

LES SURFACES DE RUPTURE EN MECANIQUE
DES SOLS EN TANT QU'INSTABILITE DE DEFORMATION (*)

F. DARVE, Maître-Assistant I.N.P.G.

J. DESRUES, Attaché de recherches, C.N.R.S.

M. JACQUET, Ingénieur E.N.T.P.E.

Institut de Mécanique - B.P. 53 X - 38041 GRENOBLE CEDEX

RESUME

Après avoir situé cette étude dans le cadre des catastrophes de bifurcation, nous rappelons les principales caractéristiques de la loi rhéologique incrémentale que nous avons développée pour les sols. Nous lui appliquons alors le critère de localisation de HILL dans trois cas géométriquement simples : le milieu bidimensionnel, la déformation plane, la symétrie de révolution. Les résultats trouvés mettent en évidence le rôle majeur joué par l'angle de dilataance du matériau sur l'orientation des surfaces de rupture. Ces résultats sont comparés à l'expérience dans le cas d'un matériau analogique bidimensionnel.

ABSTRACT

Once this study placed within the general framework of bifurcation catastrophes, the main characteristics of the incremental constitutive equations developed for soils, are reminded. HILL's localization condition is applied with this rheological law for three simple geometrical cases : twodimensional medium and plane strain and axisymmetrical natural mediums. The results obtained put the accent on the important influence of the dilatancy angle of the material upon shear bands orientation. These results are compared with measurements in the case of a twodimensional analogical material.

1. INTRODUCTION

Les expériences menant à la rupture en mécanique des solides montrent que, de façon assez générale, les déformations se localisent le long de "surfaces de rupture". Ainsi, en mécanique des sols, la nature offre de nombreux exemples de glissements de terrains. Les ouvrages que l'homme construit (barrages en terre, digues, remblais, ...) présentent la plupart du temps des surfaces de rupture quand ils se rompent. Les ouvrages expérimentaux, que ce soit des ouvrages en

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 19 octobre 1978.

vraie grandeur (station de poussée-butée du C.E.B.T.P. à Saint-Rémy-Les-Chevreuse (1)) ou des modèles réduits, font apparaître de telles surfaces. Les échantillons mêmes, réputés homogènes tout au long d'un essai de laboratoire, se rompent dans le cas de sols denses suivant une ou plusieurs surfaces de rupture. C'est à l'étude de telles ruptures se produisant pour des échantillons initialement homogènes que nous restreindrons cet article.

Les calculs traditionnellement effectués reposent sur la loi de frottement solide de COULOMB (2) établie dès 1773 : $\tau = \sigma_n \operatorname{tg} \psi$, qui peut s'écrire en négligeant l'influence de la contrainte intermédiaire (hypothèse de la "courbe intrinsèque") :

$$\sin \psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \text{où } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ sont les deux}$$

contraintes principales extrêmes. On dit alors que la rupture est atteinte sur une facette pour laquelle le vecteur contrainte est situé sur le cône de frottement. Cela conduit, en déformation plane, à deux directions de plans de rupture symétriques par rapport à la contrainte principale majeure et faisant avec elle un angle égal à : $\pi/4 - \psi/2$.

Plus récemment, HANSEN (3) a introduit l'angle de dilatance d'un sol en déformation plane, défini par :

$$\sin \psi = - \frac{d\epsilon_1 + d\epsilon_2}{d\epsilon_1 - d\epsilon_2}.$$

ψ caractérise ainsi la règle d'écoulement du matériau en déformation plane. Angle de frottement et angle de dilatance seraient égaux dans le cas d'un milieu standard ; on sait que le sol est un matériau fortement non-standard (ordres de grandeur pour un sable : $\psi = 35^\circ$, $\psi = 20^\circ$). L'assimilation des lignes de rupture à des "lignes d'extension nulle" (JAMES, BRANSBY (4) et (5)) permet alors de trouver deux directions de plans de rupture dont l'orientation par rapport à la direction de la contrainte principale majeure est égale à : $\pi/4 - \psi/2$. Ce dernier résultat a permis un meilleur accord avec l'expérience, sans toutefois pouvoir prendre en compte correctement l'ensemble des résultats expérimentaux.

Nous nous proposons, pour notre part, de caractériser le passage d'un mode de déformation diffus sensiblement homogène à un mode très fortement localisé comme une bifurcation. Nous retrouverons, en les généralisant considérablement, les résultats de JAMES et BRANSBY (4) (5) par application de la condition de localisation de HILL (6) à notre loi rhéologique incrémentale (DARVE et al. (7)).

2. LA NOTION DE BIFURCATION ET SON APPLICATION

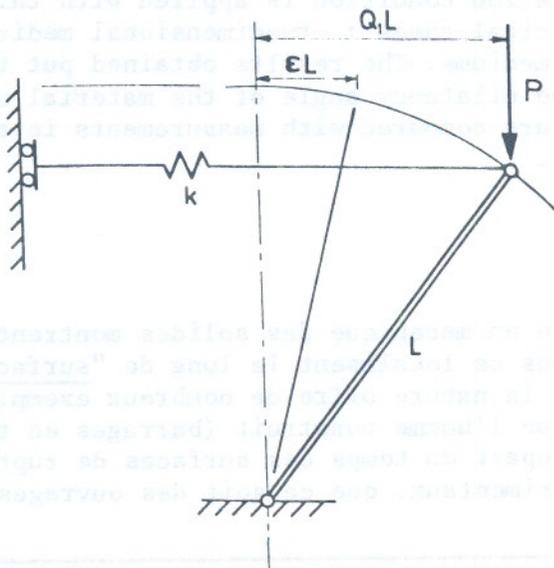


Figure 1 : exemple de système mécanique présentant une bifurcation de type symétrique, instable (THOMPSON, HUNT (8)).

**Cahiers du Groupe
Français de Rhéologie**

Tome V, Numéro

Janvier 1980

S O M M A I R E

- Les surfaces de rupture en mécanique des sols en tant qu'instabilité de déformation, par F. DARVE, J. DESRUES et M. JACQUET, p. 93.
- Etude de la propagation d'une fissure dans un béton non armé, par CHHUY SOK, J. BARON et D. FRANÇOIS, p. 107.
- Rupture différée et propagation des fissures dans les propegols composites, par B. SCHAEFFER, p.119.
- Fatigue statique des joints collés, par B. PERSOZ et J. BONNET, p. 129.

Considérons le système mécanique représenté sur la figure 1. Il comprend une barre rigide articulée de longueur L et un ressort linéaire de rigidité k , pouvant se déplacer dans le plan de figure. Le paramètre de charge est la force P verticale, tandis que la variable de déplacement est le nombre Q_1 sans dimension et le paramètre d'imperfection le scalaire ϵ .

L'énergie totale du système comprend l'énergie élastique de déformation du ressort et le travail de la force P . En annulant cette énergie et sa dérivée première, on trouve deux chemins d'équilibre : le premier (dit "fondamental") correspond à $Q_1 = 0$ tandis que le second est un demi-cercle d'équation $P^2 = k^2 L^2 (1 - Q_1^2)$ dans le plan (P, Q_1) . En analysant la stabilité de ces deux chemins d'équilibre, on montre que le chemin fondamental est stable jusqu'à son point d'intersection avec le second chemin, qui, lui, est entièrement instable.

Le point d'intersection de ces deux chemins d'équilibre est l'exemple d'un point de bifurcation. Pour un système mécanique réel, l'existence inévitable d'une dissymétrie (traduite par le paramètre d'imperfection ϵ) produit un passage plus "continu" du mode fondamental de "déformation" du système (où Q_1 reste voisin de zéro) au second mode (pour lequel $|Q_1|$ varie de manière importante). Ces résultats sont schématisés sur la figure 2, tirée de l'ouvrage de THOMPSON et HUNT (8).

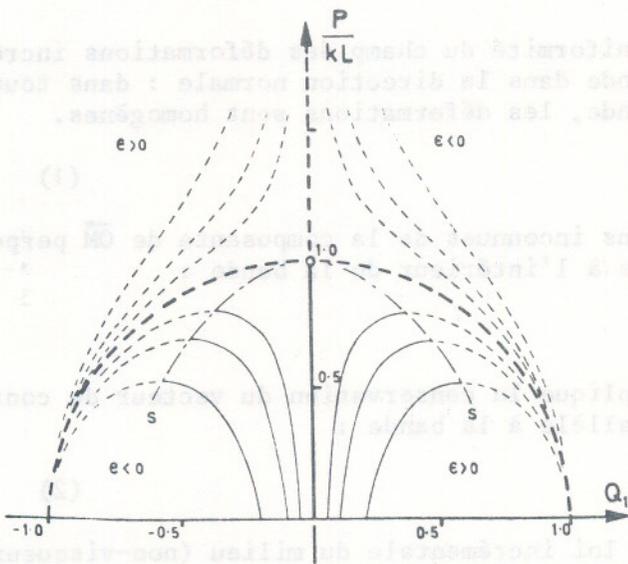


Figure 2 : les différents chemins d'équilibre stables (en traits continus) et instables (en tiretés) pour le système mécanique de la figure 1, parfait et imparfait. Le point de bifurcation est le point de coordonnées $(0,1)$.

En mécanique des sols, l'analyse de la rupture d'échantillons de sols denses fait apparaître un "pic" sur la courbe contrainte-déformation, au voisinage duquel une ou plusieurs surfaces de ruptures se sont développées. L'échantillon est ainsi passé d'un mode de déformations sensiblement homogènes stables à un mode de déformations fortement localisées. Cette bifurcation peut, sans doute, être caractérisée comme de type "symétrique, instable" au sens de THOMPSON (8) ou de type "ombilic hyperbolique" dans le cadre de la théorie des catastrophes de THOM (9). Cette rupture sera analysée comme résultant d'une instabilité au niveau de la loi rhéologique même du matériau.

La position de ces surfaces de rupture dans l'échantillon résulte d'imperfections locales ; par contre, leurs directions peuvent être déterminées par la condition de localisation de HILL (6) et RICE (30) dont nous rappelons les hypothèses dans le paragraphe qui suit.

3. LA CONDITION DE LOCALISATION

Nous supposons qu'une surface de rupture de normale \vec{n} vient de se former dans un échantillon antérieurement homogène. Les états de contrainte et de déformation sont donc homogènes sauf à l'intérieur de la bande de cisaillement.

Dans le repère orthonormé (1, 2, 3) (voir figure 3), soient x_i les coordonnées du point courant M et n_j les composantes de la normale locale à la bande. Nous notons $\Delta(A)$ la différence entre la valeur du tenseur A au point courant à l'intérieur de la bande et sa valeur uniforme à l'extérieur.

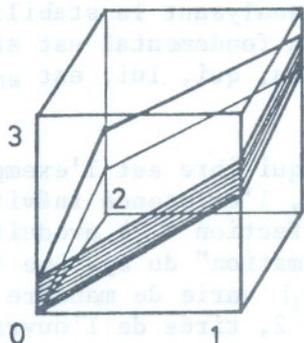


Figure 3

La seule possibilité de non-uniformité du champ des déformations incrémentales est à l'intérieur de la bande dans la direction normale : dans tout plan intérieur et parallèle à la bande, les déformations sont homogènes.

$$\text{Donc : } \Delta(d\epsilon_{ij}) = g_i n_j \quad (1)$$

où les trois g_i sont des fonctions inconnues de la composante de \vec{OM} perpendiculairement à la bande, non nulles à l'intérieur de la bande :

$$\text{Soit : } g_i = g_i(n_k x_k) .$$

En second lieu, l'équilibre implique la conservation du vecteur de contrainte incrémentale sur une facette parallèle à la bande :

$$\text{Donc : } n_i \Delta(d\sigma_{ij}) = 0 \quad (2)$$

Enfin, nous supposerons que la loi incrémentale du milieu (non-visqueux) considéré s'écrit :

$$d\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\epsilon_{kl} ,$$

où l'incrément de contrainte est pris par rapport à un repère co-rotationnel et $d\epsilon$ représente la petite déformation pure.

Si le tenseur L conserve la même valeur à l'intérieur et à l'extérieur de la bande (c'est-à-dire si les incréments de sollicitation appartiennent à la même "zone tensorielle" à l'intérieur et à l'extérieur de la bande, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant), nous pouvons écrire :

$$\Delta(d\sigma_{ij}) = L_{ijkl} \Delta(d\epsilon_{kl}) \quad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) impliquent alors :

$$0 = n_i \Delta(d\sigma_{ij}) = n_i L_{ijkl} n_l g_k \quad (4)$$

Les équations (4) forment un système de trois équations linéaires, homogènes, aux trois fonctions inconnues g_1, g_2, g_3 .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution au moins (et il en existe alors une infinité) non-identiquement nulle est que ce système ne soit pas de CRAMER, c'est-à-dire que son déterminant soit nul :

$$\underline{\det(nLn)} = 0 \quad (5)$$

La relation (5) est une équation homogène de degré 6 en n_1, n_2, n_3 .

Par ailleurs, l'expérience montre que les surfaces de rupture apparaissent quand l'état de contrainte est voisin de la surface limite de rupture.

Or, avec : $d\sigma_\alpha = N_{\alpha\beta} d\varepsilon_\beta$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 6$), le critère de rupture s'écrit :

$$\underline{\det(N)} = 0 \quad (6)$$

Les équations (5) et (6) nous permettront de déterminer les directions locales des normales aux surfaces de rupture, dans la mesure où nous avons explicité la loi rhéologique, c'est-à-dire le tenseur L (ou la matrice N). C'est à ce dernier point que nous nous attachons dans le prochain paragraphe.

4. LA LOI RHEOLOGIQUE INCREMENTALE

Nous rappellerons brièvement ici les principaux traits de la loi de comportement utilisée (pour plus de détails : DARVE et al. (7), DARVE (10)).

4.1. Une formulation incrémentale des lois rhéologiques

Considérons un échantillon de matériau, ayant subi une certaine histoire de sollicitation. Il existe une fonction F, dépendant de cette histoire et permettant de décrire les propriétés mécaniques incrémentales actuelles : elle doit donc relier la "petite" réponse à la "petite" sollicitation actuelle, c'est-à-dire les incréments de déformation, de contrainte et de temps. Soit :

$$F(d\varepsilon, d\sigma, dt) = 0.$$

où $d\sigma$ représente l'incrément de contrainte pris en axes co-rotationnels et $d\varepsilon$ la petite déformation pure.

Dans le cas des milieux non-visqueux, seul cas que nous considérerons dans cet article, l'incrément de temps n'a aucune influence.

Donc : $F(d\varepsilon, d\sigma) = 0$, soit : $d\varepsilon = G(d\sigma)$

Cette indépendance du comportement par rapport aux vitesses de sollicitation impose, en outre, une condition d'homogénéité sur G : quelque soit le réel λ positif :

$$G(\lambda d\sigma) = \lambda G(d\sigma)$$

En associant aux tenseurs symétriques $[d\varepsilon_{ij}]$ et $[d\sigma_{kl}]$ les

$$\text{vecteurs : } [d\varepsilon_\alpha] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [d\sigma_\beta] = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2} d\sigma_{23} \\ \sqrt{2} d\sigma_{31} \\ \sqrt{2} d\sigma_{12} \end{bmatrix}, \text{ nous pouvons}$$

en conclure que G est linéaire sur la demi-droite portant $d\sigma$. Soit : $d\varepsilon_\alpha = M_{\alpha\beta} d\sigma_\beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$.

Il est important de noter, par contre, que cette fonction G est non-linéaire : c'est le problème de la non-linéarité incrémentale (au sens de GUDEHUS (11, 12)) qui se traduit par la dépendance directionnelle de la matrice M (DARVE et al. (7) et DARVE (8)). Il est bien évident, en effet, que si l'on appliquait à l'échantillon le vecteur opposé $-d\sigma$, on ne recueillerait pas :

$-d\varepsilon$ par suite de l'irréversibilité du comportement ; la matrice M dépend donc

de la direction de la sollicitation incrémentale.

C'est, à notre avis, la critique majeure qui doit être faite à l'hypo-élasticité (qui ignore cette dépendance directionnelle) et à l'élasto-plasticité (qui restreint à deux valeurs cette variation de la matrice M).

Pour décrire cette dépendance, nous pouvons soit en effectuer une discrétisation (et nous appellerons alors "zone tensorielle" un domaine de l'espace des sollicitations incrémentales dans lequel M conserve la même valeur ; nous avons ainsi introduit, pour notre part, 8 déterminations pour M) soit prendre en compte directement une variation continue de M avec la direction de la sollicitation incrémentale, ce qui en simplifie le traitement numérique dans des programmes de calcul utilisant la méthode des éléments finis (CHAMBON (13), KOLYMBAS (14)), en éliminant des discontinuités parfois gênantes.

Dans le cas d'une sectorisation (en 8 zones tensorielles, par exemple), il y a une condition essentielle de continuité à respecter lors du changement de zone : pour une sollicitation incrémentale appartenant à la frontière commune à plusieurs zones, la réponse incrémentale doit rester la même quelle que soit la zone adjacente à laquelle on rattache le vecteur sollicitation incrémentale.

4.2. La loi incrémentale des sols

Deux hypothèses supplémentaires nous ont été nécessaires pour expliciter la matrice M dans le cas des sols.

La première a consisté à supposer l'orthotropie de la loi incrémentale, c'est-à-dire à prendre en compte une certaine anisotropie induite par le chemin de sollicitation suivi antérieurement (un sol à l'état vierge ayant un comportement sensiblement isotrope). La matrice M ne possède plus alors que 12 éléments indépendants non nuls, quand on l'écrit dans les axes d'orthotropie.

La deuxième hypothèse porte sur la caractérisation des 8 zones tensorielles dans l'espace des incréments de contrainte. Soient $d\sigma_{11}$, $d\sigma_{22}$, $d\sigma_{33}$ les incréments de contraintes dans les trois directions orthogonales d'orthotropie. Les 8 zones correspondent aux 8 huitièmes d'espace définis par les trois plans de coordonnées (figure 4). A chacun de ces huitièmes d'espace est associée une même détermination de la matrice M, c'est-à-dire une certaine application linéaire.

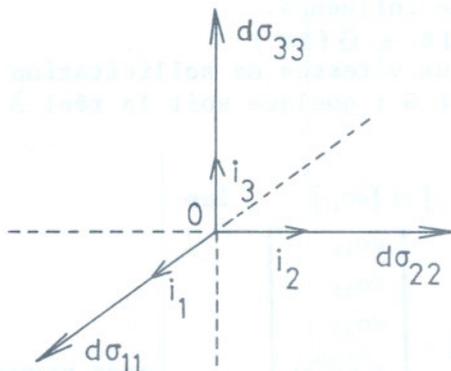


Figure 4 : définition des 8 zones tensorielles

Les trois premiers éléments des trois premières colonnes des 8 matrices M représenteront ainsi les composantes des transformées de i_1, i_2, i_3 et de leurs opposés par chacune de ces 8 applications linéaires dans l'espace $(d\epsilon_{11}, d\epsilon_{22}, d\epsilon_{33})$.

Supposons que nous connaissions (par une étude expérimentale) les double

familles de trois fonctions f, g, h telles que :

$$\begin{cases} \sigma_k = f(\epsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \\ \epsilon_j = g(\epsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \end{cases}, \quad \epsilon_l = h(\epsilon_k, \sigma_j, \sigma_l),$$

le long de chemins de sollicitation C pour lesquels les axes d'orthotropie soient fixes et deux contraintes principales (σ_j et σ_l) restent constantes, éventuellement distinctes. Il s'agit bien d'une double famille puisque ces fonctions doivent être connues en compression (ϵ_k positif) et en extension (ϵ_k négatif). Nous nous donnons ainsi le comportement du matériau le long des six demi-droites, supports des vecteurs $\pm i_1, \pm i_2, \pm i_3$.

Les trois premières colonnes de la matrice M peuvent être dès lors explicitées en fonction de trois coefficients U_k et six coefficients V_k^i définis par dérivation :

$$\begin{cases} U_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} & (k, j, l = 1, 2, 3) \\ & (k \neq j \neq l \neq k) \\ V_k^i = - \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l}; \quad V_k^i = - \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \end{cases}$$

La matrice M prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ d\epsilon_{23} \\ d\epsilon_{31} \\ d\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/U_1 & -V_2^1/U_2 - V_3^1/U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1^2/U_1 & 1/U_2 & -V_3^2/U_3 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1^3/U_1 - V_2^3/U_2 & 1/U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Les trois derniers éléments G_1, G_2, G_3 ont été déterminés en fonction des neuf autres au prix d'une hypothèse supplémentaire (DARVE (10)). Ils ont pour expression :

$$G_1 = \frac{\sqrt{(U_2)^2 + (U_3)^2}}{U_2 U_3 \sqrt{2}} + \frac{U_2 (V_3^2 - 1) + U_3 (V_2^3 - 1)}{4 U_2 U_3},$$

G_2 et G_3 se déduisant de G_1 par permutation circulaire sur les indices.

Les éléments de la matrice M sont ainsi fonctions des états de contrainte et de déformation actuels (par les opérations de dérivation donnant les trois U_k et les six V_k^i), du chemin suivi antérieurement dans le cas de changements de sens de la sollicitation antérieure (par les expressions des familles de fonctions f, g, h), du sens de la sollicitation incrémentale actuelle (puisque l'on teste, dans chaque direction d'orthotropie, le sens de la sollicitation par l'étude du signe de : $U_k d\sigma_{kk}$ qui représente le signe de l'incrément de déformation $d\epsilon_k$ sur le chemin C associé).

Vérifions maintenant la condition de continuité. Supposons que le chemin de sollicitation considéré passe progressivement d'une zone à la zone adjacente, par exemple par changement de signe de $d\sigma_{22}$. Pour la matrice M, ce changement de zone se traduira par la modification brutale des trois éléments de la deuxième colonne, mais, pour le calcul de la réponse incrémentale, ces trois éléments seront à multiplier par $d\sigma_{22}$, qui s'annule lors du changement de zone. Le chemin de réponse restera ainsi continu, à dérivée continue, comme les expériences l'imposent (un exemple est détaillé dans DARVE (10)). Bien entendu, dans le cas d'un chemin de sollicitation changeant brutalement de zone tensorielle (par exemple, sollicitations cycliques) le chemin de réponse sera à dérivée discontinue comme le chemin de sollicitation (des exemples de cycles sont pré-

sentés dans DARVE et al. (7) et (15)). Remarquons enfin que cette condition de continuité empêche d'imposer à la matrice M une symétrie arbitraire.

4.3. Conclusion

Sur la base des études expérimentales disponibles, nous avons donné une expression analytique explicite pour la double famille des trois fonctions f, g, h. Ces formulations sont présentées dans BOULON et al. (16) et DARVE et al. (7).

La validité de la loi proposée a été étudiée par comparaison systématique des résultats théoriques avec les mesures effectuées sur des presses tri-dimensionnelles : essais sur sable de LADE et DUNCAN (comparaison théorie-expériences dans DARVE et al. (17)), essais sur sable de GOLDSCHIEDER et GUDEHUS (DARVE et al. (7)), essais sur argile de LADE et MUSANTE (DARVE (10)).

Enfin, cette loi a été introduite dans des programmes de calcul faisant appel à la méthode des éléments finis et a été appliquée aux calculs d'ouvrages en mécanique des sols : des algorithmes d'utilisation ont été mis au point (BOULON et al. (16), (18), (19), CHAMBON et al. (20)), une loi "régularisée" avec variation continue de la matrice M est testée (CHAMBON (13)).

Dans le prochain paragraphe, nous appliquons la condition de localisation de HILL à cette loi.

5. CALCULS DE DIRECTIONS DE SURFACES DE RUPTURE

Nous avons pu effectuer le calcul explicite de la direction des surfaces de rupture dans trois cas particuliers, géométriquement simples. Nous les présentons successivement.

5.1. Cas du matériau bidimensionnel

Un exemple, classique en mécanique des sols, de matériau bidimensionnel est le milieu analogique de SCHNEEBELI (21), composé de petits rouleaux empilés le long de leurs génératrices.

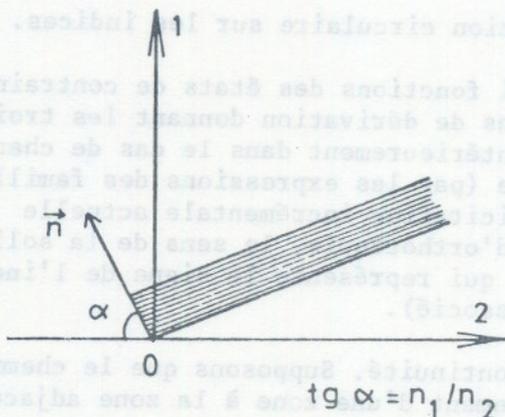


Figure 5

Nous notons (1,2) le repère correspondant aux directions d'orthotropie de la loi incrémentale à l'instant considéré (figure 5). L'annulation du déterminant de nLn aboutit à une équation paire, du quatrième degré en $tg\alpha$:

$$L_{1111} L_{1212} tg^4 \alpha + [L_{1111} L_{2222} - L_{1122} L_{2211} - L_{1212} (L_{1122} + L_{2211})] tg^2 \alpha + L_{1212} L_{2222} = 0 \quad (7)$$

En remplaçant les L_{ijkl} par leurs expressions en fonctions des deux U_k et des deux v_k^j :

$$\begin{aligned} L_{1111} &= \frac{U_1}{1 - v_1^2 v_2^1} & L_{2211} &= \frac{U_2 v_1^2}{1 - v_1^2 v_2^1} \\ L_{1122} &= \frac{U_1 v_2^1}{1 - v_1^2 v_2^1} & L_{2222} &= \frac{U_2}{1 - v_1^2 v_2^1} \end{aligned}$$

et en exprimant le critère de rupture ($U_1 U_2 = 0$), par exemple dans la direction 1 ($U_1 = 0$), nous obtenons la solution :

$$\underline{\underline{\text{tg}^2 \alpha = 1 / v_1^2}} \quad (8)$$

Remarquons tout d'abord que la condition de symétrie sur la matrice M rendrait l'équation (7) triviale par application du critère de rupture.

Par ailleurs, rappelons que : $v_1^2 = - \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varepsilon_1} \right)_{\sigma_2 \text{ constant}}$

D'où : $\text{tg}^2 \alpha = - \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} \right)_{\sigma_2 \text{ constant}}$

Si l'on pose : $\alpha = \pi/4 - \psi/2$, on en déduit : $\sin \psi = - \left(\frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2} \right)_{\sigma_2}$

Nous retrouvons donc l'angle de dilatance, défini par HANSEN (3) et dont nous avons rappelé la définition dans l'introduction. ψ représente ainsi l'angle algébrique de dilatance du matériau, à la rupture, sur le chemin de compression ou d'extension dans la direction 1, pour lequel la contrainte est maintenue constante dans l'autre direction et égale à la contrainte σ_2 actuelle.

Dans le cas d'une expérience bidimensionnelle homogène menant à la rupture, nous avons montré qu'il existait deux directions de plans de rupture, symétriques par rapport aux axes d'orthotropie de la loi incrémentale, et faisant un angle égal à : $\pm (\pi/4 - \psi/2)$ avec l'axe d'orthotropie dans la direction duquel le critère de rupture a été atteint.

Ce résultat sera comparé à des expériences dans le paragraphe 6.

5.2. Cas de la déformation plane

Expérimentalement, nous savons qu'un échantillon de sol en déformation plane ne se rompt jamais dans cette direction : la contrainte dans la direction de déformation plane reste comprise entre les deux autres valeurs des contraintes principales. Nous supposons, ici, que cette contrainte n'a qu'une influence négligeable sur le comportement du sol à la rupture.

Dans les axes d'orthotropie (1, 2) (figure 5), la loi incrémentale a donc la même forme que pour un matériau bidimensionnel (la direction 3 étant celle de déformation plane) ; mais les éléments L_{ijkl} ont pour expression :

$$\begin{cases} L_{1111} = U_1 (1 - v_2^3 v_3^2) / D \\ L_{1122} = U_1 (v_2^1 + v_2^3 v_3^1) / D \\ L_{2211} = U_2 (v_1^2 + v_1^3 v_3^2) / D \\ L_{2222} = U_2 (1 - v_1^3 v_3^1) / D \end{cases} \quad \text{où } D = 1 - v_2^3 v_3^2 - v_3^1 v_3^1 - v_1^2 v_2^1 - v_1^2 v_2^3 v_3^1 - v_1^3 v_2^2 v_3^1$$

L'annulation du déterminant de nLn aboutit à la même équation (7). En supposant le critère de rupture atteint dans la direction 1 ($U_1 = 0$), on obtient :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - v_1^3 v_3^1}{v_1^2 + v_1^3 v_3^2} \quad (9)$$

Posons : $\sin \psi = - \left(\frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2} \right) \sigma_2$ constant, $\varepsilon_3 = 0$

L'application de la loi rhéologique à un chemin en déformation plane et contrainte plane fournit les relations :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = \frac{1 - v_1^2}{U_1} d\sigma_1 - \frac{v_3^1 + v_3^2}{U_3} d\sigma_3 \\ d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = \frac{1 + v_1^2}{U_1} d\sigma_1 - \frac{v_3^1 - v_3^2}{U_3} d\sigma_3 \\ -\frac{v_1^3}{U_1} d\sigma_1 + \frac{1}{U_3} d\sigma_3 = 0 \end{cases}$$

qui permettent de calculer $\sin \psi$ et de montrer que :

$$\operatorname{tg}^2(\pi/4 - \psi/2) = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Dans le cas d'une expérience homogène en déformation plane menant à la rupture, nous trouvons deux directions de plans de rupture, symétriques par rapport aux axes d'orthotropie de la loi incrémentale et faisant un angle égal à : $\pm(\pi/4 - \psi/2)$ avec l'axe d'orthotropie dans la direction duquel le critère de rupture a été atteint, ψ étant l'angle algébrique de dilatance du matériau sur le chemin en déformation plane et contrainte plane correspondant à l'état actuel de contraintes et de déformations.

5.3. Cas de la symétrie de révolution

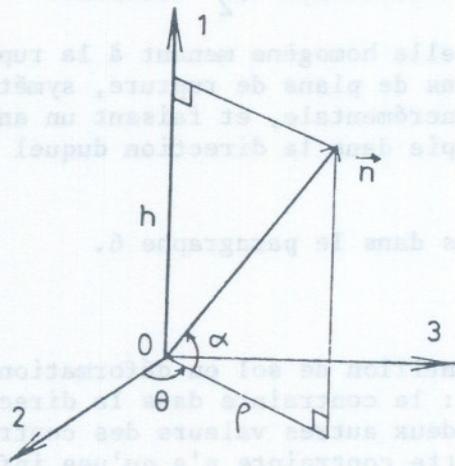


Figure 6

Le repère (1, 2, 3) représente le système d'axes d'orthotropie de révolution pour la loi incrémentale, l'axe 1 étant l'axe de révolution. L'annulation du déterminant de nLn fournit l'équation (10), paire, du sixième degré en $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\begin{aligned} & L_{1111} (L_{1212})^2 \operatorname{tg}^6 \alpha + L_{1212} [L_{1111} (3L_{2222} - L_{2233}) / 2 \\ & - L_{1212} (L_{1122} + L_{2211}) - L_{2211} L_{1122}] \operatorname{tg}^4 \alpha \\ & + [(L_{1212})^2 L_{2222} + [L_{1111} L_{2222} - L_{1122} L_{2211} - L_{1212} (L_{1122} + L_{2211})] \\ & (L_{2222} - L_{2233}) / 2] \operatorname{tg}^2 \alpha + L_{1212} L_{2222} (L_{2222} - L_{2233}) / 2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} L_{1111} = U_1 (1 - v_2^3 v_3^2) / D \\ L_{1122} = U_1 v_2^1 (1 + v_2^3) / D \\ L_{2211} = U_2 v_1^2 (1 + v_2^3) / D \\ L_{2222} = U_2 (1 - v_1^2 v_2^1) / D \\ L_{2233} = U_2 (v_3^2 + v_1^2 v_2^1) / D \end{cases}$$

(D a la valeur donnée dans le paragraphe 5.2)

et supposant le critère de rupture atteint dans la direction de révolution ($U_1 = 0$), on obtient :

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{1 - v_1^2 v_2^1}{v_1^2 (1 + v_2^3)} \quad (11)$$

Il semble que l'on ne puisse pas trouver, dans ce cas, une interprétation simple du résultat en termes d'angle de dilatance.

Dans le cas d'une expérience homogène, symétrique de révolution, menant à la rupture, dans la direction de révolution, nous trouvons un cône circulaire de rupture d'axe : l'axe de révolution et de demi-angle au sommet β donné par :

$$\text{tg}^2 \beta = \frac{v_1^2 (1 + v_2^3)}{1 - v_1^2 v_2^1}$$

6. PREMIERES EXPERIENCES EFFECTUEES

Les expériences les plus simples à réaliser sont relatives au milieu bidimensionnel de SCHNEEBELI (21). Malheureusement, la géométrie trop régulière des assemblages d'éléments constitutifs du milieu font que ses caractéristiques mécaniques (angles de frottement et de dilatance, entre autres) sont pratiquement indépendants de l'état de contrainte et de la densité initiale, contrairement à un sable ou une argile. La vérification de la formule : $\alpha = \pi/4 - \psi/2$ en est d'autant limitée, puisque ψ sera constant.

Les essais de compression et d'extension biaxiales réalisées (TRATAPEL (22)) ont montré que l'angle de frottement à la rupture reste voisin de 24° ($+ 24^\circ$ en compression, $- 24^\circ$ en extension) tandis que les angles de dilatance en compression et en extension sont proches respectivement de $7,5^\circ$ et de $- 10^\circ$. JACQUET (23) a effectué quelques expériences de compression et d'extension biaxiales pour lesquelles il a mesuré (à partir des photographies prises) les orientations des plans de rupture. Les fourchettes expérimentales ont été reportées sur la figure 7 et comparées aux valeurs théoriques : $\pi/4 - \psi/2$ et $\pi/4 - \psi/2$.

On sait que l'angle de dilatance d'un sable, mesuré sur des chemins en déformation plane et contrainte plane, diminue quand la contrainte latérale augmente : en effet, pour de très fortes contraintes, le matériau devient contractant. D'après nos résultats, l'obliquité α des surfaces de rupture par rapport à la direction l , axe d'orthotropie dans la direction duquel le critère de rupture est atteint, devrait augmenter pour tendre vers 45° , quand la contrainte latérale croît ($\alpha = \pi/4 - \psi/2$). Ce résultat est classique dans le cas des roches. Il a été mis en évidence expérimentalement par PATERSON (24) dans le cas d'un marbre et par WAWERSIK et BRACE (25) pour celui du granite de WESTERLY. FABRE (26) "retrouve la même tendance" pour une argile.

Enfin, si les surfaces de rupture orientées à 45° , que HABIB (27) a trouvées à plusieurs reprises pour différentes argiles, ne s'interprètent que difficilement par un angle de frottement nul, il pourrait être plus satisfaisant d'expliquer cette orientation par la nullité de leur angle de dilatance.

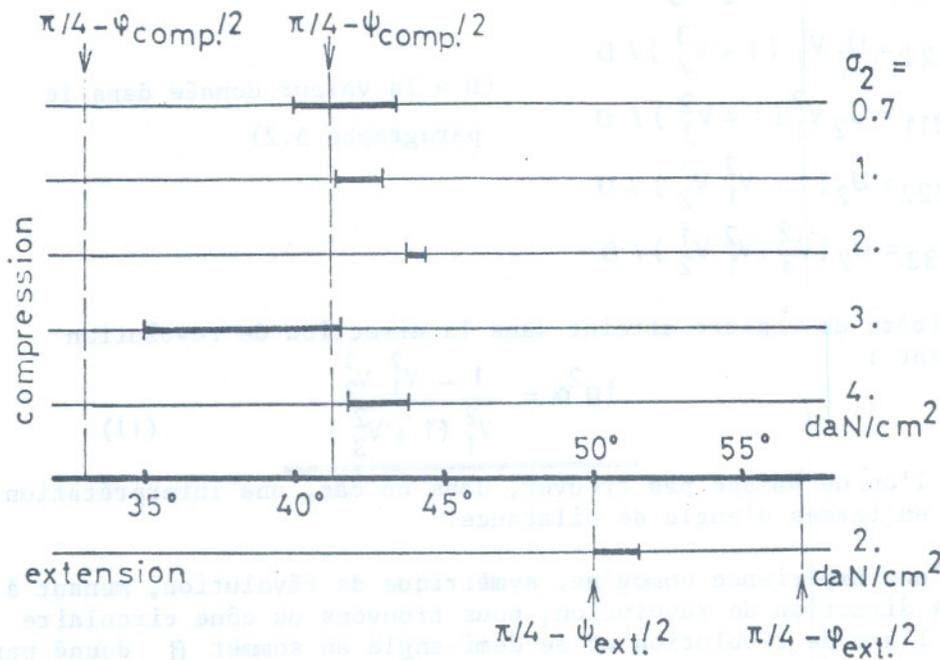


Figure 7 :
Orientation des surfaces de rupture dans des essais biaxiaux sur un milieu analogique bidimensionnel : comparaison des fourchettes expérimentales avec les valeurs théoriques. (JACQUET (23)).

7. CONCLUSION

Cette première approche que nous proposons (DARVE (28)) permet de retrouver, en la généralisant, la notion d'angle de dilatance, à la base de la théorie des "lignes d'extension nulle" (HANSEN (3), JAMES et BRANSBY (4) (5)). Elle recoupe certains résultats, obtenu avec une autre loi rhéologique incrémentale par VARDOULAKIS et GUDEHUS (29).

De cette étude paraît se dégager le fait que l'existence d'un point de bifurcation dans le mode de déformation est directement liée à la dilatance du matériau. Il y aurait apparition d'une instabilité de déformation à la suite d'une certaine dilatance. Cette instabilité permettrait le développement d'un autre mode de déformation par localisation des déformations le long de surfaces de rupture, de directions déterminées, mais dont l'implantation dans l'échantillon dépend d'imperfections locales. La résistance de l'échantillon diminuerait jusqu'à atteindre le "palier de plasticité parfaite", lorsque la surface de rupture aurait traversé de part en part le matériau ; la "déformation" se réduirait alors à des glissements relatifs de blocs rigides. Tout au long du développement des surfaces de rupture, les variations de l'indice des vides seraient de moins en moins importantes jusqu'à atteindre une certaine valeur limite, habituellement appelée en mécanique des sols "indice des vides critique". Le "ramollissement" du matériau du pic de contraintes jusqu'au palier ainsi que l'existence d'un indice des vides critique pour un sol dilatant serait à mettre au compte, dans ce cadre de pensée, du développement d'hétérogénéités au sein de l'échantillon. Notons enfin que, pour un sol contractant (à priori stable en déformations) les expérimentateurs n'ont en général observé ni "ramollissement" du matériau, ni surfaces de rupture, ce qui corrobore a contrario nos résultats.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) TCHENG, "Mesures expérimentales en milieu pulvérulent", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n° 332, pp. 90-115, oct. 75.
- (2) COULOMB, "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture", Mémoires de la mathé-

- matique et de physique, vol. 7, 1773, Paris, De l'Imprimerie Royale, pp. 343-382, 1776.
- (3) HANSEN, "Line ruptures regarded as narrow rupture zones : basic equations based on kinematic considerations", "Conference of Earth Pressure Problems, vol. 1, pp. 39-49, Bruxelles, 1958.
 - (4) JAMES, BRANSBY, "Experimental and theoretical investigations of a passive earth pressure problem", Géotechnique, vol. 20, n° 1, pp. 17-37, 1970.
 - (5) JAMES, BRANSBY, "A velocity field for some passive earth pressure problems", Géotechnique, vol. 21, n° 1, pp. 61-83, 1971.
 - (6) HILL, "Acceleration waves in solids", J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, pp. 1-16, 1962.
 - (7) DARVE, BOULON, CHAMBON, "Loi rhéologique incrémentale des sols", à paraître dans le Journal de Mécanique en déc. 78.
 - (8) THOMPSON, HUNT, "A general theory of elastic stability", John Wiley, Londres, 1973.
 - (9) THOM, "Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles", W.A. Benjamin Inc., Ediscience S.A., Paris, 1972.
 - (10) DARVE, "Une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Application aux sols", thèse d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1978.
 - (11) GUDEHUS, GOLDSCHIEDER, WINTER, "Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods : some sources of errors and bounds of accuracies", ch. 3 of "Finite elements in geomechanics", WILEY, Londres, 1978.
 - (12) GUDEHUS, "Materialverhalten von sand : neuere erkenntnisse and deren Nutzenwendung", à paraître dans Bauingenieur, 1979.
 - (13) CHAMBON, "Incremental non-linear stress-strain relationship for soils and integration by F.E.M.", 3ème International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 1979.
 - (14) KOLYMBAS, "Ein nichtlineares viskoplastisches Stoffgesetz für Böden", Heft 77, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Karlsruhe, 1978.
 - (15) DARVE, FLAVIGNY, "Simulation de la liquéfaction des sols avec une loi incrémentale", comptes-rendus du séminaire "Matériaux et structures sous chargement cyclique", Ecole Polytechnique, à paraître en 1979.
 - (16) BOULON, CHAMBON, DARVE, "Loi rhéologique"

- (19) BOULON, DARVE, DESRUES, FORAY, "Soil-structure coupling. Non-linear rheological relationship and boundary conditions in soil mechanics", Colloque international sur les développements nouveaux dans les méthodes numériques de l'ingénieur, Paris, 1977, à paraître dans Computers and Structures.
- (20) CHAMBON, DARVE, TRATAPEL, "Mesures et calculs avec loi non-linéaire pour un modèle expérimental", comptes-rendus du symposium franco-polonais, Cracovie, à paraître en 1979.
- (21) SCHNEEBELI, "Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion", C.R.A.S., tome 243, p. 125, 1956.
- (22) TRATAPEL, "Contribution à l'étude du comportement mécanique d'un milieu analogique bidimensionnel", thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1977.
- (23) JACQUET, "Etude des surfaces de rupture en mécanique des sols en tant que problème de bifurcation", travail de fin d'études, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 1978.
- (24) PATERSON, "Experimental deformation and faulting in Wombeyan Marble", Geol. Soc. of Amer. Bull., vol. 69, pp. 465-475, 1958.
- (25) WAWERSIK, BRACE, "Postfailure behaviour of a granite and a diabase", Rock Mech., vol. 3, pp. 61-85, 1971.
- (26) FABRE, "Quelques observations sur la fissuration et la fragilité des argiles et des roches", thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1976.
- (27) HABIB, "La résistance au cisaillement des sols", thèse d'état, Annales de l'I.T.B.T.P., n° 61, pp. 1-40, janvier 1953.
- (28) DARVE, "Approche d'une étude des surfaces de rupture en tant que problème de bifurcation", deuxième sujet, thèse d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1978.
- (29) VARDOULAKIS, GOLDSCHIEDER, GUDEHUS, "Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem", Internat. Journal for Num. and Anal. Methods in Geomechanics, vol. 2, pp. 99-128, 1978.
- (30) RUDNICKI, RICE, "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", J. Mech. Phys. Solids, vol. 23, pp. 371-394, 1975.

CHHUY SOK J. BARON
 LABORATOIRE CENTRAL DES PONTS ET CHAUSSEES
 D. FRANCOIS
 UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE

RESUME :

On étudie la propagation d'une fissure dans le béton hydraulique non armé. Le principe de l'essai est classique : l'éprouvette est une poutre double console, dite "poutre DCB" ; la force tendant à séparer les deux consoles est asservie de manière à maintenir constante la vitesse d'ouverture de la fissure. L'originalité de l'essai tient à la dimension de la poutre, qui permet d'étudier la propagation de fissure sur une grande longueur (1,80 m). Une force longitudinale de précontrainte empêche la fissure de dévier.

Le suivi de la fissure visible se fait avec une loupe mais une grande attention est apportée au développement de la zone de comportement non élastique située en fond de fissure ; deux méthodes sont utilisées : revêtement photo-élastique et localisation de l'émission acoustique. On montre ainsi l'extension très importante de la zone perturbée non élastique, de l'ordre d'une vingtaine de centimètres.

La grande taille de l'éprouvette permet de dégager un résultat intéressant pour la pratique : au début de propagation, l'énergie de rupture augmente au fur et à mesure que la fissure se propage. On n'atteint une valeur stationnaire de cette énergie de rupture qu'après cinquante centimètres de propagation de fissure ; cette valeur stationnaire est dix fois plus grande que la valeur initiale. Il est probable que la plupart des résultats donnés dans la littérature, obtenus sur des éprouvettes trop petites, sous-estiment notablement la résistance du béton non armé à la propagation de fissure.

The author studies the propagation of a crack in non-reinforced hydraulic concrete.

The principle of the test is conventional : the test sample is a double cantilever beam (DCB) ; the force tending to separate the two cantilevers is slaved so as to keep the rate of opening of the crack constant. The originality of the test lies in the dimension of the beam ; it enables the propagation of the crack to be studied over a considerable length (1,80 m). A longitudinal prestressing force prevents the crack from deviating.

The visible crack is observed with a magnifier, but close attention is paid to the observation of the development of the zone of non-elastic behaviour at the bottom of the crack. Two methods are employed : photo-elastic varnish and localization of acoustic emission. This shows the very considerable extension of the non-elastic disturbed zone ; around 20 cms.

The large size of the sample piece makes it possible to obtain a valuable practical result : at the beginning of propagation, the energy of failure increases as the crack propagates. This energy of failure reaches a stationary value only after 50 cms of propagation of the crack, and this stationary value is ten times the initial value. It is probable that most of the results published in the existing literature, obtained with samples of too small a size, appreciably underestimate the resistance of non-reinforced concrete to the propagation of cracks.

* Communication au Groupe Français de Rhéologie le 7.12.1978

** Publié avec l'aimable autorisation du directeur du L.C.P.C.

— Ouverture de fissure (fig. 13)

Les déplacements des lèvres de fissure au niveau de l'axe présumé de propagation de fissure dans les plans AA, BB, CC, seront désignés respectivement par v_1 , v_2 , v_3 . v_1 peut être aussi appelé l'ouverture d'entaille et représenter les déplacements des points d'application de l'effort P exercé par un vérin d'axe AA. v_2 mesure les déplacements des lèvres de fissure au fond d'entaille ainsi que v_3 à 30 cm de ce dernier.

— Complaisance de l'éprouvette (fig. 13)

La complaisance d'une éprouvette est le rapport du déplacement v_1 à la force P correspondante à chaque instant et pour chaque longueur de fissure : $C = \frac{v_1}{P}$

— Fissure visible (fig. 14)

La fissure visible désigne la fissure apparue pendant l'essai et détectée soit à l'œil nu, soit à l'aide d'une loupe de grossissement 5, à la surface du béton.

La distance de l'axe du vérin (force P) à l'extrémité du fond d'entaille s'appelle la *longueur d'entaille* (a_0) ou *longueur de fissure initiale*.

La *propagation de fissure visible* (Δa), ou *accroissement de fissure visible*, est comptée à partir du fond d'entaille.

La longueur de fissure visible est la distance entre l'axe de la force P et l'extrémité de cette fissure visible :

$$a = a_0 + \Delta a.$$

— Zone perturbée (fig. 14)

La zone perturbée est située au voisinage du fond de fissure visible endommagée par la création et la propagation des microfissures (zone perturbée BC).

— Longueur d'endommagement ou propagation de l'endommagement AC (fig. 14)

C'est la longueur de la zone qui est fissurée ou microfissurée; elle est comptée à partir du fond d'entaille.

Cette longueur d'endommagement est déterminée expérimentalement soit par le revêtement photo-élastique, soit par la localisation linéaire de l'émission acoustique.

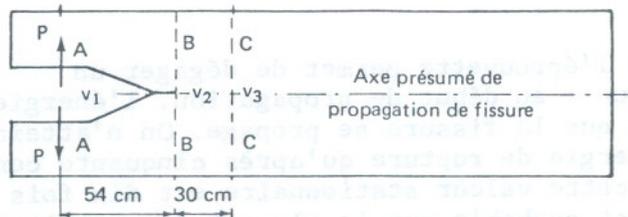


Fig. 13 - Emplacement du vérin et des déplacements v_1 , v_2 , v_3 .
 v_1 : (ouverture d'entaille) mesure les déplacements des points d'application de la force P.
 v_2 : mesure les ouvertures du fond d'entaille.
 v_3 : mesure les déformations suivant l'axe CC au niveau de l'axe présumé de propagation de fissure.

— Propagation de fissure

● **Propagation contrôlée continue** : c'est l'accroissement de la longueur de fissure visible quand on augmente l'ouverture d'entaille;

● **Propagation contrôlée discontinue** : c'est l'apparition brusque d'un prolongement de la fissure visible qui se propage de la longueur a_1 à a_2 ($a_2 > a_1$);

● **Propagation contrôlée différée** : il s'agit de la propagation de la fissure visible en palier lorsque l'ouverture d'entaille v_1 est maintenue constante;

● **Rupture brutale** : la fissure se propage jusqu'au bout de l'éprouvette marquant la fin de l'essai.

— Résistance à la fissuration R et taux de restitution d'énergie G

L'énergie de fissuration R est l'énergie consommée par le matériau pour faire avancer d'une unité de surface la propagation d'une fissure (voir fig. 1)

Le taux de restitution d'énergie est l'énergie élastique disponible par unité de surface de progression de fissure.

— Événement acoustique (fig. 15)

Un événement acoustique est le bruit qui accompagne une rupture; il est défini par son amplitude maximale, sa longueur ou sa durée, le temps de montée et le nombre de coups.

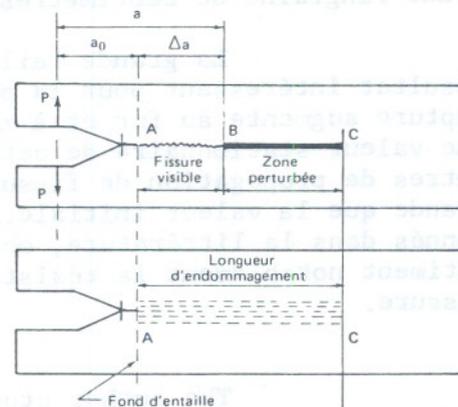


Fig. 14 - Définition des termes relatifs à la fissure.
 a_0 : longueur d'entaille,
 Δa : propagation de fissure visible,
 $a = (a_0 + \Delta a)$: longueur de fissure visible

AC : segment représentant la longueur d'endommagement,
 BC = AC - AB : zone perturbée en avant du front de fissure visible.

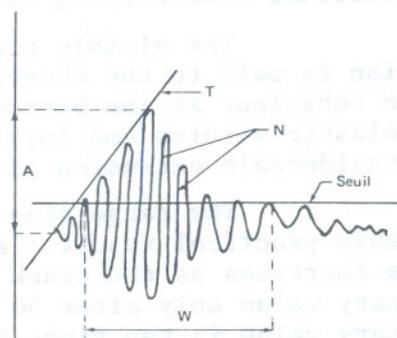


Fig. 15 - Définition d'un événement acoustique.
 A : amplitude maximale,
 W : durée ou longueur,
 T : temps de montée,
 N : nombre de coups par événement acoustique.
 On y voit également le seuil de détection d'émission acoustique.

INTRODUCTION

Dans les constructions en béton armé ou précontraint, on ne peut pas supprimer les fissures. On essaie alors de limiter leurs ouvertures à certaines valeurs déterminées, car une ouverture excessive constitue un danger pour la durabilité du béton. Il existe aujourd'hui plusieurs méthodes pour calculer l'ouverture d'une fissure dans une poutre en béton armé sous des charges de courte et de longue durée, mais ces méthodes n'ont pas une valeur générale.

Pourquoi la mécanique de la rupture appliquée au béton ?

La mécanique de la rupture a été appliquée et développée surtout pour les métaux, mais ses applications dans d'autres domaines tels que les céramiques et les roches sont aussi nombreuses. On peut se demander si la mécanique de la rupture peut apporter un complément utile au calcul du béton armé ou encore un renouveau des méthodes ; il semble difficile aujourd'hui de répondre à ces questions pourtant importantes. Il ne s'agit pas de nier la valeur des méthodes classiques de calcul du béton armé ; elles ont fait leurs preuves. Cependant, on peut remarquer qu'elles sont surtout aptes à décrire l'état final de la structure. Elles ne fournissent pas de renseignement quantitatif sur la manière dont on arrive à cet état final, comment se propagent les fissures et à quelle vitesse. Or, cet aspect dynamique est important, ne serait-ce que par ses conséquences sur la redistribution des charges dans les structures hyperstatiques. La mécanique de la rupture est conçue pour répondre à de telles questions (ce qui ne veut pas dire qu'elle y réponde facilement). En outre, elle serait parfaitement apte à rendre compte, par le calcul, de l'effet combiné des armatures et des fibres. Enfin, les méthodes de la mécanique de la rupture pourraient apporter des informations sur le rôle des armatures en fatigue car c'est principalement un problème de propagation de fissure.

L'objectif est donc de caractériser le béton armé en tant que matériau composite ou, si l'on veut, de caractériser le rôle de l'armature vis-à-vis de la propagation de fissure.

Recherches antérieures sur la mécanique de la rupture appliquée au béton

La première publication date de 1961 [1]. Depuis, nous avons relevé une vingtaine d'articles dont les résultats sont assez dispersés [5 à 30]. En 1974, une étude bibliographique et critique sur la fissurabilité et la fragilité du béton hydraulique, réalisée par M. Baron [2], a montré qu'il y avait lieu de craindre que certains résultats trouvés par de nombreux expérimentateurs soient entachés d'erreurs car les éprouvettes utilisées étaient beaucoup trop petites ; par la suite, sept publications apparurent [24 à 30], parmi lesquelles on doit signaler les travaux de MM. Entov et Yagust [25] effectués sur des éprouvettes de grandes dimensions et dans des conditions de propagation quasi stable.

Ces travaux montrent que :

1. la valeur du facteur d'intensité de contrainte critique pourrait être deux ou trois fois plus grande pour un béton donné que les valeurs indiquées jusqu'ici par la littérature ;

2. la valeur du facteur d'intensité de contrainte critique augmenterait lorsque la fissure se propage ;

3. la dimension de la zone perturbée non élastique en fond de fissure serait de l'ordre d'une dizaine de centimètres, de sorte qu'une grande partie de l'énergie de rupture serait dissipée par microfissuration.

Il devient alors encore plus vraisemblable que, presque toujours, les conditions expérimentales des recherches antérieures étaient telles que les hypothèses qui fondent la validité de la mécanique linéaire de la rupture n'étaient pas satisfaites. En effet, cette théorie n'est valable que si la zone perturbée non élastique en avant du front de fissure est suffisamment petite et confinée dans un grand volume de comportement élastique. Par exemple, pour les métaux ; l'ordre de grandeur de la dimension de la zone plastique (R) en fond de fissure peut être approché selon Irwin [3,4] par :

$$R = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{R_e} \right)^2$$

où

K_{IC} est le facteur d'intensité de contrainte critique correspondant à la rupture brutale de l'éprouvette,

R_e la limite d'élasticité du métal.

Pour l'essai de flexion, la spécification ASTM E 399-74 impose les dimensions des éprouvettes :

a et $(w - a)$ et $B \geq 2,5 \times \pi \times R$, soit environ $\geq 8 R$

où

a désigne la longueur d'entaille,

w la hauteur de la poutre,

B la largeur de la poutre.

Cette règle empirique est une condition nécessaire pour utiliser valablement les concepts de la mécanique linéaire de la rupture. Si on l'appliquait au béton, on en déduirait qu'il faut interdire toutes les éprouvettes d'épaisseur inférieure à 80 cm. Ce serait peu réaliste, d'autant que beaucoup de parties d'ouvrages ne sont pas aussi épaisses. Mieux vaut alors utiliser d'autres concepts. Cela revient, en un premier temps, à caractériser la résistance à la propagation de fissure non plus par une constante, mais par une fonction de la longueur de fissure propagée (fig. 1).

Le LCPC a lancé en 1975 un programme de recherche dans ce domaine. Nous présentons ici les principaux enseignements tirés de plusieurs essais réalisés avec de grandes éprouvettes de type DCB (fig. 2) en béton de granulats traditionnels *non armé*. Ces essais étaient destinés à mettre au point la méthode (tableau I).

Les premiers résultats obtenus confirment et complètent ceux de MM. Entov et Yagust. Ils précisent l'ampleur de la zone microfissurée en avant du fond d'entaille. La résistance à la fissuration est caractérisée par la courbe R qui croît avec la propagation de fissure ; elle n'atteint une valeur stationnaire qu'après 50 cm environ de propagation.

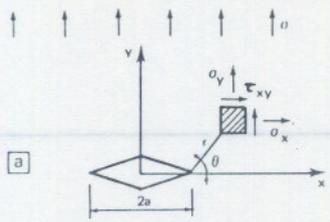
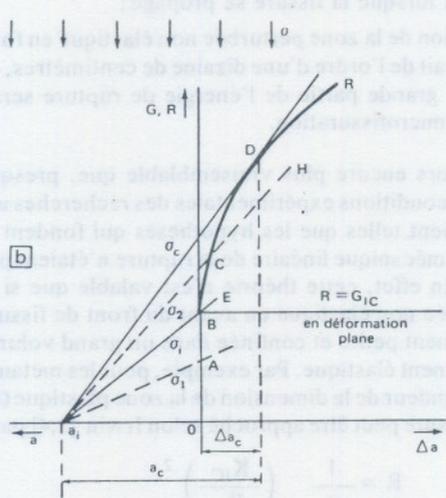


Fig. 1

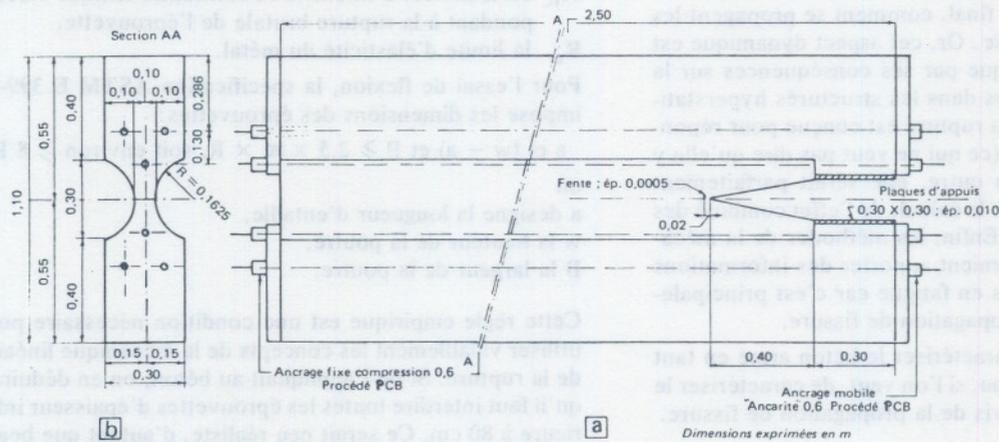
a - Plaque infinie possédant une fissure centrale de longueur 2a, soumise à une contrainte de traction uniforme σ . L'état de contrainte au voisinage du front de fissure au point de coordonnées (r, θ) est $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$. La théorie de l'élasticité donne :

- pour des tenseurs de contrainte : $\sigma_{ij} = (K_I / \sqrt{2\pi r}) f_{ij}(\theta)$
- pour des vecteurs de déplacement : $u_i = (K_I / 2\mu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta)$
où μ dépend de l'état de contrainte plane ou de déformation plane.



b - Variation de l'énergie de rupture R en cours de propagation de fissure (Courbe R : BCDR). L'énergie de rupture (R) et le taux de restitution d'énergie sont représentés en ordonnées et la propagation de fissure (Δa) en abscisse, la longueur de fissure initiale (a_0) étant représentée en abscisse négative. L'énergie de fissuration R est l'énergie consommée par le matériau pour faire avancer d'une unité de surface la propagation d'une fissure; le taux de restitution d'énergie (strain energy release rate) est l'énergie élastique disponible par unité de surface de progression de fissure. Dans le cas de la figure 1 (a) le taux de restitution d'énergie (G) est $G = (\sigma^2/E) \cdot \pi \cdot a$, représenté par une droite dont la pente est proportionnelle à σ^2 . a_1A, a_1B, a_1C, a_1D sont les droites représentant la variation de G pour les contraintes $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2$ et σ_c ($\sigma_1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_c$). Pour $\sigma = \sigma_1$, $G = OA$ inférieure à l'ordonnée de la courbe R, il n'y a aucune propagation de fissure; pour $\sigma = \sigma_1$, il y a propagation de fissure entre B et C, puis arrêt de fissure. En effet à cette contrainte σ_1 , après la propagation de fissure, G devient plus petit que l'énergie de rupture R (segment BE inférieur à l'ordonnée de la courbe R, BCDR); pour $\sigma = \sigma_c$, la droite a_1D est tangente à la courbe R en D, la propagation de fissure est brutale; l'abscisse du point D, Δa_c définit alors la longueur de fissure critique $a_c = a_0 + \Delta a_c$ qui caractérise la propagation de fissure brutale marquant la rupture de l'éprouvette.

Fig. 2 - Epreuve type DCB (poutre double console, ou Double Cantilever Beam).



a - Forme de l'éprouvette DCB de 2,50 m de long et de 1,10 m de hauteur. L'entaille est moulée dans le plan de symétrie de la poutre, son extrémité est constituée d'une feuille métallique de 2 cm de long, 0,5 mm d'épaisseur et 10 cm de large. Les torons de précontrainte et le système d'ancrage sont figurés sur ce schéma.

b - Section transversale de la poutre DCB à section progressivement amincie; au niveau du plan de symétrie de la poutre, appelé aussi plan de propagation de fissure, l'épaisseur est de 10 cm; on voit les emplacements des câbles de précontrainte introduits dans la poutre pour guider la direction de fissure (voir également la figure 3).

TABLEAU I
Récapitulation des essais DCB

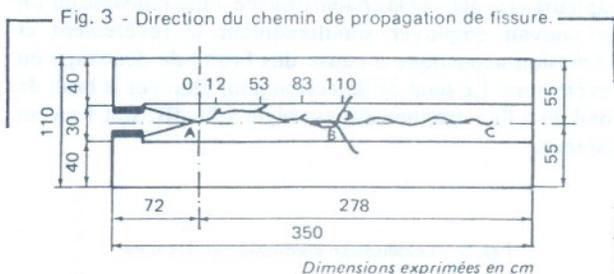
N°	Age (j)	Nature du béton	Position de l'éprouvette	Revêtement photo-élastique	Emission acoustique		Longueur de l'éprouvette (m)	Coffrage	Précontraint (t)	Conservation				Résultats
					(1)	(2)				RH (%)		T (°C)		
										min.	max.	min.	max.	
DCB ₁	58	non armé ⁽³⁾	horizontale	oui ⁽⁵⁾	oui	non	2,50	bois	8	40	65	15	25	disponible
DCB ₂	70	non armé ⁽³⁾	verticale	oui ⁽⁶⁾	oui	oui	2,50	bois	48	35	65	10	17	disponible
DCB ₃	28	non armé ⁽³⁾	verticale	néant	oui	oui	2,50	bois	48	25	60	10	20	néant ⁽⁸⁾
DCB ₄	28	non armé ⁽³⁾	verticale	néant	non	oui	3,50	métallique	48 et 106	60	83	18	20	disponible
DCB ₅	28	armé ⁽⁴⁾	verticale	oui ⁽⁷⁾	oui	non	3,50	métallique	106	40	80	15	20	disponible

- (1) Avec les appareils du LCPC à Nantes.
- (2) Avec les appareils et montage suivant la chaîne Dunegan-Endevco.
- (3) Béton hydraulique ordinaire de composition par mètre cube - ciment CPA 400: 400 kg; sable 0/5: 700 kg; gravillon 5/12: 1 105 kg; eau: 190 l.
- (4) Deux armatures de Ø 6 HA ont été placées à 1,40 m du fond d'entaille.
- (5) Revêtement sur 1 m en avant du fond d'entaille et 10 cm de large.
- (6) Revêtement sur toute la longueur de propagation de fissure (178 cm) et sur 20 cm de large.
- (7) Revêtement au fond d'entaille (20 x 20 cm) et au niveau d'armature sur une longueur de 60 cm, soit 30 cm de part et d'autre de l'armature.
- (8) Il s'est produit une rupture brutale de l'éprouvette par la coupure du courant électrique en début d'essai.

Fabrication des éprouvettes DCB*

La composition du béton est indiquée dans le tableau I. Le mélange des constituants s'effectuait dans un malaxeur à un axe vertical à train vaiseur à palettes de 250 l de capacité. La durée du malaxage était de 7 mn (2 mn à sec, 30 s de mouillage et 4 mn 30 s humide). Les caractéristiques du béton frais ont été déterminées par l'affaissement au cône (NF 18-451) et le temps d'écoulement dans le maniabilimètre LCL; les valeurs sont indiquées dans le tableau II. Il a fallu cinq gâchées de 250 l pour fabriquer chaque éprouvette DCB (fig. 2); chacune a été décoffrée 20 jours après et conservée dans l'atmosphère ambiante du laboratoire jusqu'au jour de l'essai (voir l'humidité relative RH et la température T dans le tableau I). La mise en place du béton frais a été réalisée avec une aiguille vibrante à air comprimé de 33 mm. Chaque éprouvette DCB était accompagnée d'une série d'éprouvettes cylindriques et prismatiques classiques destinées à déterminer les caractéristiques mécaniques du béton (tableau II).

* DCB signifie poutre double console ou « Double Cantilever Beam ».



a - Schéma calqué d'une photo prise après la rupture d'une éprouvette DCB₄ montrant le rôle important de la précontrainte longitudinale pour diriger le chemin de propagation de fissure. Au départ, la précontrainte était de 48 t. La propagation suit le chemin AB et la bifurcation de fissure a été constatée en plusieurs endroits à 12, 53, 83 et 110 cm du fond d'entaille A; en B, la fissure ne revient pas dans l'axe de la poutre et a tendance à dévier; en augmentant la précontrainte jusqu'à 106 t on a ramené la fissure dans l'axe suivant le chemin DC avec le point D à 114 cm du fond d'entaille comme amorce de fissure.

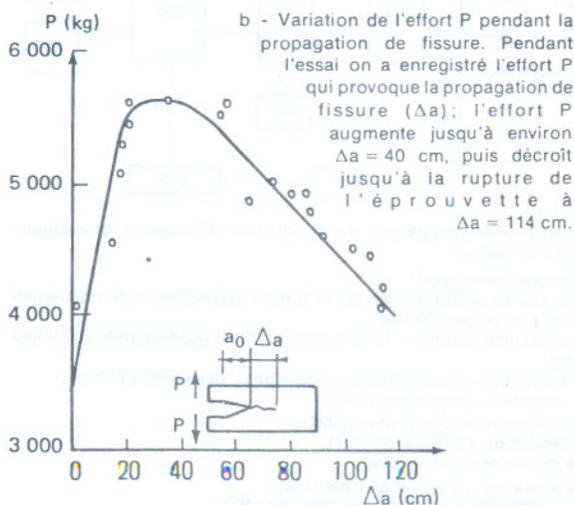
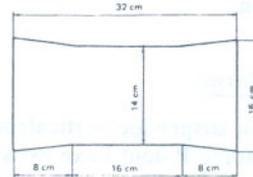


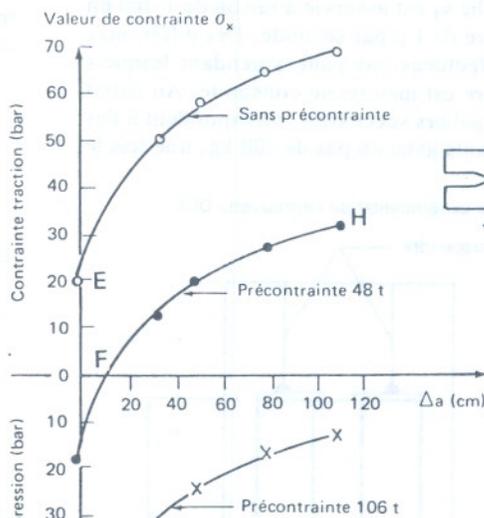
TABLEAU II
Résistance mécanique du béton constituant l'éprouvette DCB

Age (j)	Compression ⁽¹⁾ (bar)	Fendage ⁽¹⁾ (bar)	Flexion ⁽²⁾ (bar)	Traction directe ⁽³⁾ (bar)	Module ⁽⁴⁾ E (bar)
7	310	36	31		
14	353	37	31		
28	413	40	35	25	4.10 ⁵
70	451	45	40	28	4.10 ⁵

- (1) Eprouvette cylindrique 16 × 32, conservée dans l'eau à température 20° ± 1 °C.
- (2) Eprouvette prismatique 10 × 10 × 40, conservée dans l'eau à température 20° ± 1 °C.
- (3) Eprouvette modèle LCPC ci-dessous retirée de l'eau 3 jours avant le jour de l'essai pour coller les plaques de traction aux deux extrémités.



- (4) Module tangent à l'origine de la courbe effort-déformation en compression.
- Les valeurs indiquées dans ce tableau sont la moyenne de trois éprouvettes.
Affaissement du cône (NF 18-451) : 2,50 cm.
Temps d'écoulement (maniabilimètre, modèle LCPC) : 22 s.



c - Développement de la contrainte de traction longitudinale σ_x suivant que la poutre est sans précontrainte ou précontrainte à 48 ou 106 t. Cette contrainte est la cause de la déviation de fissure par rapport à l'axe de la poutre. Sans la précontrainte, $\sigma_x = 20$ bar (point E) pour amorcer la fissure au fond d'entaille et qui croît quand la fissure se propage; il est donc impossible d'étudier la propagation de fissure. Pour la précontrainte de 48 t, il se développe une traction longitudinale σ_x à partir de 10 cm de propagation de fissure (point F) et qui atteint 32 bar à $\Delta a = 110$ cm (point H), correspondant au point B de la figure 3(a) où la fissure part en déviation sans revenir à l'axe de la poutre. Quand la précontrainte est passée à 106 t, la section du béton est partout comprimée et le chemin de propagation DC est plus uniforme et plus rectiligne que dans le cas précédent AB. σ_x a été calculé par la relation en béton précontraint d'une poutre en flexion:

$$\sigma_x = \frac{F}{B} - \frac{F e_0 v_i}{I} - \frac{M_M v_i}{I}$$

dans laquelle F = 24 ou 53 t suivant que la précontrainte est de 48 ou 106 t; M_M est le moment à l'extrémité d'une fissure égal au produit de P par la longueur de fissure correspondante (fig. 3b); B = 1450 cm², $e_0 = 8,50$ cm; $v_i = 30,55$ cm; I = 302513 cm⁴.

Principe de l'essai

Direction du chemin de propagation de fissure

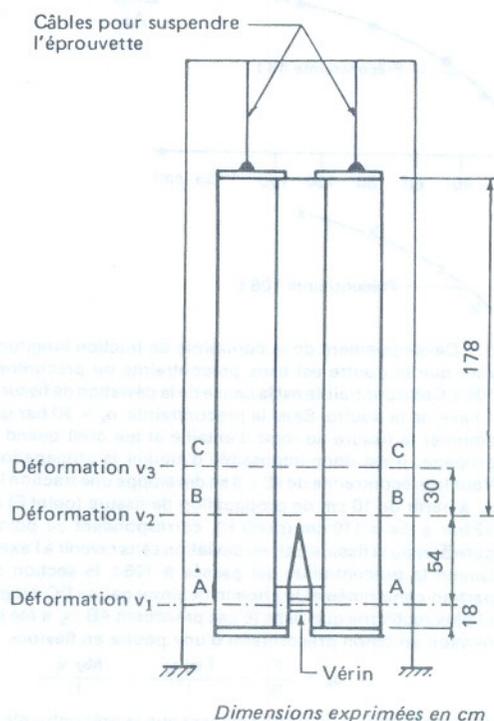
Pour que la fissure suive le plan de symétrie de l'éprouvette DCB, on a introduit une force de précontrainte par l'intermédiaire de six torons de 15 mm de diamètre (fig. 2). La figure 3 montre l'efficacité de la précontrainte dans la direction du chemin de propagation de fissure afin d'éviter que la fissure ne dévie pendant l'essai. La figure 3 (c) montre le développement de la contrainte de traction longitudinale suivant que la poutre est sans précontrainte ou précontrainte à 48 ou 106 t. La figure 3 (a) montre la propagation de fissure suivant que la précontrainte est de 48 ou 106 t. On voit qu'il est impossible d'étudier la propagation de fissure de la poutre DCB sans précontrainte longitudinale sinon la fissure dévierait après une dizaine de centimètres de propagation.

Déroulement de l'essai

La poutre DCB est suspendue verticalement (fig. 4). Un vérin exerce une force P dont l'axe est situé à 54 cm en amont du fond d'entaille; la longueur de propagation de fissure possible est de 178 cm, trois paires de capteurs de déformation ont été installés de part et d'autre de l'éprouvette dans les plans AA, BB, CC pour mesurer les déplacements v_1 , v_2 , v_3 .

L'ouverture d'entaille v_1 est asservie à raison de 1 mm en 20 mn, soit de l'ordre de 1μ par seconde. Des différentes mesures ont été effectuées par paliers pendant lesquels l'ouverture de fissure est maintenue constante. Au début du chargement, les paliers successifs correspondent à des chargements croissants avec un pas de 200 kg; une fois le

Fig. 4 - Montage expérimental de l'éprouvette DCB.



L'éprouvette DCB est suspendue au portique. Le vérin est introduit entre les lèvres de l'entaille; son axe est à 54 cm du fond d'entaille. La fissure peut se propager sur 178 cm du bas vers le haut.

chargement maximal atteint, les paliers successifs correspondent à des ouvertures de fissure, croissantes, par pas de 50μ (partie descendante de cette courbe P, v_1). Des cycles de charge-décharge ont été réalisés pour calculer expérimentalement la complaisance de l'éprouvette à chaque longueur de fissure. On a volontairement prolongé la durée de quelques paliers jusqu'à 10 à 20 mn afin d'étudier la propagation différée de fissure; pour les autres paliers, cette durée était en général de trois à cinq minutes.

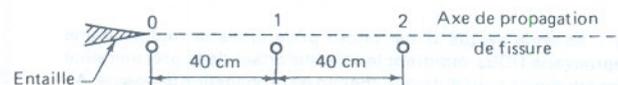
Principe de mesure et matériels utilisés

On a suivi la propagation de fissure visible sur une face à l'aide d'une loupe à lentille asphérique, de grossissement 5, munie d'un éclairage fluorescent circulaire; sur une autre face, un revêtement photo-élastique aux caractéristiques suivantes a été utilisé dans quelques essais:

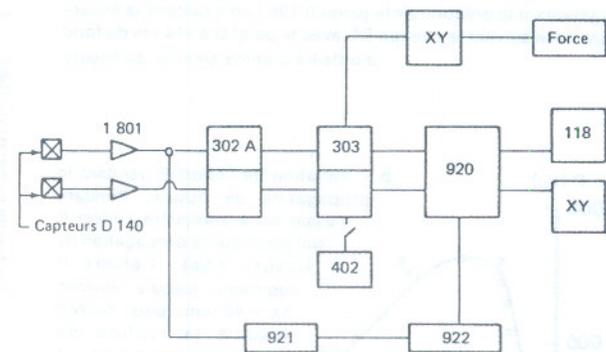
- coefficient photo-élastique: $K = 0,10$
- module d'élasticité: $F = 29\,500 \text{ bar}$
- coefficient de poisson: $\nu = 0,36$
- épaisseur du revêtement: $3,10 \text{ mm}$
- déformation étalonnée: une frange ($\epsilon_1 - \epsilon_2$)
= $820 \cdot 10^{-6}$.

La détection de l'endommagement interne du béton se fait par localisation linéaire de l'émission acoustique des bruits émis lors des ruptures; la figure 5 montre la position des capteurs et le plan de la chaîne utilisée. On a constaté qu'on ne pouvait employer simultanément le revêtement et l'émission acoustique à cause des bruits de décollement du revêtement. Le seuil de détection pour éliminer le bruit de fond dû à l'environnement est réglé à 25 dB, soit $1 \mu\text{V}$ au capteur.

Fig. 5 - Localisation d'émission acoustique.



a - Positions des capteurs d'émission acoustique: Capteurs 0, 1, 2.

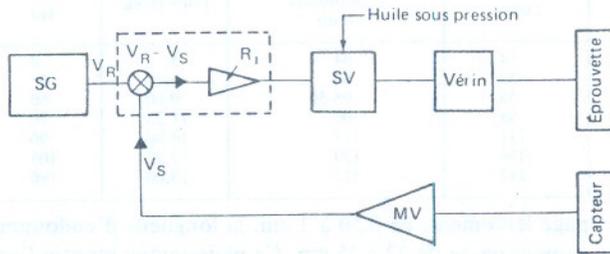


b - Diagramme synoptique de la chaîne d'émission acoustique Dunegan-Endevco.

Ce montage comprend :

- deux capteurs différentiels (D 140) dont la fréquence de résonance est de l'ordre de 200 kHz;
- deux préamplificateurs (1801) avec un filtre passe-bande (120/ 240 kHz);
- un amplificateur-conditionneur de signal, deux voies (302A);
- un compteur, deux voies (303);
- un analyseur de distribution (920);
- un détecteur d'amplitude (921);
- une mémoire externe (922);
- une visualisation en temps réel (118);
- deux enregistreurs XY et une horloge (402).

La programmation de la déformation v_1 a été réalisée à l'aide d'un régulateur automatique dont le système d'asservissement est représenté sur la figure 6.



Les autres matériels utilisés sont : un enregistreur XY pour la courbe (P, v_1) et un enregistreur en fonction du temps pour (P, t) , (v_1, t) , (v_2, t) , (v_3, t) .

Fig. 6 - Système d'asservissement du régulateur automatique universel de Mohr-Federhaff - Losenhausen (BFGR) qui comprend :

- le générateur de fonction (SG) fournit une tension électrique (V_R) représentant la loi de variation de la sollicitation imposée à l'éprouvette;
- un capteur associé à un amplificateur (MV) dont la tension de sortie (V_S) représente la valeur de la sollicitation imposée à l'éprouvette (force ou déformation);
- une unité (R_1) compare les tensions V_R et V_S ; le signal d'erreur amplifié sert à commander l'ouverture ou la fermeture d'une servo-valve électro-hydraulique (SV);
- la servo-valve alimentée en huile sous pression délivre un débit d'huile au vérin, fonction du courant de commande;
- le vérin, ainsi asservi, sollicite l'éprouvette suivant la loi imposée par le générateur.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Comportement de l'éprouvette

La figure 7 (a) montre la courbe (P, v_1) en cours d'essai, réalisée à différents paliers et à différents cycles de charge-décharge. La rupture de l'éprouvette a eu lieu au palier 97. L'allure de la courbe est semblable à celle obtenue sur la pâte de ciment et le mortier [30]. On observe deux phénomènes dans cette courbe.

Phénomène de relaxation

A partir d'un certain niveau de chargement, il se produit une relaxation quand on arrête la montée en charge en maintenant constante l'ouverture d'entaille v_1 ; la relaxation est notable dès qu'une propagation de fissure est visible. Cette chute de charge croît progressivement pour atteindre une valeur à peu près stationnaire au sommet de la

courbe (P, v_1) . La durée des paliers était en moyenne de 5 à 10 mn. La figure 7 (b) montre les détails de relaxation au palier 87 (AB); si, à la fin de la relaxation (point B), on fait un cycle décharge-recharge, la courbe de rechargement repasse par le point B, et si à ce point on maintient v_1 constante, on observera encore une fois une nouvelle relaxation BC.

Phénomène d'hystérésis

Ce phénomène est constaté quand on a réalisé les cycles de charge-décharge. La figure 7 (c) montre une boucle d'hystérésis du palier 78 au palier 80 de la figure 7 (a). Dans cette boucle, la droite MN est le prolongement rectiligne de la courbe de déchargement de M à N. Dans cette étude, l'inverse de la pente de la droite MN est la complai-

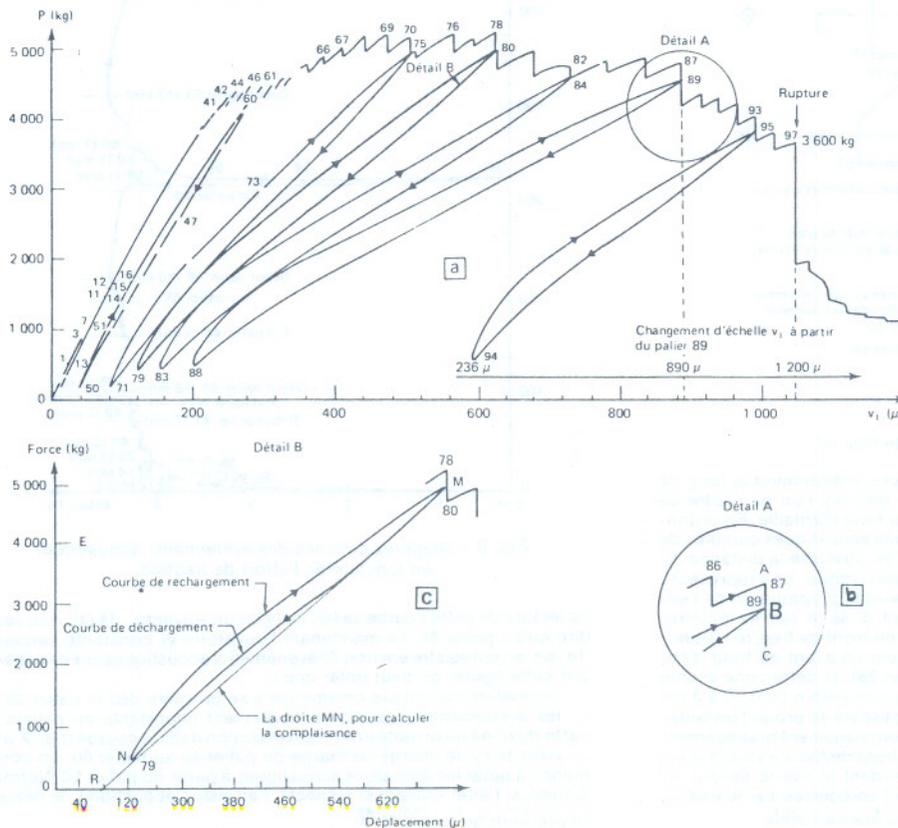


Fig. 7 - Courbe (P, v_1) .

a - En ordonnée l'effort P et en abscisse l'ouverture d'entaille v_1 . Les chiffres figurés sur cette courbe représentent les numéros des différents paliers réalisés pendant l'essai, v_1 étant asservi à raison de $1 \mu/s$. Des paliers de 200 kg ont été réalisés jusqu'au n° 66. A partir de ce palier, la chute de charge était importante et on a réalisé des paliers de déformation v_1 de 30 à 50 μ jusqu'en fin d'essai. A chaque arrêt de la machine, on constate une chute de charge (celle-ci est nette à partir du palier 44) et qui augmente jusqu'au sommet de la courbe (P, v_1) ; cette relaxation restera constante (environ 200 kg) jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

b - En maintenant constante l'ouverture v_1 pendant un certain temps, la charge chute de A à B; AB représente la grandeur de relaxation à ce palier 87. A la fin de relaxation en B, on fait un déchargement puis un rechargement, la courbe de rechargement repasse par le point B et si l'on arrête la machine en B, on observe une nouvelle chute de charge BC.

c - Cycle de charge-décharge. Les deux courbes : déchargement MN et rechargement NM ne coïncident pas; il se forme alors une boucle d'hystérésis. La droite MN a été choisie conventionnellement pour déterminer la complaisance de l'éprouvette pour la longueur de fissure égale à celle observée à la fin du palier 78. OR représente la déformation résiduelle.

sance de l'éprouvette (correspondant ici à la longueur de fissure observée au palier 78).

L'intersection de cette droite MN avec l'axe de déformation v_1 donne la déformation résiduelle OR. La valeur de la complaisance, déterminée expérimentalement de cette façon, est voisine de la valeur calculée pour différentes longueurs de fissure (fig. 10). Le tableau III donne les valeurs de la complaisance de l'éprouvette et les déformations résiduelles correspondant à chaque longueur de fissure, déduites de la courbe (P, v_1) de la figure 7 (a).

Propagation de fissure

Pour amorcer la fissure au fond d'entaille, la figure 8 montre que, à l'aide de la technique de localisation linéaire de l'émission acoustique, il se forme une longueur d'endommagement par création de microfissures de plus de 20 cm. Par la suite, pendant que la fissure visible se pro-

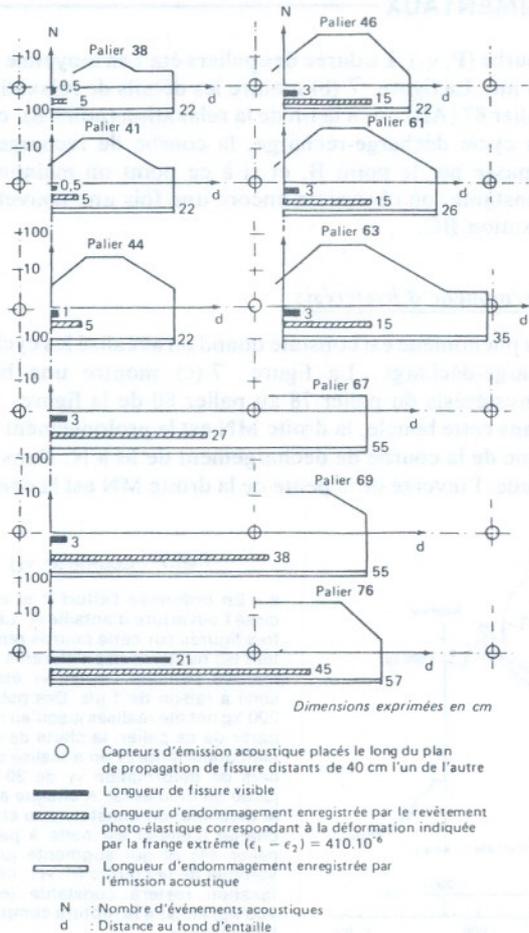


Fig. 8 - Propagation de fissure.

Les trois récepteurs acoustiques sont placés linéairement le long de l'axe présumé de propagation de fissure, distants l'un de l'autre de 40 cm, le premier étant à 5 cm en arrière du fond d'entaille. En ordonnée, on enregistre le nombre des événements acoustiques cumulés de chaque palier en échelle logarithmique, et en abscisse la distance du fond d'entaille où se produit une émission acoustique; on y représente également la propagation de fissure visible et la propagation de l'endommagement indiquée par le revêtement dans le but de montrer l'existence d'une zone perturbée en avant du front de fissure visible. Il se forme une longueur d'endommagement en avant du fond d'entaille de 22 cm à l'amorce de fissure (palier 38), et cette zone évolue jusqu'à 55 cm pour une progression de fissure visible de 0,50 à 3 cm (paliers 38 à 69). Au n° 76, la propagation de fissure se produit instantanément de 3 à 21 cm avec la longueur d'endommagement pratiquement inchangée (57 cm); à ce palier, en avant du front de fissure visible, il y a une zone perturbée de $57-21 = 36$ cm. Pendant le même temps, on constate que la longueur d'endommagement enregistrée par le revêtement photo-élastique évolue plus vite que la fissure visible.

TABLEAU III
Valeurs expérimentales de la complaisance et de la déformation résiduelle

Longueur de fissure visible (cm)	Longueur du revêtement endommagé (cm)	Complaisance (10^{-8} m/kg)	Déformation résiduelle (μ)
54	54	5	0
57	69	6,25	25
58	95,50	9,00	60
98	106	11,25	70
111	117	14,00	90
126	129	17,25	105
147	157	25,00	190

page lentement, de 0,50 à 3 cm, la longueur d'endommagement passe de 22 à 55 cm. Ce phénomène montre l'importance de la zone de microfissuration pendant la première propagation de fissure visible au fond d'entaille.

Par convention, la longueur d'endommagement a été repérée dans le revêtement photo-élastique comme correspondant à la zone délimitée par la première demi-frange (range isochromatique d'ordre 0,5), ce qui signifie que $\epsilon_1 - \epsilon_2 = 410 \cdot 10^{-6}$; cette longueur évolue aussi plus rapidement que la fissure visible. On a remarqué que les bruits de décollement du revêtement en cours d'essai peuvent influencer la localisation d'émission acoustique; il en résulte qu'on ne peut pas utiliser simultanément ces deux techniques. De toute façon, il est clair qu'il existe en avant du front de fissure visible une zone perturbée de plusieurs dizaines de centimètres.

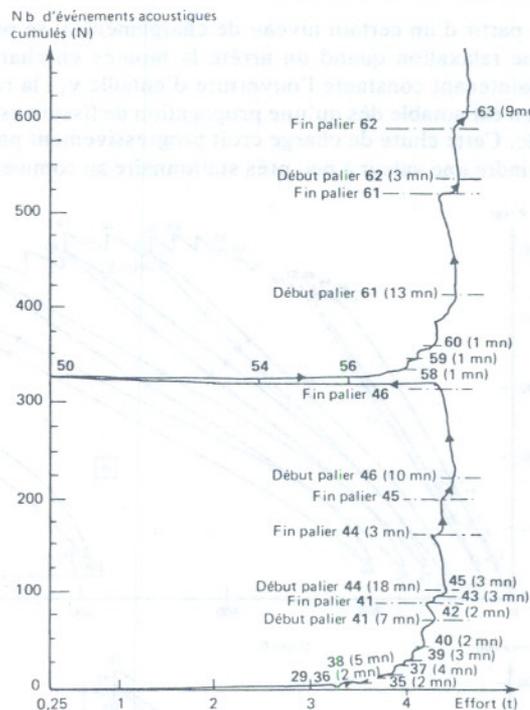


Fig. 9 - Nombres cumulés des événements acoustiques en fonction de l'effort de traction.

La lecture de cette courbe se fait de la façon suivante : 44 (18 mn) veut dire qu'au palier 44, en maintenant l'ouverture v_1 constante pendant 18 mn, on enregistre environ 70 événements acoustiques sur ce palier. Sur cette figure, on peut noter que : — l'émission acoustique commence à se produire dès le palier 29; — les événements acoustiques deviennent importants en paliers à partir du n° 44 où on note une nette relaxation dans la courbe (fig. 7 a); — dans le cycle charge-décharge du palier 46 au palier 60, on commence à noter les émissions acoustiques à partir du palier 56. Normalement, si l'effet Kraser est respecté, l'émission acoustique ne devrait se produire qu'au palier 60.

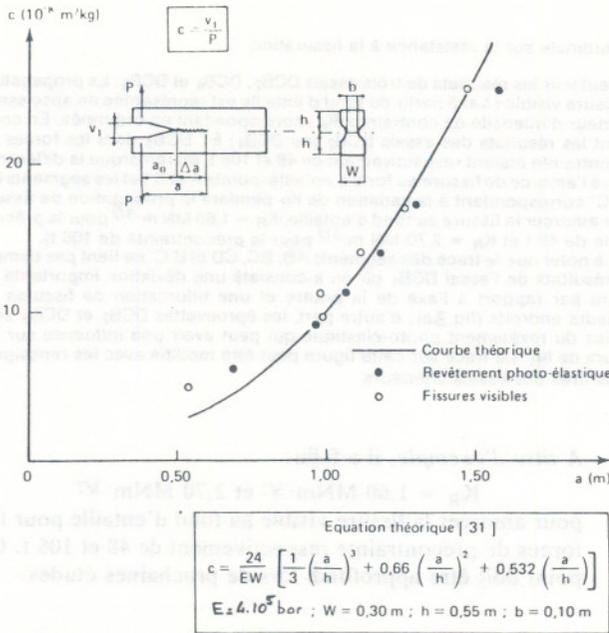


Fig. 10 - Courbe de complaisance C.

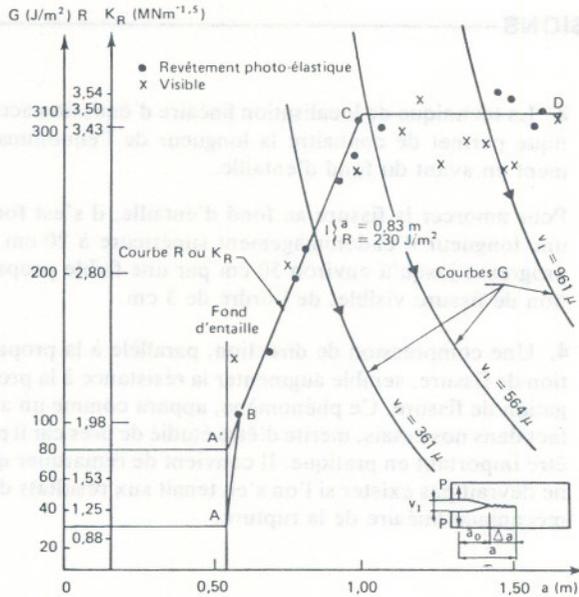


Fig. 11 - Energie de la rupture du béton (courbe R).

Courbe R

- ABCD : représente la courbe R, correspond à l'amorce de fissure au fond d'entaille au moment où apparaît une perturbation dans le revêtement photo-élastique collé au fond d'entaille;
- A :
- de A à B (segment AB) : début d'apparition de fissure visible de 1 à 3 cm; à ce stade, la zone de microfissuration s'étend jusqu'à environ 50 cm en avant du fond d'entaille (fig. 8);
- BC : correspond à l'accroissement de R sur les 50 cm de microfissuration;
- CD : correspond à la propagation de fissure, à la valeur stationnaire de R = 310 J/m² (où KR = 3,50 MN m^{-3/2});
- D : point correspondant à la rupture complète de l'éprouvette;
- R : courbe appelée aussi courbe KR en graduant en ordonnées KR déduit de R par la relation K² = ER (avec E = 4 . 10⁵ bar ou 3,92 . 10¹⁰ N/m²).

Courbes G

- G : décroît quand la fissure se propage;
- I (a = 0,83 m, R = 230 J/m²) : ce point veut dire que la fissure de longueur a = 0,83 m commence à se propager quand l'ouverture d'entaille v₁ = 360 μ. Après une certaine propagation, la fissure s'arrête parce que G < R.

On a constaté que les événements acoustiques sont enregistrés, même en palier (fig. 9). Les événements acoustiques sont importants en palier à partir du palier 44 où l'on commence à déceler une relaxation, nette sur la figure 7 (a). Il semble alors que la chute de charge en palier (relaxation) soit liée à la création des microfissures.

Enfin, on a noté la propagation contrôlée continue de fissure pendant la montée d'un palier à un autre, l'apparition brutale d'un allongement de fissure au sommet d'un palier et la propagation différée en palier.

Courbe R

En constatant que les valeurs expérimentales de la complaisance de l'éprouvette se rapprochent de celles de la courbe théorique (fig. 10) dont l'équation est déduite de Wiederhorn [31], on peut calculer le taux de restitution d'énergie G par la relation :

$$\text{Equation 1} \quad G = \frac{P^2}{2b} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

avec

$$c = \frac{24}{EW} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a}{h} \right)^3 + 0,66 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + 0,532 \left(\frac{a}{h} \right) \right]$$

La signification des symboles est indiquée sur la figure 10.

En cours d'essai, on relève la valeur de la charge P provoquant la propagation de fissure de longueur a et on calcule le taux de restitution G par l'équation 1 (appelé le taux de restitution d'énergie critique et noté G_c). En répétant ce calcul pour différentes longueurs de fissure, on obtient la courbe R en joignant tous les points de coordonnées G_c et les différentes longueurs de fissure correspondantes (fig. 11); elle est constituée par les trois segments AB, BC, CD.

Dans les conditions expérimentales de nos essais de programmation v₁ (à raison de 1 μ/s), le taux de restitution

d'énergie s'écrit, avec $P = \frac{V_1}{C}$:

$$\text{Equation 2} \quad G = \frac{1}{2b} \cdot \frac{v_1^2}{C^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

A chaque ouverture d'entaille (v₁) donnée, l'énergie (G) décroît quand la longueur de fissure augmente (fig. 11). Pour le point I, il a fallu ouvrir l'entaille à v₁ = 360 μ pour faire se propager la fissure (de longueur a = 83 cm) qui s'arrêtera quelques centimètres plus loin, car après la propagation de fissure, l'énergie disponible G devient inférieure à l'énergie de fissuration R. C'est dans ces conditions que nous avons pu réaliser la rupture contrôlée de l'éprouvette et étudier la propagation de fissure sur une distance de plus de un mètre.

La résistance à la fissuration R croît sur les premiers cinquante centimètres de propagation de fissure, puis reste stationnaire jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

Influence de la précontrainte longitudinale à la résistance de fissuration

Dans l'état actuel de nos essais, on a constaté l'influence de la précontrainte longitudinale sur la résistance à la fissuration pour amorcer la fissure au fond d'entaille et dans les premiers cinquante centimètres de propagation de fissure (fig. 12).

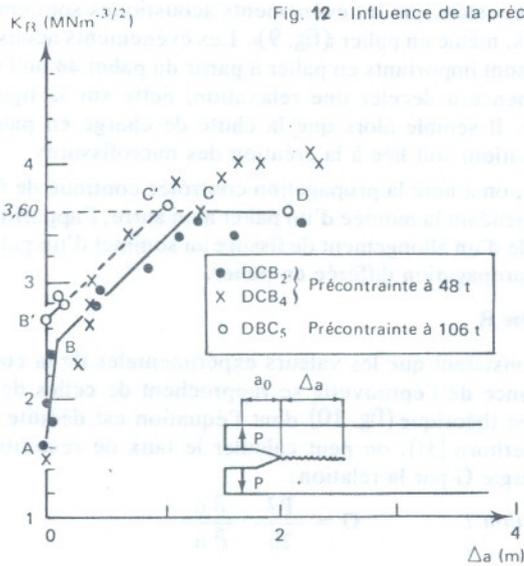


Fig. 12 - Influence de la précontrainte longitudinale sur la résistance à la fissuration.

On peut voir les résultats de trois essais DCB₂, DCB₄ et DCB₅. La propagation de fissure visible (Δa) à partir du fond d'entaille est représentée en abscisse et le facteur d'intensité de contrainte (K_R) correspondant en ordonnée. En comparant les résultats des essais DCB₂ (ou DCB₄) ET DCB₅ dont les forces de précontrainte étaient respectivement de 48 et 106 t, on remarque la différence de K_R à l'amorce de fissure au fond d'entaille (points A et B') et les segments BC et B'C' correspondant à la variation de K_R pendant la propagation de fissure (pour amorcer la fissure au fond d'entaille, $K_R = 1,60 \text{ MN m}^{-3/2}$ pour la précontrainte de 48 t et $K_R = 2,70 \text{ MN m}^{-3/2}$ pour la précontrainte de 106 t). Il est à noter que le tracé des segments AB, BC, CD et B'C' ne tient pas compte des résultats de l'essai DCB₄ où on a constaté une déviation importante de fissure par rapport à l'axe de la poutre et une bifurcation de fissures en plusieurs endroits (fig. 3a); d'autre part, les éprouvettes DCB₂ et DCB₅ sont munies du revêtement photo-élastique qui peut avoir une influence sur les valeurs de K_R . Le tracé sur cette figure peut être modifié avec les renseignements tirés des essais ultérieurs.

A titre d'exemple, il a fallu :

$K_R = 1,60 \text{ MNm}^{-3/2}$ et $2,70 \text{ MNm}^{-3/2}$
pour amorcer la fissure visible au fond d'entaille pour les forces de précontrainte respectivement de 48 et 106 t. Ce point doit être approfondi lors de prochaines études.

CONCLUSIONS

Actuellement, nous ne pouvons retenir que les renseignements suivants :

1. Il est inacceptable d'utiliser les petites éprouvettes en mécanique de la rupture. Les éprouvettes doivent être assez grandes pour que la longueur réservée à la propagation de fissure en avant du fond d'entaille soit supérieure à 50 cm.
2. Pour le béton, la courbe R peut être considérée comme une caractéristique de la résistance du béton à la fissuration. La valeur du facteur d'intensité de contrainte à l'amorce de fissure au fond d'entaille est supérieure à $1 \text{ MNm}^{-3/2}$; elle varie avec la propagation de fissure sur environ 50 cm et reste stationnaire jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette. La valeur stationnaire est triple de la valeur initiale.

3. La technique de localisation linéaire d'émission acoustique permet de connaître la longueur de l'endommagement en avant du fond d'entaille.

Pour amorcer la fissure au fond d'entaille, il s'est formé une longueur d'endommagement supérieure à 20 cm qui progresse jusqu'à environ 50 cm par une faible propagation de fissure visible, de l'ordre de 3 cm.

4. Une compression de direction, parallèle à la propagation de fissure, semble augmenter la résistance à la propagation de fissure. Ce phénomène, apparu comme un artefact dans nos essais, mérite d'être étudié de près car il peut être important en pratique. Il convient de remarquer qu'il ne devrait pas exister si l'on s'en tenait aux résultats de la mécanique linéaire de la rupture.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] KAPLAN M.F., Crack propagation and the fracture of concrete, *J. ACI*, 5, Proc., vol. 58, nov. 1961, p. 591-610.
- [2] BARON J., Fragilité et fissurabilité du comportement du béton hydraulique, Rapp. Rech. LCPC, 69, oct. 1977.
- [3] FRANÇOIS D., JOLY L., *La Rupture des métaux*, Masson et Cie éd., 1972.
- [4] BROCK D., *Elementary engineering fracture mechanics*, Nordhoff int. publishing, 1974.
- [5] BLAKEY F.A., BERESFORD F.D., IRWIN G.R., GLUCKLICH J., Discussion of a paper by KAPLAN M.F., ref. 5, *J. ACI*, 6, Proc., vol. 59, Part 2, juin 1962, p. 919-929.
- [6] MOAVENZADEH F., KUGUEL R., Fracture of concrete, *J. Materials (JMLSA)*, vol. 4, n° 8, sept. 1969, p. 497-519.
- [7] GLUCKLICH J., Fracture of plain concrete, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 89, n° EM6, déc. 1963, p. 127-138.
- [8] SHAH S.P., MCGARRY F.J., Griffith fracture criterion and concrete, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 97, n° EM6, déc. 1971, p. 1663-1676.
- [9] BROWN J.H., POMEROY C.D., Fracture toughness of cement paste and mortars, *Cement and Concrete Research*, special issue on Fracture, vol. 3., n° 4, juil. 1973, p. 475-480.
- [10] BROWN J.H., Measuring the fracture toughness of cement paste and mortars, *Mag. Concrete Research*, vol. 24, n° 81, déc. 1972, p. 185-196.
- [11] NAUSS D.J., LOTT J.L., Fracture toughness of Portland cement concrete, *J. ACI*, 6, Proc. vol. 66, juin 1969, p. 481-489.
- [12] LOTT J.L., KESLER C.E., Crack propagation in plain concrete, Symposium on Structure of Portland Cement paste and concrete, Washington, HRB, Spec. Rep., 90, 1966, p. 204-218.
- [13] WELCH G.B., HAISMAN B., The application of fracture mechanics to concrete and the measurement of fracture toughness, *Matériaux et Construction, Rilem*, vol. 2, n° 9, mai-juin 1969, p. 171-177.
- [14] RADJY F., HANSEN T.C., Fracture of hardened cement paste

- and concrete, *Cement and Concrete Research*, special issue on fracture, vol. 3, n° 4, juil. 1973, p. 343-361.
- [15] KAPLAN M.F., The application of fracture mechanics to concrete, *Cement and Concrete Assoc. Proc. int. Conf.*, London, sept. 1965, p. 169-175.
- [16] HUDSON J.A., MARATHE M.S., Discussion de la réf. 9, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 98, n° EM3, juin 1972, p. 1310-1313.
- [17] GLUCKLICH J., Static and fatigue fractures of Portland cement mortar in flexure, *Proc., First int. Conf. on fracture*, vol. 3, Sendai, Japan, 1965., p. 1343-1382.
- [18] NADEAU J.S., MINDESS S., HAY J.M., Slow crack growth in cement paste, *J. Amer. Ceramic Soc. (JACS)*, vol. 57, n° 2, févr. 1974, p. 51-54.
- [19] RADJY F., Fracture of hardened cement paste in relation to surface forces and porosity, *J. Amer. Ceramic Soc. (JACS)*, vol. 57, n° 2, févr. 1974, p. 88-89.
- [20] ROMUALDI J.P., BATSON G.B., Mechanics of crack arrest in concrete, *S. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 89, n° EM3, juin 1963, p. 147-168.
- [21] ROMUALDI J.P., BATSON G.B., Behavior of reinforced concrete beams with closely spaced reinforcement, *J. ACI*, 6, Proc. vol. 60, juin 1963, p. 775-790.
- [22] ROMUALDI J.P., MANDEL J.A., Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement, *J. ACI*, 6, Proc. vol. 61, juin 1964, p. 657-671.
- [23] ROMUALDI J.P., The static cracking stress and fatigue strength of concrete reinforced with short pieces of thin steel wire, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 98, n° EM3, juin 1972, p. 190-201.
- [24] MAZARS J., *Prévision de la rupture des structures en béton par la mécanique de la rupture*, Thèse doct. 3° cycle, ENSET, juin 1976.
- [25] ENTOV V.M., YAGUST V.I., Experimental investigation of laws governing quasi static development of microcracks in concrete, traduit du russe dans *Mechanics of Solids*, vol. 10, n° 4, 1975, p. 87-95.
- [26] WALSH P.F., Crack initiation in plain concrete, *Mag. Concrete Research*, vol. 28, n° 94, mars 1976, p. 37-41.
- [27] EVANS A.G., CLIFTON J.R., ANDERSON E., The fracture mechanics of mortars, *Cement and Concrete Research*, vol. 6, 1976, p. 535-548.
- [28] MINDESS S., NADEAU J.S., Effect of notch width on K_{IC} for mortar and concrete, *Cement and Concrete Research*, vol. 6, 1976, p. 529-534.
- [29] LENAIN J.C., *Etude de la résistance à la fissuration d'un matériau composite à matrice fragile et fibres discontinues : amiante-ciment*, thèse doct. ing. Univ. Tech., Compiègne, oct. 1976.
- [30] HILLEMEIER B., HILSDORF H.R., Fracture mechanics studies on concrete compounds, *Cement and Concrete Research*, vol. 7, 1977, p. 523-536.
- [31] WIEDERHORN S.M., SHORB A.M., MOSE R.L., *J. Appl. Physics*, 39, p. 1569.

RUPTURE DIFFEREE ET PROPAGATION DES FISSURES DANS

LES PROPERGOLS COMPOSITES (*)

Bernard SCHAEFFER

Centre de Recherches du Bouchet

91710 - Vert-le-Petit

RESUME

La rupture différée des propergols composites s'interprète en faisant intervenir la notion de vitesse de propagation des fissures.

Une loi expérimentale reliant la vitesse des fissures au facteur d'intensité de contraintes appliqué à la fissure a été établie. En l'associant à la loi de comportement viscoélastique, on retrouve par le calcul l'enveloppe de rupture de Smith.

ABSTRACT

Delayed fracture of solid propellants is described with help of a crack propagation rate. Crack speed is related to the applied stress intensity factor through an experimentally established law. The Smith failure envelope may be obtained by computation using the crack propagation law associated with the viscoelastic modulus.

La loi de propagation des fissures pour s'écrit facilement dans certaines cas. Prenons le cas d'une éprouvette à deux entailles latérales pro-

=====
$$K_{Ic} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{Y}$$

où σ_c est la contrainte nette (c'est-à-dire ramenée à la section restante) la est la distance entre les deux entailles de fissures. Si la force appliquée est constante, on a :

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 7 décembre 1978.

(A)
$$\frac{dK_I}{dt} = \frac{K_I}{v} \left(1 + \frac{K_I}{K_{Ic}} \right)$$

K_{Ic} est le facteur d'intensité de contraintes initial, v est la vitesse de propagation moyenne de chaque fissure et t_0 le délai de rupture. Cette loi permet de déterminer simplement la loi de propagation des fissures.

1. INTRODUCTION :

Les matériaux viscoélastiques sont caractérisés par la sensibilité de leurs propriétés mécaniques au facteur temps. Leur comportement rhéologique est maintenant assez bien représenté à l'aide de divers modèles utilisant la viscoélasticité linéaire. L'influence du temps sur leurs caractéristiques de rupture est moins bien connue. On y observe un phénomène de rupture différée qui se produit après un temps d'incubation variable suivant la sollicitation, qui peut être relié à la vitesse de propagation des fissures, elle-même fonction du facteur d'intensité de contraintes appliqué.

2. CONSIDERATIONS THEORIQUES :

La rupture retardée est connue depuis longtemps, en particulier dans les verres [1] où elle a été interprétée par CHARLES [2]. Le délai de rupture est le temps nécessaire à la fissure pour atteindre la taille critique de propagation rapide. Il s'obtient en intégrant la loi de propagation des fissures reliant la vitesse v de propagation à la contrainte en fond de fissure.

En utilisant la notion de facteur d'intensité de contraintes K_I (qui s'exprime en GRIFFITH ou $N.m^{-3/2}$) la loi de propagation des fissures peut se mettre sous une forme simple

$$v \ a_T = A \ K_I^m \quad (1)$$

a_T caractérise la superposition temps-température. Cette formule a été proposée par SWANSON [3].

Dans les propergols a_T peut être représenté par une équation du type WLF.

$$\text{Log } a_T = - \frac{C_1 (T - T_0)}{C_2 + T - T_0} \quad (2)$$

où C_1 et C_2 sont les constantes et T_0 une température de référence.

La loi de propagation des fissures peut s'intégrer facilement dans certains cas. Prenons le cas d'une éprouvette à deux entailles latérales profondes, on a [4] :

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_n \sqrt{a} \quad (3)$$

où σ_n est la contrainte nette (c'est-à-dire ramenée à la section restante) $2a$ est la distance entre les deux pointes de fissures. Si la force appliquée est constante, on trouve, après intégration

$$\frac{t_R}{a_T} = \frac{a}{\bar{v}} = \frac{a}{\left(\frac{m}{2} + 1\right) A \ K_{Ii}^m} \quad (4)$$

K_{Ii} est le facteur d'intensité de contraintes initial, \bar{v} est la vitesse de propagation moyenne de chaque fissure et t_R le délai de rupture. Cette formule permet de déterminer simplement la loi de propagation des fissures.

Le cas, plus complexe, de la traction d'une éprouvette lisse s'interprète de même, mais avec quelques simplifications. Supposons l'existence de microfissures initiales de taille C_0 , et que la formule $K_I = \sigma \sqrt{\pi C}$ puisse être utilisée pendant toute la propagation des criques, supposées petites par rapport à la taille de l'éprouvette.

Si la montée en charge est linéaire, on intègre facilement la loi de propagation :

$$\int_{C_0}^{\infty} C^{-\frac{m}{2}} dC = \int_0^{t_R} \frac{A}{a_T} \left(\dot{\sigma} t \sqrt{\pi} \right)^m dt \quad (5)$$

La relation entre la contrainte de rupture σ_R et le temps de rupture t_R est alors :

$$\sigma_R \frac{t_R}{a_T} = \left(\frac{m+1}{\frac{m}{2}-1} \right) / \left(C_0^{\frac{m}{2}-1} \pi^{\frac{m}{2}} A \right) \quad (6)$$

La résistance à la traction augmente bien avec la vitesse de traction.

On peut, de plus, trouver une relation entre la résistance à la traction et l'allongement à la rupture moyennant l'adoption d'une loi de comportement viscoélastique linéaire. Nous utilisons la forme proposée par Schapery [5] pour le module de relaxation et qui a fait l'objet de nombreuses publications [6]

$$E \left(\frac{t}{a_T} \right) = E_e + \frac{E_g - E_e}{\left(1 + \frac{t}{\tau_0 a_T} \right)^n} \quad (7)$$

E_g et E_e sont les modules vitreux et à l'équilibre, τ_0 est un temps de relaxation de référence, n est une constante.

L'application du principe de superposition, en supposant cette fois (pour simplifier) que c'est la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ qui est constante et non plus la vitesse de montée en charge $\dot{\sigma}$, permet de calculer l'allongement correspondant. On trouve alors l'équation cherchée de l'enveloppe de rupture.

$$\frac{\sigma_R}{\epsilon_R} = E_e + \frac{\tau_0 a_T}{(1-n)} \frac{E_g - E_e}{t_R} \left[\left(1 + \frac{t_R}{\tau_0 a_T} \right)^{1-n} - 1 \right] \quad (8)$$

On peut éliminer $\frac{t_R}{a_T}$ grâce à l'équation (6).

3. ETUDE EXPERIMENTALE :

Les essais réalisés se classent en trois catégories : des mesures photographiques de la propagation des fissures à différentes températures, des mesures à 20°C, avec différents types de sollicitation et enfin des tractions simples à différentes températures et vitesses.

L'étude a été réalisée sur un propergol composite à liant polyuréthane.

3.1. Mode opératoire :

3.1.1. Appareillage utilisé :

Les essais de traction à 5 mm/mn ont été réalisés sur une machine TESTWELL équipée d'une chambre d'ambiance pour les quatre températures de - 40, 0, 20 et 60°C. On photographie l'éprouvette en cours de traction à des intervalles de temps généralement égaux à 5 s. On obtient 4 à 5 photos après le début de propagation rapide de la fissure.

Des essais à grande vitesse de traction (environ 1 m/mn) ont permis de mesurer par cinématographie des vitesses de propagation supérieures au cm/s. La machine utilisée est une machine MOHR et FEDERHAFF hydraulique à régulation électronique. La caméra ECLAIR est du type GV 16 utilisée à 150 images par seconde. L'éclairage a été obtenu à l'aide de 3 projecteurs de 500 watts placés à un mètre de l'éprouvette avec insertion d'un filtre anticalorique.

3.1.2. Préparation des éprouvettes :

Les éprouvettes sont obtenues par entaillage au rasoir d'éprouvettes haltères d'épaisseur 5 mm, de largeur 10 mm et de longueur utile 50 mm.

Les éprouvettes simple entaille ont subi une propagation manuelle des fissures pour obtenir une profondeur avant essai de 2 mm. La profondeur d'entaille des éprouvettes à double entaille est de 2,5 mm, de façon à réduire la section de moitié. Après découpe, les éprouvettes sont conditionnées pendant plus d'un mois dans des sachets étanches contenant du silicagel. Elles sont reconditionnées de la même façon pendant 48 heures au moins entre l'entail- lage et l'essai. L'essai, s'il est de courte durée est réalisé à l'humidité du laboratoire, conditionné à $40 \% \pm 5 \%$. Pour les essais à chaud et à froid, le conditionnement avant essai est d'une demi-journée à la température de l'essai.

3.1.3. Calcul du facteur d'intensité de contraintes :

Le facteur d'intensité de contraintes est calculé à l'aide de la mécanique linéaire de la rupture. Pour les éprouvettes à une entaille latérale, on utilise la formule suivante [4].

$$K = \sigma \sqrt{C} \left[1,99 - 0,41 \left(\frac{C}{b} \right) + 18,70 \left(\frac{C}{b} \right)^2 - 38,48 \left(\frac{C}{b} \right)^3 + 53,85 \left(\frac{C}{b} \right)^4 \right] \quad (9)$$

où σ est la contrainte brute appliquée à l'éprouvette de largeur b et où C est la longueur de la crique ($C < 0,4b$).

Cette formule donne à chaque instant le facteur d'intensité de contraintes en fonction de la force appliquée et de la longueur de fissure, mesurée sur les photographies. D'où la vitesse de la fissure d'après les époques des photographies.

Dans le cas des éprouvettes double entaille, on utilise la formule (3).

3.2. Résultats expérimentaux :

3.2.1. Mesures directes à différentes températures sur éprouvettes simple entaille

La relation entre la vitesse de propagation de la fissure et le facteur d'intensité de contraintes appliqué a été obtenue à partir de la longueur de fissure instantanée, mesurée sur les photographies, et de la force correspondante. Une évolution typique de ces paramètres est représentée sur la figure 1.

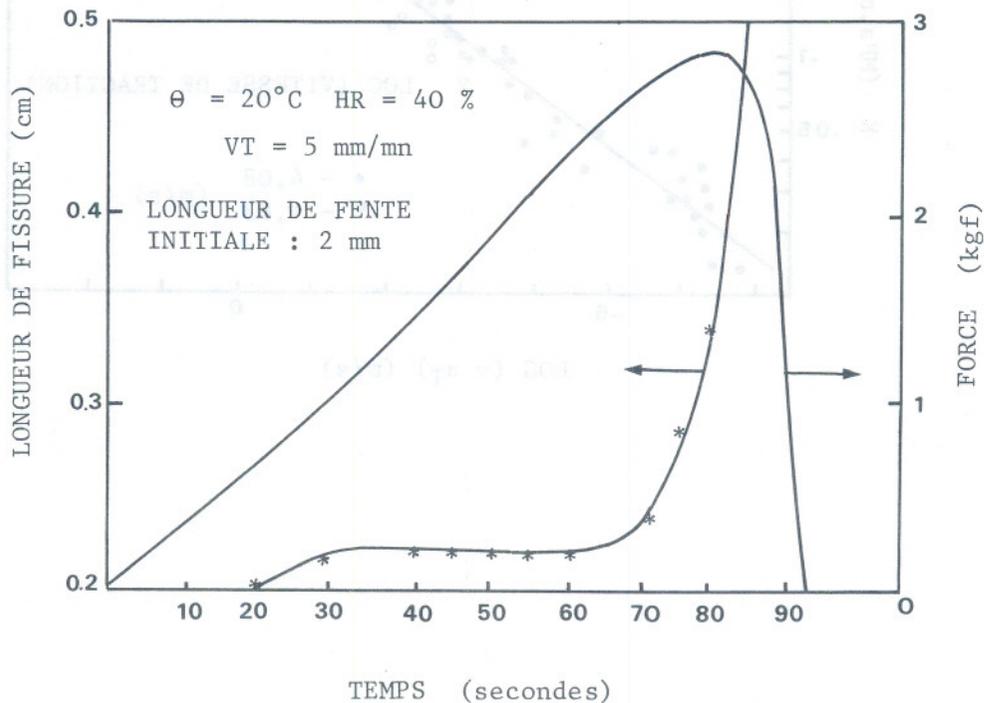


Figure 1 : Longueur de fissure et force appliquée en fonction du temps au cours de la traction d'une éprouvette simple entaille.

La propagation ne démarre de façon mesurable qu'au bout de 60 secondes. Grâce à l'équivalence temps-température établie pour le module de relaxation [6] on obtient une courbe maîtresse (fig. 2) permettant d'extrapoler à une vitesse et à une température quelconques la loi de propagation des fissures.

La validité de la méthode peut être évaluée en effectuant des essais à 20°C à différents endroits dans l'échelle des vitesses (fig. 3).

FIGURE 2

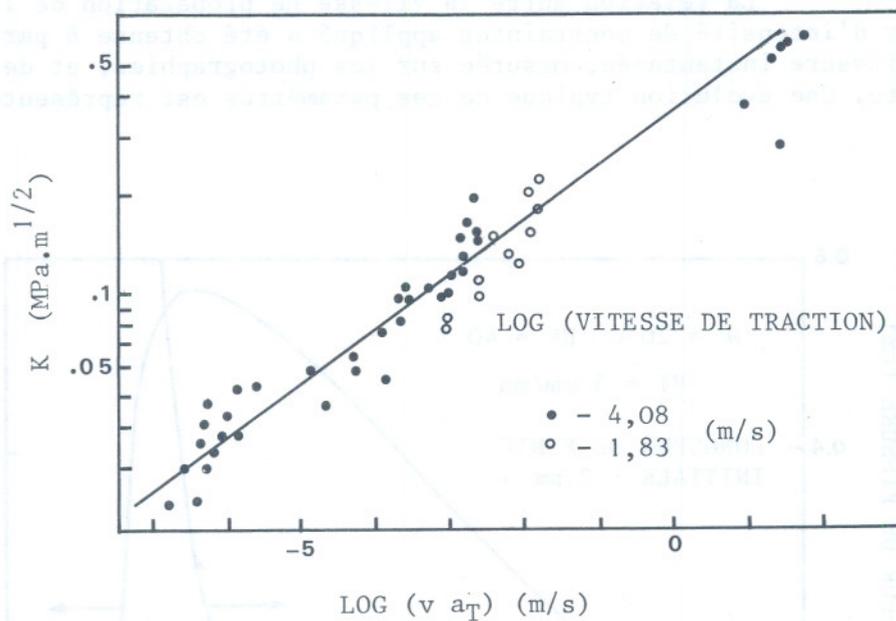


Figure 2 : Relation entre facteur d'intensité de contraintes instantané et vitesse de propagation, obtenue par l'équivalence temps-température de la relaxation.

3.2.2. Mesures directes et indirectes à 20°C :

Des vitesses de propagation et des temps de rupture ont été mesurés sur des éprouvettes entaillées pour divers types de sollicitation : tractions d'éprouvettes simple entaille à 5 et 890 mm/mn, tractions d'éprouvettes double entaille à 0,5 mm/mn et tractions cycliques à 5 mm/mn montrent un accord raisonnable avec les prévisions utilisant l'équivalence temps-température (fig. 3). Des résultats de fluage d'éprouvettes double entaille ont également été représentés sur le graphique. Le facteur d'intensité de contraintes utilisé est celui qui est appliqué au départ de l'essai avant propagation de la fissure. La vitesse de propagation est égale à la vitesse moyenne pendant l'essai.

FIGURE 3

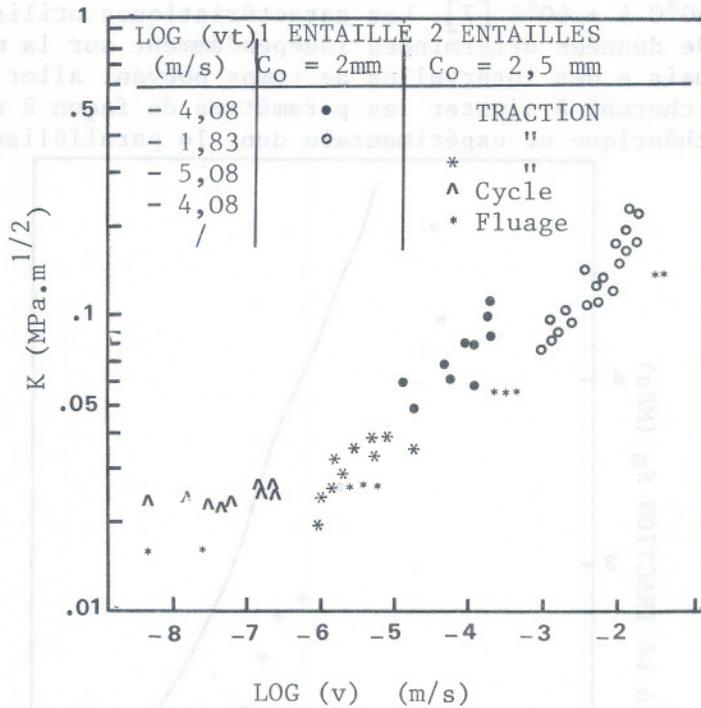


Figure 3 : Relation entre facteur d'intensité de contrainte et vitesse à 20°C pour divers types de sollicitation : traction à vitesse constante sur éprouvettes simple et double entaille, traction cyclique sur éprouvettes double entaille, fluage sur éprouvettes double entaille.

La formule (4) montre que la vitesse moyenne est $(\frac{m}{2} + 1)$ fois plus grande que la vitesse initiale, ce qui explique que les points correspondant au fluage soient plus à droite que les autres.

On constate sur la figure 3 une légère concavité vers le haut qui semblerait indiquer l'existence d'un K_0 limite en-dessous duquel les fissures ne se propagent pas. Dans ce cas la loi de propagation pourrait s'écrire :

$$v_{a_T} = A (K - K_0)^m \quad (10)$$

K_0 est toutefois difficile à atteindre car la durée des essais devient alors très importante. Nous négligeons pour le moment K_0 . La vitesse est d'autre part limitée du côté des grandes vitesses par celle des ondes longitudinales. En pratique, il nous suffit que la vitesse de la fissure soit, lors du tir, inférieure à la vitesse de combustion.

3.2.3. Interprétation des caractéristiques de traction :

La figure 4 montre l'enveloppe de rupture obtenue en représentant la résistance à la traction S_m en ordonnées et l'allongement e_m correspondant en abscisses pour trois vitesses de traction (0,5 - 5 - 50 mm/mn) et 8 températures de -40°C à $+60^\circ\text{C}$ [7]. Les caractéristiques utilisées ont été choisies à partir de données déterminées indépendamment sur la même composition et la même coulée mais à des intervalles de temps pouvant aller jusqu'à plusieurs années. On n'a pas cherché à ajuster les paramètres de façon à minimiser l'écart entre les courbes théorique et expérimentale dont le parallélisme est remarquable.

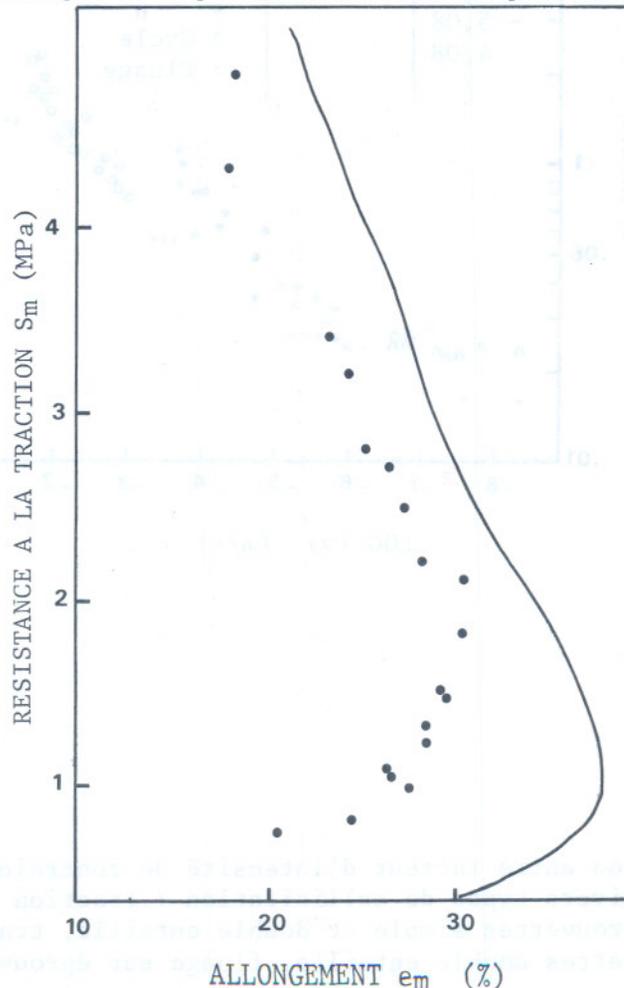


Figure 4 : Enveloppe de rupture : résistance à la traction S_m , en fonction de l'allongement correspondant e_m . Courbes théorique et expérimentale.

On retrouve l'existence d'un maximum d'allongement qui ne peut être dépassé quelle que soit la température. (ou la vitesse, dans la mesure où l'équivalence temps-température est respectée).

4. THEORIE DE LA RUPTURE VISCOELASTIQUE :

Une théorie de la fissuration des matériaux viscoélastiques a été faite par WILLIAMS [8]. Elle revient à calculer l'énergie élastique emmagasinée dans un modèle viscoélastique. On remplace alors, dans le critère de Griffith le module d'élasticité par $\frac{1}{2} \frac{D(t_R) - D_g}{D(t_R)}$ expression dans laquelle $D(t_R)$ et D_g sont les complaisances en fluage au temps de rupture t_R et dans l'état vitreux. L'énergie de rupture γ est supposée constante.

Cette formule prévoit un K_I limite en-dessous de laquelle il n'y a pas de propagation des fissures.

Or la propagation peut se faire sous des contraintes très faibles. D'autre part cette formule ne permet pas de prévoir que l'allongement à la rupture décroît avec la température au-dessus d'une certaine température correspondant à l'allongement maximum. Une méthode qui satisfait à ces conditions consiste à remplacer le module par $E(t_R) - E_e$ où $E(t_R)$ est le module correspondant au temps de rupture et E_e le module à l'équilibre.

On obtient donc :

$$K_I = \sqrt{2 [E(t) - E_e] \gamma} \quad (11)$$

Si γ est constante, en utilisant la formule (7), on trouve

$$K_I^2 = 2\gamma \frac{(E_g - E_e)}{\left(1 + \frac{t_R}{\tau_0 a_T}\right)^n} \quad (12)$$

où t_R est le temps de rupture ;

Si $\frac{t_R}{\tau_0 a_T} \gg 1$ (temps longs) on trouve

$$t_R = \tau_0 a_T [2 \gamma (E_g - E_e)]^{\frac{1}{n}} K_I^{-\frac{2}{n}} \quad (13)$$

Or, on a vu plus haut que t_R était proportionnel à K_I^{-m} . On retrouve donc la même loi à condition que $m = \frac{2}{n}$. Ceci est vérifié approximativement, puisque l'expérience donne des valeurs $m = 6 \pm 1$ et $n = 0,25 \pm 0,05$.

Lorsque le logarithme du module est une fonction linéaire du logarithme du temps, (absence de module à l'équilibre) la viscoélasticité linéaire montre que la pente n de la droite obtenue est reliée à l'angle de pertes δ par la relation

$$\delta = \frac{\pi n}{2}$$

Le logarithme de la résistance à la traction dépend alors du logarithme du temps selon une loi linéaire de pente

$$\frac{d \log E}{d \log t} = \frac{2}{\pi} \frac{d \log \sigma}{d \log t} = -n = -\frac{2 \delta}{\pi}$$

L'influence du temps serait deux fois plus forte sur le module en relaxation que sur la contrainte de rupture, dans la mesure où l'énergie de rupture est une constante, ce qui est d'ailleurs loin d'être vérifié.

5. CONCLUSION :

L'intégration de la loi reliant la vitesse de propagation des fissures au facteur d'intensité de contraintes permet de prévoir la rupture dans le cas d'une sollicitation appliquée de façon quelconque en fonction du temps : traction, relaxation fluage, cyclage etc. Il est même possible de faire le calcul à la rupture d'un matériau viscoélastique dont les propriétés mécaniques varient avec son âge (polymérisation sous contrainte par exemple). [9]

La loi de propagation peut en gros être retrouvée à partir de la loi de comportement grâce au critère de Griffith. On montre alors que l'influence du temps sur la résistance mécanique du matériau peut être reliée de façon simple à son amortissement interne.

BIBLIOGRAPHIE

- =====
- [1] B. PERSOZ Introduction à l'étude de la rhéologie Dunod - Paris 1960.
 - [2] R.J. CHARLES J. Appl. Phys 29 (1958) 1657.
 - [3] S.R. SWANSON - J. Spacecraft, 14 (1976) 528.
 - [4] W.G. BARROIS. AGARD-MAN - 8 - 70
Harford House Londres 1970.
 - [5] H. LIEBOWITZ Fracture vol VII
Academic Press New York 1972.
 - [6] J. LEBOIS Comportement mécanique des polymères chargés.
Premier Congrès Français de Mécanique. Poitiers 1973.
 - [7] F. CAMPE. B. JOSSES, J.F. MAECHEL
Note technique n° 324/SM (1970) de la Poudrerie Nationale de Saint Médard.
 - [8] M. L. WILLIAMS Int. J. Fracture Mech 1 (1965) 4.
 - [9] B. SCHAEFFER. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, IV, 5 (1977) 225.

Les premières expériences que nous avons réalisées, en choisissant soigneusement une manœuvre collée à la polyéthylène, nous ont fourni une telle dispersion, que l'essentiel de notre travail a finalement consisté à mettre sur pied une statistique de la rupture. Ce à des contraintes constantes, statistique qui nous a permis de dresser une table pour une colle normale, avec évidemment d'autres valeurs numériques pour les éprouvettes.

FATIGUE STATIQUE DES JOINTS COLLÉS*

D'abord d'obtenir une adhérence fiable, de façon que les poids à manipuler ne soient pas trop importants. Il fallait également employer une colle sans solvant, afin d'une part d'éviter de se déformer et d'autre part de ne pas dégrader les propriétés mécaniques. Il était

B. PERSOZ et J. BONNET

crucial aussi d'obtenir des éprouvettes qui ont tenu. C'était donc un rhéostatique peu adhésif qu'il fallait choisir, pour réaliser le joint par simple chauffage. Nous nous sommes arrêtés à un polyéthylène basse densité, en feuille de 0,02 mm d'épaisseur.

RESUMÉ

Des plaquettes d'acier ont été collées avec un polyéthylène basse densité et chargées en cisaillement par des poids constants. C'est la statistique de Gauss logarithmique qui rend le mieux compte de la distribution des durées de vie. Le temps au bout duquel une éprouvette sur deux est rompue, pour une contrainte donnée σ , varie comme σ^{-m} , avec m de l'ordre de 10. Divers critères sont ensuite envisagés pour essayer de prévoir la durée de vie sous contrainte variable.

ABSTRACT

Small sheets of steel, bonded together with low density polyethylene, have been subjected to shear under a constant load. Logarithmic Gaussian statistics give the best account of the distribution of lifetime to failure. The time after which one half of the specimens have failed, under a given stress σ , varies as σ^{-m} , where m is of the order of 10. Subsequently several criteria are considered which might be applied to predict the lifetime under a varying stress.

1. INTRODUCTION

Sachant que le temps intervenait dans la rupture des joints collés, nous nous sommes demandé comment. Il convenait, dans une première étape, de déterminer comment la durée de vie d'un joint, supportant une charge constante, dépendait de cette charge et, dans une deuxième étape à charge variable, de rechercher comment les efforts antérieurs influençaient la résistance actuelle.

* Communication au Groupe Français de Rhéologie le 7 décembre 1978.

Les premières expériences que nous avons réalisées, en choisissant sciemment une mauvaise colle : le polyéthylène, nous ont fourni une telle dispersion, que l'essentiel de notre travail a finalement consisté à mettre sur pied une statistique de la rupture à contrainte constante, statistique qui reste probablement valable pour une colle normale, avec évidemment d'autres valeurs numériques pour les paramètres.

Pourquoi avons-nous choisi le polyéthylène ? Il s'agissait d'abord d'obtenir une adhérence faible, de façon que les poids à manipuler ne soient pas trop importants. Il fallait également employer une colle sans solvant, afin qu'une rétention de ce dernier ne risque pas d'en modifier les propriétés mécaniques. Il était préférable aussi d'éviter les produits réculables, qui ont tendance à durcir en vieillissant.

C'était donc un thermoplastique peu adhésif qu'il fallait choisir, pour réaliser le joint par simple chauffage. Nous nous sommes arrêtés à un polyéthylène basse densité, en feuille de 0,05 mm d'épaisseur.

2. ÉPROUVETTES ET MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

Deux sortes de subjectiles sont employés :

- de l'acier doux A 37 en deux épaisseurs : 0,97 et 0,54 mm (691 éprouvettes),
- de l'acier inoxydable Z 8 CnDT 18-12 en épaisseur de 1,52 mm (323 éprouvettes).

Ces tôles sont découpées de façon que la partie collée ait une largeur de 7 à 8 mm, le recouvrement étant de 2 à 4 mm (fig. 1). La surface utile est légèrement poncée au papier abrasif de 320 mailles au pouce, puis dégraissée au "Turco".

Les éprouvettes sont ensuite empilées dans un gabarit en duralumin, avec des cales d'épaisseur convenable et avec, aux endroits à coller, une languette rectangulaire de polyéthylène. Une force de 2,5 kgp est appliquée sur les joints à coller, perpendiculairement à leur plan, et le tout chauffé à l'étuve à 160°C pendant 3 h.

Au bout de ce temps, l'étuve est abandonnée à son refroidissement naturel, porte fermée. L'épaisseur du polyéthylène se situe alors entre 0,003 et 0,03 mm, la moyenne étant de 0,013 mm.

Après rupture les plaquettes d'acier sont nettoyées et réutilisées.

Figure 1. Epreuve à joint collé.

L'aire de collage est mesurée, après rupture, à la loupe micrométrique sur chacune des deux faces et la moyenne des deux mesures prise en compte. La figure 2 donne la distribution de ces aires.

Au sortir de l'étuve refroidie les éprouvettes sont placées dans une salle thermostatique à $24,8^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$ pendant 48 h au moins, avant d'être tendues dans la même salle, simplement sous l'action d'un poids accroché à la main, aussi doucement que possible, l'opérateur tenant un chronomètre dans l'autre main.

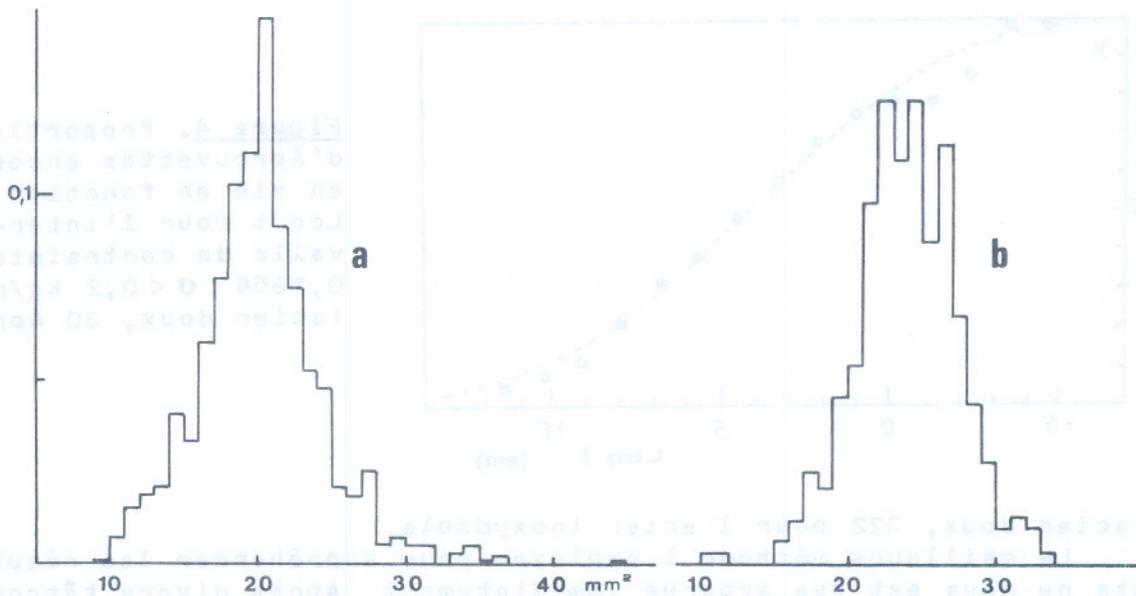


Figure 2. Histogramme des aires de collage :

- a: acier doux, aire moyenne $20,16 \text{ mm}^2$, écart type relatif 21,0 %
 b: acier inox. aire moyenne $24,13 \text{ mm}^2$, écart type relatif 21,5 %

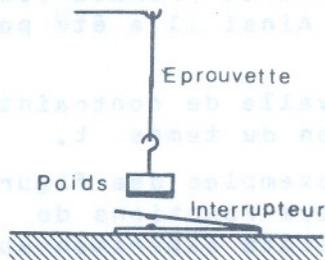


Figure 3. Montage employé.

Si la rupture se produit pendant l'accrochage ou moins de 0,6 seconde après l'accrochage, on considère que la durée de vie est nulle. Si la rupture ne s'est pas produite pendant les 5 premières minutes, un interrupteur est placé sous le poids et relié à un compte-secondes électrique, afin de connaître l'époque de la rupture si celle-ci se produit en l'absence de l'opérateur, notamment la nuit.

Chaque éprouvette est accrochée à un support indépendant des autres, de manière que les secousses d'une rupture n'en provoquent pas d'autres.

3. DÉPOUILLEMENT ET STATISTIQUE À CONTRAINTE CONSTANTE

La majorité des éprouvettes ont subi une contrainte constante et conduisent à une statistique, qui forme l'essentiel de ce travail. Cependant, pour quelques-unes, le poids a été modifié en cours d'expérience. Pour certaines d'entre elles, choisies au hasard, le poids a été modifié assez peu de temps après la mise sous tension. Elles doivent être éliminées de la statistique à charge constante.

D'autres, par contre, ont été surchargées au bout d'un temps très long - 70 jours pour l'acier doux, 140 jours pour l'acier inoxydable - parce qu'elles tardaient à rompre. Ces dernières, qui comptent parmi les plus résistantes, doivent nécessairement intervenir, sous la forme d'une inégalité, dans la statistique envisagée, sous peine de la fausser. En revanche elles ont été éliminées de l'étude à charge variable.

Dans ces conditions il nous est resté 680 éprouvettes pour

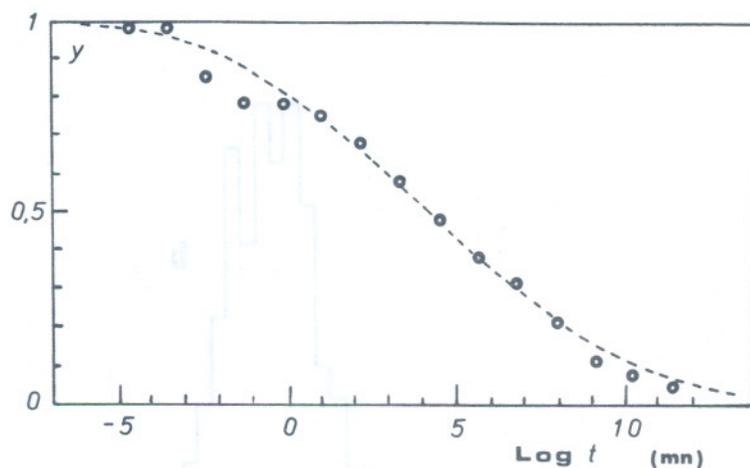


Figure 4. Proportion y d'éprouvettes encore en vie en fonction de $\text{Log } t$ pour l'intervalle de contrainte : $0,1866 < \sigma < 0,2 \text{ kg/mm}^2$ (acier doux, 30 épr.)

l'acier doux, 322 pour l'acier inoxydable.

La meilleure méthode à employer pour appréhender les résultats ne nous est pas apparue immédiatement. Après divers tâtonnements, nous avons classé les éprouvettes par intervalles de contrainte dont les bornes sont en progression géométrique de raison $2^{0,1}$. Il y a donc 10 intervalles par octave de contrainte. Dans chaque intervalle, nous avons établi la proportion y d'éprouvettes ayant eu une durée de vie supérieure à des valeurs de t prédéterminées et échelonnées également en progression géométrique de raison $\sqrt{10}$, depuis 0,01 mn jusqu'à 100 000 mn. De cette façon, ont pu être prises en compte aussi bien les ruptures prématurées ($t < 0,01 \text{ mn}$) que les tardives ($t > 10^5 \text{ mn}$). Ainsi il a été possible de tracer deux séries de courbes :

y en fonction de $\text{Log } t$ pour chaque intervalle de contrainte,
 y en fonction de $\text{Log } \sigma$ pour chaque échelon du temps t .

Leur allure en S est illustrée par les exemples des figures 4 et 5. Les courbes en pointillé représentent les fonctions de Laplace-Gauss rendant le mieux compte des résultats expérimentaux.

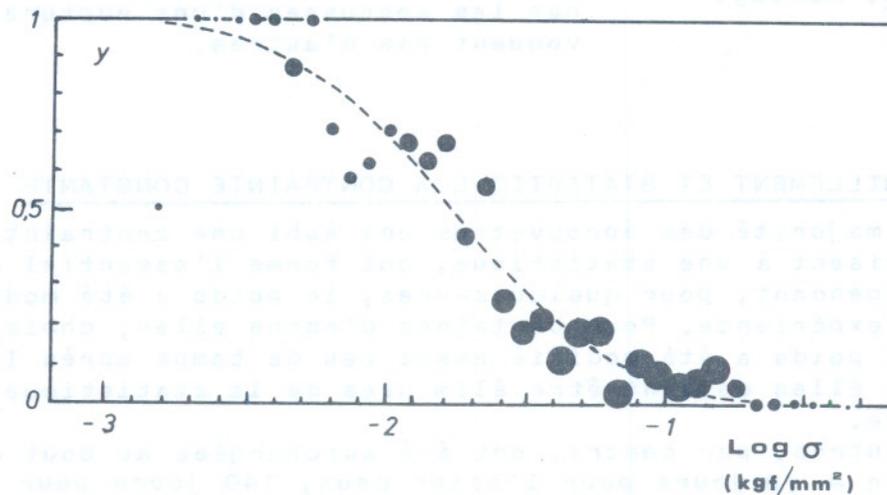


Figure 5. Proportion y d'éprouvettes encore en vie pour $t > 31,6 \text{ mn}$ en fonction de $\text{Log } \sigma$ (acier doux, le diamètre des cercles dépend du nombre d'éprouvettes de chaque tranche de contrainte).

Parmi les nombreuses expressions proposées dans les ouvrages de statistique, nous en avons essayé une dizaine, mais nous n'en avons finalement retenu que deux, qui concordent le mieux avec les faits : celle de Laplace-Gauss logarithmique et celle de Weibull.

3.1. Loi de Laplace-Gauss logarithmique

En fonction de la durée de vie t , nous avons posé pour chaque intervalle de contrainte :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta \left(\lambda \operatorname{Log} \frac{t}{T} \right)$$

avec : y : proportion d'éprouvettes encore en vie au temps t ,

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

T : temps médian, au bout duquel la moitié des éprouvettes sont encore en vie pour la contrainte considérée,

λ : coefficient caractérisant l'acuité de la distribution.

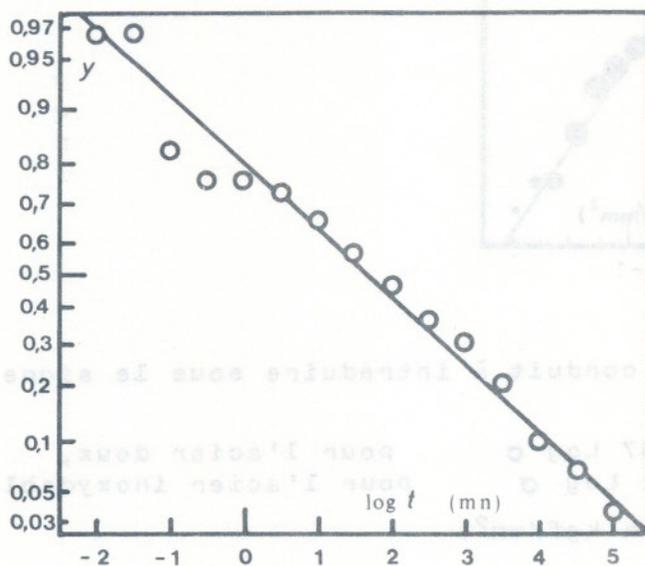


Figure 6. Droite de Henry pour $0,1866 < \sigma < 0,2$ kgf/mm² (acier doux, 30 éprouvettes).

Si les graphiques obtenus sur papier gaussien s'écartent un peu d'une droite de Henry (fig. 6), les écarts observés ne sont cependant pas systématiques et les valeurs de T qui en résultent peuvent, en fonction de σ , se mettre sous la forme (fig. 7) :

- sur acier doux : $\operatorname{Log} T = -13,7 - 10 \operatorname{Log} \sigma$

- sur acier inox : $\operatorname{Log} T = -34,2 - 19,5 \operatorname{Log} \sigma$

T en mn, σ en kgf/mm²

Les valeurs de λ sont échelonnées, pour l'acier doux, entre 0,11 et 0,16 (moyenne 0,137 ; λ augmente un peu avec σ) et pour l'acier inoxydable entre 0,09 et 0,20 (moyenne 0,119 ; λ diminue un peu avec σ croissant). Elles ne varient pas avec la contrainte selon une loi simple, de sorte qu'il nous a semblé préférable, dans cette première approche, de ne considérer que les moyennes des valeurs trouvées.

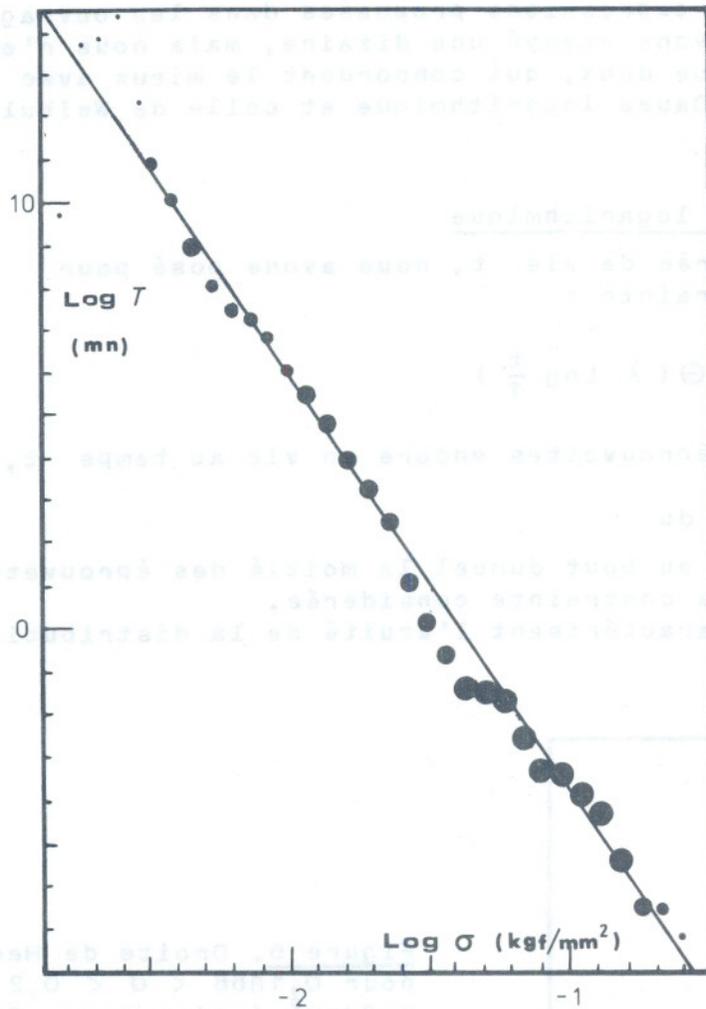


Figure 7. Variations de T (durée de vie médiane) avec la contrainte σ . Acier doux, 680 éprouvettes. Le diamètre des cercles dépend du nombre d'éprouvettes de chaque tranche de σ .

Ce premier dépouillement conduit à introduire sous le signe Θ l'expression :

$$\begin{aligned} 1,877 + 0,137 \text{ Log } t + 1,37 \text{ Log } \sigma & \quad \text{pour l'acier doux,} \\ 4,07 + 0,119 \text{ Log } t + 2,32 \text{ Log } \sigma & \quad \text{pour l'acier inoxydable} \end{aligned}$$

(t en mn, σ en kgf/mm^2)

De même, pour chaque valeur de t , nous avons posé en fonction de la contrainte :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta \left(\mu \text{ Log } \frac{\sigma}{\Sigma} \right)$$

Σ : contrainte médiane, pour laquelle la moitié des éprouvettes sont encore en vie à l'époque t considérée,

μ : coefficient caractérisant l'acuité de la distribution.

Le logarithme de la contrainte médiane Σ varie à peu près linéairement avec celui du temps (fig. 8) et l'on arrive aux relations :

$$\begin{aligned} \text{Log } \Sigma &= -1,41 - 0,096 \text{ Log } t & \quad \text{pour l'acier doux,} \\ \text{Log } \Sigma &= -1,71 - 0,078 \text{ Log } t & \quad \text{pour l'acier inoxydable.} \end{aligned}$$

Quant au paramètre μ , dont les variations ne sont pas nettes, nous l'avons considéré comme constant et égal à sa moyenne.

$$\begin{aligned} 1,15 < \mu < 1,78 & \quad \text{moyenne } \mu = 1,409 \text{ pour l'acier doux,} \\ 1,3 < \mu < 2,6 & \quad \text{moyenne } \mu = 1,99 \text{ pour l'acier inoxydable.} \end{aligned}$$

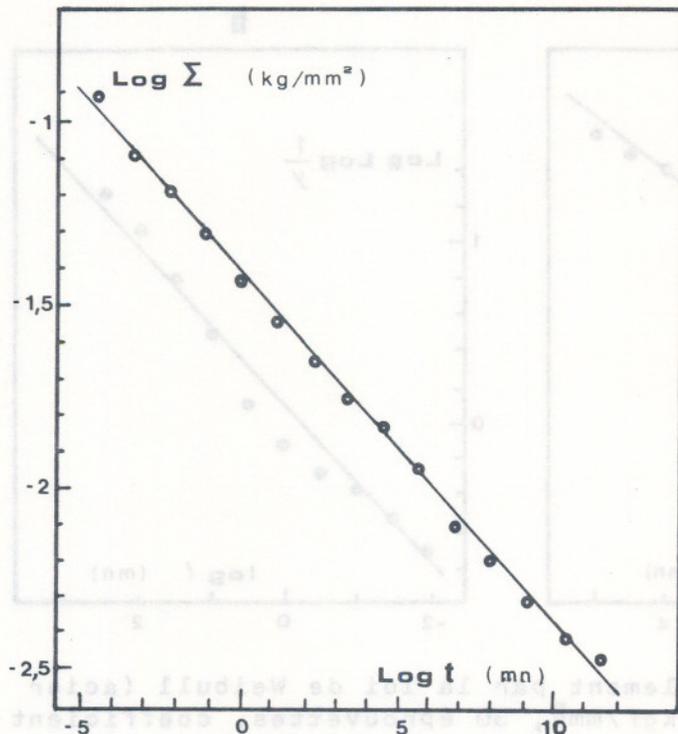


Figure 8. Variations de (contrainte médiane) avec la durée de vie t (acier doux, 680 éprouvettes).

Ce deuxième dépouillement conduit donc à introduire sous le signe \ominus l'expression:

$$\begin{aligned} \text{sur acier doux :} & \quad 1,99 + 0,135 \text{ Log } t + 1,409 \text{ Log } \sigma, \\ \text{sur acier inox. :} & \quad 3,40 + 0,155 \text{ Log } t + 1,99 \text{ Log } \sigma. \end{aligned}$$

La confrontation des résultats obtenus en considérant comme variables les temps d'abord, puis la contrainte, et, en second lieu, la contrainte d'abord, puis le temps, conduit à :

Collage sur acier doux:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ominus (1,94 + 0,136 \text{ Log } t + 1,39 \text{ Log } \sigma),$$

Collage sur acier inoxydable :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ominus (3,74 + 0,137 \text{ Log } t + 2,16 \text{ Log } \sigma).$$

3.2. Loi de Weibull

Si l'on suppose qu'une éprouvette donnée, sous charge constante, a une certaine probabilité a par unité de temps de rompre, cela conduit à écrire, pour l'ensemble y des éprouvettes en vie:

$$-\frac{dy}{ydt} = a,$$

d'où, si a est constant :

$$y = e^{-at},$$

comme pour les noyaux radioactifs.

En fait l'expérience prouve que cette probabilité n'est pas constante, mais qu'elle diminue avec l'âge de l'éprouvette. Autrement dit une éprouvette non rompue au cours de la première minute, a moins de chances de rompre pendant la deuxième etc.. Par exemple pour une certaine contrainte : $\sigma = 0,3864 \text{ kgf/mm}^2$ et pour l'acier

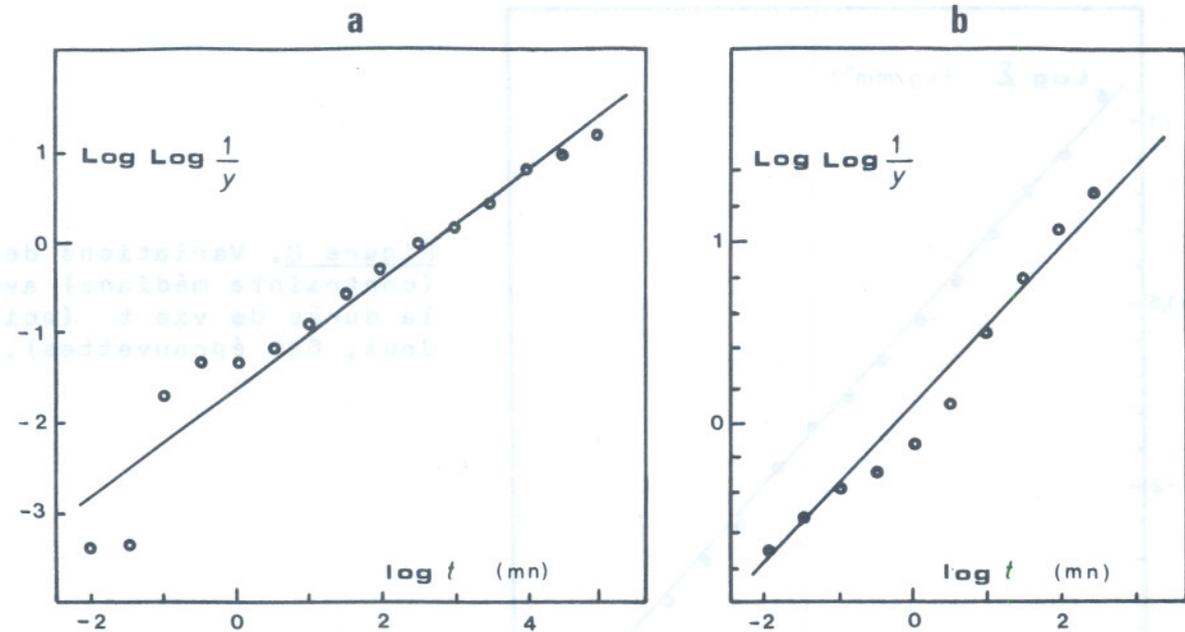


Figure 9. Essais de dépouillement par la loi de Weibull (acier doux); a : $0,1866 < \sigma < 0,2 \text{ kgf/mm}^2$, 30 éprouvettes, coefficient de corrélation : $\rho = 0,966$; b : $0,2462 < \sigma < 0,2639 \text{ kgf/mm}^2$, 36 éprouvettes, coefficient de corrélation : $\rho = 0,993$.

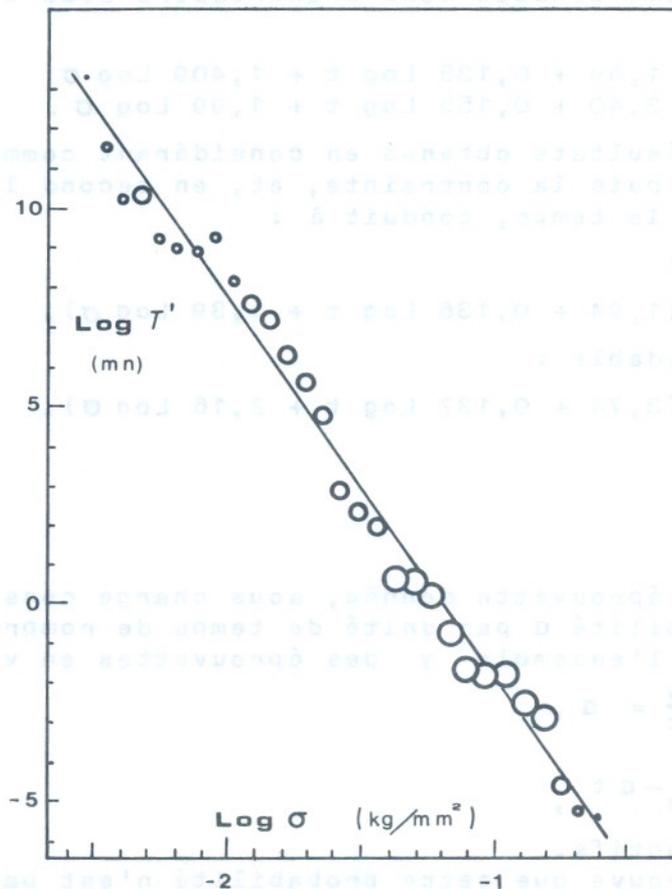


Figure 10. Variations de $\text{Log } T'$ avec $\text{Log } \sigma$ (acier doux, 680 épr. coeff. de corrélation : $\rho = 0,993$). Le diamètre des cercles dépend du nombre d'éprouvettes par tranche.

doux, la probabilité est de 5 mn^{-1} pour $t = 0,03 \text{ mn}$, mais elle devient $2 \cdot 10^{-3} \text{ mn}^{-1}$ pour $t = 400 \text{ mn}$.

Weibull a proposé l'expression :

$$y = e^{-a t^\beta}$$

avec : $0 < \beta < 1$.

Ainsi la probabilité de rupture par unité de temps devient :

$$-\frac{dy}{y dt} = \frac{a \beta}{t^{1-\beta}}$$

Pour faciliter le dépouillement, nous avons mis l'équation de Weibull sous la forme légèrement différente :

$$\text{Log Log } \frac{1}{y} = \beta \text{ Log } \frac{t}{T'}$$

(au lieu de $\text{Log Log } 1/y = \beta \text{ Log } t + \text{Log } a$)

T' est le temps au bout duquel la fraction $1/e$ des éprouvettes est encore intacte.

En portant $\text{Log Log } 1/y$ en fonction de $\text{Log } t$, on obtient un graphique qui peut facilement être assimilé à une droite. La figure 9, a et b en représente deux exemples. Chaque graphique permet de déterminer T' et β . Le premier paramètre, T' , apparaît comme une fonction simple de σ (fig. 10) :

$$\begin{aligned} \text{Acier doux : } & \text{Log } T' = -11,64 - 9,66 \text{ Log } \sigma \\ \text{Acier inox : } & \text{Log } T' = -22,4 - 13,5 \text{ Log } \sigma. \end{aligned}$$

La corrélation n'est pas mauvaise.

En revanche, l'exposant β varie avec la contrainte (fig. 11) d'une façon qui, si elle était mise en équation, ôterait à l'expression de Weibull l'avantage de sa simplicité. Nous avons préféré

nous contenter des valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \beta &= 0,21 \text{ pour l'acier doux} \\ \beta &= 0,20 \text{ pour l'acier inox.} \end{aligned}$$

Les résultats s'écrivent alors, en arrondissant :

$$y = e^{-11,5 t^{0,2} \sigma^2}, \text{ pour l'acier doux et :}$$

$$y = e^{-88 t^{0,2} \sigma^{2,7}} \text{ pour l'acier inoxydable.}$$

Ces expressions représentent moins bien les résultats expérimentaux que celle de Laplace-Gauss.

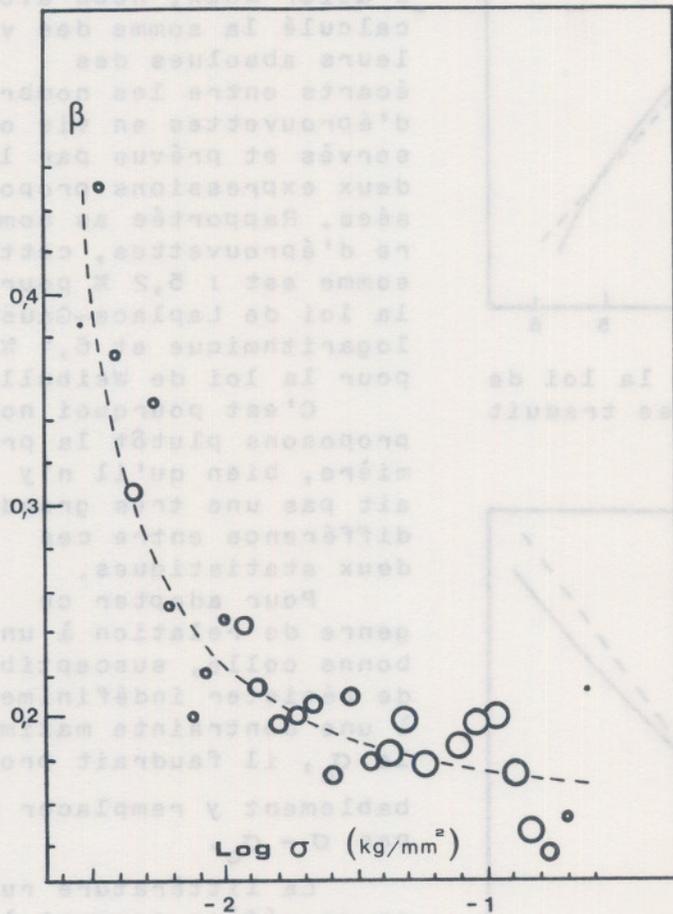


Figure 11. Variations du coefficient β de Weibull avec la contrainte (acier doux, 680 éprouv.).

Le dépouillement peut donc être effectué par la méthode suivante, dite du facteur de translation.

A la même échelle on trace la courbe de y en fonction de $\text{Log } t$ pour chaque valeur de la contrainte σ . Les différents graphiques obtenus sont superposables moyennant une translation le long de l'axe des $\text{Log } t$, translation fonction linéaire de $\text{Log } \sigma$. Après cette translation l'ensemble des graphiques fournit une courbe moyenne, que l'on peut appeler "courbe maîtresse" et qui représente la fonction ϕ cherchée.

En pratiquant cette opération sur nos résultats relatifs à l'acier doux, nous avons obtenu une courbe maîtresse assez bien définie. Rectifiée selon la méthode de Henry, elle conduit au gra-

3.3. Principe de la courbe maîtresse

Avec les approximations effectuées, ce que l'on retrouve en commun dans les deux dépouillements précédents, Gauss et Weibull, c'est le fait qu'apparaît le produit :

$$t \sigma^m$$

Il semble, par suite, légitime de considérer la proportion y d'éprouvettes en vie comme fonction de ce produit :

$$y = \phi(t \sigma^m).$$

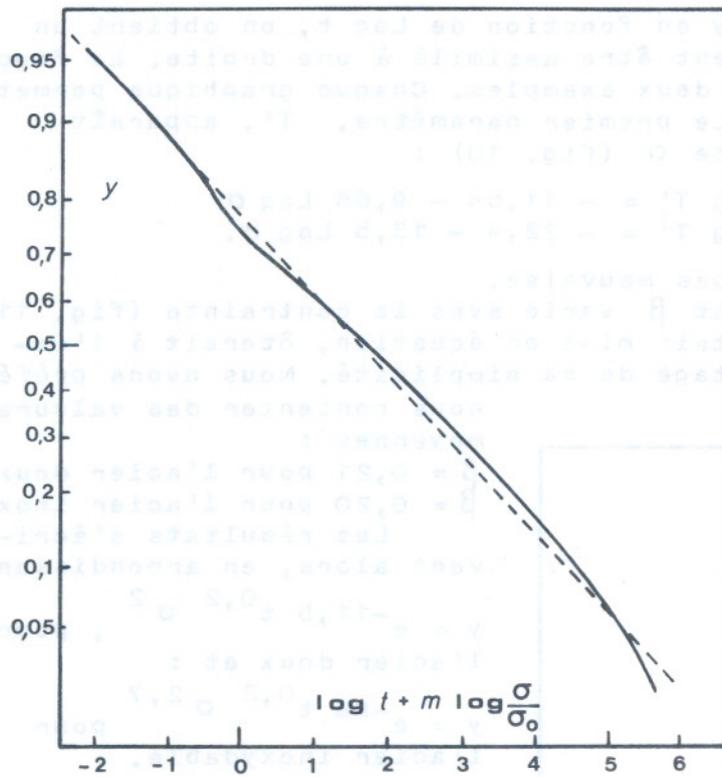
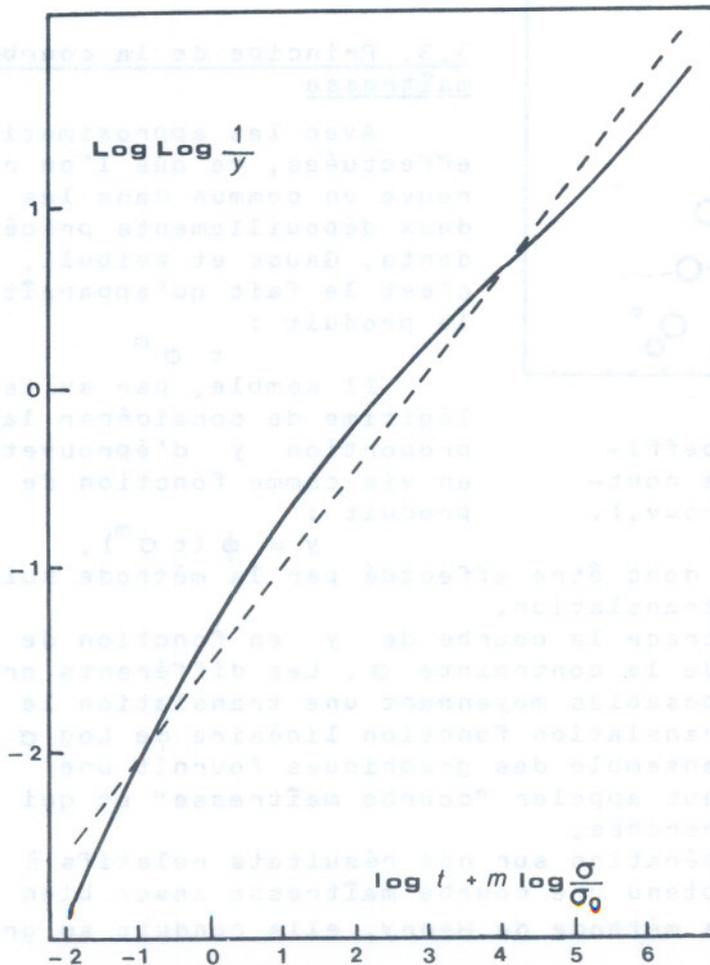


Figure 12. Dans ce graphique la loi de Laplace-Gauss logarithmique se traduit par une droite.



phique de la figure 12, qui est acceptable. Par contre, rectifiée selon la loi de Weibull, elle fait apparaître une courbure non négligeable (fig.13).

3.4. Conclusion aux mesures à contrainte constante

Pour les supports d'acier doux, nous avons calculé la somme des valeurs absolues des écarts entre les nombres d'éprouvettes en vie observés et prévus par les deux expressions proposées. Rapportée au nombre d'éprouvettes, cette somme est : 5,2 % pour la loi de Laplace-Gauss logarithmique et 6,1 % pour la loi de Weibull.

C'est pourquoi nous proposons plutôt la première, bien qu'il n'y ait pas une très grande différence entre ces deux statistiques.

Pour adapter ce genre de relation à une bonne colle, susceptible de résister indéfiniment à une contrainte maximale σ_c , il faudrait probablement y remplacer σ par $\sigma - \sigma_c$.

La littérature russe se réfère souvent à l'équation de Jourkov :

$$T = A e^{-a\sigma},$$

où T représente la durée de vie moyenne des éprouvettes, mais nos résultats ne cadrent pas avec cette relation. D'ailleurs dans un diagramme semi-logarithmi-

Figure 13. Avec ces coordonnées, la loi de Weibull se traduit par une droite.

que de Wöhler, cette expression se traduit par une droite, qu'il ne faut pas extrapoler à $\sigma = 0$, car cela conduirait à $T = A$ au lieu de $T = \infty$. Pour des temps supérieurs à A , la charge deviendrait négative.

L'expression suivante :

$$T = A \frac{e^{-a\sigma}}{\sigma},$$

cas particulier de celle qui est proposée par Bastenaire pour la fatigue cyclique, ne présente pas cet inconvénient, mais n'est pas non plus conforme à nos résultats.

4. CHARGES VARIABLES

Le critère de rupture le plus simple semble être celui de Beili, selon lequel les dommages anciens s'ajoutent aux récents sans effacement. Il s'écrit :

$$\int_0^t \frac{d\tau}{T[\sigma(\tau)]} = 1 \quad \text{critère I}$$

$\sigma(\tau)$: contrainte antérieure, variable avec τ ,

$T[\sigma]$: la durée de vie moyenne qui correspondrait à la contrainte σ si celle-ci était constante.

Nous nous étions demandé, à l'origine, s'il était possible d'appliquer à la rupture des joints collés une expression du type "viscoélasticité linéaire" telle que :

$$\int_0^t \sigma(\tau) f(t - \tau) d\tau = 1 \quad \text{critère II}$$

$f(t - \tau)$: fonction mémoire.

Cette expression ne repose sur aucune base théorique. Elle suppose notamment que la contrainte intervient linéairement et que les contraintes anciennes n'ont pas le même effet que les récentes. Les dommages causés par les contraintes anciennes peuvent par exemple s'effacer progressivement.

Pour supprimer le fait que la contrainte intervienne linéairement, il est possible de lui affecter un exposant n dans l'équation précédente. Celle-ci devient alors :

$$\int_0^t \sigma^n(\tau) f(t - \tau) d\tau = 1 \quad \text{critère III}$$

mais cela aussi est arbitraire. Evidemment, plus il y a de paramètres, plus il est possible de serrer de près la réalité expérimentale.

Dans certains cas les critères I et III sont équivalents. Par exemple si, comme dans nos expériences : $T = A/\sigma^m$, le critère I de Beili devient :

$$\frac{1}{A} \int_0^t \sigma^m(\tau) d\tau = 1$$

équivalent au critère III si $f(t - \tau) = 1/A$ et si $n = m$.

Nous avons tenté d'appliquer les critères énumérés ci-dessus aux éprouvettes dont les charges ont été modifiées a priori et qui malheureusement n'étaient qu'au nombre de 11 (acier doux).

Dans les figures 14, 15 et 16 il a été porté en ordonnées la proportion y d'éprouvettes encore intactes et en abscisses la variable z définie pour la courbe théorique en pointillé par

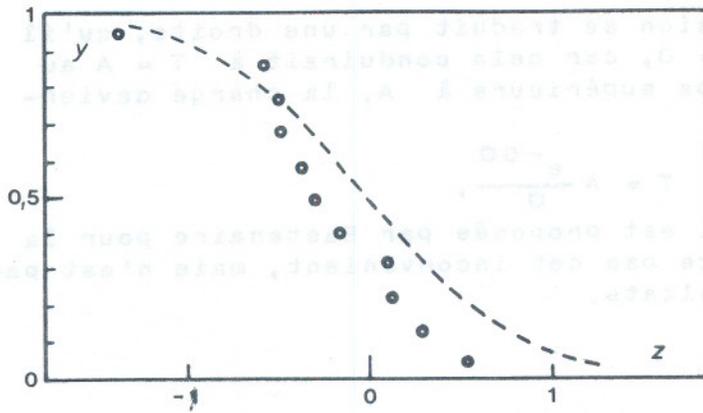


Figure 14. Vérification du critère I (de Beili)

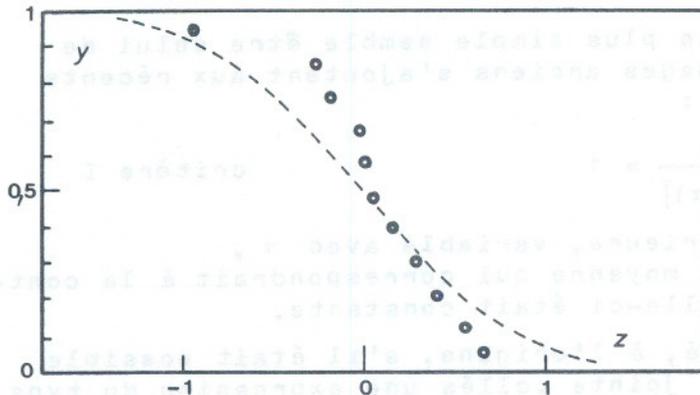


Figure 15. Vérification du critère II (ou critère III avec n = 1)

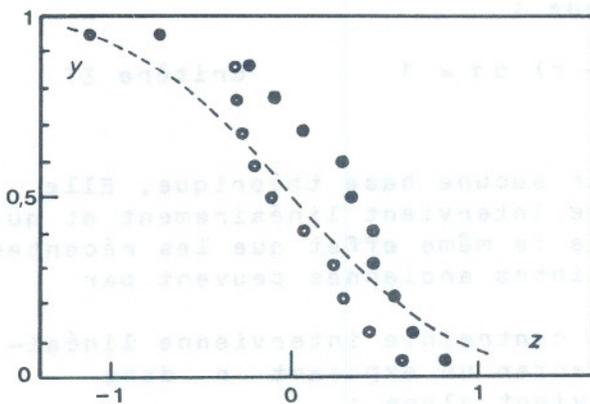


Figure 16. Essais du critère III avec n = 0,2 (●) et avec n = 2 (○).

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta(z)$$

Dans le critère I de Beili, nous avons remplacé la durée de vie moyenne T par le temps t au bout duquel la proportion y d'éprouvettes a résisté. De

$$z = a + b \text{Log } t + c \text{Log } \sigma,$$

on extrait :

$$t = \frac{e^{(z-a)/b}}{\sigma^{c/b}}$$

de sorte que le critère I s'écrit :

$$\int_0^t [\sigma(\tau)]^{c/b} d\tau = e^{(z-a)/b}$$

Le premier membre est connu : a, b, c ont été déterminés par la fatigue statique et les contraintes successives $\sigma(\tau)$ ont été imposées. Le deuxième membre donne donc les valeurs de z portées sur le graphique de la figure 14. Elles sont en général trop petites. Le critère de Beili fournit une durée de vie plus courte que

la réelle.

Le critère III conduit de la même façon à la relation :

$$\int_0^t [\sigma(\tau)]^n (t-\tau)^{\frac{nb}{c} - 1} d\tau = \frac{c}{nb} e^{\frac{n}{c}(z-a)} \quad \text{critère III}$$

qui contient comme cas particulier ($n = 1$) le critère II.

Bien que la pente soit plus forte que celle de la courbe théorique (fig.15), les points expérimentaux se placent bien en moyenne. La fonction mémoire serait de la forme :

$$\left(\frac{1}{t-\tau}\right)^1 - \frac{b}{c} \quad \text{avec } b/c \text{ de l'ordre de } 0,1.$$

Il y aurait effacement partiel des dommages anciens.

Pour $n = 0,2$ et $n = 2$, le graphique prend l'allure indiquée figure 16.

Dans la littérature, qui est assez pauvre dans ce domaine, notre attention a été attirée par les travaux de Narkevitchos et Rajeckas. Ces auteurs trouvent en général que le critère de Beili s'applique bien à leurs expériences, notamment dans un programme de charge qui consiste à appliquer une première contrainte pendant un temps fixé à l'avance, puis une contrainte plus forte jusqu'à la rupture. L'application du critère III à leurs résultats nous a effectivement conduits à $n = m$, c'est-à-dire au critère I de Beili.

Par contre, pour une charge en créneaux, ils trouvent que la durée de vie totale est plus grande que celle que fournit le critère de Beili. Autrement dit ils trouvent une restauration des éprouvettes pendant les temps morts. L'application du critère III à ces expériences mène à $n = 0,78$.

Néanmoins la valeur de n doit être indépendante du programme de charge et il est permis de penser que ladite restauration du joint collé est due à la recouvrance du subjectile.

5. CONCLUSION

Dans le cas de charges variables, nous n'avons pas d'expériences assez nombreuses et assez sûres pour pouvoir choisir le critère adéquat, soit parmi les trois cités ici, soit parmi d'autres qui conduiraient à de meilleures prévisions.

En revanche, dans le domaine strict de la fatigue statique, l'expérience conduit, au moins pour les temps explorés, à la loi puissance :

$$T = \frac{A}{\sigma^m}$$

et en outre, pour une même charge, à une distribution gaussienne des logarithmes des durées de vie.

Il serait intéressant d'appliquer au problème des joints collés la théorie de la propagation des fissures. Pour ce faire, il faudrait faire intervenir la viscoélasticité de la colle et envisager, dans les aires de collage, une distribution de domaines d'inégales résistances. Des expériences anciennes, en effet, nous ont montré que les mesures d'adhérence sur de petites surfaces étaient plus dispersées, mais en moyenne plus élevées que sur de grandes surfaces.

Bibliographie: L.M. Narkevitchos & V.L. Rajeckas, Effet du régime de la charge sur la durée de vie des joints collés. Bulletin des établissements d'enseignement supérieur (URSS) ; Technologie de l'industrie légère, 1974, n° 4, p. 97 à 101.