécule dans le champ d'écoulement pour subir la transition pelote-macromolécule étirée (21).

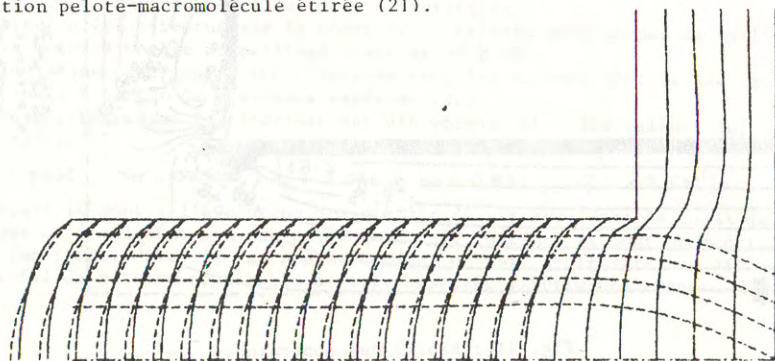


Fig. 13 : Simulation numérique du profil des vitesses
 $\lambda_1 = 0,09$ s ; $\lambda_2 = 0,015$ s ; $\mu_0 = 0,0335$ s ;
 $\eta_0 = 0,5$ p ; $Q = 1,2$ cm\$^3\$/s

8. CONCLUSION

Les anomalies observées expérimentalement dans les profils de vitesse, dans les canaux de sortie, au-delà du point de stagnation, sont dues essentiellement à l'élasticité du polymère utilisé. Ce comportement est partiellement confirmé par la simulation numérique de l'écoulement en utilisant le modèle d'Oldroyd à 4 paramètres malgré certaines restrictions inhérentes à ce modèle telles que la constance des paramètres et l'utilisation d'un temps de relaxation unique. Toutefois, une confrontation réelle entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques passe par la connaissance précise des caractéristiques du matériau étudié. Seuls les polymères monodispersés de haut poids moléculaire sont en mesure de répondre à ce problème.

9. BIBLIOGRAPHIE

- (1) B.A. TOMS, Proc. Int. Cong. on Rheol. (1948) p. 135.
- (2) J.L. LUMLEY, Macrom. Rev., 7 (1973) p. 263.
- (3) R.Y. TING, Phys. of Fluids, (1978) p. 898.
- (4) P.J. CABLE, D.V. BOGER, A.I. ChE. J., 24 (1978) p. 870.
- (5) D.G. CROWLEY, F.C. FRANK, M.R. MACKLEY, R.G. STEPHENSON, J. Polym. Sci., A2, 14 (1976) p. 1111.
- (6) D.R. OLIVER, R. BRAGG, Rheol. Acta, 13 (1974) p. 830.
- (7) R. CRESSELY, R. HOCQUART, A. LYAZID, O. SCRIVENER, 26th Int. Symp. IUPAC, Mackromainz, 2 (1979) p. 999.
- (8) R. CRESSELY, A. LYAZID, O. SCRIVENER, C.R. Journées d'Orsay, Publ. ENSTA, (1979) p. 155.
- (9) A. LYAZID, O. SCRIVENER, R. TEITGEN, 8 Int. Congr. on Rheol., Naples 1980, "Rheology", 2 (1981) p. 141.
- (10) P.G. DE GENNES, Chem. Phys., 60 (1974) p. 5030.
- (11) A. PETERLIN, Polym. Letters, 4 (1966) p. 287.
- (12) F.C. FRANK, M.R. MACKLEY, J. Polym. Sci, A2, 14 (1976) p. 1121.
- (13) M.C. KOHN, J. of Polym. Sci., 21 (1973) p. 2339.
- (14) P.J. CABLE, D.V. BOGER, A. I. Ch. E.J., 25 (1979) p. 152.
- (15) J.G. OLDROYD, Proc. Roy. Soc. London, A245 (1958) p. 278.
- (16) J.G. OLDROYD, Proc. Roy. Soc. London, A200 (1950) p. 523.
- (17) M.G.N. PERERA, K. WALTERS, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2 (1977) p. 49.
- (18) A.R. DAVIS, K. WALTERS, M.F. WEBSTER, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 4 (1979) p. 325.
- (19) R.S. VARGA, Matrix Iterative Analysis, Printice-Hall, New Jersey (1962).
- (20) M.G.N. PERERA, Ph. D. Thesis, University of Wales, Aberystwyth, 1976.
- (21) M.R. MACKLEY, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 4 (1978) p. 111.

La Rhéologie Expérimentale dans l'industrie laitière (x)

par J.C. ROTH (xx)

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique théorique et appliquée - NANCY

RESUME

Dans cet exposé nous montrons comment se posent les problèmes de caractérisation de comportement de certains produits alimentaires au cours de leur fabrication.

Cette démarche originale, à partir d'un problème de l'industrie fromagère, établit l'importance et la nécessité de plus en plus grande de déterminer les propriétés rhéologiques de certains produits et sous produits dans cette industrie afin d'aborder et réaliser leurs transformations et traitements dans les meilleurs conditions économiques.

Nous nous sommes intéressés successivement au comportement des gels lactés (caillé) en étudiant l'origine de la dispersion de poids de fromages au cours de leur fabrication industrielle, à l'étude de la variation de la viscosité apparente des lactosérums concentrés et enfin aux poudres de lait, autre moyen de stockage, soumises à des essais de compression.

ABSTRACT

The problems of the characterisation of the behaviour of some food products during their making are set in this paper.

This original approach, starting from a problem of the cheese industry, proves how it is essential to determine the rheological properties of some products and by-products of this industry in order to meet and carry out their processings and transformations in the best economical conditions.

We took an interest successively in the behaviour of lacteol gels (curds) by the study of the cause of the dispersion of the weight of cheeses during their industrial working, in the study of the variation of the apparent viscosity of condensed lactoserums and lastly in the compression of milk powders, another means of stocking.

(x) Communication faite au G.F.R. le 2 juin 1983

(xx) Exposé de J.C. ROTH sur travaux communs : J.C. ROTH L.E.M.T.A. et

J. HARDY - J.P. RAMET L.S.T.A.

I - INTRODUCTION

Cet exposé fait le point sur le travail réalisé dans l'opération scientifique "Rhéologie et propriétés physiques des aliments" du Groupement d'Intérêt Scientifique (G.I.S.), "Recherches en Industries Alimentaires" associant le L.E.M.T.A. (Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée) au L.S.T.A. (Laboratoire de Sciences et Technologie des Aliments).

Nous allons évoquer successivement à partir d'un problème industriel les différents résultats obtenus dans l'étude et la compréhension du comportement des différents produits et sous produits de l'industrie fromagère (fromages à pâte molle).

Afin de bien situer les différents travaux dans leur contexte et déterminer leur importance dans la filière lait, il est indispensable de décrire la filière lait - fromage.

2 - L'INDUSTRIE DU LAIT (Descriptif sommaire)

Nous nous contenterons dans un tableau succinct de faire apparaître les traitements et transformations qui, à partir du lait, permettent d'obtenir la poudre de lait, le fromage et le lactosérum.

A partir du	L A I T		
On peut obtenir par	TRAITEMENTS Thermiques et mécaniques	ECREMAGE	COAGULATION
Du	- lait Pasteurisé - lait Stérilisé - lait Concentré - lait en Poudre	- Crème - Lait Ecrémé	- Fromage - Lactosérum

Les différentes études ont été effectuées en relation avec la Société Lorraine Lait (pour le lait en poudre et le lactosérum) et la Société Saint Hubert Industrie Laitière (pour la fabrication des Fromages à pâte molle, Usine de BLAMONT).

Dans ces Etablissements lorrains, 100 000 à 200 000 litres de lait sont traités quotidiennement dans chaque usine selon les saisons et 80 % du volume de lait traité dans l'industrie fromagère se retrouve sous forme de lactosérum non utilisable directement.

Le Lactosérum ne pouvant être éliminé à cause de la pollution créée, il est important de le stocker avant de le transformer.

En général le stockage sous forme de lactosérum concentré facilite sa conservation avant transformation.

La valorisation des lactosérums concentrés dans les industries alimentaires nécessite la connaissance des propriétés physiques et rhéologiques en fonction des teneurs variables en matière grasse, en matière sèche, en acidité...

Il est donc intéressant d'en étudier le comportement rhéologique, ce qui est essentiel quant au dimensionnement des conduites, pompes, etc... au cours du transport et des traitements des différents concentrés de lactosérum et de lait.

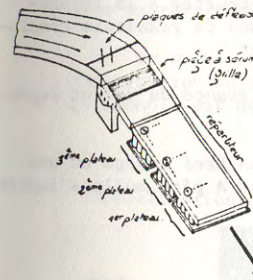
Avant d'aborder cette étude, nous allons consacrer une première partie de notre exposé au problème industriel suivant :

Comment réduire dans une chaîne de fabrication de fromage à pâte molle la dispersion de part et d'autre du poids moyen des fromages ?

3 - PROBLEME INDUSTRIEL

Le problème posé par la laiterie Saint Hubert concerne l'étude des écarts de poids entre les fromages dans un même répartiteur au cours d'une fabrication.

Il nous a été demandé de nous intéresser au problème de répartition du caillé (coagulum) au cours du moulage des fromages, opération manuelle effectuée dans un répartiteur contenant 60 moules. (fig. 1)



A partir de la distribution de chaque pesée sur un plateau d'origine, il est utile de reconstituer la distribution continue du caillé. Par interpolation entre chaque donnée, on trace les courbes de même poids (par exemple tous les 5g), l'ensemble de celles-ci établissant la "cartographie" de la distribution (de la même façon que l'on établit les courbes de niveau d'un relief).

Exemples de cartographie d'une distribution de chaque produit fabriqué à Blamont (cf 3 pages suivantes).

□ 50%	○ 50%	○ 65%
505 501 507 506 291	296 294 292 291 293	304 308 290 293 299
505 505 291 297 500	283 281 283 282 282	283 285 282 284 296
509 500 504 304 297	210 210 216 219 212	211 207 213 219 213
509 509 505 507 295	216 203 206 214 209	212 206 208 207 215
297 509 502 504 501	211 211 209 215 203	500 505 504 204 297
319 317 319 308 299	210 205 203 203 205	215 211 213 201 202
290 307 300 315 292	254 257 254 254 215	213 201 212 210 213
285 503 291 501 294	259 256 253 261 210	261 251 255 256 277
278 270 274 276 283	246 247 242 240 251	263 247 243 242 255
297 311 282 293 280	253 252 252 250 263	247 241 234 244 256
299 295 314 297 290	260 251 246 257 247	266 253 250 247 250
305 302 304 509 298	264 270 262 254 271	271 263 263 269 274

Fig 1 : Exemple de cartographie d'une distribution

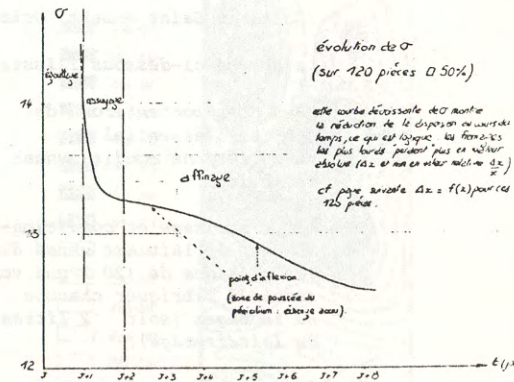
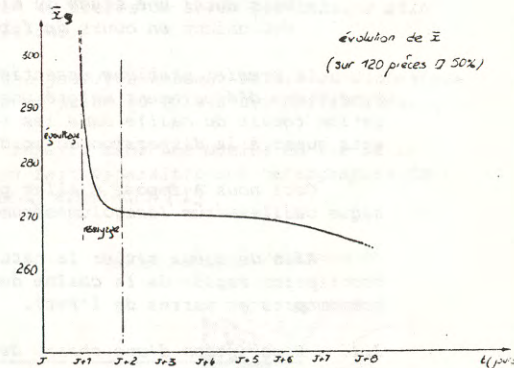


Fig 2 : Diagramme d'évolution du poids du Caillé → fromage

Une étude précise sur l'ensemble de la production de l'Usine de BLAMONT (Laiterie Saint Hubert) en un mois a mis en évidence un écart de 8,5 % en poids (représentant 1,5 Kg) entre répartiteurs contenant chacun 60 moules.

De même dans un même répartiteur la cartographie montre une distribution importante des poids entre chaque moule de l'ordre de 8 %.

Le problème abordé en premier lieu a été la technique de moulage, le moulage étant effectué sous sérum (technique spécifique).

Il faut assurer un meilleur écoulement du mélange diphasique caillé-sérum en vue d'une amélioration de la répartition du caillé dans les 60 moules d'un répartiteur.

Cette étude a permis, en dehors de la modification de la goulotte de déversage afin d'améliorer l'écoulement du caillé et sa récupération totale, de constater que l'écoulement du mélange caillé-sérum :

- impliquait non seulement une étude de Mécanique des Fluides pour un milieu diphasique,
- mais aussi une étude du milieu diphasique dont les propriétés physiques évoluaient en cours de fabrication.

Le premier problème essentiellement de Mécanique des Fluides concernant les conditions d'écoulement malgré une amélioration sensible apportée à la récupération totale du caillé dans les répartiteurs, n'a pas donné de résultats concluants quant à la dispersion du poids des différents fromages.

Ceci nous a imposé d'aller plus avant dans la connaissance du milieu diphasique caillé-sérum (coagulum-sérum).

Afin de mieux situer la nature du problème évoqué, un bref aperçu et une description rapide de la chaîne de fabrication d'un fromage à pâte molle s'impose (camemberts et carrés de l'Est).

3.1. - Description d'une chaîne de fabrication de fromages

(Laiterie Saint Hubert, Usine de BLAMONT)

Le schéma ci-dessous illustre la chaîne de fabrication.

Nous nous contenterons de décrire l'essentiel des manipulations conditionnant le moulage.

Après stockage et conditionnement, le lait est versé dans les bassines de 120 l qui vont servir à fabriquer chacune 60 fromages (soit 2 litres de lait/fromage).

En cours de remplissage pour assurer la coagulation il y a emprésurage (présure de veau, ou protéase ou bactéries lactiques) en début de chaîne.

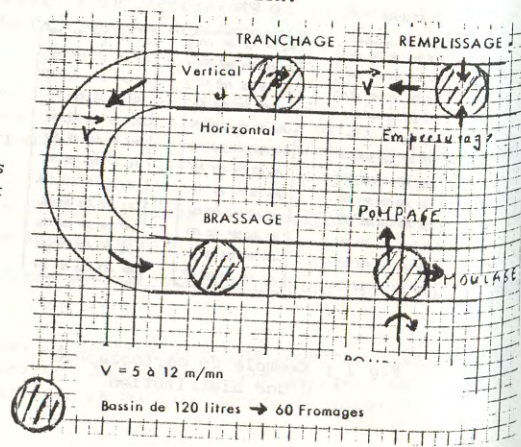


Fig.3 : Chaîne de fabrication

La vitesse de déplacement des bassines est réglée dans une plage de vitesse de 5 à 12 m/mn en fonction de la fabrication (camembert, carré de l'Est) et des caractéristiques du lait.

La coagulation effectuée, la bassine arrive à hauteur du poste de tranchage (horizontal et vertical) destiné à la formation de petits cubes de 15 mm de côté de l'ensemble du gel contenu dans la bassine.

A partir du tranchage intervient le phénomène de synérèse c'est à dire l'exsudation du sérum, ce dernier s'échappe des surfaces d'échanges occasionnées par le tranchage.

Alors a lieu le brassage assurant l'accélération du processus de séparation des deux phases :

- solide : grain de caillé (coagulum) (17 à 19 Kg par bassine)
- liquide : lactosérum ou sérum (80 à 85 litres par bassine).

Le pompage permet d'éliminer environ 40 litres de sérum par bassine afin d'assurer le moulage dans de bonnes conditions.

Les bassines sont renversées dans une goulotte amenant le milieu diphasique dans un répartiteur de 60 moules. C'est à ce stade qu'il y a des difficultés.

Le caillé en présence de sérum est réparti dans les moules en vue de la constitution du fromage. Cette répartition fait apparaître une cartographie dont un exemple est donné (fig 4 & fig 5), selon BINNINGER [2]

Exemple de distribution (du 11/05/87)

Visualisation de la distribution

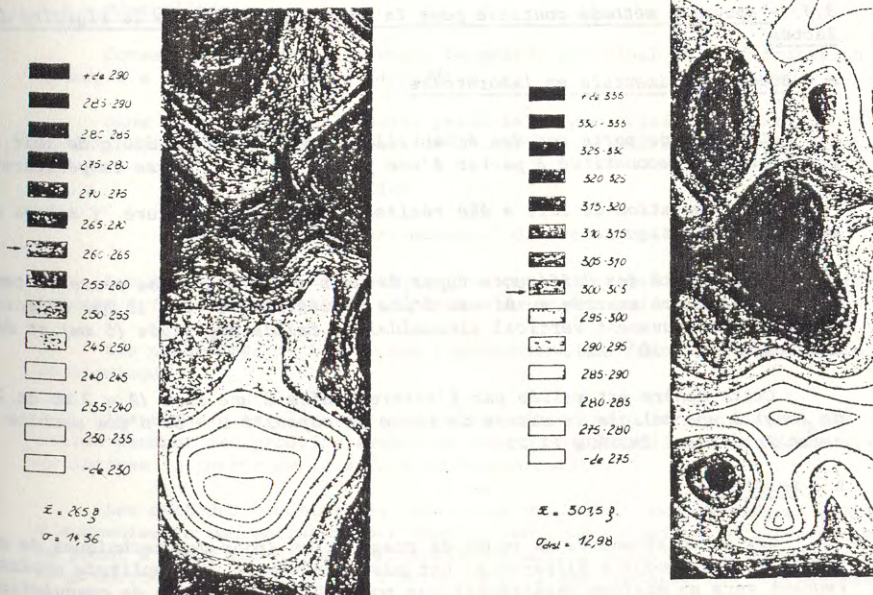


Fig. 4

Fig. 5

Après moulage et égouttage lent (1 jour) du sérum restant, le démoulage est suivi du salage et de la pulvérisation du pénicillium.

Il reste alors à attendre 9 à 10 jours, période d'affinage, avant de passer à l'emballage.

Il est évident qu'un aspect important de la répartition en poids se situe au moment du moulage comme le montre la cartographie d'une répartition. Cependant l'imperfection de cette opération mécanique qui influence la répartition du caillé dans chaque moule ne suffit pas à elle seule pour expliquer les variations de masse du caillé d'un répartiteur à l'autre.

3.2 - Résultats

Une première solution a été de modifier le profil de la goulotte ainsi que la technique de déversement. Les améliorations constatées ont été évidentes mais non suffisantes car le paramètre humain est trop important dans ce processus; aussi faut-il conserver ces améliorations tout en préparant une automatisation de ces gestes.

Pour progresser il est donc indispensable de connaître la qualité (c'est à dire les propriétés physiques et rhéologiques) du caillé, de maîtriser la synergie au moment du tranchage pour contrôler le moulage.

La stabilisation du volume de sérum, la suppression si possible du brassage (qui crée des pertes en poids par apparition de fines particules de caillé) faciliteraient l'automatisation de la fabrication et la régularité du moulage.

Le contrôle de la qualité des gels lactés en cours de coagulation a fait l'objet d'une étude en laboratoire J.P. RAMET (L.S.T.A.).

Ce travail est à l'origine de la mise au point d'un capteur dont l'utilisation devient une nécessité dans la mise en place de l'automatisation souhaitée.

3.3. - Nouvelle méthode continue pour la mesure objective de la rigidité des gels lactés

a - Etude expérimentale en laboratoire

Cette étude porte sur des échantillons de substrat de 300 g de lait écrémé préalablement reconstitué à partir d'une poudre de lait "Basse température".

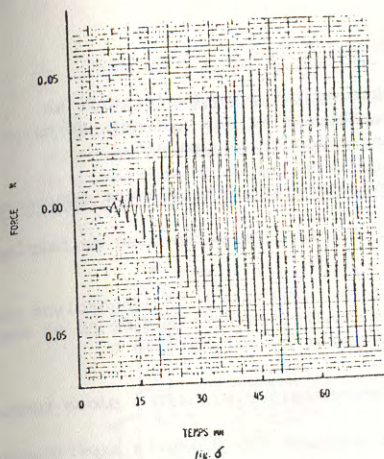
La coagulation du lait a été réalisée à l'aide de présure (autres essais par voie enzymatique).

La rigidité des différents types de gels a été suivie au cours du temps en mesurant la force exercée au niveau d'une petite sphère ($\varnothing = 15$ mm) en acier chromé soumise à un mouvement vertical sinusoïdal de faible amplitude (5 mm) et de basse fréquence ($8,3 \cdot 10^{-3}$ Hz).

Cette sphère est reliée par l'intermédiaire d'une tige ($\varnothing = 2$ mm et 200 mm de long) à une cellule de mesure de force de capacité 0 - 5N d'une machine universelle d'essai INSTRON 11 22.

b - Résultats

Les enregistrements en cours de coagulation (pour des techniques de coagulation et des produits différents) ont mis en évidence une amplitude croissante tendant vers un maximum caractéristique pour chaque opération de coagulation.



Evolution de la rigidité d'un gel obtenu à l'aide de la protéase neutre *Bacillus subtilis*

Conditions de coagulation :
Substrat : lait écrémé reconstitué ; matière sèche : 10 % ; CaCl_2 2 H_2O : 10 g/100 kg lait ; température : 35° C ; protéase : 6 g/100 kg lait.

Fig 6 d'après J.P. RAMET [4]

Ce système constitue un procédé non destructif de contrôle et de détermination de la coagulation.

La mise au point d'un capteur industriel pouvant être intégré sur une ligne mécanisée de fabrication, est en cours.

4 - COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DES LACTOSERUMS CONCENTRÉS

4.1 - Généralités

Comme nous venons de le voir, le résidu principal de la fabrication des fromages à pâte molle est le lactosérum.

Dans ce produit appelé aussi petit lait (peu utilisable directement et dont l'élimination directe est impossible à cause de la pollution créée), contient :

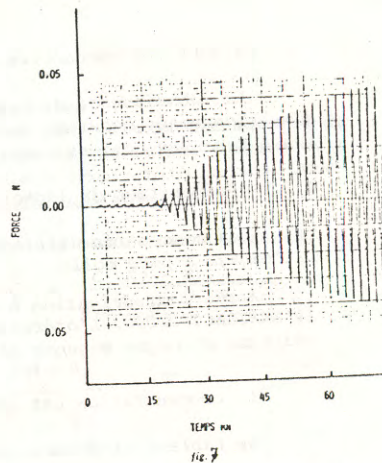
- des matières solides
- des protéines
- du lactose "non assimilable" directement.

Les techniques de séparations physiques ainsi que l'hydrolyse du lactose tendent à faire du lactosérum un produit de beaucoup d'avenir.

Les concentrés de lactosérum représentent une formule indispensable pour le stockage.

Les techniques classiques de concentration par ultrafiltration, par évaporation donnent des produits instables présentant des risques de cristallisation du lactose (à partir de 18 à 20 % de concentration).

Les méthodes biochimiques (hydrolyse du lactose et protéolyse) permettent d'augmenter la concentration par évaporation. Une technique particulière mise au point à NANCY permet des concentrations allant jusqu'à 73 % de matière sèche, ce produit est autostable car l'activité de l'eau restante est pratiquement réduite à néant.



Evolution de la rigidité d'un gel obtenu par acidification lactique

Conditions de coagulation :
Substrat : lait écrémé reconstitué ; matière sèche : 15 % ; CaCl_2 2 H_2O : 10 g/100 kg lait ; température : 35° C ; levains lactiques thermophiles : 10 kg/100 kg lait.

Fig. 7 d'après J.P. RAMET [4]

Ce sont ces concentrés qui ont été étudiés.

La connaissance de leur comportement rhéologique permet d'établir un dimensionnement cohérent des circuits, des échangeurs et des éléments de puissance dans les chaînes industrielles de valorisation de ce produit.

4.2. - Préparation du lactosérum hydrolysé concentré et partiellement déminéralisé

Les concentrés utilisés sont produits à partir d'un sérum issu de fabrication de fromage à pâte molle.

Après pasteurisation à 75 °C, l'enzyme libre utilisée pour l'hydrolyse est le MAXILACT 2.000. L'opération menée dans des conditions précises de pH et avec addition d'enzyme moyenne permet d'obtenir un sérum hydrolysé à 90 %.

La concentration est effectuée par un concentrateur WIEGAND à plots tombants.

Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques des produits expérimentés.

Dénomination	Matière sèche	Protéine % de M.S.	Hydrolyse	pH	Déminéralisation %
L S H 90 : 50	72,91	12,94	90	5,7	50
L S H 90 : 90	66,38	13,21	90	6,8	90
L S H 90 : 25	66,35	13,73	90	5,9	25

Ce tableau donne simplement un aperçu, les résultats obtenus font intervenir de nombreux produits avec des caractéristiques voisines au fur et à mesure des fabrications nouvelles.

4.3. - Etude expérimentale

Avant de nous consacrer à l'étude de la variation de la viscosité des différents concentrés, nous avons testé le lactosérum, matière première de nos travaux

Ce produit à un comportement newtonien comme l'indiquent les courbes expérimentales (fig 8 & 9) du lactosérum L S 90 - 90 à 40°C.

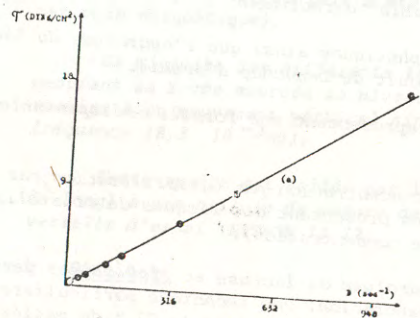


Fig. 8 : Tension de cisaillement en fonction du gradient de vitesse.

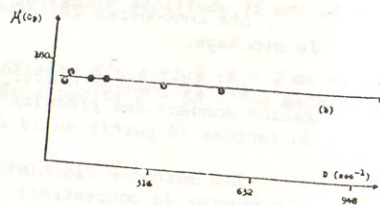


Fig. 9 : variation de la viscosité en fonction du gradient de vitesse.

a - Description du viscosimètre utilisé

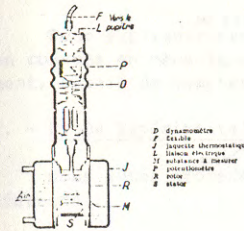
Il s'agit d'un viscosimètre rotatif à cylindres ROTOVISKO. Le couple imposé au cylindre intérieur pour assurer une vitesse de rotation constante Ω permet la détermination de la contrainte tangentielle de cisaillement caractéristique du produit étudié à température donnée, donc caractéristique de sa viscosité ou de sa viscosité apparente.

C = Couple mesure sur l'appareil

$$\mu = \frac{\tau}{D} = \frac{C (R_2 - R_1)}{4\pi^2 h R_1^3 N}$$

$$D = \frac{2\pi N R_1}{R_2 - R_1} \quad (S-1)$$

$$\Omega = 2\pi N \text{ vitesse de rotation}$$



b - Comportement des lactosérums concentrés

Les différents concentrés étudiés ont fait apparaître une nette variation de la viscosité des lactosérums concentrés en fonction de la teneur en matière sèche (M.S.).

Le tableau ci-dessous établit l'évolution de la viscosité à 20 ° et à 30 °C en fonction de l'augmentation de la teneur en matière sèche (M.S.).

à 20 °C	% en M.S.	Rapport : $\frac{\text{protéine}}{\text{M.S.}}$
3 500 Cp	64,25	26,5
2 500 Cp	62,52	30
2 200 Cp	60,79	33
2 000 Cp	59,06	36,5

à 30 °C	% en M.S.	Rapport : $\frac{\text{protéine}}{\text{M.S.}}$
5 000 Cp	69,45	18
3 000 Cp	67,72	20,8
2 500 Cp	66,0	23,8

Variation de la VISCOSITE apparente pour un gradient de vitesse D (s⁻¹) tendant vers zéro.

Les figures 10, 11, 12 et 13 représentent les courbes de variation de la viscosité apparente en centipoise (Cp) en fonction de la température et du gradient de vitesse. Résultats obtenus par BALBUENA [1]

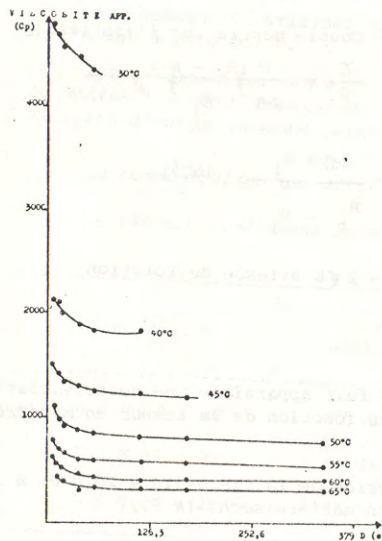


fig 10 : Lactosérum concentré
MS = 69,45 % Protéine / MS = 18%

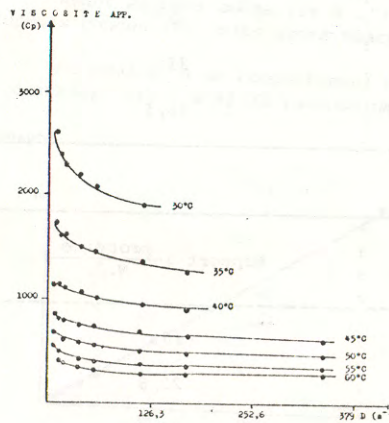


fig 12 : Lactosérum concentré
MS = 66 % Protéine / MS = 23,6%

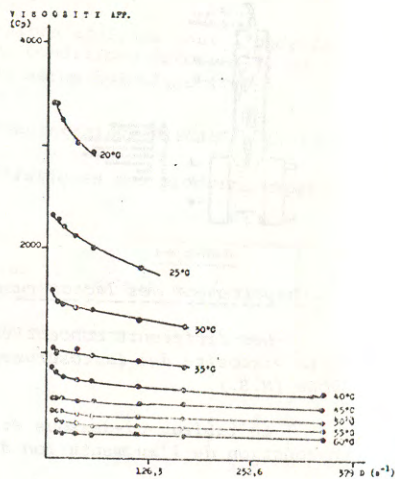


fig 11 : Lactosérum concentré
MS = 64,25 % Protéine / MS = 26,8%

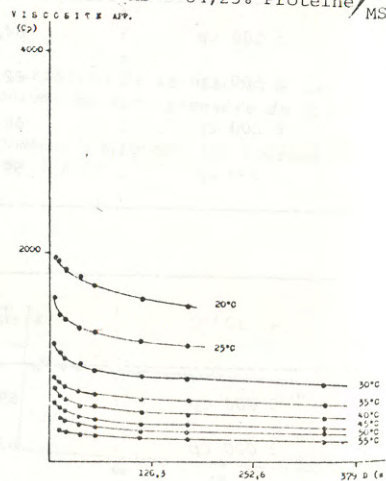


fig 13 : Lactosérum concentré
MS = 59,06 % Protéine / MS = 36,5%

5 - RHEOLOGIE DES POUDRES ALIMENTAIRES

5.1. - Introduction

Les poudres alimentaires représentent, en général, une très grande variété de poudre, ou de matériaux pulvérulents qui diffèrent selon leur composition chimique et leurs caractéristiques physiques.

L'écoulement de ces matériaux pose de nombreux problèmes dans l'industrie par leur prise en masse ou leur collage au cours de leur utilisation ou stockage.

Pour expliquer ces mécanismes, nous appliquons les techniques expérimentales bien connues en Mécanique des sols pulvérulents : machine triaxiale, boîte de cisaillement, essais de compression, etc...

5.2. - Etude Expérimentale

Nous avons procédé à deux types d'essais liés à deux séries d'appareils différents :

- Les machines du génie Civil : essai de compression triaxiale, essai de cisaillement, etc...
- Un dispositif INGSTRON du G.I.S. des Industries Alimentaires avec les équipements de compression, de pénétration, etc...

Les courbes expérimentales exprimant l'effort en fonction du déplacement présentent les aspects suivants :

Dans la plupart des essais de compression triaxiale l'enregistrement présente une courbe continue et régulière. (fig. 14) alors que pour certaines poudres le tracé est discontinu (fig. 15) faisant apparaître cependant une courbe enveloppe régulière comparable à la courbe (fig. 14) (cette poudre présente l'effet slip stick voir paragraphe suivant).

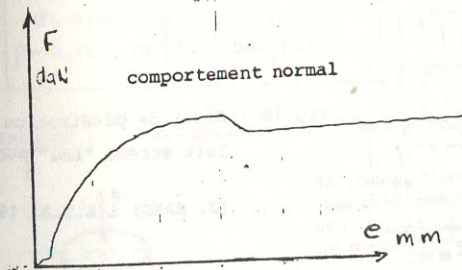


fig. 14 : Poudre de lait écrémé "High"

$\sigma_3 = 0,5$ bar pression hydrostatique imposée

$\rho = 0,67$ g/cm³ avant compression

F = Effort de compression pour un déplacement imposé.

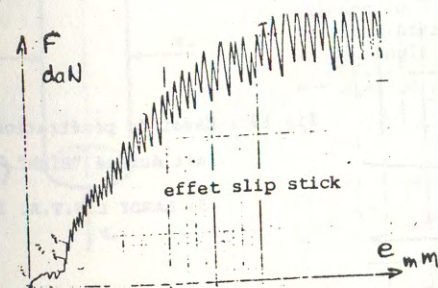


fig. 15 : Poudre de lait écrémé "Low"

Humidité moyenne 4,75 %

Température de sortie tour 96° C

$\sigma_3 = 0,5$ bar

$\rho = 0,56$ g/cm³ avant compression

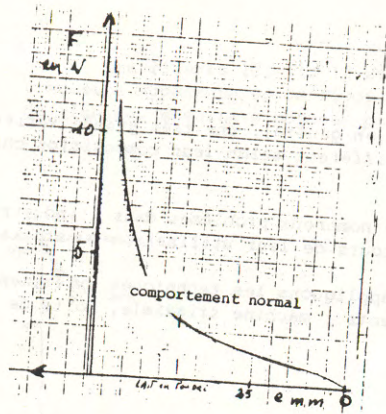


fig 16 : Compression simple

Lait écrémé "High"

$$\rho = 0,67 \text{ g/cm}^3$$

Dans le cas d'une compression simple utilisant des pistons cylindriques de 12 mm d'épaisseur, de diamètre 10, 20, 30 et 40 mm les différents enregistrements présentent pour des matériaux identiques les mêmes effets que ceux mis en évidence au cours de la compression triaxiale: fig. 16 et 17

Ces comportements sont confirmés lors des essais de pénétration (tige d'acier de 6 mm de diamètre): fig. 18 et 19

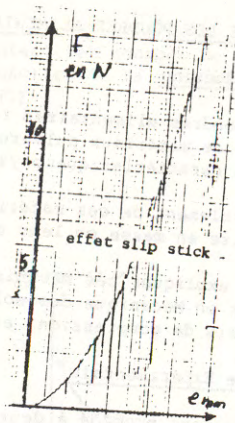


fig 17 : Compression simple

Lait écrémé "Low"

$$\rho = 0,42 \text{ g/cm}^3$$

fig 18 : Essai de pénétration

lait écrémé "Low" $\rho = 0,42 \text{ g/cm}^3$

(J. HARDY L.S.T.A. 1981)

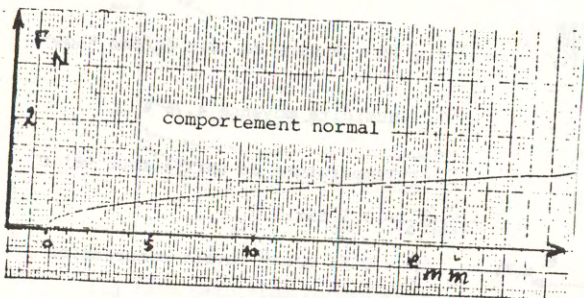
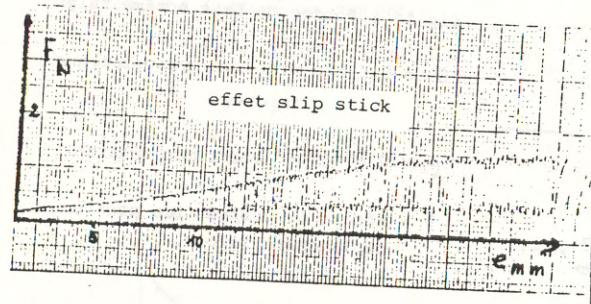


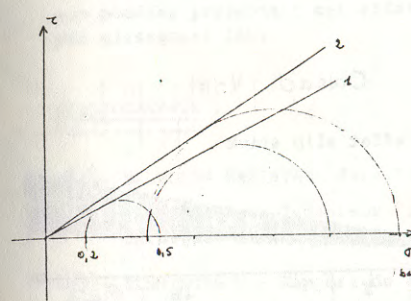
fig 19 : Essai de pénétration

lait écrémé "High" $\rho = 0,67 \text{ g/cm}^3$

(J; HARDY L.S.T.A. 1981)

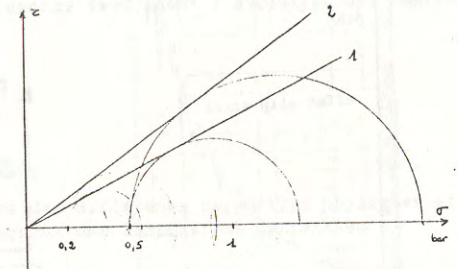
Nous constatons pour les poudres de lait, que la théorie de Coulomb est vérifiée puisque la cohésion est nulle (fig. 20).

Dans le cas du matériaux présentant les enregistrements discontinus c'est-à-dire à effet slip stick nous effectuons une approximation justifiée par les résultats obtenus.



Lait en poudre Lorraine Lait

σ_3 Imposé	0,2 bar (1)	0,5 bar (2)
σ_1 avec $\rho = 0,49 \text{ g/cm}^3$	0,58 bar	1,39 bar
σ_1 avec $\rho = 0,46 \text{ g/cm}^3$	0,73 bar	1,73 bar

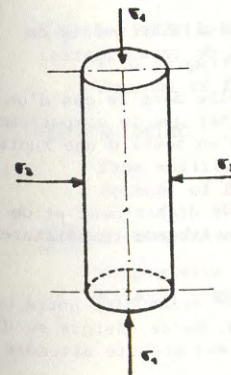


Lait en poudre "médium"

σ_3 Imposé	0,2 bar (1)	0,5 bar (2)
σ_1 avec $\rho = 0,56 \text{ g/cm}^3$	0,56 bar	1,32 bar
σ_1 avec $\rho = 0,56 \text{ g/cm}^3$	0,73 bar	1,93 bar

fig. 20

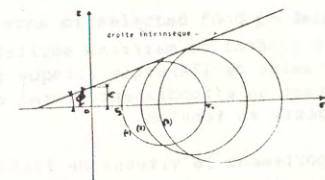
REMARQUE : Caractérisation de l'Essai Triaxial



Au cours d'un essai triaxial l'échantillon cylindrique soumis à une pression hydrostatique σ_3 constante subit une compression axiale croissante jusqu'à la valeur σ_1 au moment de la rupture.

Les cercles de MOHR des contraintes pour plusieurs valeurs de σ_3 différentes permettent d'établir la "droite intrinsèque" caractérisée par "C" cohésion et ϕ angle de frottement interne.

"C" est nul pour les milieux pulvérulents.



L'étude comparative entre l'essai de compression et l'essai de pénétration démontre que la surface sollicitée en compression (dans le domaine d'étude) n'intervient pas dans le comportement de la poudre testée.

A titre d'exemple vous trouverez ci-dessous des courbes d'enregistrement de cacao solubilisé du commerce sollicité dans les mêmes conditions: fig. 21 et 22

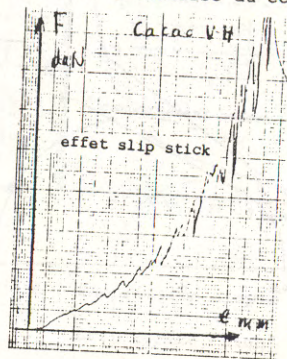


fig. 21

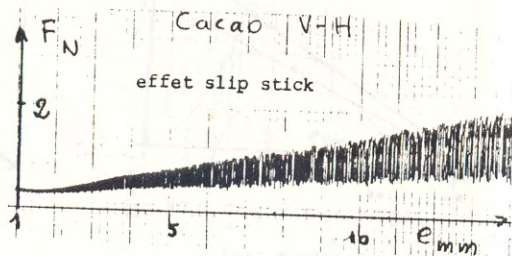


fig. 22

5.3. - Nature des produits testés.

Si l'essentiel des résultats présentés concerne la poudre de lait et de cacao, nous nous sommes intéressés également aux poudres de cellulose, au talc, à certains mélanges : poudre de lait et sel, etc...

Les paramètres physiques comme : l'humidité, la température ; ou chimiques comme la composition et teneur en matière grasse des poudres de lait ne suffisent pas à apporter des explications et à justifier les différents comportements mis en évidence.

Aussi avons nous entrepris des travaux en morphométrie pour mieux cerner l'influence de la granulométrie. Ces travaux sont actuellement en cours.

5.4. - Effet Slip Stick

Par analogie avec les sols pulvérulents, nous avons exploité le modèle de Coulomb pour traduire le comportement des poudres de lait et de cacao testés.

Cette loi de comportement montre que la cohésion est nulle dans le cas d'un essai triaxial pour ces matériaux ; il faut toutefois constater que le comportement élastoplastique sous faible contrainte s'accompagne à partir d'un seuil d'une rupture fragile. Ce phénomène est appelé : effet slip stick.

Ce phénomène se rencontre dans d'autres essais, essais de déchirement et de clivage, dans l'étude du pelage des bitumes (à haute vitesse et basse température) etc...

Il s'agit en général du matériau sollicité en compression comme dans notre cas, ce matériau emmagasine de l'énergie lorsque la force augmente, cette énergie se dissipe en occasionnant un effondrement brutal du matériau, il faut ensuite attendre que le piston remonte en tension.

Dans ce comportement la vitesse de fissuration (ou de rupture) est nettement plus élevée que la vitesse d'avancement du piston. Cette décohérence peut s'expliquer par le fait que pour deux surfaces adjacentes les points de contact entre

particules sont peu nombreux, les contraintes développées peuvent y être extrêmement élevées, voire suffisamment fortes pour que les grains se rompent.

Cette perturbation dans le façonnage des produits alimentaires utilisant des mélanges de poudres en tant que matière première est une gêne dans la conception des matériels et dans le contrôle de la qualité des produits.

Aussi développons-nous des recherches pour supprimer cet effet en additionnant aux poudres présentant cet effet des éléments favorisant l'évolution des contraintes par glissement lent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] - BALBUENA BATISTA - Juin 1983 - NANCY
Thèse Docteur Ingénieur "Influence des différents paramètres physiques et chimiques sur le comportement visqueux des lactosérums concentrés"
- [2] - BINNINGER H - Rapport de Stage 1981 - E.N.S.E.M.
Etude sur le moulage.
- [3] - DE ALBA GONZALEZ - Octobre 1982 - NANCY
Thèse Docteur Ingénieur "Contribution à l'étude des propriétés thermiques des fromages à pâte molle".
- [4] - J.P. RAMET ; E. ELMAYDA ; F. WEBER
"Nouvelle méthode continue pour la mesure objective de la rigidité des gels lactés".
Le lait (1982), 62, 511 - 520
- [5] - A. HANNA - Mars 1983 - NANCY
Thèse Docteur 3^e cycle "Influence de différents paramètres technologiques sur la viscosité du fromage fondu pendant le traitement thermique".
- [6] - A. KRAMER et A.S. SZCZESNIAK (1973)
Texture measurements of foods
D. Reidel Publish Company U.S.A.
- [7] - M. PELEG ; C.H. MANNHEIM and N. PASSY
Flow properties of some food powders.
Journal of food science. Vol. 38 (1973)
- [8] - M. PELEG
Flow ability of food powders and methods for its evaluation.
Journal of food process and engineering 1, (1977), 303 - 328
- [9] - R. MOREYRA and M. PELEG
Compressive deformation patterns of selected food powders. Journal of food science - Vol . 45 (1980)

- [10] - G. RAMOND et M. PASTOR
Mesure de la cohésion des bitumes par pelage
Cahiers du G.F.R. Rhéologie des couches minces - colloque du 6 décembre 1979
(Tome 5, N° 5)
- [11] - J. BIAREZ
Thèse de Docteur ès Sciences 1962 - GRENOBLE
Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents.
- [12] - J.P. GIROUD
Tassement et stabilité des fondations superficielles - Tome 1
P.U. GRENOBLE 1973

LES COLLOQUES ANNUELS DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE (1965-1985)

- 1 - Rhéologie des systèmes à 2 phases 1965
- 2 - Aspects énergétiques en Rhéologie 1966
- 3 - Progrès récents des effets du 2eme ordre 1967
- 4 - Rhéologie en relation avec la structure 1968
- 5 - Comportements mécaniques des matériaux composites 1969
- 6 - Influence de la température et de la pression sur les
comportements rhéologiques 1970
- 6bis - Rhéologie et hydrotechnique 1971
- 7 - Viscoplasticité 1973
- 8 - Rhéologie des bétons 1974
- 9 - Phénomènes de surface 1975
- 10 - Influence de la température sur les comportements rhéologiques 1976
- 11 - Rhéologie des corps mous 1977
- 12 - Thermodynamique des comportements rhéologiques 1978
- 13 - Aspects rhéologiques de la mécanique de la rupture 1979
- 14 - Rhéologie des couches minces 1980
- 15 - Comportements rhéologiques et structure des matériaux 1981
- 16 - Applications de la Rhéologie aux problèmes de fabrication
industrielle 1982
- 17 - Comportements rhéologiques sous sollicitations rapides
ou dynamiques 1983
- 18 - Méthodes et appareils de mesures rhéologiques 1984
- 19 - Rhéologie des matériaux anisotropes 1985
- 20 - Vingt ans de Groupe Français de Rhéologie : Progrès récents

Renseignements sur conditions d'obtention des Comptes-Rendus :

Cahiers du groupe Français de Rhéologie

CERAM
ENPC

La Courtine B.P. 105

93194 NOISY LE GRAND CEDEX
France

tel : (1) 43 04 40 98

LE GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

La Rhéologie est la science des DEFORMATIONS et ECOULEMENTS de la matière, des CONTRAINTES qui en résultent et des EFFORTS qu'il faut lui appliquer pour les obtenir.

UNIVERSELLE, on la rencontre dans tous les domaines de l'activité humaine, et ses applications vont de la mise en forme des produits industriels quel qu'en soit le matériau, aux comportements de la matière vivante, en passant par la tenue des pneumatiques ou la durabilité des constructions.

INTERDISCIPLINAIRE, elle fait appel à la MECANIQUE, à la PHYSIQUE, à la CHIMIE, à la BIOLOGIE, qui lui fournissent ses instruments de base, et se montre utile à chacune de ces disciplines.

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF à vocation purement scientifique, fondée en 1964 et régie par la loi de 1901, le GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE a pour OBJECTIFS, de contribuer au DEVELOPPEMENT des études et recherches relatives à la Rhéologie, et de favoriser la DIFFUSION ou le TRANSFERT des progrès accomplis dans ses diverses branches.

Dans ce but, le Groupe Français de Rhéologie

- organise des REUNIONS où les chercheurs et les industriels peuvent présenter et discuter leurs résultats ou leurs préoccupations ;
- entretient des relations avec le COMITE INTERNATIONAL DE RHEOLOGIE et les SOCIETES de RHEOLOGIE d'autres pays ;
- organise un COLLOQUE NATIONAL ANNUEL ;
- édite des CAHIERS consacrés aux exposés scientifiques (une cinquantaine de numéros édités à ce jour), et un BULLETIN consacré aux informations courantes ;
- contribue à la clarification du langage par l'établissement d'un DICTIONNAIRE ;
- etc,...

Cette activité vous intéresse et vous souhaitez devenir membre ou obtenir de plus amples renseignements, écrivez à l'adresse ci-dessous :

GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE
Secrétariat Général

C.E.B.T.P.
12, rue Brancion
75737 PARIS CEDEX 15

Anciens Présidents du G.F.R. :

J. MANDEL (Président fondateur, 1964-1967)
M. JOLY (1967-1970)
B. PERSOZ (1970-1973)
P. HABIB (1973-1976)
R. COURTEL (1976-1979)
C. HUET (1979-1983)

Président actuel : J.D. WEBER (1983-)

Association régie par la loi du 1.7.1901 J.O. du 30.7.1964

CCP PARIS 8045-90 K

LISTE DES MEMBRES COLLECTIFS
DU GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

- A.D.R.I.G.O. - I.N.S.A. Rennes
- A.U.M. SECRETARIAT GENERAL (I.M.T.A.) Paris 5e
- BIBLIOTECA ISTITUTO DI SCIENZA E TECHNICA DELLE COSTRUZIONI (SCAMBIA PUBBLICAZIONI) POLITECNICO Milano - Italia
- BIBLIOTHEQUE DU CENTRE DU CNRS Paris 20e
- BIBLIOTHEQUE DE L'ECOLE SUPERIEURE DE PHYSIQUE CHIMIE Paris 5e
- THE BRITISH LIBRARY - LENDING DIVISION Wetherby - Great Britain
- THE BRITISH LIBRARY - SCIENCE REF. LIB. HOLBORN London - Great Britain
- CANADA INSTITUTE FOR S.T.I. Ottawa - Canada
- C.E.B.T.P. Paris 15e
- CEDOCAR Paris Armées
- CENTRE CULTUREL CANADIEN Paris 7e
- CENTRE D'ESSAIS DES TABACS S.E.I.T.A. Fleury les Aubrays
- CENTRE D'ETUDES DES MATIERES PLASTIQUES Paris 17e
- CENTRE RECHERCHE CELLULOSE DU PIN Talence
- CENTRE DE RECHERCHES ESSO STANDARD S.A.F. Mont Saint Aignan
- CERAM de l'ENPC Noisy le Grand
- C.E.R.I.L.H. Paris 15e
- C.E.R.I.B. Epernon
- C.E.T.I.M. Senlis
- C.D.F. CHIMIE S.A. - CENTRE DE RECHERCHE DE MAZINGARDE Bully les Mines
- C.N.A.M. Paris 3e
- CNRS BIBLIOTHEQUE CENTRALE Marseille 9e
- C.T.B.A. Paris 12e
- C.T.T.B. Clamart
- DEUTSCHE RHEOLOGISCHE GESELLSCHAFT Berlin - RFA

- DIRECTION DE LA RECHERCHE DES FEDERATIONS NATIONALES DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS Paris 15e
- DOWELL - SCHLUMBERGER Saint Etienne
- ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLS Chatenay Malabry
- ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET METIERS Paris 13e
- ECOLE POLYTECHNIQUE - LMS Palaiseau
- ECOLE POLYTECHNIQUE Montréal - Canada
- E.N.P.C. Paris 7e
- E.N.S.E.E.I.H. - IMF LABORATOIRE HYDRAULIQUE ET DE MECANIQUE Toulouse
- ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALS Barcelona - Espana
- ETH-BIBLIOTHEK Zürich - Suisse
- I.G.M./ICIST Boucherville Quebec - Canada
- I.N.S.A. Toulouse
- I.N.S.A. Villeurbanne
- INSTITUT DE CHIMIE MACROMOLECULAIRE Praha - Tchécoslovaquie
- INSTITUT FRANCAIS DU PETROLE Rueil Malmaison
- INSTITUT DU GENIE CHIMIQUE Toulouse
- INSITUT DE MATHEMATIQUES Bucarest - Roumanie
- INSTITUT NAUTCHNOI UNIFORMATSII AKADEMII NAUK SSSR Moscou - URSS
- INSTITUT POLYTECHNIQUE DE JASSY Jassy - Roumanie
- INSTITUT RECH. FONDAMENTALE ET TECHN. DE L'ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES Varsovie - Pologne
- INSTITUT SUPERIEUR DES MATERIAUX ET DE LA CONSTRUCTION MECANIQUE Saint Ouen
- INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS Paris 16e
- INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE Belfort
- THE JAPAN SOCIETY OF MECHANICAL ENG. Tokyo - Japan
- LABORATOIRE DE BIORHEOLOGIE ET D'HYDRODYNAMIQUE PHYSIOLOGIQUE Paris 5e
- LABORATOIRE MECANIQUE DES DISCONTINUITES - IUT GENIE CIVIL Egletons
- LABORATOIRE MECANIQUE ET ENERGETIQUE - UNIVERSITE D'ORLEANS Orléans
- LABORATOIRE DE MACANIQUE DES FLUIDES - FACULTE DES SCIENCES Strasbourg

- LABORATOIRE DE MECANIQUE ET DE TECHNOLOGIE Cachan
- LABORATOIRE DE MECANIQUE - UER SCI. FONDAMENTALES ET APPLIQUEES Poitiers
- LABORATOIRE DE MECANIQUE PAUL SABATIER Toulouse
- LABORATOIRE DE PHYSIQUE DES MATERIAUX - UNIVERSITE DU MAINE Le Mans
- L.C.P.C. Paris 15e
- L.E.M.T.A. - ENSEM Nancy
- LIBRARY CHEMICAL ABSTRACTS SERVICE Colombus - USA
- L'OREAL Aulnay
- MESSAGERIES DU LIVRE COMMISSION Paris 6e
- MICHELIN et Cie Clermont-Ferrand
- PAULSTRA Levallois-Perret
- PFC KARDEX West Lafayette - USA
- REGIE RENAULT Rueil Malmaison
- RHEOLOGICA ACTA Darmstadt - RFA
- RHEOMETRICS GMBH Frankfurt - RFA
- RHONE POULENC Venissieux
- SAINT GOBAIN RECHERCHE Aubervilliers
- SECRETARIAT DU G.A.M.A.C. Paris 5e
- SOCIETE NATIONALE DES POUDRES ET EXPLOSIFS Vert le Petit
- STATENS VAG-ÖCH TRAFIKINSTITUT Linköping - Suède
- TOTAL COMPAGNIE FRANCAISE DE RAFFINAGE Paris 16e
- UER SCIENCES EXACTES ET NATURELLES UNIVERSITE DE CLERMONT FERRAND Aubiere
- U.T.I. DIRECTION DE LA RECHERCHE St Remy les Chevreuse
- UNIVERSITÄRSBIBLIOTHEK CLAUSTHAL Clausthal Zellerfeld - RFA
- UNIVERSITÄTSTIBLIOTHEK & TECH. Hannover - RFA

[Faint, illegible text visible through the paper from the reverse side]

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES ET CORPS DE MAXWELL M. BASSOUT-LELLICH	5
DEUX APPLICATIONS DE LA THEORIE DES MILIEUX STANDARDS GENERALISES J.D. WEBER, M. BASSOUT-LELLICH	17
CROISSANCE LENTE DE FISSURE DANS LE PIN MARITIME A. D'ALMEIDA, G. VALENTIN	31
TRANSCONFORMATION DE MACROMOLECULES FLEXIBLES ET CONSEQUENCES SUR LE COMPORTEMENT NON NEWTONIEN D. DUPUIS, C. WOLFF	43
APPLICATION DU CRITERE DE DENSITE D'ENERGIE AU BOIS DE CHARPENTE G. VALENTIN, F. LAHNA	57
MESURE DU MODULE COMPLEXE PAR POINCONNEMENT G. RAMOND, M. PASTOR, D. MAUGIS, M. BARQUINS	67
ECOULEMENTS ELONGATIONNELS DE SOLUTIONS DE POLYMERES : ASPECTS EXPERIMENTAUX ET NUMERIQUES A. LYAZID, O. SCRIVENER	75
RHEOLOGIE DES PRODUITS ALIMENTAIRES : LA RHEOLOGIE EXPERIMENTALE DANS L'INDUSTRIE LAITIERE J.C. ROTH, J. HARDY, J.P. RAMET	87