

**Cahiers du Groupe  
Français de Rhéologie**

**Tome V, Numéro 2**

**Juin 1979**

S O M M A I R E

- Introduction à la journée du 7 Décembre 1978,  
par R. COURTEL, p. 47.
- Mécanique de la rupture et lois de comportement,  
par D. FRANÇOIS, p. 49.
- Critères de rupture en conditions polymodales  
(modes I et II), par P. JODIN et G. PLUVINAGE, p. 59.
- Analogies entre problèmes d'adhésion et problèmes de  
rupture, par R. COURTEL, p. 71.
- Détermination expérimentale de l'intégrale de Rice  
critique  $V_c$  dans le bois de charpente, par  
A. AMEEN, P. MORLIER et G. VALENTIN, p. 81.

## INTRODUCTION A LA JOURNEE DU 7 DECEMBRE 1978

R. COURTEL

Comme l'an dernier, le Groupe Français de Rhéologie a proposé pour sujet de son colloque annuel l'étude d'un domaine où les aspects mécanique et thermodynamique des phénomènes sont nécessairement associés. L'irréversibilité de fait de la propagation d'une fissure traduit l'intervention de processus physiques qui ne peuvent évoluer que dans un seul sens, telle la déformation plastique. Le très grand intérêt des lois quantitatives déduites de l'application de la théorie de l'élasticité - où tout est réversible - ne doit pas faire négliger cette limitation permanente.

Or la distinction entre les modèles réversibles et irréversibles utilisés en rhéologie n'est pas toujours soulignée explicitement ; en mettant l'accent sur des lois de comportement local à caractère biunivoque, on s'expose à oublier que le phénomène rhéologique dans son ensemble est un puissant dissipateur d'énergie. Naturellement, un tel risque est exclu quand on considère les lois d'évolution, dépendant du temps.

Les rhéologues sont passés maîtres dans l'art de pratiquer, sous ces divers éclairages, l'examen de leurs problèmes. Vous aurez certainement l'occasion de vous en convaincre en suivant maintenant les conférenciers qui vont aller de la mécanique linéaire de la rupture, spécifique des corps fragiles, à la fissuration des pro- pergols composites, en passant intermédiairement par les bétons hydrauliques et le bois et par les problèmes d'adhésion de contact, qui se rattachent formellement à ceux de rupture.

NDLR. Les conférences présentées à ce colloque sont réparties dans deux numéros successifs (2 et 3) des Cahiers.



## MECANIQUE DE LA RUPTURE ET LOIS DE COMPORTEMENT

D. FRANCOIS, Directeur du Département de Génie Mécanique de l'UTC

### RESUME

Les champs de contrainte et de déformation à l'extrémité d'une fissure sont décrits dans des solides élastiques linéaires et non linéaires, dans des solides plastiques et dans des solides visqueux en utilisant des intégrales de contour, en particulier l'intégrale de Rice. Dans certaines conditions ces champs de contraintes et de déformations sont fonction d'un seul paramètre dont la valeur critique peut alors servir de critère de propagation de fissure.

### ABSTRACT

Stress and strain fields at the tip of a crack are described in linear elastic solids and non linear elastic solids, in plastic solids and in viscous solids using contour integrals, particularly Rice's integral. Under restricted conditions these stress and strain fields are function of a unique parameter the critical value of which can then be used as a crack propagation criterium.

### 1. INTRODUCTION

Pour qu'une fissure se propage il faut que deux conditions soient remplies : 1. les contraintes et déformations au voisinage de l'extrémité doivent être suffisantes pour déclencher les processus microscopiques de rupture ; 2. le taux d'énergie disponible dans la structure  $G$  doit être au moins égal à l'énergie de rupture  $G_R$ .

L'état des contraintes et des déformations à l'extrémité d'une fissure et la distribution d'énergie emmagasinée dans la structure et donc le taux d'énergie disponible dépendent des lois de comportement des matériaux. Pour résoudre les deux problèmes ci-dessus il faut de plus connaître le critère de rupture microscopique, c'est-à-dire l'état des contraintes et des déformations locales nécessaires pour déclencher les processus microscopiques de rupture.

Ces questions sont bien résolues pour un matériau complètement élastique (1) les solutions trouvées dans ce cas, peu réalistes en raison des très fortes concentrations de contrainte à l'extrémité d'une fissure, peuvent être étendues au cas où la zone qui est le siège de phénomènes non élastique est confinée, c'est-à-dire de faibles dimensions par rapport à la longueur de la fissure et aux dimensions de la structure. Les choses se compliquent si cette zone s'étend jusqu'à envahir tout le ligament en tête de fissure, c'est-à-dire toute la section restante. Beaucoup d'études ont été consacrées au cas de solides plastiques. Les solides visqueux sont moins bien connus.



Enfin les solides comme les céramiques ou le béton qui présentent un endommagement avec variation de volume et des lois de comportement complexes sont encore assez mal compris.

Nous nous limitons dans cet exposé aux problèmes plans (déformation plane, contrainte plane ou mode antiplan).

## 2. SOLIDE ELASTIQUE

2.1. Pour un solide élastique il est possible de définir un potentiel  $W$ . La déformation  $\epsilon_{ij}$  est donnée par :

$$\epsilon_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{et} \quad W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{kl} d\epsilon_{kl} \quad \dots \quad (2)$$

Pour un solide élastique linéaire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \dots \quad (3)$$

où  $C_{ijkl}$  sont les constantes d'élasticité et

$$W = (1/2) \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (4)$$

Pour un solide élastique non linéaire on peut par exemple poser :

$$\epsilon_{ij} = (3/2) (\bar{\sigma} / \sigma_0)^{1/n-1} S_{ij} / \sigma_0 \quad (\text{c'est-à-dire } \bar{\sigma} = \sigma_0 \bar{\epsilon}^n) \dots (5)$$

où  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente ( $\bar{\sigma}^2 = (3/2) S_{ij} S_{ij}$ ) et  $S_{ij}$  le déviateur des contraintes, et  $\bar{\epsilon}$  la déformation équivalente. :

$$\bar{\epsilon}^2 = (2/3) \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$$

$$\text{Alors :} \quad W = [n/(n+1)] (\bar{\sigma} / \sigma_0)^{1/n} \bar{\sigma} = [1/(n+1)] \bar{\epsilon} \cdot \bar{\sigma} \dots (6)$$

2.2. Rice (2) a défini une intégrale de contour  $J$  :

$$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds \quad \dots \quad (7)$$

où  $\Gamma$  est un contour entourant l'extrémité de la fissure et parcouru dans le sens direct,  $t_i$  la contrainte appliquée sur le contour et  $u_i$  le déplacement (on suppose que les faces de la fissure ne sont pas chargées (figure 1)).

Cette intégrale possède la propriété fondamentale d'être indépendante du contour  $\Gamma$ . En effet, considérons (figure 2) deux contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_2$  étant parcouru dans le sens négatif. Nous avons :

$$J_1 = \int_{\Gamma} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds$$

$$J_2 = - \int_{\Gamma} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds$$



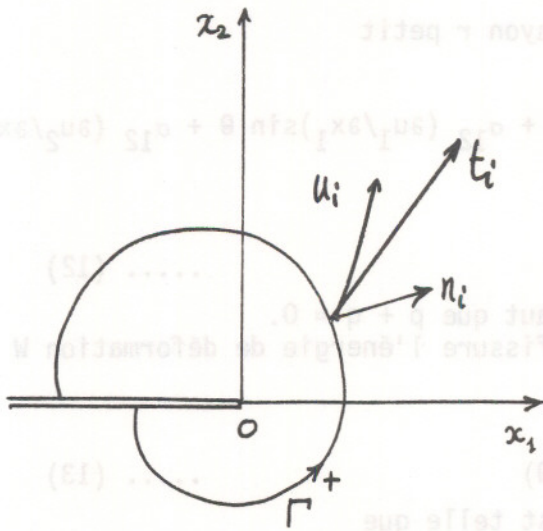


Figure 1

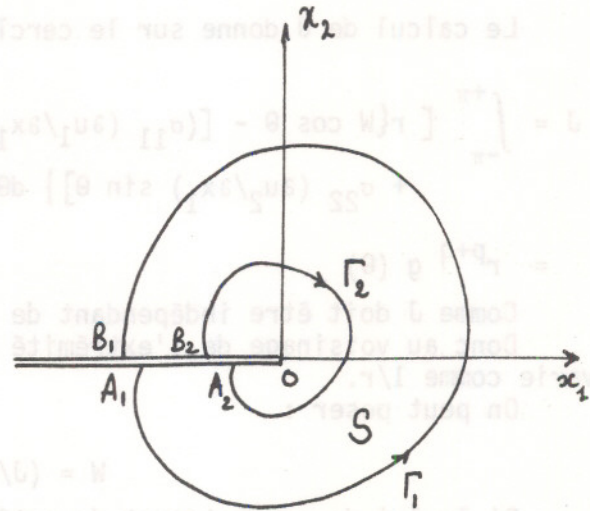


Figure 2

Comme les lèvres de la fissure ne sont pas chargées

$$\int_{A_1 B_1 B_2 A_2} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds = J_1 - J_2$$

Nous pouvons transformer l'intégrale de contour en une intégrale de surface à l'aide du théorème de Green et du théorème des travaux virtuels.

$$\int_{A_1 B_1 B_2 A_2} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds = \int_S (\partial W / \partial x_1 - \sigma_{ij} \partial \epsilon_{ij} / \partial x_1) ds \dots \dots (8)$$

Comme  $\partial W / \partial x_1$  d'après la formule (2) est égal à  $\sigma_{ij} \partial \epsilon_{ij} / \partial x_1$  cette intégrale est nulle et donc  $J_1 = J_2$ .

2.3. Le choix du contour  $\Gamma$  permet maintenant d'établir des relations entre les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité de la fissure et loin de celle-ci.

Choisissons comme contour un cercle de rayon  $R$  petit. Nous développons  $\sigma_{ij}$  et  $u_i$  en puissances croissantes de  $r$ . Au voisinage de l'extrémité nous ne retenons que le premier terme.

$$\sigma_{ij} = r^p \cdot A_{ij}(\theta) \dots \dots (9)$$

$$u_i = r^q B_i(\theta)$$

Alors :

$$\epsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i) = r^{q-1} C_{ij}(\theta) \dots \dots (10)$$

et

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{kl} d\epsilon_{kl} = r^{p+q-1} f(\theta) \dots \dots (11)$$



Le calcul de J donne sur le cercle de rayon r petit

$$J = \int_{-\pi}^{+\pi} [ r \{ W \cos \theta - [ (\sigma_{11} (\partial u_1 / \partial x_1) \cos \theta + \sigma_{12} (\partial u_1 / \partial x_1) \sin \theta + \sigma_{12} (\partial u_2 / \partial x_1) \cos \theta + \sigma_{22} (\partial u_2 / \partial x_1) \sin \theta ] \} d\theta$$

$$= r^{p+q} g(\theta) \quad \dots (12)$$

Comme J doit être indépendant de r il faut que  $p + q = 0$ .

Donc au voisinage de l'extrémité de la fissure l'énergie de déformation W varie comme  $1/r$ .

On peut poser :

$$W = (J/r) W(\theta) \quad \dots (13)$$

Si la loi de comportement du matériau est telle que

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 (\bar{\epsilon})^n \quad \epsilon_{ij} = (3/2) (\sigma/\sigma_0)^{1/n-1} S_{ij}/\sigma_0 \quad \dots (5)$$

$\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  étant la contrainte et la déformation équivalentes.

Comme W est proportionnel à  $\bar{\epsilon}^{n+1}$ , on en déduit :

$$\epsilon_{ij} = (J/\sigma_0 r)^{1/(n+1)} E_{ij}(\theta) \quad \dots (14)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 (J/\sigma_0 r)^{1/(n+1)} \Sigma_{ij}(\theta)$$

et

$$u_i = (Jr/\sigma_0)^{n/(n+1)} U_i(\theta)$$

Si le matériau est élastique linéaire on retrouve la singularité de contrainte en  $r^{-1/2}$ .

Rice et Rosengren ainsi que Hutchinson ont calculé les fonctions  $E_{ij}(\theta)$ ,  $\Sigma_{ij}(\theta)$ ,  $U_i(\theta)$ , (3, 4).

Le résultat remarquable est que les champs de contraintes et de déformation au voisinage de l'extrémité d'une fissure quelconque ne sont fonction que d'un seul paramètre : J.

2.4. Il est physiquement impossible que l'énergie de déformation augmente indéfiniment au voisinage de l'extrémité de la fissure. Dans cette région le calcul fait en supposant les déformations petites n'est pas valable. La déformation é-mousse l'extrémité de la fissure et des endommagements de diverses sortes apparaissent. Il existe donc une zone perturbée où se produisent des phénomènes non réversibles. Néanmoins si ses dimensions sont assez petites, les résultats précédents restent convenables à l'extérieur de cette zone. Il faut pour cela que  $J/\sigma_0$  ne soit pas trop grand. Les règles pratiques de l'ASTM reviennent à exiger une dimension de ligament au moins égale à 25 fois la taille de la zone perturbée. Même si alors les champs de contraintes et de déformations sont inconnus à l'intérieur de cette zone le chargement de sa frontière extérieure n'est fonction que de J. C'est l'approximation de la zone perturbée confinée, (small scale yielding approximation).

2.5. Dans un solide élastique linéaire l'intégration des équations de l'équilibre en se limitant au premier terme du développement en puissances de r donne les formules bien connues :



$$\sigma_{ij} = (K_I/2\pi r) f_{ij}(\theta) + \dots \quad \dots \quad (15)$$

en mode I d'ouverture de fissure, par exemple.  $K_I$  est le facteur d'intensité de contrainte.

L'intégration de  $J$  sur un cercle de rayon petit conduit alors aux relations :

$$\begin{aligned} J &= K_I^2 (1 - \nu^2)/E && \text{en déformation plane} \\ J &= K_I^2/E && \text{en contrainte plane} \end{aligned} \quad \dots \quad (16)$$

où  $E$  est le module d'Young  
et  $\nu$  le coefficient de Poisson

$J$  est alors égal au taux de restitution d'énergie  $G = -dP/da$  (ou force d'extension de fissure)  $P$  est l'énergie potentielle et  $a$  la longueur de la fissure.

Dans un solide élastique non linéaire, on peut démontrer que  $J$  est égal au taux de restitution d'énergie (1, 2).

$$J = -dP/da \quad \dots \quad (17)$$

Ainsi avec un tel matériau, si la zone perturbée est confinée, il est possible de caractériser les champs de contraintes et de déformations en tête de fissure à l'aide du seul paramètre  $J$ , égal au taux de restitution d'énergie, mesurable par exemple par la méthode de la compliance (5). Cette méthode consiste à comparer les énergies potentielles  $P_1, P_2 \dots P_i$  du solide étudié comportant des fissures de longueurs différentes  $a_1, a_2 \dots a_i$ .

2.6. Si dans ces solides la rupture survient pour une valeur critique  $\sigma^*$  de la contrainte locale (ou de la déformation, ou de l'énergie) d'après la formule (17) une fissure se propage pour une valeur critique de  $J$

$$J_C = \sigma_0 \rho (\sigma^*/\sigma_0)^{(n+1)/n} \quad \dots \quad (18)$$

où  $\rho$  est une distance caractéristique, fonction de la structure du matériau. Il faut en effet pour que la rupture survienne que la contrainte atteigne localement sa valeur critique  $\sigma^*$  sur une distance suffisante en relation par exemple avec la taille du grain, ou la distance entre inclusions, ou la distance entre granulats etc...

Dans un matériau élastique linéaire

$$J_C = G_C = K_{IC}^2 (1 - \nu^2)/E \text{ ou } (1 - \nu^2) \sigma^{*2}/E \quad \dots \quad (19)$$

Il est alors indifférent d'exprimer le critère de rupture en terme de  $J$ , de  $G$  ou de  $K$ .

La formule (14) indique également que l'écartement de fissure  $\delta = 2u_2$  peut être reliée aux critères de rupture précédents.

D'une façon générale :

$$J = m \sigma_0 \delta \quad \dots \quad (20)$$

où  $m$  est un facteur géométrique. D'après la formule (14) pour que  $m$  soit indépendant du coefficient de consolidation  $n$  il faudrait mesurer  $\delta$  à une distance de l'extrémité de la fissure égale à  $(J/\sigma_0)^{1/n}$

### 3. SOLIDE PLASTIQUE

#### 3.1. Un matériau plastique obéit à une loi de comportement différentielle



$$d\epsilon_{ij}^p = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\lambda \quad \dots \quad (21)$$

L'énergie de déformation  $W$  n'est pas seulement fonction des déformations actuelles mais aussi de toute leur évolution antérieure.  $W$  est alors fonction explicite de  $x_1$  et il n'est pas prouvé que l'intégrale (8) est nulle.

Pourtant si les trajets de chargement sont radiaux et monotones, l'équation (21) peut être intégrée

$$\epsilon_{ij}^p = (3/2) (\bar{\sigma}/\sigma_0)^{1/n-1} S_{ij}/\sigma_0 \quad \dots \quad (22)$$

et le comportement du solide plastique ne se distingue pas de celui du solide élastique non linéaire, (formule 5).

On retrouve alors les propriétés d'indépendance de  $J$  par rapport au contour d'intégration et une distribution de contraintes et de déformations dans la zone plastique proche de l'extrémité donnée par les formules (14). Mais ces résultats supposent des trajets de chargement radiaux au voisinage de l'extrémité de la fissure. Pour vérifier si cette hypothèse est bonne divers auteurs (6, 7) ont calculé les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure par des méthodes numériques en utilisant la théorie différentielle de la plasticité. En général il est effectivement bien vérifié que  $J$  est indépendant du contour d'intégration. Mais il faut insister sur de larges incertitudes qui subsistent quand la plasticité a envahi tout le ligament : suivant la géométrie du système la contrainte  $\sigma_{11}$  peut être très différente et le plus ou moins grand taux de confinement ainsi obtenu peut masquer totalement la variation prédite par le premier terme du développement en puissance de  $r$ . Ainsi la présence de frontières proches de l'extrémité de la fissure et celle de chargements biaxiaux posent des questions qui ne sont pas clairement résolues.

Une autre difficulté dans les corps plastiques est qu'il n'est plus possible de démontrer comme pour les corps élastiques que  $J = -dP/da$ , le taux de restitution d'énergie. En effet, l'énergie du système est pour ces corps fonction du chemin parcouru et la variation d'énergie potentielle quand la fissure se propage d'une petite quantité  $\delta a$  n'est pas forcément égale à la différence des énergies potentielles de deux solides dont l'un possède une fissure de longueur  $a$  et l'autre une fissure de longueur  $a + \delta a$ .

En dépit de ces difficultés d'ordre théorique, beaucoup d'expériences ont été faites sur des corps plastiques pour voir si la valeur critique de  $J$  pouvait constituer un critère de rupture. Les résultats sont probants, au moins quand la rupture se fait par clivages. Alors  $J_C$  mesuré sur des éprouvettes de faibles dimensions, dans le domaine plastique, donne la même valeur que  $G_C$  mesuré sur des éprouvettes de grandes dimensions en plasticité confinée (5).

Un autre paramètre proposé est l'écartement critique de fissure  $\delta_C$ . Il est relié à  $J_C$  par une formule analogue à la formule (20). Mais le facteur  $m$  est fonction de la géométrie de la pièce (il vaut par exemple 2 pour une éprouvette de flexion 3 points).

#### 4. SOLIDE VISQUEUX

4.1. Si le solide visqueux obéit à une loi de comportement de type Norton

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \partial \Omega / \partial \sigma_{ij} \quad \Omega = (S_{ij} S_{ij})^m \quad \dots \quad (23)$$

où  $\dot{\epsilon}_{ij}$  est la vitesse de déformation, Bui propose alors une intégrale indépendante du contour

$$\dot{I} = \int_{\Gamma} -\Omega dx_2 + \dot{u}_j n_k (\partial \sigma_{jk} / \partial x_1) ds \quad \dots \quad (24)$$



Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que  $\Omega$  varie comme  $1/r$  près de l'extrémité de la fissure.

$$\Omega = (- \dot{I}/r) W(\theta) + \dots \dots \dots (25)$$

Il en résulte que

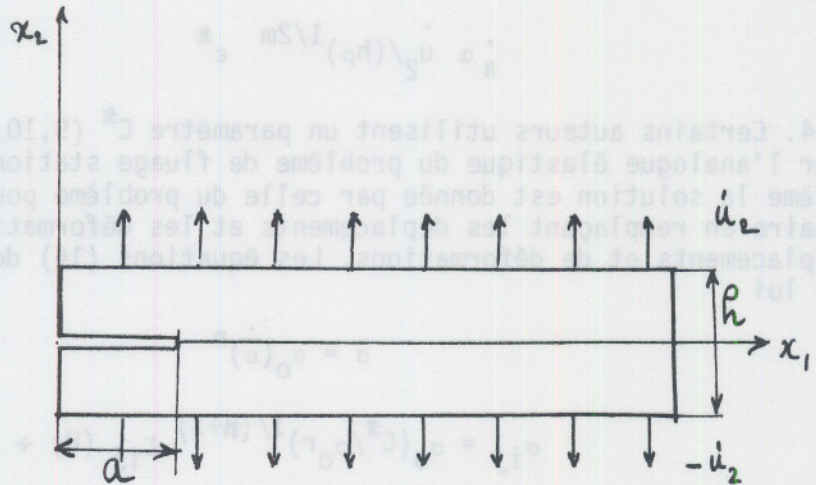
$$\sigma_{ij} = (- \dot{I}/r)^{1/2m} \Sigma_{ij}(\theta) + \dots \dots \dots (26)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (- \dot{I}/r)^{1-1/2m} \dot{E}_{ij}(\theta) + \dots$$

$$\dot{u}_i = (- \dot{I}r)^{1-1/2m} \dot{U}_i(\theta) + \dots$$

Par ailleurs  $\dot{I}$  est un taux d'énergie complémentaire (plus exactement de puissance complémentaire) mesurable par des méthodes de complaisance.

Figure 3



4.2. L'exemple simple (figure 3) de la bande de grande largeur aux bords de laquelle est imposée une vitesse de déplacement  $\dot{u}_2$ , permet d'illustrer cette théorie. Le calcul de  $\dot{I}$  sur un contour suivant les bords de l'éprouvette donne :

$$\dot{I} = - \Omega h \dots \dots \dots (27)$$

comme  $\Omega = [(3/2) \sigma_{22}^2]^m$  et que  $\dot{\epsilon}_{22} = \dot{u}_2/h = (3/2)^m 2m (\sigma_{22})^{2m-1} \dots$  (28)

$$\dot{I} = - (2/3)^{1/(2m-1)} (1/2m)^{2m/(2m-1)} (\dot{u}_2)^{2m/(2m-1)} (h)^{-1/(2m-1)} \dots (29)$$

et  $\sigma_{ij} \propto (\dot{u}_2/h)^{1/(2m-1)} (1/rh)^{1/2m} \dots \dots \dots (30)$

et  $\delta \propto \dot{u}_2 h^{-1/2m} r^{(2m-1)/2m} \dots \dots \dots (31)$

La vitesse d'écartement de fissure est proportionnelle à la vitesse de déplacement des bords de l'éprouvette.



4.3.  $\dot{\epsilon}^*$  serait donc un paramètre qui pourrait caractériser la rupture. La vitesse de fissuration  $\dot{a}$  serait reliée à  $\dot{\epsilon}^*$ . Si par exemple la capacité de déformation du matériau était  $\epsilon^*$

$$\int_0^{tr} \dot{\epsilon}_{ij} dt = \epsilon^* \quad \dots (32)$$

la vitesse de propagation de la fissure serait telle que la déformation en un point atteindrait  $\epsilon^*$  quand l'extrémité de la fissure ne serait plus qu'à une distance  $\rho$  de ce point,  $\rho$  étant fonction du matériau. L'intégration de l'équation (26) donne alors :

$$\epsilon^* = \int_{-\infty}^{\rho} (-\dot{I}/r)^{1-1/2m} \dot{\epsilon}_{ij}(\theta) dr/\dot{a} \quad \dots (33)$$

soit

$$\dot{a} \propto (-\dot{I})^{1-1/2m} \rho^{1/2m} / \epsilon^* \quad \dots (34)$$

Dans l'exemple précédent on aurait :

$$\dot{a} \propto \dot{u}_2 / (h\rho)^{1/2m} \epsilon^* \quad \dots (35)$$

4.4. Certains auteurs utilisent un paramètre  $C^*$  (9,10, 11, 16). Ils se fondent sur l'analogie élastique du problème de fluage stationnaire (12). Dans un tel problème la solution est donnée par celle du problème pour un corps élastique non linéaire en remplaçant les déplacements et les déformations par les vitesses de déplacements et de déformations. Les équations (14) donnent pour le corps visqueux de loi

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 (\dot{\epsilon})^n \quad \dots (36)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 (C^*/\sigma_0 r)^{1/(n+1)} \Sigma_{ij}(\theta) + \dots \quad \dots (37)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (C^*/\sigma_0 r)^{n/(n+1)} \dot{\epsilon}_{ij}(\theta) + \dots$$

$$\dot{u}_i = (C^* r/\sigma_0)^{n/(n+1)} \dot{u}_i(\theta) + \dots$$

avec

$$C^* = - dP^*/da \quad \dots (38)$$

$P^*$  étant l'analogie de l'énergie potentielle en remplaçant les déplacements par les vitesses de déplacement.

En fait  $C^*$  est égal à  $-I$  bien que le principe de calcul soit différent (noter que  $2m = (n+1)/n$ ).

4.5. Enfin Shapery (13, 14, 15) a proposé une théorie pour les corps visqueux non linéaires dans le cas où la zone visqueuse est confinée dans un matériau élastique. Il aboutit à une vitesse de propagation de fissure qui est fonction du facteur d'intensité de contraintes (c'est-à-dire de  $J$ ) et l'exposant de la loi de fluage  $n'$

$$\dot{a} \propto K_I^{2(1+1/n')} \quad \dots (39)$$



où  $n'$  est l'exposant de la loi  $D(t) = D_1 t^{n'}$  où  $D$  est la complaisance en fluage.

## 5. CONCLUSION

Dans les solides élastiques linéaires ou non linéaires et les solides visqueux en fluage stationnaire les champs de contraintes et de déformations à l'extrémité d'une fissure sont fonction d'un seul paramètre, le taux de restitution d'énergie (ou de puissance) potentielle. Une valeur critique de ce paramètre peut alors être utilisée comme critère de propagation de fissure. Ce résultat peut être étendu aux cas où la zone perturbée en tête de fissure de petites dimensions reste confinée. Il semble encore possible dans des situations de plasticité étendue de ramener le problème à un problème d'élasticité non linéaire et d'étendre donc les résultats précédents à ce cas.

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout particulièrement BUI dont les suggestions m'ont été très précieuses.

## BIBLIOGRAPHIE

1. H.D. BUI, Mécanique de la rupture fragile, Masson, Paris (1978)
2. J. RICE in Fracture, 2, Academic Press, New York (1968)
3. J. RICE et J.F. ROSENGREN, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968) 1
4. J.W. HUTCHINSON, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968) 13
5. G. SANZ, rapport IRSID
6. J.D.G. SUMPTER et C.E. TURNER, J. Mech. Eng. Sci., 18 (1976) 97
7. C.F. SHIH, H.G. DE LORENZI, W.R. ANDREWS, R.W. VAN STONE and J.P.D. WILKINSON, "Methodology for plastic fracture" Fourth Quaterly Report by General Electric Company to Electric Power Research Institute (June 6, 1977)
8. H.D. BUI, Communication privée
9. J.F. LANDES et J.A. BEGLEY, ASTM.STP 590 (1976) 128
10. G.A. WEBSTER, Conf. on Mechanics and Physics of Fracture Inst. Phys., Cambridge (1975)
11. M.P. HARPES et E.G. ELLISON, J. Strain Anal., 12 (1977) 167
12. F.K.G. ODOVIST, Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture, Clarendon Press, Oxford (1974)
13. R.A. SHAPERY, Int. J. of Fracture, 11 (1975) 141
14. R.A. SHAPERY, Int. J. of Fracture, 11 (1975) 369
15. R.A. SHAPERY, Int. J. of Fracture, 11 (1975) 549
16. H.P. VAN LEEUWEN, Eng. Fract. Mech., 9 (1977) 951



Il donne selon les auteurs des résultats satisfaisants avec les aciers. Par contre nous avons trouvé des écarts trop importants avec le bois.

Ainsi  $a_0$  sera déterminé à partir des complaisances expérimentales et de la formule [11].

$$\frac{\delta}{P} = \frac{8 \alpha^3}{E^* B H^3} \left[ 1 + \frac{H^2}{\alpha^2} \right]$$

avec  $E^* = E$  en contraintes planes.

$$= \frac{E}{1 - \nu^2} \text{ en déformation planes}$$

$E$ , module d'Young,

$\nu$ , coefficient de Poisson.

Si nous supposons que le module  $E^*$  est inconnu dans la direction du chargement, il est possible de déterminer  $a_0$  et  $E^*$  simultanément en utilisant deux longueurs de fissures.

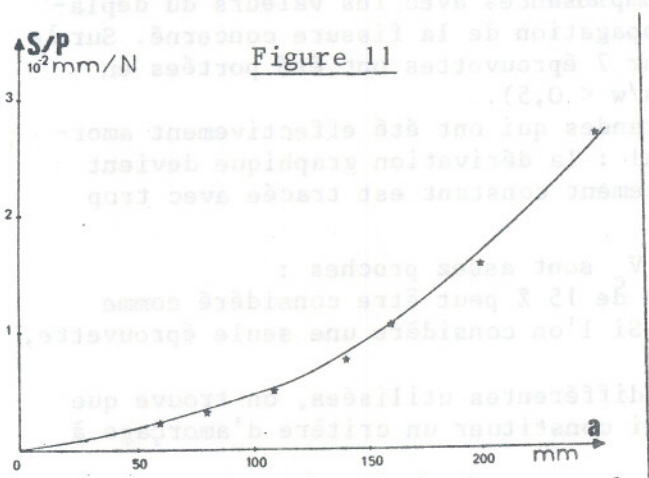


Figure 11

Complaisance fonction de la longueur de fissure.

Points expérimentaux. Courbe théorique  
 $a_0 = 80 \text{ mm}$  ;  $E = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$

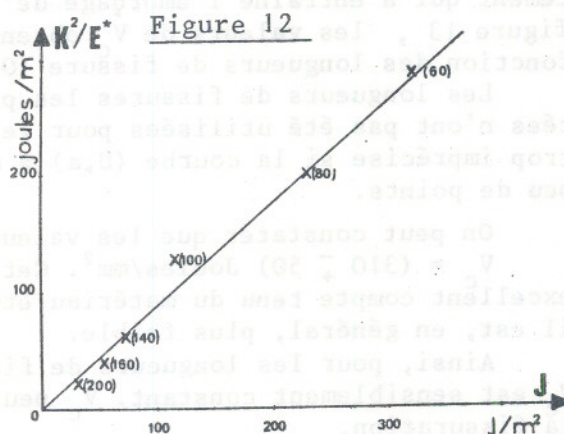


Figure 12

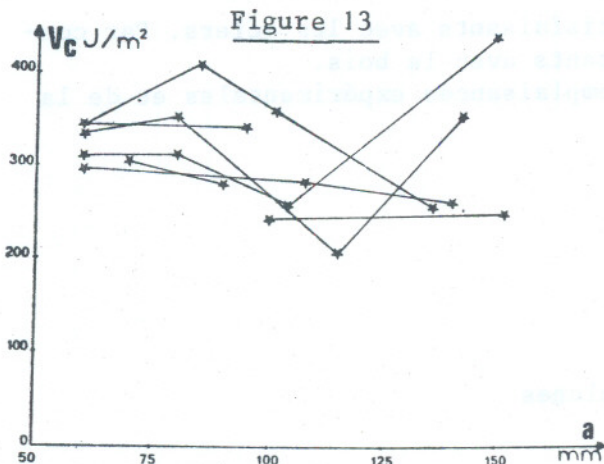
Comparaison de  $K$  et  $J$  dans le domaine élastique (Longueurs de fissures entre parenthèses).

La figure 11 permet de voir le bon accord des complaisances expérimentales et théoriques ajustées. Les valeurs de  $E^*$  obtenues sur toutes les éprouvettes sont voisines des modules trouvés en flexion 3 points.

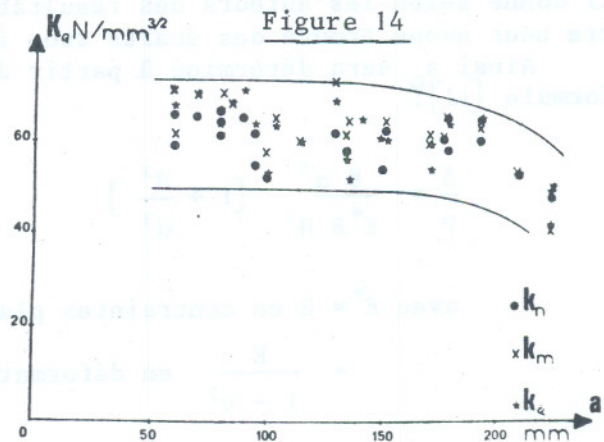
On démontre, en élasticité que  $G = J(\text{ou } V) = \frac{K_I^2}{E}$  en mode I.

La figure 12 montre la coïncidence de  $V$  et  $K_I^2 / E$  pour les différentes longueurs de fissure. Néanmoins  $V$  est en général un peu supérieur (10 %).





Valeurs expérimentales de  $V_c$  en fonction de la longueur de fissure et différentes éprouvettes.



Valeur expérimentale du facteur d'intensité de contrainte critique .

#### 4.2. Détermination de $V_c$

Nous avons appliqué la méthode des complaisances avec les valeurs du déplacement qui a entraîné l'amorçage de la propagation de la fissure concerné. Sur la figure 13, les valeurs de  $V_c$  obtenues sur 7 éprouvettes ont été portées en fonction des longueurs de fissure ( $0,2 < a/w < 0,5$ ).

Les longueurs de fissures les plus grandes qui ont été effectivement amorcées n'ont pas été utilisées pour le calcul : la dérivation graphique devient trop imprécise si la courbe  $(U, a)$  à déplacement constant est tracée avec trop peu de points.

On peut constater que les valeurs de  $V_c$  sont assez proches :

$V_c = (310 \pm 50)$  Joules/mm<sup>2</sup>. Cet écart de 15 % peut être considéré comme excellent compte tenu du matériau étudié. Si l'on considère une seule éprouvette, il est, en général, plus faible.

Ainsi, pour les longueurs de fissure différentes utilisées, on trouve que  $V_c$  est sensiblement constant.  $V_c$  peut ainsi constituer un critère d'amorçage à la fissuration.

#### 4.3. Détermination de $K_c$

En utilisant l'expression de  $K$  donnée plus haut et en effectuant la correction de longueur  $a_0$ , nous avons essayé plusieurs critères de définition de la charge critique, soit  $P_Q$ .

. Soit en utilisant une méthode dérivée de la norme AFNOR ou ASTM appliquée aux aciers [15]. C'est la méthode utilisée par [3]. Elle consiste à partir d'une courbe  $P$ , ouverture de fissure (COD). On choisit alors l'intersection de la courbe  $(P, COD)$  et de la droite de pente inférieure à 5 % à la pente de la zone linéaire de la courbe  $(P, COD)$  comme valeur de  $P$  critique, soit  $P_N$  cette valeur et  $K_N$  la détermination de  $K$  correspondante.

. Soit en utilisant le maximum de la courbe  $(P, COD)$ . Soient  $P_M$  et  $K_M$  les valeurs correspondantes.

. Soit en utilisant la force à l'amorçage, soit  $P_A$  déterminée par le système électrique.  $K_A$  est la valeur correspondante.

Ces courbes sont toutes portées figure 14. Quelle que soit la méthode de détermination de  $K_Q$ , on constate qu'il y a recouvrement des résultats. La moyenne est voisine de  $60 \text{ N mm}^{-3/2}$ . Mais de plus  $K_Q$  varie avec la profondeur de fissure dès que  $a/w > 0,4$ .



Dans tous les cas on a vérifié le critère classique :

$$a \text{ ou } B > 2,5 \frac{K_Q^2}{\sigma_Y^2}$$

En prenant  $K_Q \sim 60 \text{ N mm}^{-3/2}$  et  $\sigma_Y \sim 20 \text{ N/mm}^2$  on a,  $a$  ou  $B > 20 \text{ mm}$ , ce qui est largement respecté. Il ne s'agit donc pas d'une zone plastique trop importante. Pour cette valeur de  $a/w$  nous ne pensons pas non plus à un effet d'extrémité.

#### CONCLUSION.

Nous nous sommes attachés, pour un modèle d'exprouvette DCB à déterminer les facteurs d'intensité de contrainte  $K$  et les valeurs expérimentales de l'intégrale de Rice  $V$  ainsi que leurs valeurs critiques.

Dans le domaine linéaire élastique, on a trouvé que les valeurs de  $K$  pourraient être déterminées à l'aide de la formule élastique corrigée. La variation de complaisance en fonction de la longueur de fissure calculée à l'aide de cette correction coïncide avec la courbe expérimentale pour toutes les longueurs envisagées.

On a montré qu'une relation linéaire entre  $V$  et  $K^2/E$  existait bien dans ce domaine.

Dans le domaine élastique plastique, les valeurs de  $K_Q$  trouvées en utilisant divers critères de propagation ne semblent pas très significatives :  $K_Q$  varie avec la profondeur de la fissure et ne doit pas être identifié à  $K_{Ic}$ .

Par contre, les valeurs de  $V_c$  trouvées par la méthode des complaisances ne montrent pas de variation par rapport à la longueur de fissure.

Ainsi  $V_c$  pourrait constituer une caractéristique intrinsèque du matériau et le procédé que nous avons développé une méthode pour la déterminer.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] WALSH P.F.  
Int. Jour. Solids Structure Vol 7 n° 10 - 1971 cité par [3]
- [2] PORTER A.W.  
Forest Product Journal Vol 14 (8) - 1964 Cité par [13]
- [3] BARRETT J.D. Effect of crack front width on fracture toughness of Douglas Fir - Engineering Fracture Méchanics Vol 8 - 1976
- [4] SCHNIEWIND A.P et D.E. LYON  
A fracture mechanics approach to the tensile strength perpendicular to grain of dimension lumber. Wood Sci Technology - 7 (1) - 1973
- [5] RICE J.R.  
Mathematical analysis in the mechanics of fracture  
Fracture Tome II édité par H. Liebowitz - 1968 - Academie Press.
- [6] ATLURI et M NAKAGAKI .  
J. Intégral for strain hardening materials in ductile fracture problems.  
AJAA Journal - Vol 15 n° 7 - 1977.
- [7] BEGLEY J.A. et LANDES J.D.  
ASTM - STP 514 - 1972
- [8] D. MIANNAY et A. PELLISSIER - TANON  
Principe des mesures de ténacité basées sur l'intégrale  $J$  et le concept de l'énergie équivalente. Colloque GAMI PARIS 1977 -



- [9] BLUHM J.I.  
Fracture Arrest - Fracture Tome V déjà cité.
- [10] C. HUET  
Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et divers matériaux. Cahiers du G.F.R. Tome III (3) - 1973
- [11] E.J. RIPLING S. MUSTOVOY et R.L PATRICK  
Measuring fracture toughness of adhesive joints.  
Materials research and standards - Vol 4 (3) - 1964
- [12] A.S. BLICBAU et D.J. COOK  
Effect of strain rate on the fracture of wood  
South Wales University report - Australie 1975.
- [13] A.G. DEBAISE, A.W. PORTER et R.E. PENTONEY  
Morphology and mechanics of wood fracture.  
Materials : Research and standards - Vol. 6 (10) - 1966
- [14] M.F. KANNINEN  
An augmented double cantilever beam model for studying crack propagating and arrest - Int Jour. Fracture Vol 9 (1) - 1973
- [15] AFNOR NFA 03.180  
Détermination du facteur d'intensité de contrainte critique des aciers - 1974 -



## CRITERES DE RUPTURE EN CONDITIONS POLYMODALES (MODE I + II) (+)

P. JODIN et G. PLUVINAGE (++)

### RESUME

Dans cet article, on passe en revue les principaux critères de propagation d'une fissure sollicitée en modes I et II. On analyse successivement les critères dits statiques et les critères dits énergétiques. L'étude des résultats expérimentaux publiés par différents auteurs et de nos propres résultats montre que la distinction entre les différents critères est délicate.

### ABSTRACT

The most important criteria related to the propagation of a crack subjected to a mode I and II loading are reviewed in this paper. Static and energetic criteria are successively analysed. From the study of published experimental results and of our own results, it is shown that discrimination between these criteria is difficult.

### 1. INTRODUCTION

Si la majeure partie des études de la mécanique de la rupture porte sur une fissure sollicitée en mode I, c'est à dire par ouverture des lèvres de la fissure, les situations rencontrées réellement en construction mécanique sont souvent plus complexes. Autrement dit, il peut arriver assez fréquemment que la fissure ne soit pas seulement sollicitée en mode I, mais en mode I + II, c'est à dire par ouverture des lèvres de la fissure et par glissement droit des lèvres l'une sur l'autre, ou encore en mode I + III, c'est à dire en superposant à l'ouverture un glissement vis, ou même en mode I + II + III.

Il est donc légitime de se demander comment vont être modifiés les critères habituels de propagation en mode I. La charge de propagation sera-t-elle modifiée? La direction de propagation sera-t-elle toujours celle du plan de la fissure?

De nombreux auteurs se sont penchés sur ce problème suivant quatre approches différentes :

- une approche dite statique qui repose sur l'analyse des contraintes au voisinage du fond de fissure avant rupture.

(+) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 7 décembre 1978.

(++) Laboratoire de Fiabilité Mécanique - Université de METZ  
Ile du Saulcy - 57000 METZ



- une approche cinématique portant sur la déformation maximum.
- une approche portant sur l'état final, c'est à dire la configuration obtenue après propagation.
- une approche énergétique reposant sur un bilan énergétique au moment de la propagation.

## 2. CRITERES DE PROPAGATION

Le tableau de la page suivante /1/ présente l'ensemble des critères trouvés dans la littérature et classés comme indiqué au paragraphe 1. On ne relève pas moins de 35 formulations différentes, bien que certaines d'entre elles partent d'une analyse identique et ne diffèrent que par quelques détails seulement.

Il serait fastidieux d'analyser chaque critère en détail. Nous nous limiterons à quelques uns d'entre eux parmi les plus caractéristiques.

### 2.1. Critères statiques

#### 2.1.1. ERDOGAN et SIH dit SIH I /2/

Ce critère repose sur deux hypothèses :

- la fissure se propage dans une direction radiale
- elle se propage dans la direction où la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximum et le cisaillement  $\tau_{r\theta}$  est nul. (Figure 1)

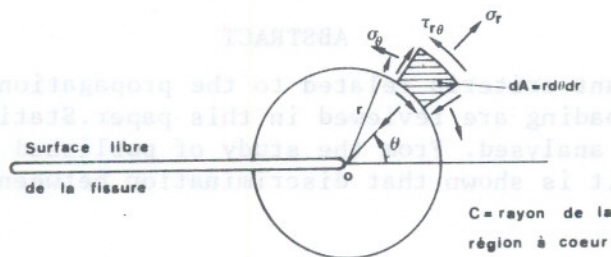


Figure 1 : Etat des contraintes en fond de fissure

Si l'on met les contraintes sous la forme :

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} [\cos(\theta/2)(1 + \sin^2(\theta/2))] + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} [1 - 3\sin^2(\theta/2)] \sin(\theta/2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos^3(\theta/2) - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} [3\sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2)]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\theta/2) [1 - 3\sin^2(\theta/2)]$$

La deuxième condition s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_0 + (3\cos\theta_0 - 1)\cot\beta = 0$$



**CRITERES STATIQUES**

CROISSANCE NORMALE  
à la DIRECTION  
de TRACTION MAXIMALE

- croissance horizontale
- CHIU et al.

CONTRAINTE NORMALE  
MAXIMALE

- ERDOGAN - SIH
- WANG TZU CHIANG
- EWING - WILLIAMS
- FINNIE - SAITH
- MAC CLINTOCK
- formulations numériques

COURBE INTRINSEQUE  
de RESISTANCE  
MOLECULAIRE

- MANDEL

CROISSANCE NORMALE  
à la LIGNE de CONTR.  
AINTE TANGENTIELLE  
MAXIMALE

- ROUHI et al.

**CRITERES PORTANT SUR L'ETAT FINAL**

- C.N. MAX APRES DEVIATION
- SYMETRIE LOCALE APRES DEVIATION

- KALTHOFF
- KITAGAWA et al.



**CRITERES CINEMATIQUES**

DEFORMATION NORMALE MAXIMALE

**CRITERES ENERGETIQUES**

DENSITE D'ENERGIE  
DE DEFORMATION  
MINIMALE

- SIH
- SIH - KIPP
- SIH - CHAH
- KIPP - SIH
- FRANCIS - KO
- JAYATILAKA et al.

DENSITE RADIALE  
MAXIMALE de la  
FORCE D'EXTENSION  
DE FISSURE

- TIROSH

FORCE APPARENTE  
D'EXTENSION  
DE FISSURE

- STRIFORS
- BOISSENOT DUBOIS

TAUX D'ENERGIE DE Fissuration  
MAXIMAL

**FORMULATIONS CLASSIQUES**

NUSSER BILBY CARDEW	HUSSAIN et al	PALANISWAMY - KNAUSS	ANDERSON et COUGHLAN - BARR
		DUDUKALENKO - ROMALIS	HELLEN - BLACKBURN
		WANG TZU CHIANG	VEDA et al.

Formulation du Gradient

ONERA



La figure 2 définit les angles  $\theta$  et  $\beta$ .

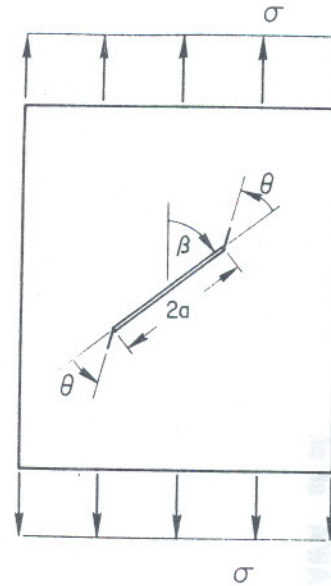


Figure 2 : Plaque a entaille inclinée. Définition des angles  $\theta$  et  $\beta$ .

Soit en mode I pur ( $\beta = 90^\circ$ )  $\theta_0 = 0$   
 en mode II pur ( $\beta \rightarrow 0$ )  $\theta_0 = -70,5^\circ$

On remarque que ce dernier résultat est indépendant de la nature du matériau et, en particulier, du coefficient de POISSON.

Dans la direction de propagation ainsi définie, on peut écrire le critère sous la forme :

$$\sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = \text{cte} = K_{IC}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\text{soit } \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] = \text{cste.}$$

Cette équation montre qu'on peut représenter le critère par une courbe dans le plan  $K_I, K_{II}$ .

### 2.1.2. Modification du critère de SIH I

A l'aide d'expériences menées sur du PMMA, WILLIAMS et EWING /3/ mettent en défaut le critère de SIH pour des angles  $\beta$  faibles. Ils font remarquer que le second terme de la distribution des contraintes n'est plus négligeable quand le

rapport  $\alpha = \frac{2c}{a}^{1/2} \simeq 0,1$ . A l'expression de la contrainte tangentielle ils rajoutent donc la contrainte parallèle à la fissure,  $\sigma \sin^2 \theta \cos^2 \beta$ . FINNIE et SAITH /4/ rajoutent la contrainte,  $-\sigma \sin^2 \beta \sin^2 \theta$ , normale à la fissure. ST JOHN et SIGETY /5/ prennent en compte le tenseur complet en rajoutant le cisaillement,  $2\sigma \sin \beta \cos \beta \sin \theta \cos \theta$ .

Cependant, ces modèles, s'ils sont représentatifs de la réalité dans un certain nombre de cas, sont criticables dans la mesure où ils conduisent tous à des contraintes infinies en fond de fissure.

### 2.1.3. Courbe intrinsèque de MANDEL /6/

Suivant une idée de BARRENBLATT, MANDEL précise que la théorie de l'élasticité linéaire n'est plus applicable au voisinage du fond de fissure. Il montre que les contraintes peuvent se mettre sous la forme :



$$r^{1/2} \sigma_{rr} = A \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - B \left( 5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$r^{1/2} \sigma_{\theta\theta} = A \left( \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) - 3B \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$r^{1/2} \sigma_{r\theta} = A \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) + B \left( \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

où A et B représentent les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ . La discontinuité du milieu au voisinage du fond de fissure s'exprime par le fait que la fissure se propagera lorsqu'on aura une relation caractéristique de la matière entre A et B :  $k(4A, 4B) = 0$ .

Si on pose  $r^{1/2} \sigma_{\theta\theta} = f(\theta) = x$  et  $r^{1/2} \sigma_{r\theta} = g(\theta) = y$  on obtient dans le plan (x, y) une courbe qui est analogue à un diagramme de Mohr et dont la forme dépend du rapport A/B (Figure 3).

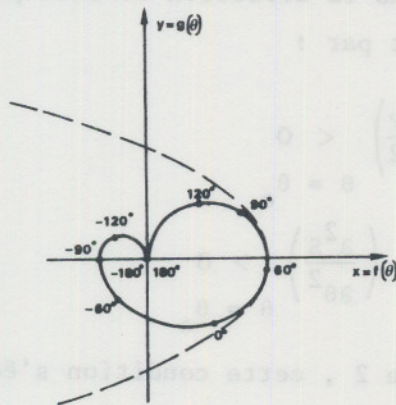


Figure 3 : Courbe de Mohr calculée à l'aide des relations de Mandel  $A = \frac{1}{2}$   $B = \frac{1}{2}$  et courbe intrinsèque

MANDEL montre que la courbe  $k(4A, 4B) = 0$  peut avoir la forme indiquée en pointillés sur la figure 3, le rayon au sommet de cette courbe étant, peut-être, une mesure de la fragilité (sans que ce point soit démontré). Il y a rupture lorsque la courbe de Mohr rencontre la courbe intrinsèque. Cette rencontre n'a pas lieu nécessairement sur l'axe Ox.

## 2.2. Critères énergétiques

### 2.2.1. Critère de SIH II /7/

Soit le système bidimensionnel représenté à la figure 1. SIH montre que l'énergie de déformation stockée dans l'élément dA, dans un matériau élastique est égale à :

$$dW = \frac{1}{2} \left[ \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] dA$$

où u et v sont les déplacements.

Dans un système tridimensionnel, cette énergie peut se mettre sous la forme :



$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{r} \left[ a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} K_{III}^2 \right]$$

$$\text{soit } \frac{dW}{dV} = \frac{S}{r}$$

La quantité  $S$  définit le champ de densité d'énergie de déformation. SIH montre qu'elle est indépendante du système de référence  $S(K_I, K_{II}, K_{III}) = S(K_I, K_{II}, K_{III})$

Lorsqu'on applique une charge à un corps fissuré, si  $P$  est l'énergie potentielle par unité de volume,  $U$  l'énergie de déformation par unité de volume, on a :

$$P = -U = -\frac{S}{r}$$

A ce stade, SIH formule deux hypothèses :

- Hypothèse 1 : la fissure va se propager dans la direction de la densité d'énergie potentielle maximum.

- Hypothèse 2 : la densité d'énergie de déformation atteint une valeur critique  $S_{cr}$  au moment de la rupture, dans la direction définie par l'hypothèse 1.

La première hypothèse se traduit par :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_{\theta = \theta_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right)_{\theta = \theta_0} < 0$$

$$\text{soit} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_{\theta = \theta_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right)_{\theta = \theta_0} > 0$$

Dans le cas général de la figure 2, cette condition s'écrit :

$$2(1 - 2\nu) \sin(\theta_0 - 2\beta) - 2\sin[2(\theta_0 - \beta)] - \sin 2\theta_0 = 0$$

Les figures 4 et 5 donnent les résultats obtenus en tension et en compression. On remarque que la nature du matériau intervient par le coefficient de Poisson  $\nu$ .

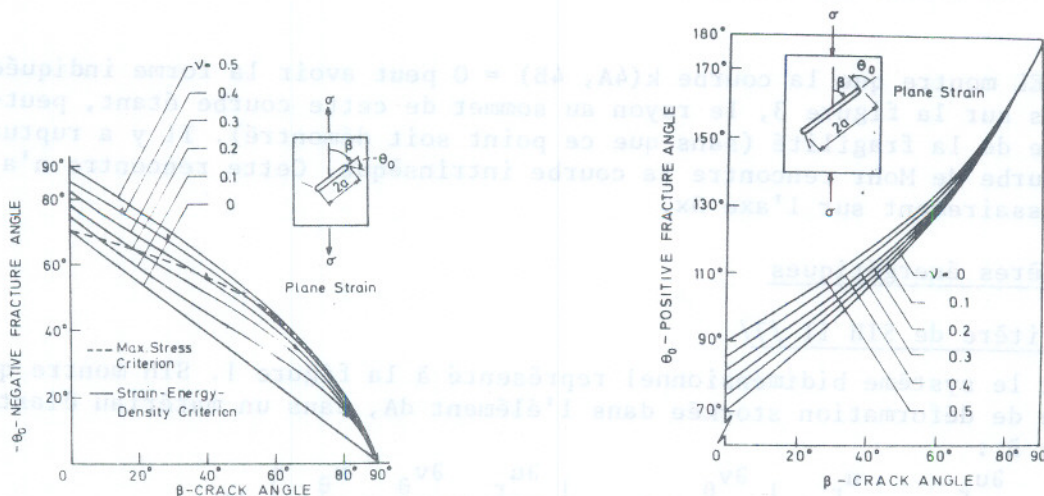


Figure 4 : Angle de propagation  $\theta$  en fonction de  $\beta$  en tension /7/

Figure 5 : Angle de propagation  $\theta$  en fonction de  $\beta$  en compression /7/



### 2.2.2. Force généralisée d'extension de fissure

Ce concept présenté par STRIFORS /8/ a été développé plus récemment par BOISSENOT et DUBOIS /9/.

On considère un volume  $V$  limité par une surface  $S$  contenant une surface singulière  $\Sigma$  (Figure 6) .

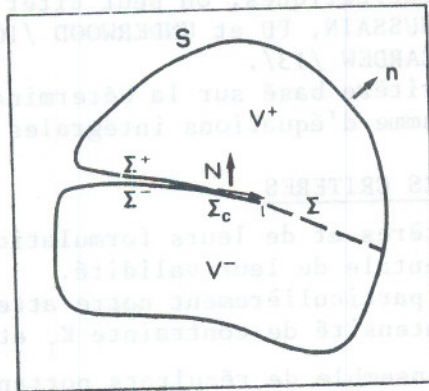


Figure 6 : Définition de la surface singulière  $\Sigma$  /8/

Pour que la propagation ait lieu, on fait les hypothèses suivantes :

- Hypothèse 1 : La croissance possible d'une fissure à l'instant  $t$  s'effectue le long de tout le front de fissure avec une vitesse  $\omega$  dans la direction  $l$ .
- Hypothèse 2 : On associe à la surface singulière  $\Sigma$  de  $V$  et à chaque processus dynamiquement admissible une énergie surfacique  $\Gamma$  relative à  $V$  :

$$\Gamma = \int_{\Sigma} \gamma \, dS \quad \text{où } \gamma \text{ est l'énergie spécifique de surface.}$$

L'application du premier principe de la thermodynamique permet d'écrire :

$$\dot{E} + \dot{\Gamma} + \dot{K} = P + Q$$

où  $E$  est l'énergie interne,  $\Gamma$  l'énergie surfacique,  $K$  l'énergie cinétique,  $P$  la puissance des forces extérieures et  $Q$  le taux de chaleur reçue par  $V$ .

On fait ensuite l'hypothèse de découplage suivante :

- Hypothèse 3 : On admet que l'énergie surfacique n'est pas affectée par les phénomènes thermiques.

On peut alors effectuer le calcul de la force  $f_1(V)$

$$f_1(V) = l_{\alpha} \int_V \sigma_{i\beta} u_{i,\beta\alpha} \, dV - l_{\alpha} \int_S T_i u_{i,\alpha} \, dS$$

A ce stade, on peut introduire une loi de comportement du matériau dans l'expression de  $f_1(V)$ , ce qui permet d'effectuer des calculs en situation élastoplastique, par exemple.

Les hypothèses suivantes permettent de déterminer la direction et la charge de propagation.

- Hypothèse 4 : La direction  $l$  pour laquelle  $f_1$  atteint sa valeur maximum est la direction préférée de croissance de la fissure.

La croissance dans cette direction se produit lorsque la force  $f_1$  atteint une valeur critique  $f_{cr}$ .



2.3. Autres critères

En dehors des variantes déjà citées du critère de SIH I, on peut rappeler, pour mémoire, la théorie de la croissance normale à la direction de traction maximale. Ce cas peut se rencontrer dans certains matériaux.

Parmi les autres critères énergétiques, on peut citer le taux de relaxation d'énergie G maximum étudié par HUSSAIN, PU et UNDERWOOD /10/, HELLEN et BLACKBURN /11/, NUISMER /12/ et BILBY ET CARDEW /13/.

L'ONERA propose enfin un critère basé sur la détermination du gradient des contraintes à l'aide d'un programme d'équations intégrales /1/.

3. VERIFICATION EXPERIMENTALE DES CRITERES

Devant l'abondance des critères et de leurs formulations, il est légitime de tenter une vérification expérimentale de leur validité.

Deux grandeurs retiendront particulièrement notre attention : l'angle de propagation et les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ .

La figure 7 représente un ensemble de résultats portant sur des aciers et des alliages légers. On remarque que l'ensemble des critères (y compris le critère de la croissance horizontale) donne des résultats satisfaisants pour les angles compris en 90° et 30° environ. Entre 0° et 30°, les critères divergent davantage, mais les résultats sont plus dispersés et plus rares. Cela tient aux difficultés expérimentales liées à la géométrie particulière de l'éprouvette à entaille centrale inclinée. Il est donc délicat d'infirmer ou de confirmer une théorie à partir de la simple mesure de l'angle de propagation. Tout au plus peut-on indiquer que telle théorie est vérifiée par tel matériau sans pouvoir généraliser à l'ensemble des matériaux de construction.

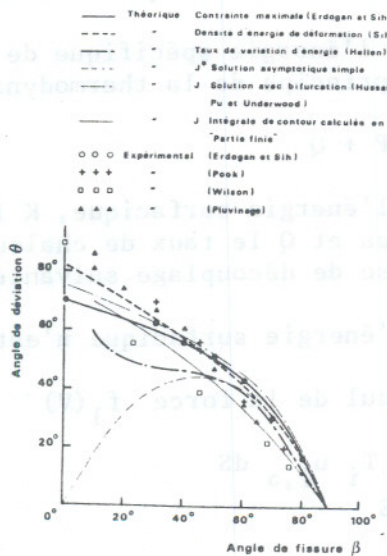
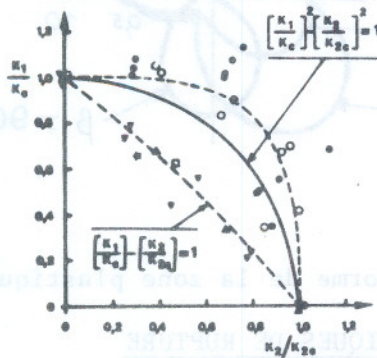


Figure 7 : Angle de propagation  $\theta$  en fonction de  $\beta$ . Points expérimentaux et courbes théoriques.

Lorsqu'on reporte dans un plan  $\frac{K_I}{K_{IC}}$ ,  $\frac{K_{II}}{K_{IIC}}$  les points provenant du calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  à partir des données expérimentales, on peut chercher s'il n'existe pas une relation du type  $\left[ \frac{K_I}{K_{IC}} \right]^u + \left[ \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right]^v = 1$  entre ces points. Elle exprime



la dépendance entre  $K_I$  et  $K_{II}$  et, plus  $u$  et  $v$  sont élevés, plus cette dépendance est faible. A la limite  $u$  et  $v$  infinis expriment que, pour le matériau considéré,  $K_I$  et  $K_{II}$  sont indépendants l'un de l'autre. Une approche de ce type a été tentée /14/ (Figure 8). On voit que la corrélation est délicate à déterminer, étant donné le faible nombre de points expérimentaux.



- Lockheed
- △ Lockheed
- Pook
- Westinghouse
- ▼ Shah
- \* Boeing

Figure 8 : Courbes  $\left[ \frac{K_I}{K_{IC}} \right]^u + \left[ \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right]^v = 1$

Dans un matériau fortement orthotrope comme le bois, les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  mesurés dans la direction longitudinale (LT ou LR) doivent être indépendants l'un de l'autre. Le résultat apparaît très clairement dans le travail de WILLIAMS et BIRCH /15/ où figure une courbe du type étudié.

En fait, on peut essayer de trouver, pour chaque matériau la valeur des exposants  $u$  et  $v$  et définir ainsi une courbe caractéristique. On rejoint ici l'idée de la courbe intrinsèque de MANDEL /6/. Par exemple, les essais reportés par SHAH /16/ donnent une valeur de  $u$  et  $v$  égale à 1 pour l'acier utilisé.

#### 4. ETUDE DE LA ZONE PLASTIQUE

En contraintes planes, POOK /17/ montre que la dimension de la zone plastique, en appliquant le critère de VON MISES est donnée par la relation :

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma_y} \left[ K_I^2 \cos^2 \frac{2\theta}{2} (1 + 3\sin^2 \frac{2\theta}{2}) + K_I K_{II} \sin \theta (3\cos \theta - 1) + K_{II}^2 \{ 3 + \sin^2 \frac{2\theta}{2} (1 - 9\cos^2 \frac{2\theta}{2}) \} \right]$$

En déformations planes on a :

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma_y} \left[ K_I^2 \cos^2 \frac{2\theta}{2} \{ (1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{2\theta}{2} \} + K_I K_{II} \sin \theta \{ 3\cos \theta - (1 - 2\nu) \} + K_{II}^2 \{ 3 + \sin^2 \frac{2\theta}{2} \{ (1 - 2\nu)^2 - 9\cos^2 \frac{2\theta}{2} \} \} + 3K_{III}^2 \right]$$



La figure 9 /17/ montre diverses formes de zones plastiques calculées avec ce modèle.

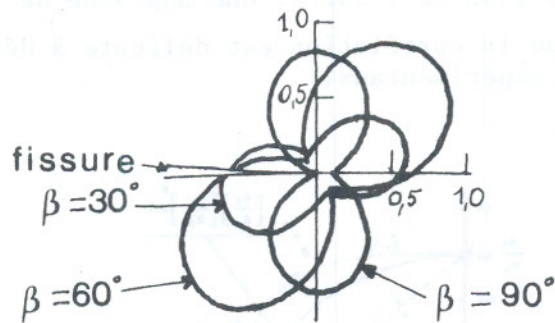


Figure 9 : Variations de la forme de la zone plastique en fonction de l'angle  $\beta$  /17/

### 5. ETUDE DES FACIES MICROSCOPIQUES DE RUPTURE

Dans le cas d'une rupture ductile on note la présence de cupules. Un schéma dû à BEACHEM /18/ (Figure 10) montre le mécanisme de formation des cupules et comment leur forme peut renseigner sur la nature du mode de rupture. L'interprétation des microfractographies est toutefois délicate car, comme le montre explicitement le schéma, il faut bien examiner les deux surfaces de rupture correspondantes.

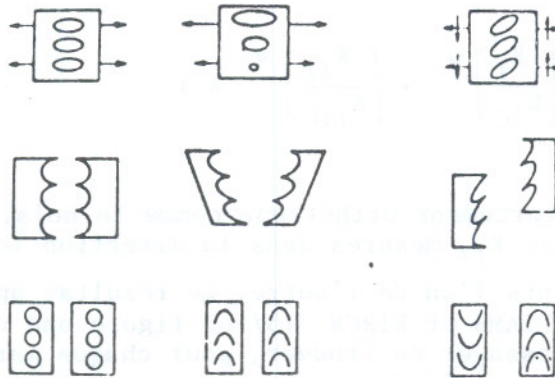


Figure 10 : Mécanisme de formation des cupules /18/

### 6. CONCLUSION

Cette étude a montré qu'il existait de nombreux critères permettant de prévoir la propagation d'une fissure soumise à un mode mixte I + II. Ces critères sont assez représentatifs de la réalité lorsque la proportion de mode II par rapport au mode I est assez faible. Par contre, leur utilisation devient plus hasardeuse dans le cas inverse. Il semble d'ailleurs que chaque matériau ait un comportement propre dans le domaine où le glissement droit est important. Des expériences sont donc nécessaires dans ce cas, mais elles présentent des difficultés qui rendent leur interprétation assez délicate.



## BIBLIOGRAPHIE

- /1/ Ph. GILLES, Thèse de Docteur Ingénieur (1978).
- /2/ F. ERDOGAN et G.C. SIH *Journal of Basic Engineering* , 85D (1963) 519-527.
- /3/ J.G. WILLIAMS et J.D. EWING, *International Journal of Fracture Mechanics*, 8 (1972), 441-446.
- /4/ I. FINNIE et A. SAITH, *International Journal of Fracture*, 9 (1973)484-486.
- /5/ C. ST JOHN et P. SIGETY, Rapport de contrat DGRST n° 74.7.1129.
- /6/ J. MANDEL, "Contraintes à l'extrémité d'une fissure en élasticité plane", Ecole Polytechnique, 20 février 1968.
- /7/ G.C. SIH, *International Journal of Fracture*, 10 (1974) 3, 305-321.
- /8/ H.C. STRIFORS, *International Journal of Solids Structures*, 10 (1974)1389-1404.
- /9/ J.M. BOISSENOT et M. DUBOIS, *Journal de Mécanique Appliquée*, 1 (1977)2, 133-157.
- /10/ M.A. HUSSAIN, S.L. PU et J. UNDERWOOD, *Fracture Analysis*, ASTM STP 560 (1974) 2-28.
- /11/ T.K. HELLEN et W.S. BLACKBURN, *International Journal of Fracture*, 11 (1975) 605-617.
- /12/ R.S. NUISMER, *International Journal of Fracture*, 11 (1975) 245-250.
- /13/ B.A. BILBY et C.E. CARDEW, *International Journal of Fracture*, 11 (1975)708-712.
- /14/ P. JODIN et G. PLUVINAGE, *Mécanique, Matériaux, Electricité* (1978)338,101-112
- /15/ J.G. WILLIAMS et M.W. BIRCH, *Cracks and Fracture*, ASTM STP 601 (1976)125-137.
- /16/ R.C. SHAH, *Fracture Analysis*, ASTM STP 560 (1974) 29-52.
- /17/ L.P. POOK, *Engineering Fracture Mechanics*, 3 (1971) 205-218.
- /18/ C.D. BEACHEM, *Metallurgical Transactions* 6A (1975) 377-382.



## ANALOGIES ENTRE PROBLEMES D'ADHESION ET PROBLEMES DE RUPTURE (\*)

par R. COURTEL, C.N.R.S. Paris

## RESUME

On rappelle pour commencer les bases de l'identité formelle des problèmes d'adhésion et des problèmes de rupture fragile dans le cadre de l'approche élastique.

On montre sur un exemple simple (problème de Johnson du contact des sphères élastiques adhésives), comment les notions classiques en mécanique de la rupture (par exemple  $G$ ,  $K_I$ , C.O.D., ainsi que le formalisme de Griffiths de minimum d'énergie) se retrouvent en mécanique de l'adhésion. L'influence de la rugosité de surface sur la force d'adhérence est analysée. La nécessité du recours à la théorie de Barenblatt pour l'interprétation des résultats expérimentaux est démontrée. Le cas de l'évolution du contact des corps viscoélastiques en régime quasi-statique est brièvement discuté.

## ABSTRACT

The formal identity between elastic adhesion problems and linear fracture mechanics is evoked, and exemplified in the case of the Johnson's problem : the contact of spheres. Classical results, as  $G$ ,  $K_I$ , C.O.D., are thus obtained by the Irwin's instead of Griffith's method, but Barenblatt's theory is necessary to interpret some experimental results.

The influence of surface roughness on adherence is analyzed. The case of viscoelastic bodies in dynamic quasi-static regime is briefly discussed.

## 1. INTRODUCTION

K.L. Johnson et al. [1] ont présenté en 1971 une théorie de l'adhésion entre sphères élastiques basée sur le principe du minimum d'énergie. Kendall [2,3] a indiqué l'analogie avec la théorie de Griffith de la rupture fragile [4]. Maugis et al. [5,6,7] ont approfondi ce sujet. L'objet du présent exposé est de montrer, sur des exemples simples, que l'identité des méthodes de la mécanique de l'adhésion et de la mécanique linéaire de la rupture est totale dans le cadre de l'approche élastique, mais que cette situation sous-entend certaines bases physiques qu'il y a intérêt à dégager parce qu'elles sont à la base de différences profondes dans le comportement des matériaux réels.

---

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, 7 décembre 1978.



## 2. IDENTITE DES SOLUTIONS DANS LE CADRE DE L'APPROCHE ELASTIQUE [5,6]

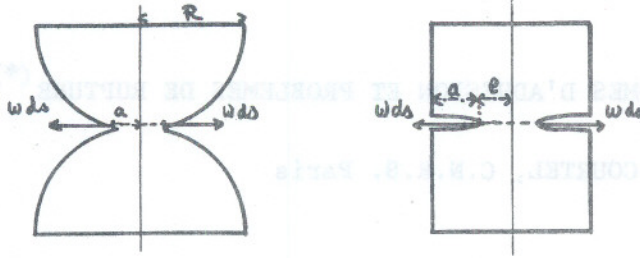


Schéma 1 :

$$A = \pi a^2$$

$$dA = 2\pi a da$$

Schéma 2 :

$$A = \pi d^2 - \pi (d-a)^2$$

$$dA = 2\pi (d-a) da$$

Fig. 1. Schémas des problèmes d'adhésion et de rupture

dants qui déterminent entièrement l'état de déformation : A aire de contact (schéma 1) ou aire de la fissure (schéma 2) et  $\delta$ , rapprochement des solides.  $W_s = -(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}) \cdot A = -\omega A$  (schéma 1) ou  $+\omega A$  (schéma 2).

$W_{cin}$  = énergie cinétique de l'ensemble des points matériels constituant le système ;  $W_{cin}$  est supposée fonction de A,  $\delta$ ,  $\dot{A}$ ,  $\dot{\delta}$ , et ne pas dépendre explicitement du temps.  $\omega$  énergie de surface de Dupré, n'est fonction que de A seul.

On notera que la relation  $dW_s = \omega dA$ , qui exprime le travail des forces d'interaction moléculaire lors d'un déplacement  $da$  correspondant à  $dA$ , est la seule information, concernant ces forces, que l'on introduit dans l'équation qui traduit le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour un déplacement réel :

$$Pd\delta = dW_{el} + dW_s + dW_{cin} \quad (1)$$

On peut toujours interpréter (1) comme concernant un système matériel purement élastique, non adhésif, qui serait soumis à deux systèmes de force extérieures : la charge P, répartie sur la face supérieure, et une tension,  $\omega$  appliquée sur la périphérie du contact, horizontale et dirigée vers l'extérieur. On peut écrire, en mettant en évidence le travail des forces appliquées :

$$Pd\delta \pm \omega dA = dW_{el} + dW_{cin} \quad (2)$$

Par suite, tout ce qui, dans la Mécanique de la rupture fragile relève exclusivement du traitement mathématique de la relation (1) et des applications de la théorie de l'élasticité, a son correspondant dans les problèmes d'adhésion élastique : dans le cadre de cette approche, il y a identité complète entre les problèmes d'adhésion et les problèmes de rupture. En particulier, les notions classiques en Mécanique de la rupture fragile : G taux de restitution de l'énergie,  $K_I$  facteur d'intensité des contraintes, ainsi que le C.O.D. (crack opening displacement) doivent se retrouver dans les problèmes d'adhésion.

2.2. A titre d'exemple, considérons la solution du problème des sphères adhésives de rayon R. K.L. Johnson a proposé en 1958 [8] la répartition suivante des contraintes normales dans l'aire de contact circulaire de rayon a :  $\sigma = \sigma_H - \sigma_B$ , avec :

2.0. Les schémas ci-contre correspondent à deux problèmes typiques de la Mécanique des milieux fragiles en mode I :

- 1) Contact de deux sphères élastiques adhésives (problème de Johnson, à symétrie axiale).
- 2) Propagation d'une entaille circulaire dans un barreau cylindrique (problème de Griffith).

2.1. Dans une première approche des problèmes réels (approche élastique), on admet que seules interviennent les formes d'énergie suivantes :

$W_{el}$  = énergie élastique stockée, supposée pouvoir être calculée à partir de la donnée des deux paramètres géométriques indépen-

dants qui déterminent entièrement l'état de déformation : A aire de contact (schéma 1) ou aire de la fissure (schéma 2) et  $\delta$ , rapprochement des solides.

$W_s = -(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}) \cdot A = -\omega A$  (schéma 1) ou  $+\omega A$  (schéma 2).

$W_{cin}$  = énergie cinétique de l'ensemble des points matériels constituant le système ;  $W_{cin}$  est supposée fonction de A,  $\delta$ ,  $\dot{A}$ ,  $\dot{\delta}$ , et ne pas dépendre explicitement du temps.  $\omega$  énergie de surface de Dupré, n'est fonction que de A seul.

On notera que la relation  $dW_s = \omega dA$ , qui exprime le travail des forces d'interaction moléculaire lors d'un déplacement  $da$  correspondant à  $dA$ , est la seule information, concernant ces forces, que l'on introduit dans l'équation qui traduit le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour un déplacement réel :

$$Pd\delta = dW_{el} + dW_s + dW_{cin} \quad (1)$$

On peut toujours interpréter (1) comme concernant un système matériel purement élastique, non adhésif, qui serait soumis à deux systèmes de force extérieures : la charge P, répartie sur la face supérieure, et une tension,  $\omega$  appliquée sur la périphérie du contact, horizontale et dirigée vers l'extérieur. On peut écrire, en mettant en évidence le travail des forces appliquées :

$$Pd\delta \pm \omega dA = dW_{el} + dW_{cin} \quad (2)$$

Par suite, tout ce qui, dans la Mécanique de la rupture fragile relève exclusivement du traitement mathématique de la relation (1) et des applications de la théorie de l'élasticité, a son correspondant dans les problèmes d'adhésion élastique : dans le cadre de cette approche, il y a identité complète entre les problèmes d'adhésion et les problèmes de rupture. En particulier, les notions classiques en Mécanique de la rupture fragile : G taux de restitution de l'énergie,  $K_I$  facteur d'intensité des contraintes, ainsi que le C.O.D. (crack opening displacement) doivent se retrouver dans les problèmes d'adhésion.

2.2. A titre d'exemple, considérons la solution du problème des sphères adhésives de rayon R. K.L. Johnson a proposé en 1958 [8] la répartition suivante des contraintes normales dans l'aire de contact circulaire de rayon a :  $\sigma = \sigma_H - \sigma_B$ , avec :



$$\sigma_H = \text{distribution hertzienne sous la charge } P_1 = \frac{4a^3}{3R} \times \frac{E}{1-\nu^2}, \text{ soit :}$$

$$\sigma_H = \frac{3}{2} \times \frac{P_1}{\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

$$\sigma_B = \text{répartition sous un poinçon de Boussinesq en traction } (P_1 - P) \text{ soit :}$$

$$\sigma_B = \frac{P_1 - P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}$$

On sait que cette dernière répartition présente une singularité asymptotique à la périphérie :

$$\sigma_B \text{ limite} = \frac{P_1 - P}{a\sqrt{4\pi a}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(a-r)}} \quad (3)$$

Si l'on veut définir un  $K_{IJ}$  du problème de Johnson en se référant à l'expression classique  $\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi(a-r)}}$ , il faut donc prendre, comme Savkoor [9] l'a proposé en 1977 (avec une autre notation) :

$$K_{IJ} = \frac{P_1 - P}{a\sqrt{4\pi a}} \quad (4)$$

Or le  $G_J$  du problème de Johnson, défini par  $G_J = \left( \frac{\partial W_{el}}{\partial A} \right)_\delta = \left( \frac{\partial (W_{el} + W_P)}{\partial A} \right)_P$  est donné par l'expression suivante (Maugis [5]) :

$$G_J = \frac{(P_1 - P)^2}{4\pi a^3} \times \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (5)$$

On voit qu'il existe entre  $K_{IJ}$  et  $G_J$  la relation classique en déformation plane :

$$G_J = K_{IJ}^2 \times \frac{1 - \nu^2}{E}. \quad (6)$$

Mais on voit, d'autre part, que le déplacement à l'extérieur d'un poinçon de Boussinesq [10] est :

$$v = \delta \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{\rho} \right), \text{ soit : } v = \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{\frac{2(\rho - a)}{a}} \quad (7)$$

près du bord. La rapprochement total des sphères de rayon  $R$  est, d'après Johnson:

$$\delta = \delta_H - \delta_B = \frac{2a^2}{R} - 2 \frac{(P_1 - P)(1 - \nu^2)}{2aE}$$

Il est à partager entre elles ; pour chacune on observera le déplacement asymptotique :

$$v = \frac{P_1 - P}{2a} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(\rho - a)}{a}} = K_{IJ} \cdot \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \cdot \sqrt{2} \frac{\rho - a}{\pi} \quad (8)$$

ce qui est toujours la même formule qu'en déformation plane.

On vérifierait que dans le cas du contact sphère rigide/plan, ainsi que pour le poinçon de Boussinesq lui-même, la relation entre  $K_J$  et  $G$  comporte en plus un facteur multiplicatif 1/2, traduisant le fait que c'est une 1/2 fissure qui se propage.

2.3. L'élégante solution, due à K.L. Johnson (1971 [1] du problème des sphères adhésives, comporte donc une traduction simple dans le langage de la Mécanique de la rupture, comme d'ailleurs on devait s'y attendre d'après la théorie de la rupture fragile (H.D. Bui, 1978 [11]).

Réciproquement, la seule connaissance des expressions (3) et (8) des valeurs asymptotiques de la contrainte  $\sigma_{Blim}$  et du déplacement  $v_{limite}$  (déjà



présentes sous forme au moins implicite dans la Note de Johnson de 1958) permet d'écrire immédiatement l'expression (5) de G, par application du raisonnement d'Irwin (1957 [12]). Ce dernier étudiait précisément le cas d'un problème à symétrie axiale, (la fissure "penny-shaped") ; le formalisme qu'il a consacré revient à considérer G comme le produit de convolution de  $\sigma$  limite et de  $v$  limite, ou comme la fonction de Dirac  $\frac{\pi}{2} \sigma(o)v(0)$ , d'où :

$$G = \frac{\pi}{2} \frac{P_1 - P}{2a\sqrt{\pi a}} \frac{1-v^2}{E} \frac{2}{\pi} = \frac{(P_1 - P)^2}{4\pi a^3} \frac{1-v^2}{E} \quad \text{ce qui est bien l'expression (5)}$$

- On notera que l'équation (1) n'a pas par elle-même la forme d'une condition de minimum d'énergie à cause du terme  $Pd\delta$ . Elle l'acquiert automatiquement si on lui adjoint une condition dite de "grandeur imposée", qui a la forme d'une relation entre  $\delta$  et  $P$ , où ne figure pas  $A$  (par exemple  $\delta = C^{te}$ ,  $P = C^{te}$ ,  $\delta + \frac{P}{k} = C^{te}$ ) ou plus généralement  $\phi(\delta, P) = C^{te}$ . Analytiquement,  $P$  devient alors une fonction de  $\delta$  :  $P = \varphi(\delta)$ , et  $Pd\delta$  une différentielle exacte, celle de  $\int_0^\delta \varphi(\delta) d\delta$ . (Si  $\delta = C^{te}$ ,  $Pd\delta = 0$ ).

L'équilibre à grandeur  $\phi$  imposée est obtenu en écrivant que  $Pd\delta - dW_{el} - dW_s - dW_{cin} = 0$  pour toutes fluctuations  $\{dA, d\delta\}$  compatibles avec les conditions  $P = \varphi(\delta)$  et  $dW_{cin} = 0$ . On voit que des conditions nécessaires sont :  $P = \frac{\partial W_{el}}{\partial \delta}$ ,  $\frac{\partial (W_{el} + W_s)}{\partial A} = 0$ . La première exprime une propriété connue de  $W_{el}$  et qui est valable aussi hors d'équilibre. La deuxième, qui apparaît comme indépendante du choix de  $\phi$ , est la condition classique dite "de Griffith".

C'est cette discordance entre les variables descriptives,  $A$  et  $\delta$ , et les variables de chargement,  $\delta$  et  $P$ , qui a justifié la création d'un formalisme commun à la Mécanique de l'adhésion et à celle de la rupture : on associe au "noyau" des schémas 1 ou 2 une "machine de chargement" dotée elle-même d'énergie élastique  $W'_{el}$ , potentielle  $W'_p$ , et cinétique  $W'_{cin}$ , de telle sorte que :  $Pd\delta - dW'_{el} - dW'_p - dW'_{cin} = 0$ . C'est m'ensemble ainsi constitué qui satisfait à la condition  $dW_T = 0$ , valable aussi bien en statique qu'en régime dynamique. L'équilibre du système isolé est obtenu pour  $dW'_{cin} = dW_{cin} = 0$  ; on montre encore sans peine que la condition d'équilibre du noyau (condition de Griffith) est indépendante de la machine de chargement, tandis que la condition de stabilité de l'équilibre  $d^2W_T > 0$  en dépend. Cet aspect des choses a été étudié notamment par Huet [13] et est traité aussi dans l'article déjà cité [réf.6].

### 3. DIFFERENCES INTRODUITES PAR LA CONSIDERATION DES PROBLEMES REELS

3.0. La question de l'adhésion se pose généralement à l'occasion du décollement de surfaces rugueuses (c'est-à-dire de modèles d'aspérités hémisphériques de même rayon  $R$ , de répartition gaussienne des hauteurs, d'écart type  $\theta$ ) et par conséquent pour des associations de fissures en parallèle. Les phénomènes ne sont expérimentalement observables que dans le cas de matériaux de faible module d'élasticité, qui se trouvent posséder aussi des propriétés visco-élastiques marquées (caoutchouc, polymères, tous corps de Van der Waals). De leur côté, les problèmes de résistance à la rupture sont étudiés essentiellement dans le cas de poutres ou de barreaux métalliques entaillés : les fissures sont alors disposées en série, les liaisons dans le matériau sont de type ionique ou électronique, et un progrès de la déformation plastique accompagne inmanquablement la propagation de la fissure.

S'il ne peut être question de traiter un aussi vaste problème dans le cas du présent exposé, on peut du moins en illustrer certains aspects sur des



exemples simples choisis dans la littérature la plus récente.

### 3.1. Influence de la rugosité sur la force d'adhérence [14]

Les résultats obtenus par Fuller et Tabor (1975 [14]) pour le contact d'un plan lisse et d'un plan élastique, sont représentés par la courbe de la fig. 2.

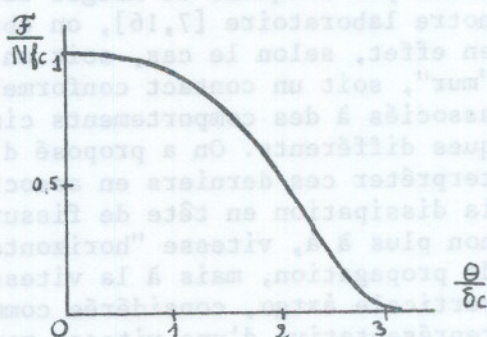


Fig. 2. Force d'adhérence (normalisée) en fonction de l'indice d'adhérence d'une surface rugueuse.

On y a normalisé  $\bar{F}$  et  $\delta$  en les rapportant à  $Nfc$ , force d'adhésion qui correspondrait à  $N$  aspérités identiques jointives (le même relief a été invoqué par Bélidor en 1737 pour expliquer le frottement), et à  $\delta_c$ , allongement élastique d'une aspérité au moment de la rupture dans le processus individuel pour lequel l'adhérence est  $fc = \frac{3}{2} \pi \omega R$ ;  $\frac{\theta}{\delta_c}$  est l'indice d'adhérence. Tout se passe donc comme si on étudiait le contact adhésif d'une sphère de rayon  $NR$  et d'un plan, l'énergie de cohésion étant prise égale à  $\omega_{\text{eff}} = \omega \psi \left( \frac{\sigma}{\delta} \right)$ ;  $0 < \omega_{\text{eff}} < \omega$ .

Dans le cas des métaux ( $\delta_c$  très

petit) et de corps rugueux ( $\theta$  grand),

il n'y a pas d'adhérence prévisible, à moins qu'on ne se place dans le vide, où  $\omega$  est grand, mais où de ce fait il peut y avoir une déformation plastique induite (Maugis [15]). Pour un corps très lisse (mica) ou de faible module (caoutchouc), on se trouve, au contraire, dans un domaine où l'adhérence n'est pas négligeable, et garde un caractère élastique. Alors que la propagation de la fissure doit être considérée comme pouvant s'effectuer réversiblement dans la mécanique de l'adhésion [5], on sait que le recollement des pièces métalliques fissurées est posé, dès le départ, comme impossible en mécanique de rupture. En fait, la rugosité créée par la déformation plastique en tête de fissure lors de l'ouverture suffit à faire sortir du cadre d'application de la théorie de Griffith, exprimée par l'équation (1) qui par elle-même n'introduit pas de dissymétrie entre l'ouverture de la fissure ( $da^-$ ) et sa fermeture ( $da^+$ ). En outre l'adsorption due à l'action de l'atmosphère sur les surfaces nouvellement créées [15] fait décroître  $\omega$ , et par suite la force d'adhésion en tête de fissure.

### 3.2. Intervention de la loi d'action des forces intermoléculaires en fonction de la distance

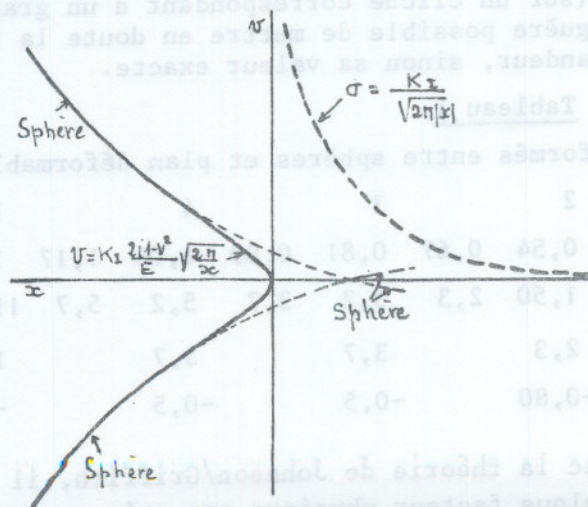


Fig. 3. Profil de raccordement des sphères déformables dans l'hypothèse élastique ( $P_1 > P$ ).

3.2.1. De façon surprenante, l'expression asymptotique (7) du déplacement élastique en dehors du contact, paraît n'avoir pas été utilisée depuis 1971 dans les problèmes d'adhésion, sauf en vue de la mesure des forces de Van der Waals lors du contact de cylindres croisés, cas qui se ramène formellement à un contact sphère/plan. Si on tient compte de (7), le profil de raccordement des sphères déformables est nécessairement tel que le représente la fig. 3, dans le



cas où  $P_1 - P > 0$ , c'est-à-dire quand il y a une contrainte de traction à la périphérie du contact. Si  $P > P_1$  ( ce qui ne peut se produire que dans certains cas d'évolution dynamique hors de l'équilibre), la zone périphérique est comprimée sans qu'il puisse y avoir pénétration, et les surfaces en regard sont tangentes en fond de fissure tant que  $P > P_1$  (fig. 4). Dans les expériences de décollement et de recollement sphère/plan effectuées par Barquins et Maugis dans notre laboratoire [7,16], on observe en effet, selon le cas, soit un "mur", soit un contact conforme, associés à des comportements cinétiques différents. On a proposé d'interpréter ces derniers en associant la dissipation en tête de fissure, non plus à  $\dot{a}$ , vitesse "horizontale" de propagation, mais à la vitesse verticale  $\dot{a} \tan \alpha$ , considérée comme représentative d'une vitesse moyenne de déformation dans cette zone [16]. Pour être en mesure de préciser cette interprétation, il convient de déterminer le profil exact en régime quasi-statique correspondant au décollement (cas de la fig. 3,  $P_1 > P$ )

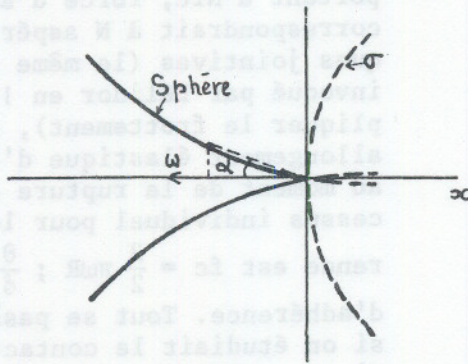


Fig. 4. Profil de raccordement des sphères déformables quand  $P_1 < P$ .

puisque pour  $P_1 < P$  (recollement) le profil est celui des sphères, et  $\tan \alpha$  varie peu avec  $P - P_1$  (fig. 4).

3.2.2. On disposait dans ce but d'un cliché, qui représentait les anneaux de Newton, formés, à charge nulle, entre une sphère de verre de  $R = 0,219$  cm et un plan de caoutchouc de module  $E = 1.7 \cdot 10^7$  ergs/cm<sup>2</sup>, le rayon de l'aire de contact étant  $a = 121 \mu$ . Par lissage et extrapolation jusqu'à l'origine de la courbe expérimentale I de la fig. 5, on avait antérieurement conclu à l'existence d'un angle de contact de  $165^\circ$  entre le verre et le caoutchouc dans ces conditions [17]. Des calculs prenant pour base la formule (8) qui donne  $v_B = 2,8245 \text{ arc cos } \frac{a}{\rho}$  et tenant compte de la sphéricité du verre, qui fournit une différence de marche supplémentaire  $v = R (\cos \text{arc sin } \frac{\rho}{R} - \cos \text{arc sin } \frac{a}{R})$  mais négligeant les déplacements hertziens, ont donné de leur côté une courbe II qui, sur toute sa longueur comptée dans la zone observable (c'est-à-dire à partir de la première frange, correspondant à  $\epsilon = 0,27 \mu$ ) est parallèle et légèrement décalée par rapport à I (de  $0,45 \mu$  vers les  $a$  décroissants, (Tableau I). Bien que les mesures soient faites avec une précision limitée (sur un cliché correspondant à un grandissement optique  $\times 140$ ), il ne paraît guère possible de mettre en doute la réalité de ce décalage, ni son ordre de grandeur, sinon sa valeur exacte.

Tableau I

Rayons des anneaux de Newton formés entre sphères et plan déformable

N° d'anneau	0	1	2	3	4	7					
$\epsilon$ marche <sup><math>\mu</math></sup>	0	0,27	0,40	0,54	0,67	0,81	0,89	1,08	1,17	1,89	2,00
$\delta a$ théorique <sup><math>\mu</math></sup> (II):	0	0,45	0,9	1,50	2,3	3,2	3,7	5,2	5,7	11,9	12,9
$\delta a$ expé. <sup><math>\mu</math></sup> (I):	0	0,9		2,3		3,7		5,7		12,9	
$(\delta a)^{th} - (\delta a)^{exp}$	0	-0,45		-0,80		-0,5		-0,5		-1,0	

3.2.3. Pour expliquer cet écart avec la théorie de Johnson/Griffith, il faut nécessairement faire intervenir quelque facteur physique non pris en compte dans l'équation (1). Nous avons choisi d'essayer un modèle simplifié de fond de



fissure, pour l'essentiel conforme à la théorie de Barenblatt, de façon à bénéficier des résultats rassemblés dans ce domaine par la Mécanique de la rupture, sans pour autant tomber dans la complication des calculs qu'entraîne une théorie rigoureuse.

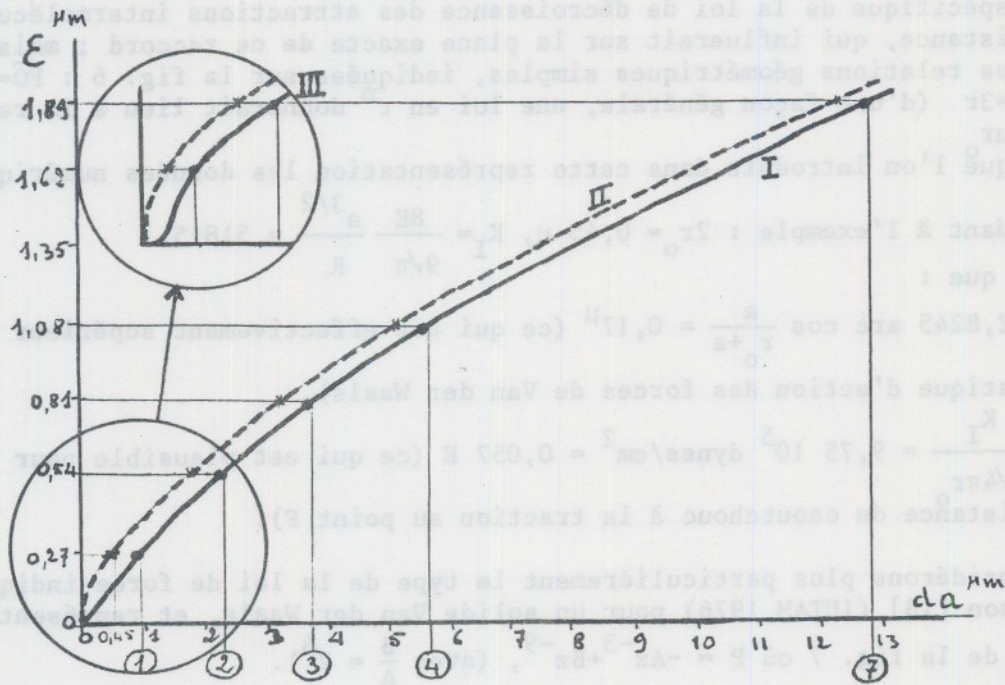


Fig. 5.

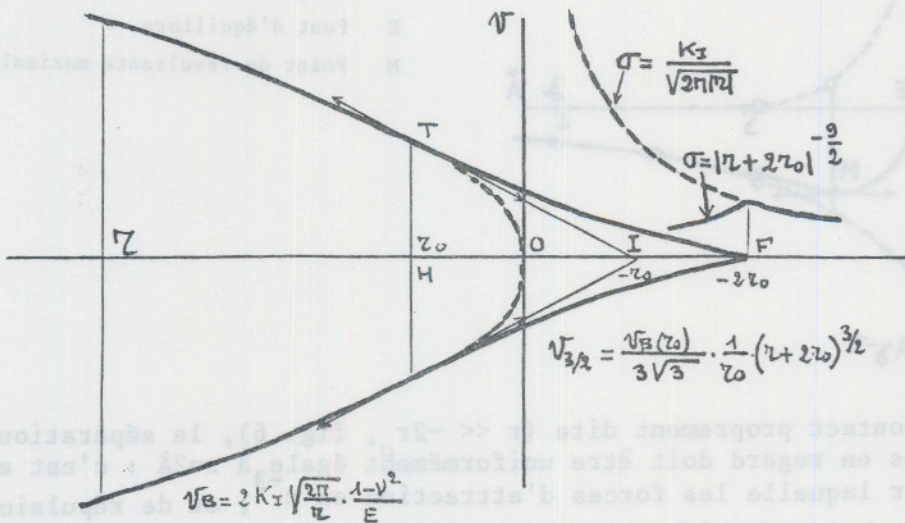
Rayons des anneaux de Newton successifs :

I. Courbe expérimentale (Barquins 1975)

II. Courbe théorique  $\epsilon = v_B + v_s$

III. Profil réel au voisinage de l'origine

La fig. 5 précise (en encadré), un mode d'extrapolation de la courbe I



Relations géométriques :

$$\overline{OH} = r_0$$

$$\overline{OI} = -r_0$$

$$\overline{OF} = -2r_0$$

Fig. 6. Fond de fissure en  $r^{3/2}$  et raccordement avec le profil asymptotique en  $r^{1/2}$ .



comportant un profil en  $r^{3/2}$  au voisinage de l'origine : l'exposant  $3/2$  est imposé en tête de fissure par la théorie de Barenblatt. A titre d'approximation, on prolonge ce profil en  $r^{3/2}$  jusqu'au raccord tangentiel avec le profil asymptotique en  $r^{1/2}$  dû au poinçon seul (fig. 6). Ce faisant, on ne prend pas en compte l'allure spécifique de la loi de décroissance des attractions intermoléculaires avec la distance, qui influencerait sur la place exacte de ce raccord ; mais on obtient les relations géométriques simples, indiquées sur la fig. 6 :  $\overline{FO} = 2\overline{OH} = 2r_0$  et  $\overline{FH} = 3\overline{OH} = 3r_0$  (d'une façon générale, une loi en  $r^n$  donnerait lieu à la relation  $\overline{FH} = 2n\overline{OH} = 2nr_0$ ).

Lorsqu'on introduit dans cette représentation les données numériques correspondant à l'exemple :  $2r_0 = 0,45 \mu$ ,  $K_I = \frac{8E}{9\sqrt{\pi}} \frac{a^{3/2}}{R} = 51815$ .  
On trouve que :

$V_B(r_0) = 2,8245 \arccos \frac{a}{r_0 + a} = 0,17^{\text{rad}}$  (ce qui est effectivement supérieur à la limite pratique d'action des forces de Van der Waals).

$\sigma(2r_0) = \frac{K_I}{\sqrt{4\pi r_0}} = 9,75 \cdot 10^5 \text{ dynes/cm}^2 = 0,057 E$  (ce qui est plausible pour la limite de résistance du caoutchouc à la traction au point F).

3.2.4. Considérons plus particulièrement le type de la loi de force indiquée par K.L. Johnson [18] (IUTAM 1976) pour un solide Van der Waals, et représenté par la courbe de la fig. 7 où  $P = -Az^{-3} + Bz^{-9}$ , (avec  $\frac{B}{A} = 2^6$ ).

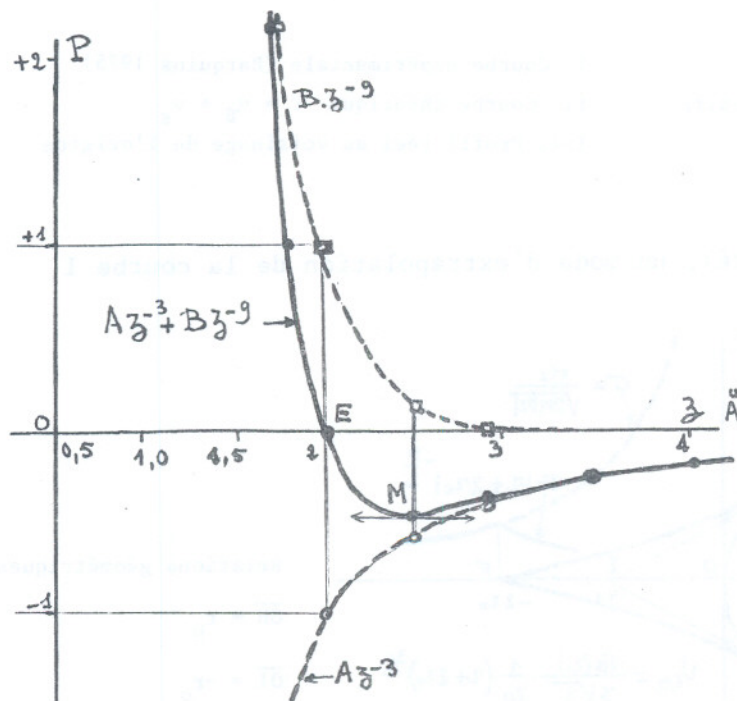


Fig. 7.

Variation de la force d'interaction moléculaire avec la séparation des surfaces  $z$  (en Å) :

- Répulsion en  $z^{-9}$
- Attraction en  $z^{-3}$
- Force résultante d'interaction
- E Pont d'équilibre
- M Point de résultante maximale.

Dans l'aire de contact proprement dite ( $r \ll -2r_0$ , fig. 6), la séparation effective des surfaces en regard doit être uniformément égale à  $z = 2\text{Å}$  : c'est en effet la distance pour laquelle les forces d'attraction en  $z^{-3}$ , et de répulsion en  $z^{-9}$ , s'équilibrent. Les contraintes de compression dues aux forces extérieures appliquées influent très peu sur cette valeur, à cause de la forte pente de la courbe des forces de répulsion.

Quand on se rapproche du bord du contact (c'est-à-dire de notre point F, fig. 6), la contrainte asymptotique de traction en  $r^{-1/2}$  se manifeste dans le



milieu élastique, et tend à augmenter localement la séparation  $z$ , jusqu'au point où elle contrebalance l'attraction moléculaire maximale, ce qui a lieu pour une séparation  $z=2,50 \text{ \AA}$  (point M, fig. 7). A partir de là, la contrainte normale suit sensiblement la loi en  $z^{-3}$ , ce qui correspond à une variation en  $(r+2r_0)^{-9/2}$  si on admet que le point F correspond précisément à cette transition. On peut essayer de préciser le profil réel des surfaces entre F et H par application des formules de Galin et de Mushkelishvili : c'est une tâche pour les théoriciens de l'élasticité ; elle ne serait pas sans intérêt physique, comme on va le voir.

#### 4. INTERVENTION D'AUTRES FORMES D'ENERGIE

4.1. Rappelons que tout ce qui précède concerne des milieux essentiellement élastiques et adhésifs. Dans le cas d'un milieu comme le P.M.M.A. (polyméthyl metacrylate), qui présente aussi élasticité et adhésion, Döll, Weidmann et Kerkhof [19] ont montré que la déformation plastique en tête de fissure joue un rôle très important, et ils ont déterminé expérimentalement par l'emploi d'interférences la forme de la zone plastique. Celle-ci s'étend sur une vingtaine de microns ; son profil concorde parfaitement, qualitativement et quantitativement, avec le modèle de Dugdale-Barenblatt, pour lequel la contrainte normale est prise constante le long de la zone plastique -et non plus variable, comme dans le modèle purement élastique proposé plus haut-.

4.2. De façon générale, des différences dans l'évolution dynamique entre problèmes d'adhésion et problèmes de rupture, s'introduisent lorsque l'on prend en considération l'existence de processus irréversibles en tête de fissure, caractérisés par l'intervention d'autres formes d'énergie : énergie calorifique  $dQ$  (dégagements de chaleur dans la masse ou à la périphérie du contact des corps viscoélastiques) ; énergie de déformation plastique résiduelle  $dW_{pl}$ , de l'ordre de 5 à 10 % de l'énergie totale de déformation plastique des métaux en tête de fissure, le reste, soit  $\lambda dW_{pl}$ , apparaissant sous forme de chaleur.

L'équation d'évolution s'écrit maintenant :

$$Pd\delta = dW_{el} + dW_s + dW_{cin} + dQ + (1+\lambda)dW_{pl} \quad (1bis)$$

4.3. Dans le cadre restreint du présent exposé, nous nous contentons de signaler que cette équation permet de prévoir correctement l'évolution dynamique des systèmes viscoélastiques dans le cas où l'on est en régime quasi-statique, caractérisé par  $dW_{pl} = dW_{cin} = 0$ . Si on connaît la loi de dissipation  $dQ = \varphi(\dot{a})dt$  en fonction de la vitesse  $\dot{a}$  de propagation de la fissure, on peut calculer la vitesse limite  $V = \dot{a}_{lim}$  en fonction du taux actuel de restitution de l'énergie  $G$ . Maugis et al [7] reprenant des suggestions de Gent (1972) et d'Andrews et Kinloch (1973) ont proposé une loi de la forme  $G-\omega = \omega \varphi(a_T V)$  ; ils interprètent très bien de cette façon les résultats de leurs expériences de décollement de sphères. Ils trouvent que  $\varphi(a_T V)$  est une fonction indépendante de géométrie globale du système (adhésion de sphères, du poinçon plat, pelage...) Dans le cas du recollement des sphères, ils trouvent au contraire que l'évolution suit la loi purement élastique (c'est-à-dire que  $dQ = 0$ ,  $dW_{cin} = 0$ ).

#### 5. CONCLUSION

Nous avons eu l'occasion de rappeler plus haut que la variable à utiliser devrait être, non pas la vitesse de propagation "horizontale"  $v = \dot{a}$ , mais la vitesse de déformation "verticale" dans la zone de tête de fissure, qui peut s'écrire  $v = \dot{a} \tan \alpha$ ,  $\alpha$  étant l'angle d'ouverture de la fissure, à définir comme une certaine moyenne. C'est ici que la connaissance exacte du profil des surfaces en tête de fissure s'avèrerait extrêmement utile : elle fournirait une base pour le calcul de la dissipation dans le milieu viscoélastique -ou simplement visqueux-



ce qui pourrait éventuellement permettre de justifier l'affirmation (d'origine expérimentale) que cette dissipation est proportionnelle à l'énergie de surface  $\omega$ .

Nous souhaitons que cette question fasse l'objet d'une étude approfondie de la part des théoriciens.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.L. Johnson, K. Kendall, A.D. Roberts - "Surface energy and the contact of elastic solids". Proc. Roy. Soc. Lond. A324, p. 301-313 (1971).
- [2] K. Kendall - "The adhesion and surface energy of solids". J. Phys. D14, p. 1186-1195 (1971).
- [3] K. Kendall - "An adhesion paradox". J. Adhesion, 5, p. 77-79 (1973).
- [4] A.A. Griffith - "The phenomenon of rupture and flow in solids". Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A221, p. 163-198 (1920).
- [5] D. Maugis, M. Barquins, R. Courtel - "Fissure de Griffith et adhésion des solides élastiques". Métaux, Corrosion, Industrie, n° 606, p. 1-10 (1976).
- [6] R. Courtel, D. Maugis, M. Barquins - "Note sur une formulation commune de certains problèmes d'équilibre de deux corps élastiques adhésifs". Revue de l'Industrie Minérale, n° spécial Rhéologie, TIV n° 4, p. 1-7 (1977).
- [7] D. Maugis, M. Barquins - "Fracture Mechanics and the Adherence of Viscoelastic Bodies" - J. Phys. D. Applied Physics, Vol. 11, p. 1989-2023 (1978).
- [8] K.L. Johnson - "A Note on the Adhesion of Elastic Solids". Brit. Journ. Appl. Phys., Vol. 9, p. 199-200 (1958).
- [9] A.R. Savkoor, G.A.D. Briggs - "The Effect of Tangential Force on the Contact of Elastic Solids in Adhesion". Proc. R. Soc. London A356, 103-114 (1977).
- [10] J. Boussinesq - "Application des Potentiels". 1885, p. 165 (Nouveau tirage, Blanchard, 1969, Paris).
- [11] H.D. Bui - "Mécanique de la Rupture fragile". Masson, Paris (1978).
- [12] G. Irwin - "Fracture". Encyclopédia of Physics, Vol. VI/Elasticity and Plasticity, pp. 551-590, ed. Flügge Springer Verlag, Berlin (1958).
- [13] C. Huet - "Détermination de l'énergie spécifique de rupture". Industrie Minérale (Cahiers du Groupe Français de Rhéologie) TIII, Vol. 3, p. 128-142 (1973).
- [14] D. Tabor, K.N.G. Fuller - "The Effect of surface roughness on the Adhesion of Elastic Solids". Proc. Roy. Soc., London, A 345, p. 327-342 (1975).
- [15] D. Maugis - "Mécanismes physiques de l'adhésion des solides". Le Vide, 86, p. 1-19 (1972).
- [16] R. Courtel - "Intervention de processus dissipatifs superficiels dans un problème de minimum d'énergie". Exposé au Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie, Paris (8 déc. 77).
- [17] M. Barquins, R. Courtel - "Rubber friction and the rheology of viscoelastic contact". Wear 32, p. 133-150 (1975).
- [18] K.L. Johnson - "Adhesion at the contact of solids". Proc. IUTAM, 14th Congress on Theor. and Appl. Mechanics, North Holl. Publ., pp. 133-143, Amsterdam (1977).
- [19] W. Döll, G.W. Weidmann, F. Kerkhoff - "Etude comparative des mécanismes de fracture entre un verre organique et un verre inorganique". Journées sur la Mécanique de la rupture appliquée aux polymères (CEMP) Paris (12-13 déc. 1978).



## DETERMINATION EXPERIMENTALE DE L'INTEGRALE DE RICE CRITIQUE $V_C$ DANS LE BOIS DE CHARPENTE.<sup>1</sup>

A. AMEEN, Ingénieur - P. MORLIER, Professeur - G. VALENTIN, Assistant.<sup>2</sup>

### RESUME

Le bois, malgré ses propriétés d'anisotropie, de viscoélasticité et surtout d'inhomogénéité a déjà été étudié par la mécanique linéaire de la rupture : Dans différentes directions, des valeurs de  $G_C$  et  $K_C$  ont été déterminées pour certaines essences.

Les propriétés particulières de  $V_C$  (détermination expérimentale de l'intégrale de Rice critique) semblent s'adapter mieux à ce matériau.

Une étude expérimentale sur du bois de charpente a été menée à partir d'éprouvettes DCB (Bande de largeur constante en clivage). Elle a permis de vérifier d'une part une relation linéaire entre  $K$  et  $V$  dans un domaine sensiblement élastique du matériau à 12 % d'humidité et de montrer d'autre part, qu'en utilisant une méthode originale simple de détection de l'amorçage de la fissuration,  $V_C$  pourrait constituer un critère d'initiation de rupture.

### ABSTRACT

Wood has been already studied by linear elastic fracture mechanics although it shows anisotropy, viscosity and non homogeneity properties. In different directions,  $K_C$  and  $G_C$  have been obtained.

Particular properties of  $V_C$  (experimental determination of critical Rice integral) seems fit this material better.

An experimental work on timber (white spruce) has been conducted by means of DCB (double cantilever beam) specimens. On the one hand, we can verify a linear relationship between  $K, V$  for a material containing 12 % moisture in the elasticity domain, on the other hand, using an original method to detect fracture initiation, we can show that  $V_C$  could be a fracture criterion.

1 - Communication présentée au Groupe Français de Rhéologie le 7 Décembre 1978.

2 - Département Génie Civil de l'IUT "A" de BORDEAUX et Laboratoire de Mécanique Physique de BORDEAUX I (E.R.A. CNRS 769).



## I. APPLICATION DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE AU BOIS DE CHARPENTE.

Il y a déjà plusieurs années que la mécanique de la rupture sous sa forme la plus classique est appliquée au bois. En Australie, le règlement prévoit un essai de mécanique de la rupture depuis 1972.

Or le bois présente les caractéristiques d'un matériau anisotrope, de comportement viscoélastique non linéaire et de plus inhomogène.

Ses propriétés varient dans une même essence dans le même arbre, d'un arbre à l'autre et d'une forêt à l'autre. Elles dépendent de la température comme les métaux et de l'humidité comme beaucoup de composites.

On peut se demander alors quelle est la validité des paramètres trouvés :

En pratique, on détermine, dans une direction donnée, un coefficient de mécanique de la rupture comme si le matériau présentait les bonnes caractéristiques (linéarité, isotropie, élasticité, homogénéité) quitte à prendre quelques précautions sur les vitesses de charge ou le taux d'humidité.

C'est ainsi que la plupart des auteurs ont travaillé et c'est aussi de cette façon que notre étude a été conduite.

On pourra noter que par des essais de calcul numérique, en éléments finis notamment, on a montré [1] qu'en considérant le matériau comme orthotrope, les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  étaient sensiblement identiques à ceux trouvés en considérant le matériau comme isotrope.

Le problème de l'inhomogénéité (sans faire intervenir les noeuds, les microfentes dues au séchage ou autres défauts) ne peut être traité que par analyse statistique des résultats.

En envisageant des taux d'humidité pas trop élevés et des vitesses de charge pas trop lentes, on peut négliger les effets de viscosité et même considérer que le bois est un matériau élastique possédant une certaine plasticité à la rupture.

Dans ces conditions, PORTER [2] a déterminé la ténacité  $G_C$  du bois de pin blanc. Il considère que l'évaluation de cette ténacité constitue une mesure significative de la résistance du bois. Elle n'est pas affectée par la géométrie de l'éprouvette dans une large mesure. Il propose une formule prenant en compte la température et l'humidité :

$$G_C = [1,28 + 0,011 (T - 243) (1 - e^{-H/6})] \text{ psi}$$

T température en degrés K,

H humidité en pourcentage de bois sec.

De plus, dans le sens RL (Radial Longitudinal) ou TL (Tangent Longitudinal, le premier indice désigne la direction normale à la fissure, le second la direction de propagation), il a trouvé en mode I des valeurs très voisines.

De même BARRETT [3] a déterminé les facteurs d'intensité de contrainte critique dans le sens RL, TL, TR et RT dans du sapin de Douglas.

Une variation logarithmique en fonction de la largeur de la fissure a été trouvée.

Cependant, les paramètres  $G_C$  et  $K_C$  comportent des conditions très restrictives (élasticité, rupture fragile, homogénéité.....) et l'on est jamais très sûr de leur signification : ils sont à utiliser en pratique avec beaucoup de circonspection.

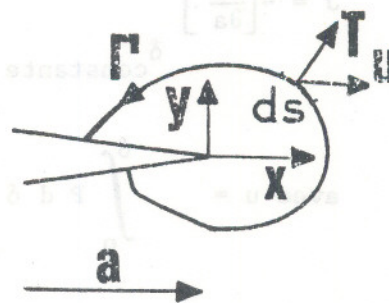
Par ailleurs, l'intégrale de Rice dont nous rappelons les caractéristiques ci-dessous présente des propriétés intéressantes dans ce cas. C'est le but de notre étude expérimentale.



## 2. DEFINITION ET DETERMINATION DE L'INTEGRALE DE RICE.

### 2.1 Propriétés de J.

Dans le domaine limité des petites déformations l'amplitude de la singularité au voisinage d'une fissure, dans un problème plan et directement reliée à l'intégrale J introduite par Rice [5]. On peut considérer que J est une évaluation convenable de la résistance de la singularité dans un tel problème.



Définition de J.

Par définition :

$$J = \int_{\Gamma} \left[ w \, dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \, ds \right]$$

Γ Contour quelconque partant de la frontière inférieure de la fissure et finissant sur la frontière supérieure.

w densité d'énergie de déformation.

→ →

T, u vecteurs contrainte et déplacement existant sur le contour de l'élément d'arc ds.

Cette définition est valable si le matériau est homogène au moins dans la direction de propagation x.

On montre que cette intégrale est indépendante du contour Γ si l'énergie de déformation est une fonction univoque des déformations ; c'est le cas si le matériau est élastique non linéaire. C'est le cas aussi d'un matériau élastoplastique pour lequel on utilise la théorie de déformation totale et tant que la contrainte effective ne diminue pas.

Dans le cas du solide élastique, on peut interpréter J comme le flux d'énergie passant à travers le fond de la fissure par unité d'extension de longueur.

Si le solide est élastique plastique, l'intégrale s'interprète alors comme la différence d'énergie potentielle entre deux corps identiques ayant des fissures de longueurs voisines a et a + da. Par contre en plasticité incrémentale, seule la signification physique de J comme évaluation du champ de contrainte déformation en fond de fissure reste vraie. L'indépendance par rapport au contour ne peut être établie en théorie mais seulement vérifiée numériquement [6].

En représentant par P la grandeur de la charge appliquée et par P<sub>c</sub> la charge critique pour laquelle la fissure commence à se propager, on pourra poser que l'initiation de rupture s'écrit J = J(P) = J<sub>c</sub>. Ce critère serait donc valable que l'initiation ait lieu en régime ductile ou fragile. De plus, mais



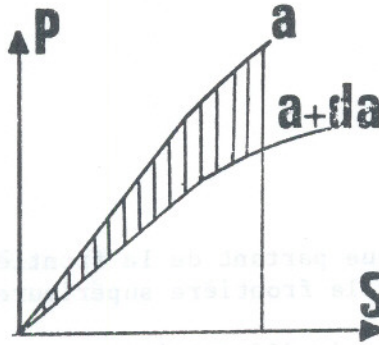
c'est plutôt un inconvénient,  $J_c$  ne constitue qu'un critère d'amorçage, que la propagation soit stable ou non.

## 2.2. Evaluation de J.

Soit la courbe de chargement à déplacement imposé d'un corps possédant une fissure de longueur  $a$  ; si  $P$  est la charge appliquée par unité de longueur du front de fissure et si  $\delta$  est le déplacement de cette charge, pour un matériau élastique linéaire ou non on a :

$$J = - \left[ \frac{\partial u}{\partial a} \right]_{\delta \text{ constante}}$$

avec  $u = \int_0^{\delta} P d\delta$  Travail fourni par la force extérieure.



Evaluation de J

Figure 2

$J da$  correspond à l'aire hachurée sur la figure 2.

Pour un matériau élastoplastique BEGLEY et LANDES [7] ont proposé de prendre comme grandeur pouvant représenter  $J$  la grandeur correspondant à la transposition à ce domaine de l'équation ci-dessus : On l'appellera  $V$  [8]. Ainsi  $V$  s'obtient pour une géométrie donnée à partir d'éprouvettes ayant des fissures de longueurs différentes.

La mesure des aires sous tendues par les courbes  $P, \delta$  pour différents déplacements et la différentiation de ces courbes par rapport à la longueur initiale conduit à une évaluation de  $V$  : c'est la méthode dite des complaisances.

$$\text{Soit } V = - \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial P}{\partial a} \right) d\delta \quad \delta \text{ cste}$$



De nombreuses études ont été faites afin de comparer  $J$  intégrale de contour à  $V$ , variation d'énergie entre éprouvettes de différentes longueurs de fissures. Limité aux essais effectués sur des éprouvettes de flexion et CT (compacte en traction) un bon accord a été relevé par [8] même pour des matériaux assez ductiles.

En pratique pour les aciers, la méthode des complaisances n'est pas utilisée. En effet des formules valables pour les éprouvettes de flexion et CT ont été établies. Elles permettent de déterminer  $J$  à partir d'un seul essai [7].

### 3. ASPECTS EXPERIMENTAUX.

#### 3.1. Choix de l'éprouvette.

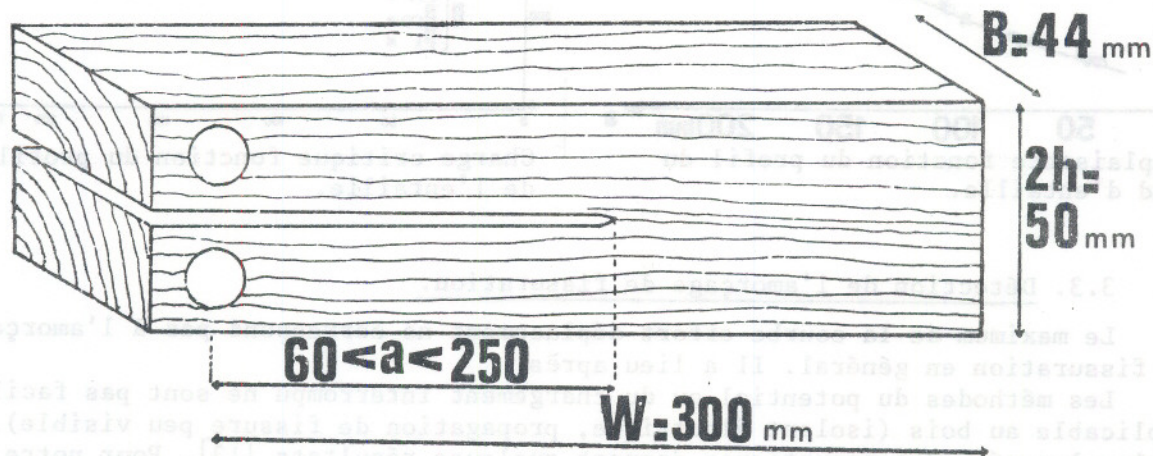
Il nous a paru intéressant, afin de diminuer les écarts dûs à l'inhomogénéité dans une même poutre (ou un même arbre) de n'utiliser qu'une éprouvette pour déterminer  $V$ .

D'autre part, comme il a été dit précédemment, les méthodes qui permettent de mesurer  $V$  à partir d'une seule éprouvette et d'une seule fissure ont été établies pour les métaux de faible ductilité. Les méthodes bien adaptées aux éprouvettes de flexion le sont un peu moins aux éprouvettes CT.

Il n'est pas évident qu'elles soient utilisables pour le bois sans modification.

Dans la mesure où notre étude a porté sur le sens radial longitudinal, le plus utilisé en construction, l'éprouvette de flexion posait des problèmes de dimensions compatibles avec la hauteur des poutres normalisées.

De plus, pour des raisons de stabilité de la propagation de la fissure [9], [10] et de similitude avec une éprouvette dite de fendage déjà normalisée en France nous avons choisi l'éprouvette DCB (double cantilever beam ou bande de largeur constante en clivage) indiquée sur la figure 3.



Cette éprouvette est en général utilisée avec une rainure latérale pour guider la fissure qui tend à bifurquer.

Dans le sens radial longitudinal étudié, ce sont les fibres du bois qui guideront la fissure. On évite ainsi la confection de la rainure et les complications qu'elle pourrait entraîner quant à son influence sur l'avancement du front de fissure.

Une telle éprouvette a été utilisée pour l'étude de résistance de colles notamment [11] - mais elle n'est pas normalisée et a été assez peu étudiée. Comme nous avons utilisé la méthode des complaisances, plusieurs longueurs de fissure sont nécessaires. Elles ont été effectuées sur la même éprouvette successivement après chaque amorçage de fissuration.

#### 3.2. Réalisation des fissures.

Plusieurs profils du fond de fissure ont été envisagés :

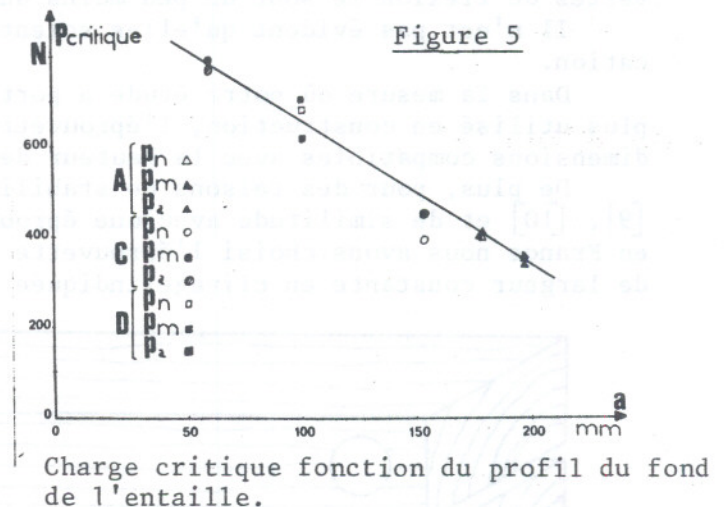
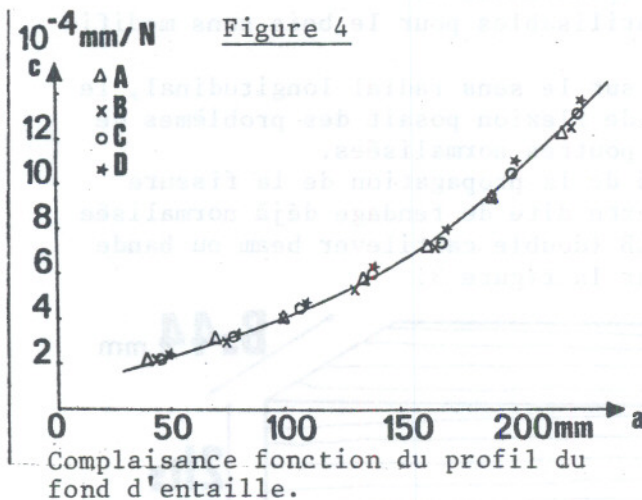


- . Trait de scie prolongé de 10 mm par une fente au "cutter" (A),
- . Trait de scie (denture à métaux) largeur de 0,6 mm (B),
- . Trait de scie (denture à bois) largeur de 1 mm (C),
- . Trait de scie terminé par un trou de rayon 5 mm (D).

Tous les profils ne pouvaient être rompus simultanément sur une même éprouvette et deux éprouvettes sont trop différentes pour obtenir un résultat homogène. Aussi, nous avons d'abord étudié les complaisances sur une même éprouvette avec les quatre profils correspondant à des longueurs de fissures voisines. En répétant le processus tout au long de l'éprouvette, nous avons obtenu la figure 4. La complaisance, même pour le profil D, est pratiquement indépendante de la forme du fond de fissure.

Ensuite, les valeurs des charges critiques (définies suivant 3 critères repérés par N, M, A et expliqués plus loin) ont été vérifiées par la même méthode pour 3 profils. On constate sur la figure 5 que cette charge critique ne dépend pratiquement pas du profil du fond de fissure. Ceci confirme les résultats de [12] indiquant que, pour le bois, le profil avait peu d'importance dans le déclenchement de la rupture. Ce qui influence la rupture en effet est l'endroit où une fibre est coupée, non la façon dont elle est coupée.

Ainsi, les essais définitifs ont été effectués avec le profil C le plus précis et le plus commode à mettre en oeuvre.



### 3.3. Détection de l'amorçage de fissuration.

Le maximum de la courbe effort déplacement ne correspond pas à l'amorçage de la fissuration en général. Il a lieu après.

Les méthodes du potentiel ou du chargement interrompu ne sont pas facilement applicable au bois (isolant électrique, propagation de fissure peu visible). Seules les méthodes acoustiques donnent quelques résultats [13]. Pour notre part, nous avons utilisé un système de détection original et simple.

Le contour de la fissure a été enduit de peinture conductrice (du genre laque d'argent) suivant le schéma de la figure 6. Les deux côtés de l'éprouvette ont été peints puis reliés électriquement en série.

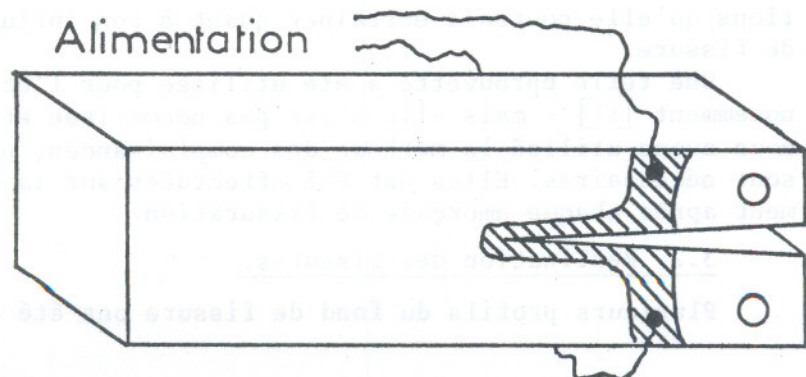
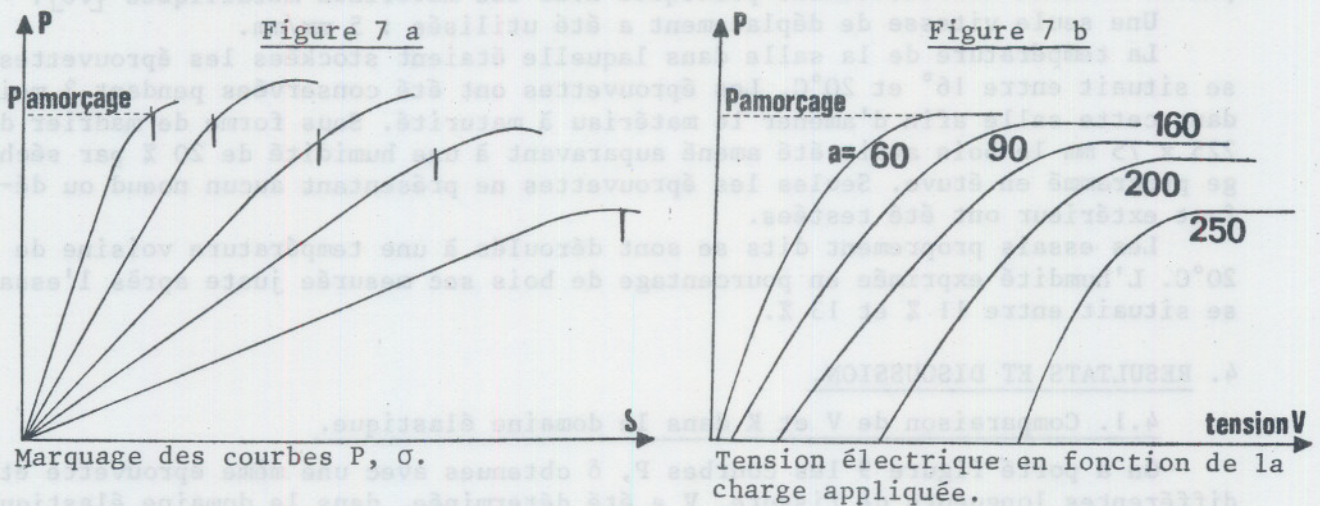


Figure 6



Des essais nous ont permis de suivre la résistance de cette couche lors du chargement. Une discontinuité particulièrement nette (si le temps de séchage est convenable) a été relevée (figure 7b), un peu avant le maximum de la courbe  $P, \delta$ .



Cette discontinuité a été utilisée pour marquer la courbe  $P, \delta$  (figure 7a). Un simple montage condensateur transformateur alimenté par une source à intensité constante de 0,6 A avant rupture et limitée à 10 Volts lorsque la fissure s'est propagée donne une sensibilité suffisante. (Figure 8). La discontinuité ne s'accompagnait pas toujours de l'apparition microscopique d'une fente en fond de fissure. Mais chaque fois qu'une telle fente existait, il y avait discontinuité de tension.

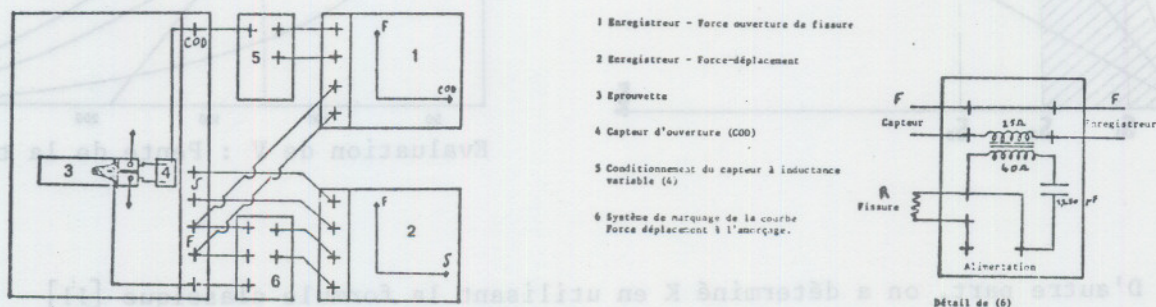


Figure 8

Cette discontinuité est due vraisemblablement à un écartement critique des particules d'argent en surface de la fissure. Elle serait amplifiée par un effet d'arc électrique, effet que l'on retrouvait lorsqu'on voulait refermer la fissure nouvellement créée.



### 3.4. Conditions d'essais.

Le système de charge et la chaîne de mesure sont indiqués sur la figure 8. Le système de détection de l'amorçage est également donné.

Les valeurs des forces et déplacement permettant de calculer  $V$  ont été enregistrés en même temps que les valeurs des forces et ouverture de fissure mesurée par un capteur de déplacement à inductance variable. Ceci permet d'en déduire  $K_I$  par la méthode habituellement pratiquée avec les matériaux métalliques [16].

Une seule vitesse de déplacement a été utilisée : 5 mm/mm.

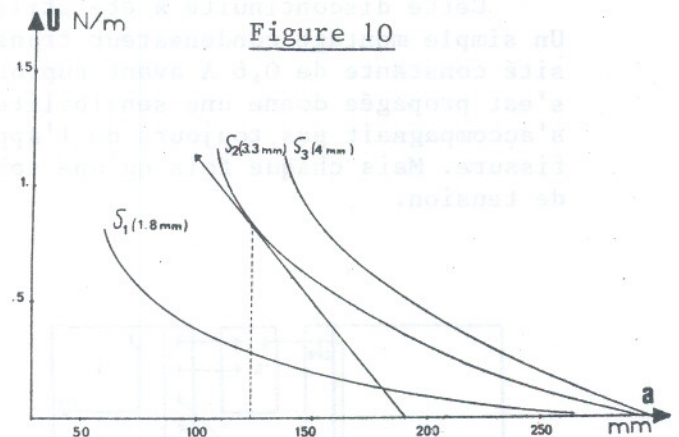
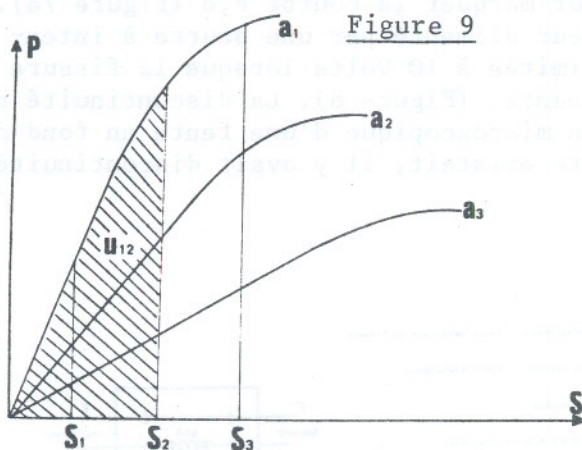
La température de la salle dans laquelle étaient stockées les éprouvettes se situait entre 16° et 20°C. Les éprouvettes ont été conservées pendant 3 mois dans cette salle afin d'amener le matériau à maturité. Sous forme de madrier de 225 x 75 mm le bois avait été amené auparavant à une humidité de 20 % par séchage programmé en étuve. Seules les éprouvettes ne présentant aucun nœud ou défaut extérieur ont été testées.

Les essais proprement dits se sont déroulés à une température voisine de 20°C. L'humidité exprimée en pourcentage de bois sec mesurée juste après l'essai se situait entre 11 % et 13 %.

## 4. RESULTATS ET DISCUSSION.

### 4.1. Comparaison de $V$ et $K$ dans le domaine élastique.

On a porté figure 9 les courbes  $P, \delta$  obtenues avec une même éprouvette et différentes longueurs de fissure.  $V$  a été déterminée, dans le domaine élastique linéaire par la méthode des complaisances déjà expliquée (figure 10).



Evaluation de  $V$  : Pente de la tangente.

D'autre part, on a déterminé  $K$  en utilisant la formule classique [11]

$$K = \frac{P\alpha}{B H^{3/2}} \left[ 3,464 + 0,574 \frac{H^2}{\alpha^2} \right] \quad \alpha = a + a_0$$

$a_0$  désigne une longueur fictive à déterminer par ajustement des courbes de complaisance théorique et expérimentale et permettant de tenir compte d'un effet de rotation au niveau du front de fissure.

Cette correction doit être faite même si le matériau est parfaitement élastique et n'est pas spécifique de l'essai sur bois. Elle traduit simplement l'inexactitude du calcul qui suppose les bras de l'éprouvette parfaitement encastrés. Notons qu'un autre modèle proposé par KANNINEN [14] introduit les effets de rotation en supposant une fondation élastique dans le ligament.