

E R R A T U M

à l'article "Opérateurs matriciels pour la viscoélasticité avec vieillissement"

par C. HUET

Cahiers du G.F.R. -Tome IV- n°6 - 15 Juin 1978

Dans le résumé : 1ère ligne au lieu de  
" à noyau convolutif"

lire :

" à noyau non convolutif"

---

GRUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE

Secrétariat Général :

M. ABSI

C.E.B.T.P.

12, rue Brancion

75737 Paris Cédex 15

Bulletin d'inscription  
pour une personne physique

Date : .....

Je demande mon inscription au GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE et verse ci-joint une cotisation de 100 F pour l'année 1979.

Nom : ..... Prénom : .....

Organisme : .....

Adresse à laquelle les convocations et les bulletins doivent être envoyés : .....

.....

Signature :



HENRI CHARLES WEISS

(1893 - 1978)

Nous avons eu la douleur d'apprendre le décès, survenu le 9 avril 1978, d'Henri Weiss, le principal fondateur de notre groupe.

Originaire d'une vieille famille alsacienne protestante, il était apparenté à Emile Erckmann, auteur avec Alexandre Chatrian de la pièce si attachante "L'ami Fritz" et de bien d'autres oeuvres. Son père, qui était médecin, réorganisa après 1918 la faculté de médecine de Strasbourg, dont il fut le doyen. Sa mère, née Courtois de Vicose, avait des origines méridionales et anglaises.

Du fait de l'annexion de l'Alsace par l'Allemagne, c'est à Paris que naquit Henri Weiss le 19 avril 1893. Il fit ses humanités au lycée Janson de Sailly, mais, après avoir obtenu très jeune son baccalauréat, il fut victime d'une grave poliomyélite qui l'empêcha de poursuivre la filière habituelle des élèves brillants dont il faisait partie : mathématiques spéciales et concours d'entrée aux plus grandes écoles. Néanmoins, il put, un peu plus tard, continuer ses études à la faculté des sciences de Paris et entrer à l'Ecole Supérieure d'Electricité, dont il sortit en 1916.

En 1918, il fut nommé assistant de chimie générale chez Le Chatelier et soutint vers 1923 une thèse sur la diffusion des métaux à l'état solide. C'est dans ce laboratoire qu'il fut chargé vers 1920 d'initier à la recherche Paul Laffitte, récemment démobilisé. Ces deux savants firent ensemble quelques travaux sur la diffusion et l'interpénétration des solides, ainsi que sur les trompes à vapeur de mercure et sur les jaquettes à température constante par fusion ou ébullition de substances diverses. Devenus amis, ils se livrèrent à des ascensions en haute montagne, dans la massif de la Meije en 1923.

Après sa soutenance de thèse, H. Weiss bénéficia d'une bourse pour aller à Londres comme Ramsey Memorial Fellow, s'initier chez Bragg aux recherches sur les alliages à l'aide des rayons X (1923-24).

En 1925, il fut nommé professeur à l'Ecole Supérieure du Pétrole et des Combustibles Liquides fondée l'année précédente et dont les locaux étaient installés 4 rue Boussingault à Strasbourg. De 1929 à 1952 il en fut le sous-directeur, puis le directeur. Parallèlement il occupa un poste de maître de conférences, puis, en 1932, une chaire de professeur à la faculté des sciences de Strasbourg, dont il fut le doyen de 1945 à 1947. De 1953 à 1967 il exerça les fonctions de conseiller scientifique à l'Office National des Universités, 96 boulevard Raspail à Paris. Marié en 1930 avec mademoiselle



Bauer, il eut deux enfants : Marie-Claude, actuellement maître-assistant à l'université René-Descartes et Francis, capitaine de frégate.

Son esprit, donc, était assez universel, puisque sa sphère d'activité scientifique s'étendait de la chimie à l'électricité en passant par la chimie physique, ce qui ne l'empêchait pas, à Strasbourg, pendant les années qui ont précédé la deuxième guerre mondiale, d'assister régulièrement aux séances de la section locale de la Société Française de Physique, présidées par son homonyme Pierre Weiss et au cours desquelles étaient évoqués divers aspects de la physique d'alors et notamment du magnétisme avec Louis Néel. On cite de lui plusieurs ouvrages : Application de la chimie physique aux propriétés du pétrole, les huiles minérales en électrotechnique, le pétrole. A l'Office des Universités, il composa un Répertoire des laboratoires de recherche scientifique, ce qui est un travail pénible et ingrat.

Mais il s'intéressait également à la littérature et aux arts. Son inlassable activité lui valut en 1964 la présidence de la Renaissance Française, tandis qu'en 1969, à l'âge de 76 ans, il accepta d'être secrétaire général de la Culture Française et se dépensa sans compter pour développer ces associations.

Quant à la fondation du Groupe Français d'Etudes de Rhéologie, son rôle a été déterminant.

C'est principalement par le biais de la viscosité des huiles de graissage et des propriétés si particulières des boues de forage qu'il fut amené à la rhéologie. Depuis longtemps les chercheurs qui s'intéressaient aux propriétés mécaniques des matériaux solides ou liquides sentaient confusément la nécessité d'une société de rhéologie où les différents points de vue seraient confrontés. La question avait été évoquée notamment au laboratoire des peintures et vernis à Bellevue en 1945-46 avec Henri Sack et Félix Kauer, mais chacun était occupé par ses propres affaires, tous étaient surchargés de travail et cette création resta sous la forme de vœu pieux. Il en fut de même dans d'autres laboratoires.

C'est surtout au deuxième congrès international de rhéologie (Oxford, juillet 1953) qu'Henri Weiss prit conscience du retard de la France dans ce domaine.

En premier lieu l'absence de lien entre universitaires et industriels, ainsi qu'entre chercheurs travaillant sur des matériaux différents, était un handicap pour tous, et un frein au développement de la rhéologie française. On sait en effet que des observations effectuées sur un produit déterminé peuvent donner des idées au cours de l'étude d'un produit tout différent. On sait aussi que le moule mathématique dans lequel certains matériaux peuvent être insérés peut suggérer de nouvelles expériences. Des échanges entre théoriciens et expérimentateurs ne pouvaient être que fructueux.

En second lieu les sociétés étrangères, qui avaient déjà institué un Comité International de Rhéologie, demandaient à quels interlocuteurs français il leur était possible de s'adresser pour l'organisation des futurs congrès et pour la diffusion d'informations diverses.

Plusieurs personnalités étrangères, parmi lesquelles il con-



vient de citer au premier rang G.W. Scott Blair, grand ami de notre pays, déplorait donc l'absence de société française de rhéologie. En revenant à Paris, Henri Weiss décida d'agir. Il entreprit les démarches nécessaires auprès de Georges Champetier, directeur du C.N.R.S., poussa à la création d'une Commission Nationale de Rhéologie dont, par modestie, il n'occupa que le rôle effacé mais efficace de délégué général, la présidence étant confiée à Joseph Pérès et, plus tard, à Robert Mazet. Le général Nicolau en était le vice-président. Il se mit en relation avec plusieurs laboratoires ou centres de recherches et organisa le 26 février 1954 à l'Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 233 boulevard Raspail, avec le concours de Marcel Mathieu et du général Nicolau, la première réunion du "Groupe Français d'Etudes de Rhéologie", qui fut un succès. L'adhésion au groupe était gratuite, le secrétariat étant assuré par le C.N.R.S.. Peu après, suivit la parution trimestrielle des "Cahiers", édités par le C.N.R.S. et dont Pierre Thirion avait bien voulu accepter d'être le rédacteur en chef. C'est encore Henri Weiss qui eut l'initiative avec Georges Vallet de publier un ouvrage français de rhéologie, dont la responsabilité échut par la suite à Bernard Persoz. Avec René Buvet il organisa avec bonheur en 1960 un colloque C.N.R.S. de rhéologie non-linéaire, auquel participa une douzaine de savants étrangers.

En dehors de ses connaissances générales étendues, un hommage particulier doit être rendu à notre fondateur pour ses qualités humaines. Fuyant les honneurs, il savait décider les uns et les autres à prendre en charge telle ou telle affaire, s'effaçant devant eux, mais continuant à accomplir sans relâche le travail principal, administratif ou autre, qui était nécessaire à la poursuite du but. Il avait une rare capacité de créer autour de lui les conditions du dialogue entre des hommes, universitaires, industriels, théoriciens ou expérimentateurs, de formations et de mentalités essentiellement hétérogènes. Tous le respectaient, admiraient son désintéressement et étaient touchés, lorsqu'ils l'approchaient d'avantage, par sa chaleureuse générosité, le charme discret de son humour, masquant une vaste culture et une profonde humanité.

Ce dut être un déchirement, dont il ne laissa rien voir, lorsque ses forces ne lui permirent plus de prendre une part active aux réunions du groupe. Il continua pourtant de suivre avec intérêt et d'aider de ses conseils ceux qui poursuivirent son oeuvre et eurent encore, jusqu'au bout, recours à son inlassable disponibilité. C'est avec une patience et une sérénité exemplaires qu'il supporta la longue maladie qui devait l'emporter.

Que sa vie, son travail, sa modestie servent d'exemple à tous ceux qui, à quelque degré que ce soit de la hiérarchie sociale, ont l'ambition d'être utiles à leur entourage immédiat, à leur pays ou à l'humanité toute entière.

Puisse ce respectueux et reconnaissant adieu de ses collègues, collaborateurs et amis adoucir la peine de son épouse, de ses enfants et petits enfants.



## REMARQUES SUR LES EQUATIONS DE L'ELASTOPLASTICITE DE PRANDTL-REUSS (\*)

par Jean-Daniel Wéber, Faculté des Sciences de Metz

## RESUME

Dans les équations de Prandtl-Reuss, l'expression des vitesses de déformation plastique découle du principe du travail maximal. On montre que la dérivée seconde du travail fourni à l'élément matériel subit alors une discontinuité négative lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique dans n'importe quelle déformation régulière. L'énergie complémentaire vérifie une propriété analogue. On en déduit que la forme des équations de Prandtl-Reuss, résolues par rapport aux vitesses de déformation ou aux vitesses de contrainte, est indépendante du choix des variables conjuguées  $\sigma$ - $\epsilon$ .

## ABSTRACT

In the Prandtl-Reuss equations, the plastic deformation rate is derived from the principle of maximum work. It is shown that the second derivative of the work carried out on a material element has a negative discontinuity in any regular deformation which leads from the elastic range to the plastic range. The complementary energy exhibits a similar property. It follows that the Prandtl-Reuss equations, solved with respect to strain rates or to stress rates, are independent of the choice of the conjugate variables  $\sigma$ - $\epsilon$ .

## 1. INTRODUCTION

Les équations de l'élastoplasticité de Prandtl-Reuss ([1], 1930) s'écrivent, lorsqu'on adopte le critère de Mises [2]

$$v_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{3\nu}{E} \dot{n} \delta_{ij} + \phi s_{ij} \quad (1)$$

avec

$v_{ij}$ , tenseur des vitesses de déformation ;

$E$ , module d'Young ;  $\nu$ , nombre de Poisson ;  $n = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  ;

$\dot{\sigma}_{ij}$ , dérivée du tenseur des contraintes par rapport à la matière, par exemple dérivée de Truesdell ;

$\phi = \Psi(J, k^2) \dot{J}$  pour le corps écrouissable si  $\dot{J} > 0$  ;

$J$  est le second invariant du déviateur des contraintes,  $J = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$  ; le coefficient d'écrouissage  $k^2$  est égal à  $J$  lorsque l'élément matériel se trouve sur la frontière d'écoulement ; pour  $J < k^2$  on a  $\Psi = 0$  ; pour  $J = k^2$  on a  $\Psi > 0$  ; la fonction  $\Psi(k^2, k^2)$  peut être déterminée à partir d'un essai de traction simple.  $\phi > 0$  pour le corps parfaitement plastique si  $\dot{J} = 0$  et  $J = k^2$

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, 15 juin 1978.



$\Psi = 0$  dans les autres cas.

On est conduit aux équations de Prandtl-Reuss en admettant que le tenseur des vitesses de déformation est la somme d'un tenseur des vitesses de déformation élastique et d'un tenseur des vitesses de déformation plastique. Le tenseur des vitesses de déformation plastique est celui d'un corps rigide-plastique obéissant au principe du travail maximal : d'après ce principe, les contraintes réelles  $\sigma_{ij}^p$  qui se produisent lorsque les vitesses de déformation sont  $v_{ij}^p$ , vérifient l'inégalité

$$v_{ij}^p \sigma_{ij} \geq v_{ij}^p \sigma_{ij}^*$$

quel que soit  $\sigma_{ij}^*$  en-deçà de ou sur la frontière d'écoulement,  $f(\sigma_{ij}^*) \leq k^2$ .

En choisissant  $\sigma_{ij}^*$  sur la frontière d'écoulement et infiniment voisin de  $\sigma_{ij}$ , on en déduit  $v_{ij}^p d\sigma_{ij} = 0$  pour  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ .

$v_{ij}^p$  est donc proportionnel à  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  ; lorsqu'il y a écoulement, on admet que le coefficient de proportionnalité est lui-même proportionnel à la vitesse d'écoulement  $\dot{f}$ , soit  $v_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f}$  ; dans le cas de plasticité parfaite,  $\dot{f} = 0$  et le coefficient de proportionnalité entre  $v_{ij}^p$  et  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  a une valeur positive arbitraire.

En rhéologie, on doit postuler que toute loi de comportement est inversible : lorsque  $\sigma$  et  $\epsilon$  sont conjugués (c'est-à-dire lorsque  $\sigma d\epsilon$  représente la différentielle du travail fourni à l'élément matériel),  $\sigma$  doit être une fonctionnelle de  $\epsilon$  et  $\epsilon$  doit être une fonctionnelle de  $\sigma$ .

Nous le vérifierons sur les équations de Prandtl-Reuss en étudiant leur inversion, c'est-à-dire l'expression des vitesses de contrainte en fonction des vitesses de déformation. Nous en déduirons une inégalité remarquable concernant le travail fourni à un élément matériel, lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique dans une déformation dont les dérivées premières et secondes sont continues par rapport au temps : le saut de la dérivée seconde de ce travail doit alors être toujours négatif. Posée en principe, cette propriété permet de retrouver les équations de Prandtl-Reuss sans avoir recours au principe du travail maximal.

## 2. LEMME

Soit  $S$  une matrice  $n \times n$  symétrique inversible et  $u$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Nous aurons à utiliser les relations suivantes

$$(S + u \otimes u)^{-1} = S^{-1} - \frac{1}{1 + u S^{-1} u} (S^{-1} u) \otimes (S^{-1} u) \quad (2)$$

et

$$(S - u \otimes u)^{-1} = S^{-1} + \frac{1}{1 - u S^{-1} u} (S^{-1} u) \otimes (S^{-1} u) \quad (3)$$

On remarque que (3) se déduit de (2) par un changement de  $u$  en  $iu$ .

Pour démontrer (2), nous posons  $S^{-1} = T$  ; il s'agit de prouver que

$$(S + u \otimes u) \left( T - \frac{1}{1 + u T u} (Tu) \otimes (Tu) \right) = I$$

soit

$$-S((Tu) \otimes (Tu)) - (u \otimes u)((Tu) \otimes (Tu)) + (1 + u T u) (u \otimes u) T = 0.$$

Introduisons des notations indicielles

$$(Tu) \otimes (Tu) = T_{jp} u_p T_{kq} u_k$$

$$S((Tu) \otimes (Tu)) = S_{ij} T_{jp} u_p T_{kq} u_q = u_i T_{kq} u_q$$



$$(u \otimes u) ((Tu) \otimes (Tu)) = u_i u_j T_{jp} u_p T_{kq} u_q$$

$$(u \otimes u) T = u_i u_j T_{jk}$$

$$(u Tu) (u \otimes u) T = u_p T_{pq} u_q u_i u_j T_{jk}$$

La vérification de la formule résulte alors d'un simple changement de notation des indices, compte tenu de la symétrie de  $T_{ij}$  ;

On a par exemple  $u_i T_{kq} u_q = u_i u_j T_{jk}$ .

### 3. INVERSION DES EQUATIONS DE PRANDTL-REUSS POUR UN MATERIAU ISOTROPE, LORSQUE $\dot{\sigma}$ ET $\dot{\epsilon}$ ONT MEMES DIRECTIONS PRINCIPALES.

Nous désignons par  $\dot{\epsilon}$  le vecteur dont les composantes  $\dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 \dot{\epsilon}_3$  sont les valeurs principales du tenseur des vitesses de déformation ; par  $\dot{\sigma}$  le vecteur dont les composantes  $\dot{\sigma}_1 \dot{\sigma}_2 \dot{\sigma}_3$  sont les valeurs principales du tenseur des vitesses de contrainte ; par  $p$  le vecteur dont les composantes  $p_1 p_2 p_3$  sont les valeurs principales d'un tenseur proportionnel aux vitesses de déformation plastique ; ce tenseur a mêmes directions principales que le tenseur des contraintes, pour un matériau isotrope.

En se référant à l'équation (1), on voit que le comportement élastoplastique est défini par

$$\dot{\epsilon} = C \dot{\sigma} + \delta p (p \cdot \dot{\sigma}) \quad (4)$$

C désignant la matrice des complaisances

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{pmatrix}$$

$$\delta = 1 \text{ si } p \cdot \dot{\sigma} \geq 0 \text{ (charge)}$$

$$\delta = 0 \text{ si } p \cdot \dot{\sigma} < 0$$

$p$  est nul sauf lorsque le matériau se trouve sur la frontière d'écoulement.

Notons que dans le cas de l'équation (1) on a  $p_1 = \sqrt{\psi} s_1$ ,  $p_2 = \sqrt{\psi} s_2$ ,  $p_3 = \sqrt{\psi} s_3$  où

$s_1 s_2 s_3$  sont les valeurs principales du déviateur des contraintes.

En effet  $\phi s_{ij} = \psi s_{ij} \dot{\sigma}_{kl} = \psi s_{ij} s_{kl} \dot{\sigma}_{kl} = \psi s_{ij} s_{kl} \dot{\sigma}_{kl}$ . Des valeurs de  $p_1 p_2 p_3$  non proportionnelles à  $s_1 s_2 s_3$  correspondent à des critères d'écoulement autres que

celui de Mises. Notons également que (4) peut s'écrire

$$\dot{\epsilon} = (C + \delta p \otimes p) \dot{\sigma}$$

ou encore

$$\dot{\epsilon}_i = (C_{ij} + \delta p_i p_j) \dot{\sigma}_j$$

Démontrons que la formule (4) s'inverse sous la forme

$$\dot{\sigma} = M \dot{\epsilon} - \delta' q (q \cdot \dot{\epsilon}) \quad (5)$$

où  $M$  est la matrice des modules, inverse de la matrice des complaisances :

$M = C^{-1}$  soit

$$M = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients d'élasticité de Lamé.

D'autre part

$$q = \frac{Mp}{\sqrt{1 + p \cdot Mp}}$$

$$\delta' = 1 \text{ si } q \cdot \dot{\epsilon} \geq 0 \text{ (charge)}$$

$$\delta' = 0 \text{ si } q \cdot \dot{\epsilon} < 0$$



L'équivalence de (4) et (5) découle des deux propositions suivantes :

a) si  $\dot{\epsilon} = C\dot{\sigma}$ , on a  $\dot{\sigma} = M\dot{\epsilon}$  et les quantités  $p\dot{\sigma}$  et  $q\dot{\epsilon}$  sont de même signe.

En effet  $p\dot{\sigma} = p M\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} M p = \sqrt{1+pMp} \dot{\epsilon} q$

b) si  $\dot{\epsilon} = C\dot{\sigma} + p(p\dot{\sigma})$ , on a  $\dot{\sigma} = M\dot{\epsilon} - q(q\dot{\epsilon})$  et les quantités  $p\dot{\sigma}$  et  $q\dot{\epsilon}$  sont de même signe.

Il suffit pour cela d'appliquer le lemme, en prenant

$$S = C \quad p = u \quad S^{-1} = M \quad q = \frac{Mp}{\sqrt{1+pMp}}$$

L'identité du signe de  $p\dot{\sigma}$  et  $q\dot{\epsilon}$  se démontre comme suit :

$$p\dot{\sigma} = p(M - q \otimes q)\dot{\epsilon} = p M\dot{\epsilon} - (pq)(q\dot{\epsilon})$$

$$p M\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} M p = \sqrt{1+pMp} q\dot{\epsilon}$$

et  $p q = \frac{Mp}{\sqrt{1+pMp}}$

d'où  $p\dot{\sigma} = \frac{q\dot{\epsilon}}{\sqrt{1+pMp}}$

Notons que l'on passe inversement de la formule (5) à la formule (4) par application de (3) : on pose  $q = u$ ,  $S = M$  ; il en résulte que

$$p = \frac{Cq}{\sqrt{1-qCq}}$$

Les valeurs que peut prendre  $p$  sont arbitraires, tandis que celles que peut prendre  $q$  sont limitées par la condition  $qCq < 1$ . Lorsque  $qCq$  tend vers 1,  $p$  tend vers l'infini et on se rapproche de la plasticité parfaite.

Notons que lorsque  $p$  est proportionnel au vecteur  $s$  de composantes  $s_1, s_2, s_3$  (valeurs principales du déviateur des contraintes),  $q$  est lui-même proportionnel à ce vecteur.

En effet  $q = \frac{Mp}{\sqrt{1+pMp}}$  et  $Ms = 2\mu s$ .

On peut ajouter que si le coefficient de proportionnalité  $G$  entre  $p$  et  $s$  n'est fonction que de  $k^2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$ , alors le coefficient de proportionnalité  $H$  entre  $q$  et  $s$  n'est lui-même fonction que de  $k^2$ . En effet si  $p = Gs$

$$\text{on a } q = \frac{2\mu Gs}{1+2\mu G^2 s^2} = \frac{2\mu Gs}{1+4\mu G^2 k^2}$$

$$\text{soit } q = Hs \text{ avec } H = \frac{2\mu G}{1+4\mu G^2 k^2}$$

Lorsque  $p$  croît indéfiniment tout en restant proportionnel à  $s$ ,  $q$  tend vers  $\frac{\sqrt{\mu}}{k} s$ .

#### 4. INVERSION DES EQUATIONS DE PRANDTL-REUSS DANS LE CAS GENERAL.

C'est le cas d'un matériau anisotrope, lorsque les vitesses de contrainte (ou les vitesses de déformation) sont quelconques.

Nous écrirons les équations de Prandtl-Reuss sous la forme

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ij,kl} \dot{\sigma}_{kl} + \delta p_{ij} p_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (6)$$

$$\delta = 1 \text{ si } p_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \geq 0 \text{ (charge)}$$

$$\delta = 0 \text{ si } p_{kl} \dot{\sigma}_{kl} < 0$$

avec  $C_{ij,kl} = C_{ji,kl} = C_{ij,lk} = C_{kl,ij}$  (matrice des complaisances)

$$p_{ij} = p_{ji} \text{ (tenseur proportionnel à la vitesse de déformation plastique)}$$

$\epsilon_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  sont des tenseurs conjugués, l'état de référence étant l'état actuel où le corps se trouve sur la frontière d'écoulement.

Pour fixer les idées, nous admettrons que  $\epsilon_{ij}$  est le tenseur de Cauchy-Green, en prenant pour état de référence l'état actuel.



Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  conjugué de  $\epsilon_{ij}$  est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Dire que ces tenseurs sont conjugués signifie que  $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$  représente le travail reçu par un élément de volume, cet élément ayant dans la configuration de référence un volume unité.

$\dot{\epsilon}_{ij}$  est la dérivée de  $\epsilon_{ij}$  à l'instant initial où  $\epsilon_{ij} = 0$  ; c'est le tenseur des vitesses de déformation.

$\dot{\sigma}_{ij}$  est la dérivée de  $\sigma_{ij}$  à l'instant où  $\epsilon_{ij} = 0$  ; on l'appelle également dérivée de Truesdell du tenseur des contraintes.

On peut montrer, comme au paragraphe précédent, que l'équation (6) est équivalente à

$$\dot{\sigma}_{ij} = m_{ij,kl} \dot{\epsilon}_{kl} - \delta' q_{ij} q_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7)$$

où  $m_{ij,kl}$  est la matrice des modules, inverse de la matrice des complaisances

$$q_{ij} = \frac{m_{ij,kl} p_{kl}}{\sqrt{1 + p_{rs} m_{rs,uv} p_{uv}}}$$

$$\delta' = 1 \text{ si } q_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \geq 0$$

$$\delta' = 0 \text{ si } q_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} < 0$$

$q_{ij} = q_{ji}$  est un tenseur proportionnel à la vitesse de contrainte plastique.

Tout comme la matrice des complaisances, la matrice des modules vérifie les relations

$$m_{ij,kl} = m_{ji,kl} = m_{ij,lk} = m_{kl,ij}$$

de même, on a

$$p_{ij} = \frac{c_{ij,kl} q_{kl}}{\sqrt{1 - q_{rs} c_{rs,uv} q_{uv}}}$$

Dans le cas d'un matériau présentant une élasticité isotrope

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{3\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \delta p_{ij} p_{kl} \dot{\sigma}_{kl}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - \delta' q_{ij} q_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

Si le matériau obéit au critère de Mises,  $p_{ij}$  est proportionnel au déviateur des contraintes  $s_{ij}$  ; le coefficient de proportionnalité est une fonction de  $J$  et  $k^2$ , à valeurs nulles pour  $J < k^2$ , à valeurs positives pour  $J = k^2$  ; elle peut être déterminée à partir d'un essai de traction simple. De même,  $q_{ij}$  est proportionnel à  $s_{ij}$ .

Dans le cas général d'une élasticité anisotrope, si  $f(\sigma_{ij}) = k^2$  et  $g(\epsilon_{ij}) = 1^2$  sont les critères d'écoulement exprimés respectivement en fonction de  $\sigma_{ij}$  et de  $\epsilon_{ij}$ , alors  $p_{ij}$  est proportionnel à  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  et  $q_{ij}$  est proportionnel à  $\frac{\partial g}{\partial \epsilon_{ij}}$ .

Notons que les équations (6) et (7) peuvent aussi s'écrire sous la forme (4) et (5), où  $\epsilon$   $\sigma$   $p$   $q$  sont des tenseurs d'ordre deux,  $C$  et  $M$  des tenseurs d'ordre 4.

D'autre part, si l'on pose

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_{11} \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma}_{22} \quad \dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}_{33} \quad \sqrt{2} \dot{\sigma}_{23} = \dot{\sigma}_4 \quad \sqrt{2} \dot{\sigma}_{31} = \dot{\sigma}_5 \quad \sqrt{2} \dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_6$$

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_{11} \quad \text{etc}$$

$$p_1 = p_{11} \quad \text{etc}$$

$$C_{11} = C_{11,11} \quad C_{12} = C_{12,22} \quad C_{13} = C_{11,33}$$

$$C_{14} = \sqrt{2} C_{11,23} \quad \text{etc} \quad C_{44} = 2 C_{23,23} \quad \text{etc}$$



les équations (6) et (7) s'écrivent

$$\dot{\epsilon}_i = C_{ij} \dot{\sigma}_j + \delta p_i p_j \dot{\sigma}_j$$

$$\dot{\sigma}_i = m_{ij} \dot{\epsilon}_j - \delta' q_i q_j \dot{\epsilon}_j$$

$$p_i = \frac{C_{ij} q_j}{\sqrt{1 - q_k C_{kl} q_l}}$$

$$q_i = \frac{m_{ij} p_j}{\sqrt{1 + p_k m_{kl} p_l}}$$

##### 5. EFFET D'UN CHANGEMENT DES VARIABLES CONJUGUEES $\sigma$ ET $\epsilon$ .

On peut démontrer que les relations (6) et (7) sont indépendantes du choix des variables conjuguées  $\sigma$ ,  $\epsilon$ , quel que soit l'état de référence choisi pour ces variables conjuguées, et quel que soit le tenseur  $\epsilon$  choisi (tenseur de Cauchy Green, tenseur des dilatations logarithmiques etc) : cela résultera des inégalités que nous établirons au paragraphe 6. Cependant nous supposons ici que l'état de référence pour les tenseurs de déformation  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  se confond avec l'état actuel, où le matériau se trouve sur la frontière d'écoulement. On choisit pour  $\epsilon'$  une fonction de  $\epsilon$  telle que ces deux tenseurs symétriques aient mêmes directions principales, et qu'ils se confondent lorsque  $\epsilon$  est infiniment petit. Une même fonction relie chaque valeur propre de l'un de ces tenseurs à la valeur propre correspondante de l'autre tenseur.

$\epsilon'$  pourrait être, par exemple, le tenseur des dilatations logarithmiques ; on aurait alors

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon'_{ik} \epsilon'_{kj} + \dots$$

La relation entre  $\sigma_{ij}$  (conjugué de  $\epsilon_{ij}$ ) et  $\sigma'_{ij}$  (conjugué de  $\epsilon'_{ij}$ ) s'établit comme suit :

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}$$

par dérivation

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \sigma_{ij} \ddot{\epsilon}_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} + \sigma'_{ij} \ddot{\epsilon}'_{ij}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} \dot{\epsilon}'_{kl}$$

$$\ddot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl} \partial \epsilon'_{pq}} \dot{\epsilon}'_{kl} \dot{\epsilon}'_{pq} + \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl}} \ddot{\epsilon}'_{kl}$$

comme

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}'_{ij} \\ (\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} &= \sigma_{ij} (\ddot{\epsilon}_{ij} - \ddot{\epsilon}'_{ij}) \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial \epsilon'_{kl} \partial \epsilon'_{pq}} \dot{\epsilon}'_{kl} \dot{\epsilon}'_{pq} \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{pq} \frac{\partial^2 \epsilon_{pq}}{\partial \epsilon'_{ij} \partial \epsilon'_{kl}} \dot{\epsilon}'_{kl} = a_{ij,kl} \dot{\epsilon}'_{kl}$$

ainsi, lorsque

$$\dot{\sigma}_{ij} = m_{ij,kl} \dot{\epsilon}'_{kl} - \delta' q_{ij} q_{kl} \dot{\epsilon}'_{kl}$$

on a

$$\dot{\sigma}'_{ij} = (m_{ij,kl} + a_{ij,kl}) \dot{\epsilon}'_{kl} - \delta' q_{ij} q_{kl} \dot{\epsilon}'_{kl}$$



En substituant au tenseur  $\sigma$  le tenseur  $\sigma'$  on change la matrice des modules élastiques mais on ne change pas le tenseur  $q$ . Par contre, on change le tenseur  $p$ . Ainsi, pour

$$\epsilon_{pq} = \epsilon'_{pq} + \epsilon'_{pr} \epsilon'_{rq}$$

qui s'écrit aussi

$$\epsilon_{pq} = \frac{1}{2} (\epsilon'_{pq} + \epsilon'_{qp}) + \frac{1}{4} (\epsilon'_{pr} + \epsilon'_{rp}) (\epsilon'_{rq} + \epsilon'_{qr})$$

on a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{pq}}{\partial \epsilon'_{ij} \partial \epsilon'_{kl}} = \frac{1}{4} (\delta_{pi} \delta_{kj} \delta_{ql} + \delta_{pi} \delta_{lj} \delta_{qk} + \delta_{ki} \delta_{pj} \delta_{ql} + \delta_{li} \delta_{pj} \delta_{qk} + \delta_{pk} \delta_{il} \delta_{qj} + \delta_{pk} \delta_{jl} \delta_{qi} + \delta_{ik} \delta_{pl} \delta_{qj} + \delta_{jk} \delta_{pl} \delta_{qi})$$

d'où

$$a_{ij,kl} = \frac{1}{2} (\sigma_{il} \delta_{kj} + \sigma_{ik} \delta_{lj} + \sigma_{jl} \delta_{ki} + \sigma_{jk} \delta_{li})$$

## 6. INEGALITES FONDAMENTALES

On peut montrer que les équations de Prandtl-Reuss découlent du principe suivant : dans une déformation régulière par rapport au temps, la dérivée seconde du travail fourni à un élément matériel subit une discontinuité négative lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique. Nous appelons déformation régulière par rapport au temps, une déformation dans laquelle les composantes du tenseur de déformation (de Cauchy-Green par exemple) sont des fonctions du temps continues ainsi que leurs deux premières dérivées. Bien entendu, cette propriété est alors indépendante du choix du tenseur de déformation.

Si le travail  $W$  est relatif à un élément de volume unité dans la configuration de référence, on a

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \sigma \dot{\epsilon} \\ \ddot{W} &= \dot{\sigma} \dot{\epsilon} + \sigma \ddot{\epsilon} \end{aligned}$$

d'où d'après (7), lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique

$$[\ddot{W}] = -q_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} q_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} \leq 0 \quad (8)$$

Réciproquement, si l'on admet une relation entre  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}$  de la forme

$$\dot{\sigma}_{ij} = m_{ij,kl} \dot{\epsilon}_{kl} - \delta' q'_{ij} q'_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

et si  $[\ddot{W}] \leq 0$  lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique par n'importe quel chemin, alors  $q'_{ij} = \beta q_{ij}$  ( $\beta \geq 0$ ) et le matériau obéit à l'équation (7)

Le raisonnement s'applique à n'importe quel choix de tenseurs des contraintes et des déformations conjugués; il en ressort immédiatement qu'une loi de comportement de la forme (7) s'applique quel que soit le choix des tenseurs des contraintes et des déformations conjugués. La formule (6) en découle aussitôt.

Mais en se référant à (7), on peut donner une seconde forme au principe précédent. Soit  $W'$  l'énergie complémentaire, définie par

$$\begin{aligned} W' &= \sigma \epsilon - W \\ \dot{W}' &= \dot{\sigma} \epsilon \end{aligned}$$

on a

$$\ddot{W}' = \ddot{\sigma} \epsilon + \dot{\sigma} \dot{\epsilon}$$

Si  $\dot{\sigma}$  et  $\ddot{\sigma}$  sont continus lors du passage du domaine élastique au domaine plastique, on a  $[\ddot{W}'] \geq 0$  pour un matériau obéissant à (6); en effet

$$[\ddot{W}'] = p_{ij} \dot{\sigma}_{ij} p_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \geq 0 \quad (9)$$



Le matériau de Prandtl-Reuss est donc conforme au principe suivant : dans toute déformation dans laquelle le tenseur des contraintes est une fonction du temps régulière jusqu'à l'ordre 2 au moins, la dérivée seconde de l'énergie complémentaire subit une discontinuité positive lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique. L'inversion de la relation (6) conduit à (7) d'où l'on déduit (8). Réciproquement, si l'on admet entre  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}$  une relation de la forme

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ij,kl} \dot{\sigma}_{kl} + \delta p'_{ij} p_{kl} \dot{\sigma}_{kl}$$

et si  $[\ddot{W}'] > 0$  lorsqu'on passe du domaine élastique au domaine plastique par n'importe quel chemin, alors  $p'_{ij} = \alpha p_{ij}$  ( $\alpha > 0$ ) et le matériau obéit à l'équation (6).

## 7. CONCLUSION

Dans la présentation que nous avons donnée du problème de l'inversion des équations de Prandtl-Reuss, nous avons fait ressortir la symétrie des formules (6) et (7), valables pour n'importe quels tenseurs  $\sigma$ - $\epsilon$  conjugués, et les avons rattachées à deux inégalités fondamentales portant sur l'énergie et l'énergie complémentaires fournies à l'élément matériel. L'une quelconque des quatre relations suivantes entraîne les trois autres :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= C \dot{\sigma} + \delta p (p \cdot \dot{\sigma}) & \dot{\sigma} &= M \dot{\epsilon} - \delta' q (q \cdot \dot{\epsilon}) \\ [\ddot{W}] &\leq 0 & [\ddot{W}'] &\geq 0 \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) A. REUSS, Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, Ztschr. f. angew. Math. und Mech., Band 10, Heft 3, Juni 1930, p. 266-274.
- (2) J. MANDEL, Mécanique des Milieux Continus, annexe XX, Gauthier-Villars, 1966.



INFLUENCE DE LA VISCOELASTICITÉ NON LINÉAIRE PARIÉTALE SUR LES ÉCOULEMENTS PULSÉS  
APPLICATION AU CHAMP D'ÉCOULEMENT SANGUIN ARTÉRIEL (+)

FLAUD P., GEIGER D., ODDOU C. (°)

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé les différentes méthodes et les différents résultats relatifs à la détermination des propriétés rhéologiques des parois artérielles chez l'homme, une étude théorique est présentée qui montre l'influence de ces propriétés sur l'écoulement d'un fluide visqueux dans un tuyau viscoélastique, et plus précisément sur le profil des vitesses. Réciproquement, on étudie la possibilité d'une détermination indirecte des propriétés rhéologiques de la paroi par la seule mesure des vitesses utilisant des procédés atraumatiques.

ABSTRACT

Different methods of measurements for the determination of blood vessel rheological properties and basic hemodynamical parameters are critically reviewed with emphasis upon the necessity of designing new atraumatic technical means of investigation. In hemodynamic model studies, it is recalled that fluid wall interactions are of fundamental importance and the choice of adequate rheological model as well as the detailed description of non linear effects in blood flow dynamics are underlined. Taking into account the recent progress in local velocimetry and echography by non invasive ultrasound probing a new method for indirect determination of vessel wall rheological properties is described.

(+) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 23 Février 1978

(°) LABORATOIRE DE BIORHEOLOGIE ET D'HYDRODYNAMIQUE PHYSIOLOGIQUE  
UNIVERSITE PARIS VII - 2 Place Jussieu - 75221 PARIS Cedex 05



## 1. INTRODUCTION

L'étude des propriétés rhéologiques des matériaux vivants pose un certain nombre de problèmes spécifiques, et nécessite souvent, de ce fait, un abord différent de celui auquel est habitué le rhéologue. Dans le problème qui nous préoccupe, c'est-à-dire la détermination des propriétés rhéologiques des parois artérielles chez l'homme, les mesures doivent bien évidemment être effectuées de manière aussi peu traumatique que possible. On n'est donc pas entièrement maître du choix des mesures, et il est indispensable de préciser et de critiquer les mesures qui sont utilisables dans une telle étude.

Les relations entre les quantités mesurables et les paramètres décrivant les propriétés rhéologiques du matériau sont en général complexes, et imposent alors des modèles mathématiques plus ou moins compliqués, fondés sur des approximations qui doivent être d'autant plus réalistes que les techniques de mesure sont plus précises. Il est d'autre part nécessaire d'utiliser un modèle rhéologique approprié qui permette de représenter de manière chiffrée les propriétés du matériau. La paroi vasculaire est un matériau composite, orthotrope, viscoélastique et non linéaire, mais on peut le représenter correctement par des relations simples, compte tenu des limitations apportées par les méthodes de mesure.

La validité de ces modèles ayant été vérifiée expérimentalement, il convient de montrer s'il est possible d'accéder aux paramètres décrivant les propriétés de la paroi vasculaire à partir des seules mesures entièrement atraumatiques actuellement possibles dans le système cardiovasculaire, c'est-à-dire les mesures utilisant des sondages ultrasonores par voie transcutanée (vélocimétrie à effet Doppler, ou échographie). Pour ce faire, un calcul numérique est effectué qui permet de déterminer localement l'évolution temporelle du profil longitudinal des vitesses d'un fluide s'écoulant dans un tuyau dont on connaît les propriétés rhéologiques. En faisant varier de manière connue les paramètres décrivant ces propriétés, on met en évidence la variation résultante du profil des vitesses longitudinal. Cette étude permet alors de conclure sur la "faisabilité" d'une méthode qui conduirait à la connaissance de la rhéologie du matériau à partir de la mesure des vitesses dans l'écoulement.

## 2. CHOIX DES MESURES PERMETTANT D'ACCÉDER À LA CONNAISSANCE DES PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES DES PAROIS VASCULAIRES CHEZ L'HOMME,

Les propriétés rhéologiques des matériaux sont décrites par des relations entre contraintes et déformations. Dans le système artériel humain elles peuvent être caractérisées par des relations pression-rayon. Cependant les mesures de pression et de rayon imposent des limitations que nous allons préciser. Nous verrons alors la place que peuvent prendre les techniques de mesure des vitesses dans un tel contexte.

### 2.1. MESURES DES PRESSIONS

La gamme des pressions transmursales existant dans le système cardiovasculaire s'étend de 0 à  $2 \cdot 10^4$  Pa. La plage des fréquences concernées est de l'ordre de 0 à 20 Hz, qui doit être élargie, si l'on s'intéresse à des phénomènes d'instabilité ou de turbulence. On dispose, classiquement, de deux types de mesures de pression dans le système cardiovasculaire: des mesures directes et des mesures indirectes. Les mesures directes qui nécessitent l'emploi de capteurs, reliés par cathéters au système ou situés en bout de cathéters (capteurs à jauges de contrainte), sont fiables, mais elles perturbent nécessairement l'écoulement et sont d'autre part "sanglantes". Quant aux mesures indirectes qui ont pu être proposées jusqu'à ce jour, elles nécessitent des hypothèses simplificatrices nécessairement restrictives, et ne donnent que des résultats assez médiocres. La mesure proposée par Atherton /1/, est basée sur des mesures atraumatiques de diamètres par sondage ultrasonore. Mesurant par ce biais la vitesse de l'onde pulsatile, et faisant l'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel dans un tuyau purement élastique il détermine alors l'écart entre les pressions systoliques et diastoliques. Mais cette méthode ne permet pas l'accès à la variation temporelle de la pression, et



reste très peu précise.

## 2.2. MESURE DES RAYONS

Parmi les méthodes de mesure des rayons des vaisseaux sanguins, il convient d'abord de citer les mesures qui nécessitent un abord direct du vaisseau. Ces mesures, qui utilisent des plethysmographes à jauge de mercure, ou des jauges de contraintes montées sur un compas dont les deux extrémités sont reliées à deux points diamétralement opposés des artères /2/, sont précises, fiables, et ont (en dehors de la pléthysmographie) une bande passante en fréquence suffisante. Cependant, elles sont traumatiques et font préférer des méthodes moins précises mais entièrement atraumatiques telles que les méthodes ultrasonores échographiques. Dans ce cas, un faisceau ultrasonore est envoyé en direction de la paroi qui le réfléchit, le temps écoulé entre le train d'onde incident et l'écho permet de localiser l'obstacle réfléchissant, si la vitesse des ondes dans les tissus biologiques traversés est connue avec précision. Cette méthode reste malgré tout peu précise en raison essentiellement des faibles variations d'indice du milieu vis-à-vis des ultra-sons, /3/.

## 2.3. MESURES DES VITESSES

Elles se limitent essentiellement à deux types de mesures: la vélocimétrie à film chaud, et la vélocimétrie ultrasonore.

Le principe de la vélocimétrie à film ou fil chaud est basée sur le fonctionnement d'une résistance placée dans le fluide en mouvement, et maintenue à température constante. La puissance dissipée dans cette résistance est alors fonction de la vitesse du fluide. Cette technique qui permet des mesures précises dans une gamme de fréquence élevée ( $\sim 1$  KHz), a été principalement utilisée sur l'animal pour de grosses artères /4/. Elle nécessite un abord direct du vaisseau ou l'utilisation de cathéters, et ne permet donc pas des mesures atraumatiques.

Quant à la vélocimétrie ultrasonore, son principe de fonctionnement est le suivant: des signaux électriques de quelques Megahertz sont engendrés avec une fréquence de récurrence d'une dizaine de kilohertz et une largeur de l'ordre de la microseconde. Ils excitent un émetteur ultrasonore constitué d'une céramique piezoélectrique placée contre le système où l'on effectue la mesure. Les ondes ultrasonores se propagent jusque dans le fluide en mouvement (sang) où des particules en suspensions (hématies) les diffusent. La vitesse de ces particules modifie, par effet Doppler, la fréquence des ondes diffusées qui sont reçues par le même capteur pendant les interruptions de l'émission. Une porte analogique de retard variable par rapport aux impulsions d'émission et de durée également variable permet de localiser les particules qui ont engendré l'onde diffusée. Le signal reçu pendant l'ouverture de cette porte est alors démodulé en fréquence pour restituer une tension proportionnelle à la composante de la vitesse de ces particules selon la direction de propagation des ondes ultrasonores. Cette technique, en constant progrès, /5,6/ et permettant en outre la mesure des débits, est entièrement atraumatique. Les mesures peuvent être effectuées avec une assez bonne précision ( $< \pm 5$  cm/sec). Cependant, des erreurs systématiques sont introduites par le principe même de la méthode. En particulier, le volume de mesure est fini, mais il a été montré que les erreurs résultantes peuvent être corrigées en utilisant des techniques de déconvolution /7/. Notons enfin que des vélocimètres ont été réalisés qui permettent la mesure instantanée du profil des vitesses en utilisant simultanément plusieurs portes analogiques dont les retards sont échelonnés /6/.

On voit donc la place que peuvent prendre les mesures de pression et de rayon chaque fois qu'une méthode "sanglante" ou in vitro peut être envisagée: ces mesures permettent d'atteindre une précision qui leur laisse une place de choix dans ces circonstances. Par contre, dans l'état actuel des méthodes de mesures, c'est la technique ultrasonore qui doit être utilisée quand on est tenu à une étude atraumatique. L'utilisation de cette technique nécessite l'élaboration d'un modèle mathématique aussi précis que possible, permettant de relier le profil des vitesses obtenu expérimentalement, au gradient de pression et aux paramètres décrivant les propriétés rhéologiques du milieu. Il convient donc de préciser main-



tenant ces propriétés rhéologiques en rappelant tout d'abord les méthodes qui permettent actuellement d'accéder à leur connaissance.

### 3. MÉTHODES EXPÉRIMENTALES DE DÉTERMINATION DES PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES DE LA PAROI VASCULAIRE,

#### 3.1. DESCRIPTION DES METHODES

Ces méthodes diffèrent essentiellement par les traumatismes qu'elles font subir au milieu sur lequel elles s'appliquent.

Notons tout d'abord, pour mémoire, les méthodes qui consistent à prélever un échantillon de la paroi vasculaire et à lui faire subir des tests d'extensiométrie; ces techniques soulèvent plusieurs problèmes: les propriétés rhéologiques du matériau vivant sont évidemment dépendantes de son état de vie. Il convient de prendre des précautions relatives à la température et à l'état d'humidité du lambeau qui, prélevé et extrait de son milieu doit être maintenu à température constante et humecté avec du sérum physiologique. D'autre part, on doit respecter autant que possible, les contraintes statiques pré-existantes. En effet, une fois prélevé, le lambeau se rétracte d'environ 20% de sa longueur initiale (cette valeur est en fait fonction du site artériel où est effectuée la mesure). Ces expériences sont donc particulièrement délicates. Elles se révèlent par contre fort utiles quand il s'agit de préciser la nature microscopique du matériau.

D'autres méthodes permettent d'obtenir des relations entre la pression et les contraintes longitudinales, le rayon et la longueur. Citons en particulier, la méthode proposée par Patel /2/ qui effectue sur l'artère vivante, in situ, des mesures simultanées de pression, de diamètre, de longueur et de force longitudinale. La pression dans l'artère (ou la contrainte longitudinale) est imposée et peut être soumise à des variations harmoniques de faible amplitude autour d'une valeur moyenne. Ces méthodes permettent une bonne connaissance des propriétés rhéologiques incrémentales du matériau.

Il convient également de mentionner les techniques basées sur l'étude de la propagation d'ondes dans le système à étudier /8/: les ondes de pression de faible amplitude et de fréquence grande devant la fréquence des ondes de pression cardiaque sont engendrées artificiellement et se propagent dans les artères. Moyennant un modèle mathématique convenable /9/, il est possible de relier les mesures d'atténuation et de déphasage de ces ondes en deux sites, à un module d'Young complexe caractérisant le comportement du matériau. Ces méthodes dont la validité a été vérifiée expérimentalement sur banc hydrodynamique /10,11/ nécessitent un abord direct du vaisseau. Elles ne permettent pas, d'autre part, d'effectuer des mesures aux fréquences basses correspondant aux gammes de fréquences physiologiques.

Enfin, des méthodes ont été proposées qui sont basées sur l'étude de la propagation de l'onde naturelle de pression engendrée par le coeur. Elles nécessitent une description mathématique correcte de la propagation d'ondes de grande amplitude. Les quelques expériences utilisant ce type de méthode n'ont permis d'accéder qu'à une connaissance rhéologique globale et qualitative du milieu /12/. Ces différentes méthodes permettent d'obtenir des résultats qu'il convient de comparer et de discuter.

#### 3.2. RESULTATS

La paroi vasculaire est un matériau composite constitué essentiellement d'élastine, de collagène et de muscles lisses. Les comportements de l'élastine et du collagène traduits par des relations pression-rayon, sont différents (Fig.1). Aux faibles déformations c'est essentiellement l'élastine qui prédomine, tandis qu'aux fortes déformations le comportement du collagène devient prépondérant, et l'on peut s'attendre à observer un comportement non linéaire de la paroi. Les proportions entre l'élastine et le collagène ne sont pas, d'autre part, constantes, en particulier dans le thorax où le pourcentage d'élastine décroît de 60 à 30% (en pourcentage d'élastine et de collagène) quand on s'éloigne du coeur /21/. Les fibres de collagène se présentent sous forme d'hélices, enroulées sur le vaisseau,



#### 4. MODÈLE MATHÉMATIQUE PERMETTANT DE DÉCRIRE L'ÉCOULEMENT

Ayant déterminé un modèle rhéologique qui permet de prendre en compte les propriétés du matériau, il s'agit de relier les paramètres intervenant dans ce modèle aux seules mesures atraumatiques actuellement possibles dans le système vasculaire, c'est-à-dire les mesures de profil de vitesse et, éventuellement les mesures de diamètre. Trois hypothèses simplificatrices doivent alors être faites. La première concerne la vitesse radiale. Celle-ci est supposée faible devant la vitesse longitudinale  $v_z$ , ce qui permet d'écrire que la pression  $p$  n'est fonction que de la coordonnée longitudinale  $z$ , et du temps  $t$ . La seconde hypothèse, qui comme la première est tout à fait bien établie dans les vaisseaux sanguins, suppose que la longueur d'onde  $\lambda$  est grande devant le rayon  $R$  du tuyau. Il est alors possible de négliger les dérivées longitudinales du second ordre devant les dérivées radiales du second ordre dans l'équation de Navier Stokes. Enfin, pour éliminer toute dépendance explicite de cette équation en fonction de la coordonnée longitudinale  $z$ , et pouvoir effectuer ainsi une résolution locale c'est-à-dire à  $z$  donné, une troisième hypothèse est nécessaire. Elle a été développée par Ling et Attabek /17/ et elle consiste à donner une expression approchée du gradient longitudinal des vitesses  $\frac{dw}{dz}$ , sous la forme:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left| (k-1) w(r, z, t) \right| \quad (14)$$

En introduisant la coordonnée radiale réduite  $\eta = \frac{r}{R(z, t)}$ , les équations de Navier-Stokes, l'équation de continuité et les conditions aux limites se transforment en le système intrérodifférentiel suivant:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \left\{ \frac{\eta}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{u}{R} \right\} + \frac{w}{R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u}{\eta} \right\} + \frac{\nu}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} \quad (15)$$

$$u = \frac{\partial R}{\partial z} \left\{ \eta w - \frac{2}{\eta} \left\{ \operatorname{Su}(\eta) - \frac{\operatorname{Sum}(\eta) \operatorname{Su}(1)}{\operatorname{Sum}(1)} \right\} \right\} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\operatorname{Sum}(\eta)}{\operatorname{Sum}(1)} \quad (16)$$

où

$$\operatorname{Su}(\eta) = \int_0^{\eta} \eta w d\eta \quad \operatorname{Sum}(\eta) = \int_0^{\eta} \eta |w| d\eta$$

et  $\nu$  est la viscosité cinématique.

La résolution de ce système s'effectue à l'aide d'un calcul numérique utilisant la méthode des différences finies. On voit qu'il est nécessaire, pour déterminer les profils des vitesses de connaître la variation temporelle du gradient de pression et, par exemple, la pression en un point et les propriétés rhéologiques du matériau, qui permettront de déduire  $\frac{\partial R}{\partial t}$  et  $\frac{\partial R}{\partial z}$  si la valeur de la "conicité" du tuyau est connue. En se donnant à un instant  $t$ , un profil de vitesse arbitraire (vitesse radiale  $u$  et longitudinale  $w$ ) satisfaisant aux conditions aux limites, il est possible d'après (15) de déduire  $w(t+dt)$ , puis à l'aide de (16),  $u(t+dt)$ . Au bout d'un certain nombre de cycles de calculs, on obtient une solution périodique stable indépendante du profil des vitesses arbitraire choisi initialement. Le critère de convergence de ce calcul peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{R}{T} \frac{d\eta}{d\tau} > 2 \left( \frac{\nu}{T d\tau} \right)^{1/2} \quad (17)$$

où  $d\tau = dt/T$  représente le pas élémentaire en temps réduit.

Cette relation traduit le fait que la vitesse de calcul dans la direction radiale doit être supérieure à la vitesse radiale de diffusion de la vorticité. En fait, la précision du résultat dépend de critères plus sévères, comme on a pu s'en assu-



rer, et l'on a trouvé expérimentalement la relation:

$$\frac{R}{T} \frac{d\eta}{d\tau} > 20 \left( \frac{v}{T d\tau} \right)^{1/2} \quad (18)$$

La validité du modèle numérique a été testée en comparant les résultats obtenus dans le cas où le tuyau est rigide, avec les résultats analytiques proposés par Womersley /18/. L'accord est excellent, mais il faut remarquer qu'il est insuffisant dans la mesure où la vitesse radiale et le gradient longitudinal des vitesses s'annulent pour un écoulement développé dans un tuyau rigide. Les approximations que l'on a mentionnées se trouvent alors automatiquement validées et de ce fait on ne peut les justifier par ce moyen. C'est donc une justification expérimentale que l'on invoquera maintenant.

Il convient tout d'abord de mentionner les travaux aussi bien de Ling et Atabek /17/ que de Nerem /19/ qui, utilisant une telle théorie, on pu vérifier son bon accord avec des résultats expérimentaux, obtenus in vivo sur l'animal. Nous avons, d'autre part, effectué une vérification expérimentale sur un banc hydromécanique /11/ dont la section test est un tuyau de silicone dont les propriétés rhéologiques sont déterminées par ailleurs /10/, /16/. Une onde de pression est créée dans un corps de pompe et se propage dans le tuyau rempli d'un fluide visqueux (mélange eau-glycérine). On mesure, dans la section test, les variations temporelles de diamètre, de pression, et le profil des vitesses.

Ce profil des vitesses longitudinales est obtenu expérimentalement à l'aide d'un vélocimètre ultrasonore pulsé à effet Doppler; il est comparé (Fig.8) avec le résultat théorique obtenu en utilisant le modèle mathématique précédemment décrit. La bonne concordance des résultats présentés ici à deux phases de l'écoulement pulsatile, est tout à fait satisfaisante, compte tenu de la précision de la mesure.

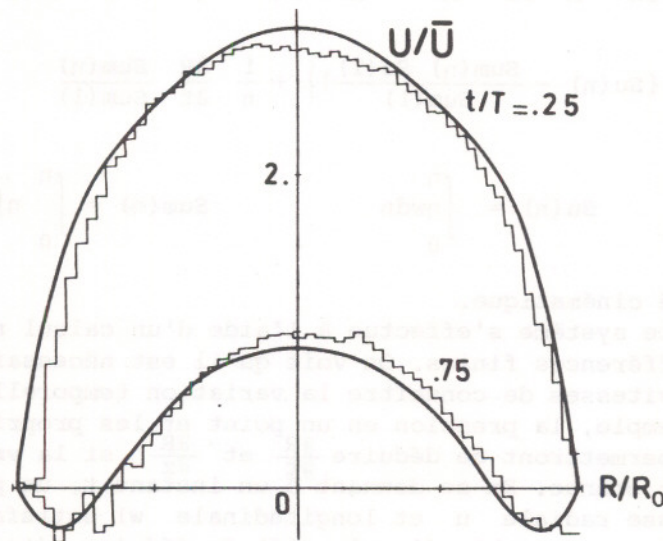


Fig.8 - Profils des vitesses expérimentaux (lignes brisées) et théoriques (ligne continue) dans un écoulement pulsatile d'un mélange glycérine-eau contenu dans les tubes de silicone du modèle hydromécanique.

At/T = 0,25 et 0,75

Le nombre de Reynolds  $Re = 400$ , le paramètre de fréquence  $\alpha = R_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = 10$ , le paramètre d'amplitude  $\lambda$  est égal à 1 (rapport de la composante continue du débit à la composante harmonique) et le nombre de Mach (rapport de la vitesse débitante stationnaire à la vitesse de phase des ondes de pression) est égal à  $5 \cdot 10^{-2}$



## 5. PRINCIPE D'UNE DÉTERMINATION INDIRECTE DE LA RHÉOLOGIE PARIÉTALE

On a vu que pour pouvoir déterminer le profil des vitesses longitudinales il était nécessaire de connaître localement le gradient de pression, et, par exemple la pression et les propriétés rhéologiques de la paroi. Le problème inverse consistant à déterminer le gradient de pression et les propriétés rhéologiques de la paroi à partir des mesures de vitesses, est d'un intérêt fondamental en physiologie humaine puisqu'il est basé sur des mesures atraumatiques. Afin de savoir si un tel problème mérite d'être abordé, il convient évidemment de connaître l'influence quantitative de la rhéologie pariétale sur les profils de vitesse. Pour ce faire nous présentons différents profils de vitesses obtenus à l'aide de données

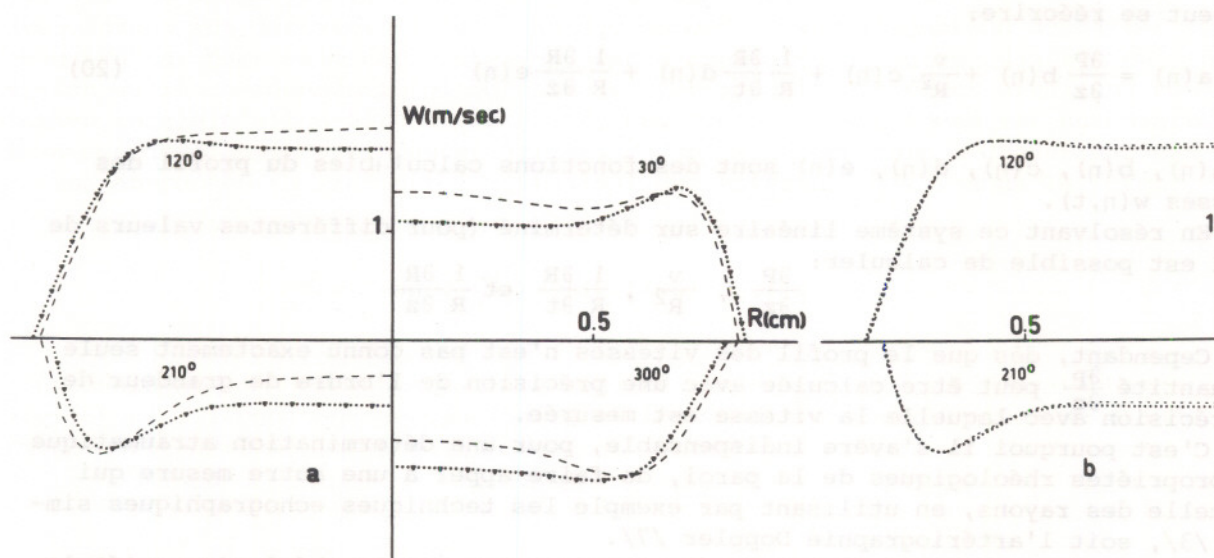


Fig.9 - Comparaison des profils de vitesses obtenus à l'aide de données identiques sauf en ce qui concerne la rhéologie pariétale. Ces profils sont représentés à différentes phase du cycle.

Fig.9a - comparaison des résultats obtenus pour un tuyau rigide (---), élastique (.....) ou viscoélastique (▲ ▲)  
 Fig.9b - Influence d'une variation de 10% de la valeur absolue du module d'Young dynamique représentée à deux phases du cycle: (.....) profil de référence ; (---) profil modifié.

identiques sauf en ce qui concerne la rhéologie pariétale. Ces données représentent, en ordre de grandeur, les données physiologiques relatives à la circulation sanguine dans les grosses artères. Les résultats présentés amènent les remarques suivantes: l'élasticité dynamique du tuyau doit être prise en compte (Fig. 9a) si l'on veut décrire correctement les phénomènes hémodynamiques. Cependant on ne pourra s'attendre à obtenir une bonne précision sur sa détermination indirecte à partir de la mesure des profils de vitesse en fonction de la variable réduite  $\eta$  où toute dépendance explicite du rayon a disparu. En effet, une variation de 10% du module d'Young dynamique  $E_1$  n'influe pas sensiblement (Fig. 9 b) sur les profils de vitesse. De la même manière une mesure locale des profils des vitesses ne pourra certainement pas permettre de déterminer la partie imaginaire  $E_1$  ( $\alpha + \omega\beta$ ) du module d'Young dynamique, dans la mesure où (Fig. 9 a) l'introduction de cette partie imaginaire dans les calculs ne modifie pratiquement pas les résultats.

Ces résultats sont en excellent accord avec un travail récent /20/. Dans ce



ce travail, on fait l'hypothèse que la vitesse longitudinale  $w$  est une quantité mesurée avec une incertitude fixée à l'avance et l'on cherche à déduire à partir de cette seule mesure les propriétés rhéologiques du matériau.

Partant du système d'équation 15 et 16 on aboutit, en éliminant la vitesse radiale, au système intégral différentiel suivant:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{v}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \left\{ \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\text{Sum}(\eta)}{\text{Sum}(1)} + \frac{w|w|}{\text{Sum}(1)} \right\} \\ + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \left\{ \frac{2}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \left\{ \text{Su}(\eta) - \frac{\text{Sum}(\eta) \text{Sum}(1)}{\text{Sum}(1)} \right\} + 2 \frac{w|w| \text{Su}(1)}{\text{Sum}(1)} - \eta w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} \quad (19)$$

qui peut se réécrire:

$$a(\eta) = \frac{\partial P}{\partial z} b(\eta) + \frac{v}{R^2} c(\eta) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} d(\eta) + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial z} e(\eta) \quad (20)$$

où  $a(\eta)$ ,  $b(\eta)$ ,  $c(\eta)$ ,  $d(\eta)$ ,  $e(\eta)$  sont des fonctions calculables du profil des vitesses  $w(\eta, t)$ .

En résolvant ce système linéaire sur déterminé (pour différentes valeurs de  $\eta$ ) il est possible de calculer:

$$\frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{v}{R^2}, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial z}$$

Cependant, dès que le profil des vitesses n'est pas connu exactement seule la quantité  $\frac{\partial P}{\partial z}$  peut être calculée avec une précision de l'ordre de grandeur de la précision avec laquelle la vitesse est mesurée.

C'est pourquoi il s'avère indispensable, pour une détermination atraumatique des propriétés rhéologiques de la paroi, de faire appel à une autre mesure qui est celle des rayons, en utilisant par exemple les techniques échographiques simples /3/, soit l'artériographie Doppler /7/.

Il est alors possible d'obtenir des informations sur la rhéologie pariétale (partie réelle du module d'Young dynamique) dans la mesure où l'on peut écrire, à partir d'hypothèses simples /20/:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{R}{2\rho} \frac{(\partial \hat{P} / \partial z)^2}{(\partial R / \partial t)^2} \quad (21)$$

qui ne fait appel qu'à des quantités calculables ou connues.  $\partial \hat{P} / \partial z$  représente ici la partie alternative du gradient de pression dont on vient de montrer qu'il peut être calculé avec une précision satisfaisante.

## 6. CONCLUSION

On voit toutes les difficultés qui peuvent être rencontrées dès que l'on cherche à effectuer des mesures rhéologiques dans le système cardiovasculaire humain. Cependant, l'utilisation des techniques vélocimétriques et échographiques ultrasonores permet d'envisager la mesure entièrement atraumatique non seulement du gradient de pression local, mais encore de la quantité  $dP/dR$ . Cependant, la précision sur cette dernière mesure reste médiocre compte tenu des performances actuelles de la vélocimétrie et de l'échographie ultrasonore. Il est donc exclu, actuellement, d'accéder à la connaissance de la partie imaginaire du module d'Young dynamique, mais l'amélioration constante des techniques ultrasonores laisse cependant envisager une détermination atraumatique de la rhéologie pariétale de plus en plus précise.



## REFERENCES

- /1/ ATHERTON J.P. - Mesure non-invasive de la tension artérielle humaine. *Bio-capt* 1975, pp.271-275.
- /2/ PATEL D.J., JANICKI J.S., VAISHNAV R.N., YOUNG J.T. - Dynamique anisotropique viscoélastique des propriétés de l'aorte chez le chien vivant. *Circulation Research*, 32, 93, 1973.
- /3/ HOKANSON D.E., STRANDNESS D.E., MILLER C.V. - An echo tracking system for recording arterial wall motion. *IEEE transaction on sonics and ultrasonics*, SU 17, 3, 130, 1970.
- /4/ NEREM R.M. - Hot-film measurements of arterial blood flow and observations of flow disturbances. *Cardiovascular Flow Dynamics and Measurements*. Hwang Ed., 1977. University Park Press. p.191-215.
- /5/ PERONNEAU P. - Analyse de l'écoulement sanguin dans les gros vaisseaux par méthode ultrasonore. Thèse de Doctorat. Orsay 1977.
- /6/ ANLIKER M., HUBSCHER W., JENNI R. - Design and clinical evaluation of a 128 channel ultrasonic blood flowmeter. *Les Colloques de l'Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale. Système artériel - Arterial System*, INSERM, 78, 111, 1978.
- /7/ BAKER D.W., DAIGLE R.E. - Non invasive ultrasonic flowmetry. *Cardiovascular Flow Dynamics and Measurements*. p.151-188, Hwang N., Normann N. Eds. 1977 University Park Press, Baltimore.
- /8/ ANLIKER M. - Toward a non traumatic study of the circulatory system. *Biomechanics, its Foundations and Objectives*, p. 337-379. Fung Y.C., Perrone N., Anliker M., Eds. 1972.
- /9/ FLAUD P., GEIGER D., ODDOU C., QUEMADA D. - Ecoulements pulsés dans les tuyaux viscoélastiques. Application à l'étude de la circulation sanguine. *Journal de Physique*, 35, 869, 1974.
- /10/ FLAUD P., GEIGER D., ODDOU C., QUEMADA D. - Experimental study of wave propagation through viscous fluid contained in viscoelastic tubes. *Biorheology* 12, 347, 1975.
- /11/ FLAUD P., GEIGER D., ODDOU C., QUEMADA D. - Dispositif expérimental pour la modélisation de l'écoulement sanguin dans les artères. *Rev.Phys.Appl.*, 10, 61, 1975.
- /12/ VANDER WERFF T.J. - Studies cardiovascular fluid dynamics. D.Phil.Thesis, 1971, Oxford University.
- /13/ WESTERHOF N., NOORDERGRAAF A. - Arterial viscoelasticity a generalised model. In of *Biomechanics*, 3, 357-379, 1970.
- /14/ CHRISTENSEN R.M. - *Theory of viscoelasticity, an introduction*. Academic Press, New-York and London, 1971.
- /15/ TAYLOR L.A., GERRARD J.H. - Pressure radius relationships for elastic tubes and their application to arteries. Part I and II. *Med. and Biol. Eng. and Comput.* 15, 11-21, 1977.
- /16/ ODDOU C., FLAUD P., GEIGER D. - Modèles hydrodynamiques non linéaires en physiologie artérielle. *Les Colloques de l'Institut National de la Santé et de la Recherche Médicale, Système artériel* INSERM, 78, 61-72, 1978.
- /17/ LING S.C., ATABEK H.B. - A non linear analysis of pulsatile flow in arteries. *J.Fluid.Mech.*, 55, 493, 1972.
- /18/ WOMERSLEY J.R. - Elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries, W.A.D.C. Tech. Report, T.R. 56-614, 1957.
- /19/ NEREM R.M., RUMBERGER J.A., GROSS D.R., MUIR W.W., GEIGER G.L. - Hot film coronary artery velocity measurements in horses. *Cardiovasc.Res.* 3, 301-313 1976.



- /20/ FLAUD P., GEIGER D., ODDOU C., TANGUY P. - Indirect determination of rheological properties of arterial wall from blood flow measurements. Conference digest of Its International Conference on Mechanics in Medicine and Biology, Aachen 1978, pp.20-22.
- /21/ HARKNESS M.L.R., HARKNESS R.D., Mc.DONALD D.A. - The collagen and elastin content of the arterial wall in the dog. Proc.Roy.Soc. B, 146; 541-551, 1957.
- /22/ BERGEL D.H. - Dynamic elastic properties of the arterial wall. In *Physiol.* 156, 458-469, 1961.
- /23/ BERGEL D.G. - The static elastic properties of the arterial wall. In *Physiol.* 156, 445-457, 1961.
- /24/ NICHOLS W.W., Mac.DONALD D.A. - Wave velocity in the proximal aorta. *Med. Biol.Engng.*, 10, 327-335, 1972.
- /25/ MORITZ W.E. - Transmission characteristics of distension, Torsion and Axial waves in Arteries. Ph.D. Dissertation, Biomechanics Laboratory Report, SUDAAR n° 373, Stanford University, Calif. 1969.
- /26/ HARDUNG V. - Ueber eine Methode zur Messung der Dynamischen Elasticität und Viskosität von Blutgefässen, Kautchuck und Synthetischen Elastomeren. *Helv.Physiol.Acta*, 11, 194-211, 1953.
- /27/ BERGEL D.H. - The viscoelastic properties of the arterial wall. Thesis, Univ. of London, 1960.
- /28/ LEAROYD B.M., TAYLOR M.G. - Alterations with age in the viscoelastic properties of human arterial wall. *Circulation Res.* 18, 218, 1966.
- /29/ TUCKER W.K., JANICKI J.S., PLOWMAN F., PATEL D.J. - A device to test mechanical properties of tissues and transducers. *J. Appl.Physiol.*, 26, 656-658 1969.



MODELES RHEOLOGIQUES UTILISES OU PROPOSES POUR DECRIRE  
 LES COURBES D'ECOULEMENT DES BOUES DE FORAGE ET DES LAITIERS DE CIMENT.  
 NOUVELLE METHODE DE DETERMINATION DES PARAMETRES. (\*)

G. RICARD, Ingénieur à la Société CECA SA, Département Boues de Forage,  
 11 Avenue Morane Saulnier, 78140 VELIZY VILLACOUBLAY, Tél. 946.96.35

RESUME

Dans une première partie, on fait une revue rapide des modèles rhéologiques permettant d'analyser les courbes d'écoulement (en régime stabilisé) des boues de forage et des laitiers de ciment utilisés dans les forages pétroliers. On distingue les modèles (à deux paramètres) effectivement utilisés des modèles (à trois paramètres) proposés en vue d'une meilleure analyse des résultats et dont l'un d'entre eux est en projet de normalisation par l'API (American Petroleum Institute).

Dans une deuxième partie, on propose une (nouvelle ?) méthode (objective, programmable, précise, rapide, générale) permettant de calculer les paramètres de modèles mathématiques quelconques, particulièrement intéressante pour le cas des modèles rhéologiques à trois paramètres, lesquels peuvent être traités sur certains calculateurs programmables de poche peu coûteux, ce qui permet de vulgariser la méthode. Des exemples numériques sont complètement traités.

ABSTRACT

In Part One, rheological models to analyze the flow curves (in a stabilized flow) of the drilling muds and cement slurries used in the drilling wells are quickly presented. Two parameter models effectively used are distinguished from the three parameter models proposed for a better analyze of the results. One of them will be probably normalized by the American Petroleum Institute (API).

In Part Two, a method (objective, programmable, accurate, rapid, general) is proposed to calculate the parameters of any mathematical model ; it is particularly interesting for the rheological models with three parameters which may be treated on some programmable pocket calculators - not expensive ; this permits to vulgarize the method. Numerical examples are completely treated.

---

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 15 juin 1978



## 1. INTRODUCTION

L'objet de cet article est double :

- faire un bref historique des modèles rhéologiques utilisés pour déterminer les caractéristiques des boues de forage et des laitiers de ciment, en se limitant aux propriétés d'écoulement, en régime stabilisé pour éliminer la thixotropie (autant que possible) ;
- indiquer une (nouvelle ?) méthode permettant de calculer les paramètres de ces modèles. Cette méthode est d'ailleurs applicable à tous les modèles mathématiques utilisés dans d'autres branches des connaissances. Des exemples numériques d'application seront traités.

## 2. RHEOLOGIE DES BOUES DE FORAGE : MODELES RHEOLOGIQUES UTILISES

### 2.1. Mesures rhéologiques normalisées

Les mesures rhéologiques sont effectuées dans des conditions normalisées (1) par l'Institut Américain du Pétrole (A.P.I., American Petroleum Institute). On utilise un viscosimètre à cylindres coaxiaux (FANN) dont le rotor est entraîné par un moteur synchrone, assurant donc une vitesse constante et connue sans erreur. Par un jeu de deux vitesses et de démultiplications, on peut opérer aux six vitesses suivantes (pour le modèle FANN 35 SA) : 3 - 6 - 100 - 200 - 300 et 600 tours par minute (\*). Il faut souligner que le nombre de ces vitesses est insuffisant pour l'obtention de mesures précises des caractéristiques rhéologiques et qu'il manque des vitesses dans l'intervalle de 6 à 100 tpm, justement dans une région où la courbe d'écoulement est plus incurvée. Il existe d'ailleurs des dispositifs commercialisés pour pallier ce défaut. Le viscosimètre à six vitesses suffit cependant pour des déterminations pratiques ; sur les chantiers, on utilise encore quelquefois le modèle FANN 34 A à deux vitesses (300 et 600 tpm), ne permettant pas d'établir une courbe d'écoulement et seulement utilisable pour déterminer les paramètres de modèles à deux paramètres au maximum (le type de modèle étant choisi a priori). Pour des déterminations très précises de laboratoire, il existe un modèle FANN 39 à variation continue de vitesse permettant d'enregistrer en continu la courbe d'écoulement ; ce viscosimètre n'est pas utilisé pour les mesures de routine, ni même pour des études pratiques courantes. Cependant, lui seul permet de préciser la nature rhéologique du fluide étudié.

Quel que soit le type de viscosimètre FANN utilisé (\*\*), pour chaque vitesse  $V_i$  en tours par minute, on fait une lecture  $L_i$  exprimée en divisions ; pour un fluide donné,  $L_i$  est fonction de  $V_i$ , des dimensions du rotor et du stator et de la constante du ressort (ces dimensions et cette constante étant normalisées pour les mesures sur les boues de forage et les laitiers de ciment).

Les déterminations des paramètres du modèle peuvent être effectuées soit à partir des données brutes ( $V_i, L_i$ ), soit à partir du gradient de vitesse  $\dot{\gamma}$  et de la tension de cisaillement  $\tau$  (pour le viscosimètre normalisé par l'API) :

$$\left[ \begin{array}{l} \dot{\gamma} \text{ (s}^{-1}\text{)} = 1,703 V \text{ (V en tpm)} \quad (1) \\ \left[ \begin{array}{l} \tau \text{ (lbs/100 ft}^2\text{)} = 1,067 L \text{ (L en divisions)} \quad (2) \\ \text{ou } \tau \text{ (pascal)} = 0,511 L \text{ (L en divisions)} \quad (3) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(\*) Ces vitesses correspondent à des gradients de vitesse de 5,1 - 10,2 - 170 - 340 - 511 et 1022 s<sup>-1</sup>.

(\*\*) Voir liste d'autres viscosimètres (du type FANN) dans référence 8, p. 9 à 14.



Si  $V_i$  est une variable non aléatoire et connue avec précision, la variable dépendante  $L_i$  est une variable aléatoire, en sorte que le phénomène décrit par les variables  $(V, L)$  correspond à un problème de régression, au sens statistique.

Dans la technologie des boues de forage, les paramètres des modèles rhéologiques calculés soit directement, soit à partir de la courbe d'écoulement, sont utilisés à diverses fins : contrôle (mesure et correction) de ces caractéristiques, influence sur divers phénomènes (pertes de charge, variations de pression, remontée et sédimentation des déblais, etc.). Des applications analogues existent dans le cas des laitiers de ciment injectés dans le puits (avec le problème des déblais en moins mais avec des phénomènes particuliers en plus, propres à l'opération de cimentation).

## 2.2. Modèles rhéologiques effectivement utilisés (comportant deux paramètres)

Nous ferons la distinction entre les modèles couramment utilisés actuellement et ceux qui ont été ou sont proposés. Ils s'appliquent indifféremment aux boues de forage et aux laitiers de ciment.

Le modèle de BINGHAM (2) à deux paramètres ( $\eta$ : viscosité plastique,  $\tau_0$  limite de cisaillement ou yield value) :

$$\begin{cases} L = AV + B & (4) \\ \tau = \eta \dot{\gamma} + \tau_0 & (4 \text{ bis}) \end{cases}$$

a été le premier utilisé et il continue à l'être actuellement, même lorsque le fluide n'est pas plastique binghamien (\*). Cette application était plus licite autrefois qu'aujourd'hui : autrefois, les boues de forage étaient des fluides très chargés en solides provenant de la dispersion des déblais et le modèle binghamien était bien vérifié ; aujourd'hui, par suite des progrès incessants de la technologie des boues de forage, ces fluides sont à faible teneur en solides et contiennent des polymères divers ; de ce fait, ils ont un caractère pseudo-plastique de plus en plus marqué et d'ailleurs bénéfique pour diverses raisons, donc recherché. Il est évidemment incorrect d'appliquer un modèle binghamien à un fluide pseudo-plastique, ce qui entraîne des interprétations inexactes, mais telle est la force de la routine (ou des nécessités) que les spécialistes connaissant ce fait continuent eux-mêmes à prolonger l'utilisation erronée de ce modèle (quand c'est le cas). Le viscosimètre FANN a d'ailleurs été conçu en fonction du modèle de BINGHAM (constantes).

Depuis 1955 (environ), on utilise le modèle ostwaldien, connu depuis 1925 :

$$\begin{cases} L = K'V^n & (5) \\ \tau = K \dot{\gamma}^n & (5 \text{ bis}) \end{cases}$$

Ce modèle comporte deux paramètres,  $K$  et  $n$ , désignés par :  $K$  = indice de consistance et  $n$  = indice de comportement rhéologique. Il a été proposé par W. OSTWALD et A. de WAELE [(3) ; (4)] et introduit dans la technologie des boues de forage et des laitiers de ciment (sauf erreur) par METZNER (5). Certaines boues de forage obéissent d'une manière assez satisfaisante à ce modèle, d'autres pas (voir figure 2). En effet, en coordonnées bilogarithmiques, la courbe d'écoulement devrait être constituée par un seul segment de droite ; or, bien souvent, on obtient deux segments de droites ayant des pentes très différentes. Malgré l'existence de ce phénomène (qui prouve que ce modèle n'est pas alors licite), on applique ce modèle et on calcule, s'il y a lieu, deux couples de constantes ( $K, n$ ), un pour chaque segment de droite. La situation est donc assez analogue à celle de l'application du modèle de BINGHAM quand cette application n'est pas licite mais on a tourné la difficulté en décomposant la courbe d'écoulement en deux parties.

(\*) Les normes API (1) ne prennent en considération que le modèle de BINGHAM. Ce n'est que dans le projet (8) que les modèles d'OSTWALD et de ROBERTSON sont normalisés. Les normes (1) ne prescrivent pas le mode opératoire pour établir une courbe d'écoulement.



Une autre analogie entre les applications non licites des modèles binghamien et ostwaldien est la suivante : dans le premier cas, on calcule une limite de cisaillement (yield value) qui n'existe pas quand le fluide est, par exemple, pseudo-plastique alors que, dans le deuxième cas, on ne calcule jamais de limite de cisaillement (puisque cette caractéristique n'est pas prise en considération par le modèle), bien que le fluide puisse en comporter une effectivement.

Chacun des modèles précités (binghamien et ostwaldien) comporte donc les défauts de tout modèle particulier que l'on veut appliquer sans discernement (comme c'est le cas dans la technologie des boues de forage et des laitiers de ciment) à un fluide de nature rhéologique inconnue et indéterminée (dans les mesures de routine).

Malgré cette situation, les spécialistes des boues de forage appliquent toujours ces deux modèles, en général d'une manière routinière.

On trouvera dans le document à paraître (6) un grand nombre d'informations complémentaires pratiques sur la Rhéologie des Boues de Forage et des laitiers de ciment et, en particulier, un grand nombre d'équations relatives aux divers phénomènes étudiés.

Mais revenons aux problèmes que nous venons d'évoquer.

La solution à l'inadaptation, dans beaucoup de cas, des modèles binghamien et ostwaldien à la complexité rhéologique des boues de forage et des laitiers de ciment en régime d'écoulement stabilisé (noter que, dans cet article, nous ne prenons pas en considération les propriétés thixotropiques des boues de forage et des laitiers de ciment) doit être recherchée dans le choix de modèles plus généraux, englobant les deux modèles précités comme cas particuliers. En effet, on pourrait essayer d'autres types de modèles à deux paramètres ; par exemple, on pourrait constater que le modèle de CASSON (7) :

$$\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_0} = s \sqrt{\dot{\gamma}} \quad (6)$$

s'ajuste bien aux données dans certains cas. En fait, la conclusion hypothétique la plus probable que l'on peut tirer de ce qui précède est que les modèles à deux paramètres ne permettent pas de couvrir la complexité rhéologique des boues de forage et des laitiers de ciment, abstraction faite même de leur thixotropie.

L'idée est donc (et elle date de 1926) d'utiliser des modèles à trois paramètres. Un modèle à trois paramètres est en projet de normalisation par l'API, en 1976 (8).

Nous allons donc faire maintenant l'historique des modèles à trois paramètres proposés pour les mesures rhéologiques sur les boues de forage et sur les laitiers de ciment et qui, en fait, ont été surtout utilisés par leurs auteurs (puisqu'ils ne sont pas normalisés).

Si une telle description des courbes d'écoulement ne peut apporter qu'une meilleure précision, encore faut-il que l'on puisse trouver une signification physique (rhéologique) aux paramètres définis. Mais il n'est pas exclu qu'une telle approche soit encore insuffisante et, d'ailleurs, on connaît dans d'autres branches des modèles rhéologiques comportant quatre et même cinq paramètres (paramètres de thixotropie exclus). Malheureusement, dans ces cas, le calcul des paramètres n'est possible que par ordinateur alors que, dans le cas des modèles à trois paramètres, il est possible avec certains calculateurs programmables de poche. D'ailleurs, pour les contrôles de routine, il ne faudra pas utiliser des modèles trop compliqués.

(\*) Les normes API (1) ne prennent en considération que le modèle de BINGHAM. Ce n'est que dans le projet (8) que les modèles d'OSTWALD et de CASSON sont normalisés. Les normes (1) ne prescrivent pas le mode opératoire pour établir une courbe d'écoulement.



### 2.3. Modèles rhéologiques à trois paramètres proposés

Le premier (sauf erreur) a été proposé en 1926 par W.H. HERSCHEL et R. BULKLEY (9) :

$$\left[ \begin{array}{l} L = aV^b + c \\ \tau = K\dot{\gamma}^n + \tau_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7) \\ (7 \text{ bis}) \end{array}$$

Ce modèle comprend les modèles binghamien et ostwaldien comme sous-modèles particuliers, et donc aussi le modèle newtonien. Il faudra en particulier préciser quand l'utilisation de ces sous-modèles est licite. Nous verrons (partie 3) comment on peut calculer les trois paramètres.

En France, Melle M. MARTIN (Institut Français du Pétrole) a utilisé ce modèle en 1961 (10). Nous lui avons consacré un article (21).

Dans la littérature américaine sur les boues de forage, on trouve des propositions d'application du modèle d'HERSCHEL par (notamment) :

- G. FORBES, en 1972 (11) et en 1976 (12) ;
- M. ZAMORA et D.L. LORD, en 1974 (13) ;
- R.E. ROBERTSON et H.A. STIFF, en 1976 (14).

ZAMORA et LORD écrivent ce modèle sous la forme

$$\theta = \theta_0 + k R^n \quad (8)$$

et l'appliquent aux données obtenues avec un viscosimètre FANN à deux vitesses ; le paramètre  $\theta_0$  est obtenu immédiatement, sur la base d'une approximation :  $\theta_0$  est la tension de cisaillement mesurée pour  $V = 0$  (limite de cisaillement immédiatement après agitation ; cette détermination est connue dans la technologie des boues sous le nom de mesure du "gel zéro"). Les auteurs indiquent que la mesure du "gel zéro" est seulement une approximation de la vraie limite de cisaillement (yield value) et ajoutent comme justification pratique : "cette approximation est suffisamment précise pour les conditions dans lesquelles les autres mesures sont effectuées". Cette méthode, insuffisamment rigoureuse, a cependant l'avantage de la simplicité et de la rapidité. Une analyse numérique serait nécessaire pour en situer l'intérêt. Cette méthode ne semble pas avoir été adoptée. D'ailleurs, nous pensons que l'utilisation du "gel zéro" permet seulement une interprétation algébrique de la courbe d'écoulement et non pas une interprétation rhéologique, quand le système est plastique. En effet, dans ce dernier cas, à cause de l'écoulement en bouchon (plug flow), le début de la courbe d'écoulement correspond à une variation de la géométrie de l'écoulement dans l'espace annulaire rotor-stator.

ROBERTSON et STIFF (14) affirment que l'application du modèle d'HERSCHEL serait valable (ce que nous montrons dans le Tableau 3) mais lui préfèrent un autre modèle pour la raison indiquée ci-après (que nous désignerons par critère d'utilité).

R.E. WALKER a fait en 1976 (15) un exposé sur les modèles rhéologiques utilisés ou proposés pour les boues de forage et les laitiers de ciment. Il cite deux modèles à trois paramètres, celui d'HERSCHEL et le suivant :

$$\tau = A \dot{\gamma}^B + C \dot{\gamma} \quad (9)$$

Nous l'écrivons aussi sous les formes suivantes :

$$L = AV^B + C \quad V = V (A V^{B-1} + C) = V \left[ A \frac{1}{V^{1-B}} + C \right]$$

ou

$$\frac{L}{V} = A \frac{1}{V^{1-B}} + C \quad (9 \text{ bis})$$



Notons que ce dernier modèle de WALKER ne comporte pas de terme pour représenter une limite de cisaillement. Il faudrait introduire un quatrième paramètre et écrire :

$$\left[ \frac{\tau - \tau_0}{\dot{\gamma}} = A \dot{\gamma}^{B-1} + C \right. \quad (10)$$

$$\left. \frac{L - T}{V} = A \frac{1}{V^{1-B}} + C \right] \quad (10 \text{ bis})$$

R.E. WALKER, après avoir cité (en 1976) quelques modèles à trois paramètres, conseille finalement ... d'en rester au modèle en puissance à deux paramètres et donc de calculer deux couples de paramètres (K, n) quand on a deux segments de droites.

R.E. ROBERTSON et H.A. STIFF ont proposé en 1976 (14) le modèle

$$\left[ L = K (V + p)^n \right. \quad (11)$$

$$\left. \tau = A (\dot{\gamma} + C)^B \right] \quad (11 \text{ bis})$$

Ils préfèrent ce modèle au modèle d'HERSCHEL sur la base d'un critère d'utilité ; ce modèle permet, en effet, d'écrire une relation explicite entre le gradient de vitesse à la paroi et le débit, dans une conduite cylindrique ou dans un espace annulaire cylindrique, ce qui permet des calculs plus simples. Les modèles de BINGHAM et d'HERSCHEL ne présentent pas cet avantage.

Pour confirmer le "besoin" de modèles à trois paramètres en vue de mieux analyser le comportement rhéologique des boues de forage et des laitiers de ciment, signalons que l'API, en 1976, a envisagé de normaliser le modèle de ROBERTSON et STIFF (8).

Pour compléter cette revue bibliographique, nous citerons le modèle proposé par J. BRIANT (Institut Français du Pétrole), en 1956 pour décrire le comportement rhéologique des graisses (16) que nous transcrivons, en données brutes, par la relation

$$\frac{L}{V} = P \left( \frac{1}{V} + Q \right)^R \quad (12)$$

dans laquelle P, Q et R sont les paramètres.

Pour les diverses formes du modèle proposé par BRIANT, se reporter à l'article (16).

Melle M. MARTIN, seule ou en association avec d'autres auteurs [(10), (17), (18), (19), (20)] a, à partir de 1961, appliqué ce modèle aux boues de forage et aux laitiers de ciment. On notera que le modèle de BRIANT ne prend pas en compte la limite de cisaillement (yield value), ce qui est un défaut pour les fluides précités. Il serait possible d'introduire un quatrième paramètre prenant en compte cette caractéristique mais alors les calculs ne seraient plus possibles (actuellement) avec un calculateur programmable de poche tandis qu'un tel calculateur permet les calculs sur le modèle de BRIANT à trois paramètres, remplaçant alors très avantageusement la méthode graphique proposée pour calculer les paramètres de ce modèle (20).

#### 2.4. Conclusions relatives à la partie 2

Le projet de l'API de normaliser un modèle à trois paramètres, s'il est confirmé, sera vraisemblablement largement mis en application dans la profession, ce qui permettra une analyse plus exacte et plus précise des courbes d'écoulement. Il serait également désirable de pouvoir disposer d'un nombre de points expérimentaux supérieur à six, ces points étant mieux répartis. Enfin, une méthode de calcul des paramètres, telle que celle que nous proposons, utilisant un calculateur programmable de poche d'un prix peu élevé, devrait permettre la vulgarisation de ces calculs tout en donnant une excellente précision.



### 3. NOUVELLE METHODE (PROGRAMMABLE) DE CALCUL DES PARAMETRES DES MODELES

#### 3.1. Méthode algébrique simple classique

Il existe un certain nombre de méthodes classiques permettant de calculer les paramètres de modèles mathématiques. Nous n'en ferons pas ici une brève présentation. Nous indiquerons seulement une méthode algébrique simple et classique, programmable, applicable en particulier aux modèles d'HERSCHEL et de ROBERTSON, que nous écrirons avec des notations  $(u, v)$  pour alléger l'écriture. Comme ces modèles comportent trois paramètres, nous utiliserons trois couples de points expérimentaux  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$  et  $(u_3, v_3)$ , ces points étant définis par les données brutes des mesures ou, éventuellement, après lissage des données (d'ailleurs assez difficile et arbitraire). Les points  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  seront choisis aussi éloignés que possible (en pratique, on prendra les points correspondant à 3 et à 600 tpm).

Modèle d'HERSCHEL  $v = au^b + c$

- On calcule  $u_3$  par la condition  $u_3 = \sqrt{u_1 u_2}$  ;
- On lit l'ordonnée  $v_3$  du point de la courbe d'écoulement d'abscisse  $u_3$  ;
- On calcule ensuite le paramètre  $c$  par la relation

$$c = \frac{v_1 v_2 - v_3^2}{v_1 + v_2 - 2v_3} \quad (13)$$

- On calcule enfin les paramètres  $a$  et  $b$  de la droite des moindres carrés

$$\log(v - c) = \log a + b \log u$$

Modèle de ROBERTSON  $v = a(u + b)^c$

- On détermine  $v_3$  par la condition  $v_3 = \sqrt{v_1 v_2}$  ;
- On lit l'abscisse  $u_3$  du point de la courbe d'écoulement d'ordonnée  $v_3$  ;
- On calcule ensuite le paramètre  $b$  par la relation

$$b = \frac{u_3^2 - u_1 u_2}{u_1 + u_2 - 2u_3} \quad (14)$$

- On calcule enfin les paramètres  $a$  et  $c$  de la droite des moindres carrés

$$\log v = \log a + c \log(u + b)$$

Cette méthode algébrique est sensible à l'influence de la dispersion des points extrêmes par rapport à la vraie courbe d'écoulement, inconnue, et elle ne prend en considération que deux couples de points expérimentaux. Si l'on doit utiliser la méthode que nous proposons, elle a l'avantage de donner un ordre de grandeur des paramètres  $c$  ou  $b$ , donc de réduire la largeur des intervalles d'initialisation mis en oeuvre dans le calcul itératif que comporte la méthode, c'est-à-dire de réduire fortement la durée du calcul itératif.

ROBERTSON et STIFF (14) ont utilisé cette méthode sans donner dans leur article les valeurs des paramètres.

#### 3.2. Méthode proposée

Elle comporte les étapes suivantes :

##### 3.2.1. Linéarisation du modèle utilisé

Cette linéarisation a pour objet de définir et de calculer un coefficient de corrélation linéaire  $r$  attaché à la forme linéarisée par rapport à de nouvelles variables  $X$  et  $Y$  convenablement définies (dans cet exposé, nous ne considérons que les modèles rhéologiques comportant deux variables  $X$  et  $Y$ , ce qui exclut les problèmes de corrélation multiple s'appliquant à des modèles mathématiques comportant plus de deux variables).



Il est toujours possible de linéariser un modèle quelconque par rapport à de nouvelles variables  $X$  et  $Y$  parfaitement définies et cela parfois de différentes façons. Il faut choisir la "meilleure" d'entre elles, celle qui définit un coefficient de corrélation linéaire comportant le minimum de paramètres, figurant à la fois dans  $X$  et  $Y$ . Suivant les cas, on supprimera un paramètre non indépendant dans le modèle ou on introduira un nouveau paramètre dépendant des paramètres initiaux. Si elle est judicieusement appliquée, cette linéarisation particulière fait intervenir un nombre de paramètres inférieur de un à deux à celui des paramètres présents dans le modèle. Cette propriété est particulièrement avantageuse pour les modèles à trois paramètres dont la forme linéarisée ne comporte plus dans  $X$  et  $Y$  qu'un seul paramètre (pour la grande majorité des modèles à trois paramètres, mais pas pour tous). L'avantage est que le calcul itératif porte sur une équation du type  $F(x) = 0$  et non pas sur un système de plusieurs équations à plusieurs inconnues à résoudre par approximations successives. Actuellement, le calcul par approximations successives de l'équation  $F(x) = 0$  est possible sur certains calculateurs programmables de poche, ce qui permet une vulgarisation des calculs. Il faut enfin faire la remarque suivante : suivant la façon dont aura été effectué le changement de variables  $X$  et  $Y$ , l'une des deux variables pourra être non aléatoire, et le phénomène  $(X, Y)$  correspondra à un problème de régression, ou les deux variables seront aléatoires, et le phénomène  $(X, Y)$  correspondra à un problème de corrélation. Les paramètres du modèle seront définis par les mêmes formules mais l'interprétation statistique sera différente (voir les ouvrages de statistique).

La linéarisation de quelques-uns des modèles rhéologiques que nous avons cités est particulièrement simple (voir Tableau 1) mais la recherche de la meilleure linéarisation pourrait être plus laborieuse dans des exemples que nous ne citerons pas ici (nous avons linéarisé plusieurs dizaines de modèles mathématiques divers utilisés dans diverses branches).

Tableau 1 - Exemples de linéarisation de trois modèles rhéologiques à trois paramètres

Pour désigner les données  $(V, L)$  ou  $(\dot{\nu}, \tau)$ , nous emploierons les notations  $(u, v)$

Modèle	Forme linéarisée	Nouvelles variables $(X, Y)$	Remarques
$v = a u^b + c$	$\log (v-c) = \log a + b \log u$	$X = \log u$ $Y = \log (v-c) = G(c)$	$dX = 0$ $dY = -\frac{dc}{v-c}$ [X non aléatoire Y aléatoire]
$v = K(u+p)^n$	$\log v = \log K + n \log (u+p)$	$X = \log (u+p) = F(p)$ $Y = \log v$	$dX = \frac{dp}{u+p}$ $dY = 0$ [X non aléatoire Y aléatoire]
$\frac{v}{u} = P \left(\frac{1}{u} + Q\right)^R$	$\log \frac{v}{u} = \log P + R \log \left(\frac{1}{u} + Q\right)$	$X = \log \left(\frac{1}{u} + Q\right) = F(Q)$ $Y = \log \frac{v}{u}$	$dX = \frac{dQ}{1/u + Q}$ $dY = 0$ [X non aléatoire Y aléatoire]
$\beta(u, v, s_1 \dots s_n) = 0$	$Y = a' + b' X$	$X = F(u, v, s_1 \dots s_n)$ $Y = G(u, v, s_2 \dots s_n)$	$s_1 \dots s_n$ : paramètres



### 3.2.2. Maximisation du coefficient de corrélation linéaire r

#### 3.2.2.1. Principe de la méthode

Dans la théorie classique de la corrélation linéaire entre deux variables X et Y, on établit la formule ci-après qui donne la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées  $Y_i$  et les valeurs calculées  $Y_i'$  par le modèle :

$$\sum \Delta_i^2 = \sum (Y_i - Y_i')^2 = (1 - r^2) \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (15)$$

On a :  $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N}$  ,  $\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N}$  N nombre de points expérimentaux

Comme  $\sum (Y_i - \bar{Y})^2$  est constant, minimiser  $\sum (Y_i - Y_i')^2$  revient à maximiser r (r étant fonction d'un ou de plusieurs des paramètres du modèle).

#### 3.2.2.2. Formules à utiliser

Nous nous bornerons à indiquer (Tableau 2), sans démonstration, les formules obtenues en écrivant que  $dr = 0$  (condition correspondant effectivement à un maximum).

Dans le cas où r dépend d'un seul paramètre s, l'équation  $F(s) = 0$  peut être résolue par la méthode de dichotomie et/ou par la méthode de NEWTON, après avoir éventuellement déterminé l'ordre de grandeur du paramètre s comme indiqué en 3.1.

Dans le cas où r dépend d'un seul paramètre s, on peut programmer la condition nécessaire [équation unique (23)] comme programme principal fixe et les fonctions X, Y,  $\frac{dX}{ds}$ ,  $\frac{dY}{ds}$  comme sous-programmes. Cette programmation est possible sur certains calculateurs programmables de poche.

Si l'on a soit  $\frac{dX}{ds} = 0$ , soit  $\frac{dY}{ds} = 0$ , on peut, s'il est nécessaire de gagner des pas, programmer les formules simplifiées correspondantes. Bien qu'il soit possible d'établir un seul programme applicable à ces deux cas particuliers, il est préférable d'établir deux programmes distincts pour ne pas avoir à déterminer laquelle des deux droites de régression est à retenir dans chaque cas.

Le calcul itératif donne à la fois la valeur du paramètre s et l'intervalle résiduel  $(a_k, b_k)$  qui le contient, défini par la condition

$b_k - a_k < \epsilon$ . Ce résultat est à fournir si l'on désire indiquer la précision sur les paramètres calculés.

#### 3.2.3. Détermination des autres paramètres du modèle

Nous nous bornons, dans cet exposé, au cas des modèles rhéologiques à trois paramètres. Ayant calculé l'un des trois paramètres s par le calcul itératif précédent, on termine le calcul des deux autres paramètres par une méthode des moindres carrés classique, programmable.

#### 3.2.4. Autres déterminations (facultatives)

Si l'on a affaire à un problème de régression (X, variable non aléatoire et connue sans erreur), on peut calculer des intervalles de confiance, à un seuil fixé, pour les deux derniers paramètres calculés. Ce calcul est en particulier intéressant pour les paramètres-exposants, b, n, R des modèles du Tableau 1. En effet, si les intervalles de confiance de ces paramètres contiennent la valeur 1, on peut faire légitimement les approximations  $b = 1$ ,  $n = 1$ ,  $R = 1$  et adopter les sous-modèles correspondants (qui ne sont autres que le modèle binghamien). Malheureusement, si l'on prend en considération la partie curviligne du début de la courbe d'écoulement d'un fluide plastique binghamien (interprétation algébrique de la courbe d'écoulement), on ne pourra pratiquement jamais faire l'approximation à 1 de l'exposant.



**Tableau 2 - Formules à la base de la méthode (programmable) proposée**

Modèle linéarisé :  $Y = a' + b X$  (16)

Coefficient de corrélation linéaire :  $r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2} \sqrt{\Sigma y^2}} = \frac{N_1}{D_1 D_2}$  (17)

Notations (classiques en statistique) :

$$N_1 = \Sigma xy = \Sigma (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = \Sigma XY - \frac{1}{N} (\Sigma X)(\Sigma Y) \quad (18)$$

$$D_1^2 = \Sigma x^2 = \Sigma (X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - \frac{1}{N} (\Sigma X)^2 \quad (19)$$

$$D_2^2 = \Sigma y^2 = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - \frac{1}{N} (\Sigma Y)^2 \quad (20)$$

Conditions nécessaires pour que  $r$  soit maximal :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dN_1}{N_1} - \frac{dD_1}{D_1} - \frac{dD_2}{D_2} = 0 \quad (21)$$

1°/  $r$  dépend de  $k$  paramètres  $s_1 \dots s_k$

On doit résoudre par approximations successives un système de  $k$  équations à  $k$  inconnues  $s_1 \dots s_k$  dont nous écrirons seulement l'équation  $i$  :

$$\frac{1}{N_1} \frac{\partial N_1}{\partial s_i} - \frac{1}{D_1} \frac{\partial D_1}{\partial s_i} - \frac{1}{D_2} \frac{\partial D_2}{\partial s_i} = 0 \quad (22)$$

2°/  $r$  dépend d'un seul paramètre  $s$

On n'a alors qu'une seule équation à résoudre par approximations successives :

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{ds} - \frac{1}{D_1} \frac{dD_1}{ds} - \frac{1}{D_2} \frac{dD_2}{ds} = 0 \quad (23)$$

Dans ces formules, on a :

$$dN_1 = \Sigma XdY + \Sigma YdX - \frac{1}{N} [(\Sigma X)(\Sigma dY) + (\Sigma Y)(\Sigma dX)] \quad (24)$$

$$D_1 dD_1 = \Sigma XdX - \frac{1}{N} (\Sigma X)(\Sigma dX) \quad (25)$$

$$D_2 dD_2 = \Sigma YdY - \frac{1}{N} (\Sigma Y)(\Sigma dY) \quad (26)$$



Si l'on a affaire à un problème de corrélation, et seulement dans ce cas, on pourra faire des tests de signification sur les coefficients de corrélation linéaire attachés à divers modèles et, si deux coefficients de corrélation linéaire sont significativement différents, on choisira le modèle ayant le coefficient de corrélation linéaire de plus grand module (celui qui est le plus voisin de 1).

Enfin, à partir des valeurs calculées des paramètres, on peut effectuer diverses déterminations : valeurs  $L_i$  calculées pour chaque  $V_i$ , écarts absolus  $[(L_i) \text{ mesuré} - (L_i) \text{ calculé}]$  pour chaque  $V_i$ , écarts relatifs

$$(\Delta_i)_r = \frac{(L_i) \text{ mesuré} - (L_i) \text{ calculé}}{(L_i) \text{ mesuré}} \quad \text{et, enfin, l'écart relatif moyen}$$

(E.R.M.) qui caractérise la précision relative d'un modèle déterminé par rapport à des données brutes fixées :

$$\text{E.R.M.} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta_i)_r^2}{N}} \quad (27)$$

Pour ne pas allonger cet exposé, nous n'indiquerons pas les formules à appliquer pour effectuer les déterminations citées en 3.2.4 (on les trouverait dans les ouvrages de statistique).

### 3.2.5. Conclusions relatives à la partie 3

La méthode proposée présente les avantages suivants : objective, automatique, rapide, précise, générale ... Elle constitue une méthode de lissage mathématique, caractérisée par des paramètres statistiques, permettant une appréciation quantitative des résultats obtenus. Peut-être peut-elle remplacer avantageusement la méthode générale classique (minimisation directe de la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et les valeurs calculées) puisqu'elle diminue (d'une ou de deux unités) la dimensionnalité du problème initial (il est plus facile de déterminer un maximum sur une courbe plane que sur une surface) ?

Il nous reste à citer des exemples numériques d'application pour illustrer cette méthode.

## 4. EXEMPLES NUMERIQUES D'APPLICATION

### 4.1. Données expérimentales

Nous ne traiterons qu'un seul cas de courbe d'écoulement mais nous analyserons ces données au moyen de cinq modèles rhéologiques et nous donnerons tous les résultats relatifs à ce problème de régression. Pour des raisons d'objectivité (et d'intérêt de cet exemple), nous avons emprunté les données à l'article (14), reproduites dans le Tableau 3 (partie encadrée dans la colonne Notations). Les résultats fournis par les auteurs (14) sont dans la colonne (3) (les auteurs ne donnent pas les valeurs des paramètres).

### 4.2. Résultats obtenus

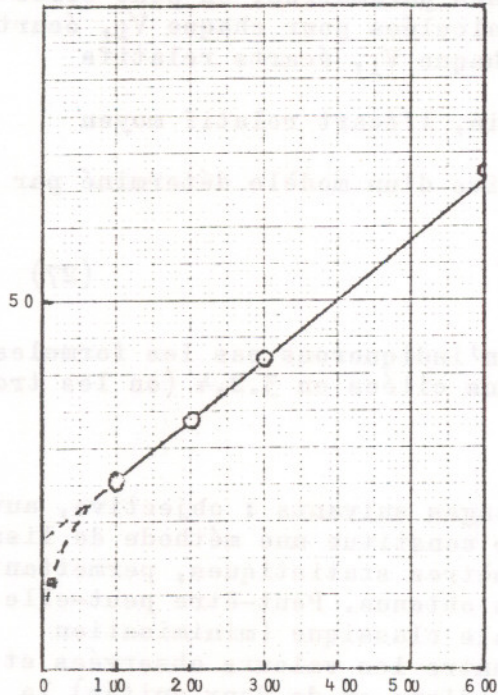
Les calculs ont été faits en utilisant les six points expérimentaux. On fait donc une interprétation algébrique (et non pas rhéologique) de la courbe d'écoulement. Mais nous avons fait aussi une interprétation sur quatre points.

Les courbes d'écoulement de ce fluide, en coordonnées arithmétiques et bilogarithmiques sont représentées sur les figures 1 et 2.



### 4.3. Interprétation des résultats

L'examen de la figure 1 fait apparaître que le fluide est pratiquement un fluide plastique binghamien. A noter que ROBERTSON et STIFF ne font pas cette interprétation. Il le serait rigoureusement si, à 600 tpm, la lecture était de 66 au lieu de 68 divisions. Le début de la courbe correspond à l'écoulement en bouchon (plug flow).



En abscisses : vitesse du rotor, tpm  
En ordonnées : lectures, en divisions

Figure 1

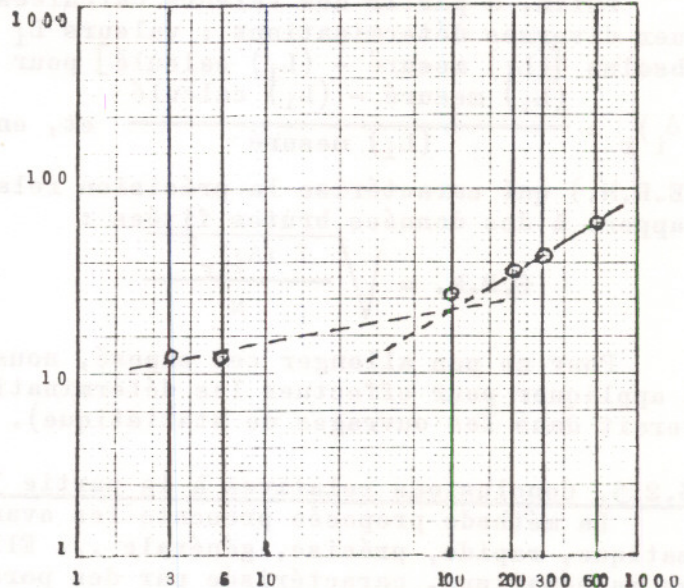


Figure 2

La figure 2 fait apparaître l'existence de deux segments de droites, ce qui montre que le modèle ostwaldien est mal vérifié (voir en 2.2 le texte après les équations 5).

Si l'on utilise les six points expérimentaux (interprétation algébrique), tous les exposants du Tableau 3, ligne (5)c, sont significativement inférieurs à 1 (1 n'est pas dans les intervalles de confiance des exposants). L'interprétation algébrique ne permet donc pas d'identifier un fluide plastique binghamien (quand le fluide est de ce type).

Nous avons fait une interprétation rhéologique en utilisant seulement les quatre points expérimentaux pour 100 - 200 - 300 et 600 tpm. Nous ne reproduirons pas les résultats obtenus (suivant le même programme que celui du Tableau 3). Cette fois, tous les exposants sont significativement supérieurs à 1 (1 étant extérieur aux intervalles de confiance respectifs). Il semble que l'on puisse affirmer que le résultat "exposant supérieur à 1" ne doit pas être interprété comme un début d'écoulement turbulent ou comme l'indice de la dilataance du fluide mais que l'explication la plus probable est l'influence du point légèrement aberrant pour 600 tpm. Voici les valeurs obtenues pour les exposants et leurs intervalles de confiance (pour 4 points) :

modèle $L = aV^b + c$	$b = 1,075$	$i_b = 1,055$	$S_b = 1,095$
modèle $L = K (V + p)^n$	$n = 1,174$	$i_n = 1,156$	$S_n = 1,191$
modèle $\frac{L}{V} = P \left( \frac{1}{V} + Q \right)^R$	$R = 1,225$	$i_R = 1,181$	$S_R = 1,264$

Pour le modèle de BINGHAM,  $L = AV + B$ , on a trouvé  $A = 0,084$  et  $B = 17,21$ .



Fait surprenant, pour ces quatre points expérimentaux, ce n'est pas le modèle de BINGHAM qui est le plus précis. On a, en effet, trouvé les résultats suivants :

Modèle	$L = aV^b + c$	$L = K(V + p)^n$	$\frac{L}{V} = P\left(\frac{1}{V} + Q\right)^R$	$L = AV + B$
r	0,999 981 441 0	0,999 987 985 7	0,999 938 748 5	0,999 784 614 3
ERM	0,002 179	0,001 732	0,003 391	0,009 287
$\Sigma \Delta_i^2$	0,034 918	0,016 854	0,077 730	0,428 571

Nous avons voulu insister sur ces divers points délicats pour souligner les difficultés d'une analyse des résultats, qu'elle soit algébrique ou rhéologique, et surtout quand on dispose de si peu de points expérimentaux (c'est un défaut important de l'appareillage actuellement normalisé). Que dire alors des calculs encore faits à partir d'un viscosimètre FANN à deux vitesses (300 et 600 tpm) !

Revenons aux résultats du Tableau 3. On peut faire un certain nombre de constatations :

- les valeurs des paramètres-exposants (ligne 5 c) sont nettement différentes d'un modèle à l'autre (c'est aussi le cas avec quatre points expérimentaux, comme on l'a vu ci-dessus). Les écarts sont parfois très importants [0,31 pour le modèle (6) et 0,85 pour le modèle (4)]. Que peut-on penser de l'interprétation faite par la profession des valeurs numériques de l'exposant du modèle d'OSTWALD, surtout quand ce modèle n'est pas valable ?
- L'examen du Tableau 3 pose immédiatement le problème du meilleur choix du modèle rhéologique, c'est-à-dire celui qui s'ajuste le mieux aux données. Le critère à utiliser est donc un critère de précision et nous avons vu que dans la pratique on peut considérer aussi d'autres critères (le critère d'utilité de ROBERTSON, et même d'autres critères). Le choix d'un critère de précision n'est pas aussi évident que ce que l'on pourrait croire. Les critères  $\Sigma(\Delta_i)_r^2$  et ERM (lignes 3 du Tableau 3) sont évidemment équivalents quand on a le même nombre de points expérimentaux ; considérons le critère ERM permettant de corriger l'influence du nombre de points expérimentaux et qui, de plus, a une signification particulière (écart quadratique moyen). Nous constatons alors que les critères  $\Sigma \Delta_i^2$  et ERM classent différemment les divers modèles (du fait que les écarts absolus sont répartis différemment par rapport aux lectures L). Or, le critère  $\Sigma \Delta_i^2$  est celui qui est à la base de la théorie des moindres carrés qui permet notamment d'écrire la relation (15) portant sur les écarts absolus, laquelle n'entraîne pas la suivante :

$$\Sigma(\Delta'_i)_r^2 = \Sigma \left[ \frac{Y_i - Y'_i}{Y_i} \right]^2 = (1-r^2) \Sigma \left[ \frac{Y_i - \bar{Y}}{Y_i} \right]^2$$

Dans le cas où X et Y seraient les données brutes, on n'a donc pas cette relation entre  $\Sigma(\Delta'_i)_r^2$  et r alors qu'elle existe entre  $\Sigma \Delta_i^2$  et r [équation (15)]. Existe-t-il une relation entre  $\Sigma(\Delta'_i)_r^2$  et r dans le cas d'un même modèle ? (nous avons utilisé le critère ERM, adopté dans un article des Cahiers du Groupe Français de Rhéologie du 15 novembre 1977, p. 191 à 198). Le critère  $\Sigma \frac{\Delta_i^2}{N}$  paraît donc être meilleur que le critère ERM (on pourrait adopter plutôt le critère  $\sqrt{\frac{\Sigma \Delta_i^2}{N}}$  qui définirait un écart absolu moyen mais qui a le défaut de dépendre des modules des données). Sur la base d'un quelconque des critères précédents, on constate la précision très médiocre des deux modèles à deux paramètres par rapport à celles des modèles à trois paramètres. Le modèle de BRIANT (pour ces données) est le plus précis sur la base du critère  $\Sigma \Delta_i^2$  et le moins précis sur la base du critère ERM. Le modèle rhéologique le plus précis n'est pas celui ayant un coefficient de corrélation linéaire dont le module est le plus voisin de 1. Cela est visible sur le Tableau 3



Tableau 3 - Analyse d'une courbe d'écoulement au viscosimètre FANN

Données numériques extraites de l'article (14), Tableau 2. Le fluide est un laitier de ciment

Repère	Notations	$L = aV^b + c$ (1)		$L = K(V + p)^n$ (2)		$L = K(V + p)^n$ (d'après 14) (3)		$\frac{L}{V} = P(\frac{1}{V} + Q)^R$ (4)		$L = AV + B$ (5)		$L = K'V^{n'}$ (6)		
		A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	
(1)	$L_3 = 12$	11,712		11,808		12,1		11,433		13,897		10,378		
	$L_6 = 12$	12,443		12,303		12,5		12,814		14,176		12,865		
	$L_{100} = 26$	25,126		24,731		23,8		25,108		22,906		30,772		
	$L_{200} = 34$	34,785		34,968		34,1		34,124		32,194		38,148		
	$L_{300} = 42$	43,190		43,804		43,5		42,706		41,482		43,257		
	$L_{600} = 68$	64,870		66,068		68,5		67,824		69,345		53,625		
(2)	$\Delta_3$	0,288	0,024	0,192	0,016	-0,1	-0,008	0,567	0,047	-1,897	-0,158	1,622	0,135	
	$\Delta_6$	-0,443	-0,037	-0,303	-0,025	-0,5	-0,042	-0,814	-0,068	-2,176	-0,181	-0,865	-0,072	
	$\Delta_{100}$	0,874	0,034	1,269	0,049	2,2	0,085	0,892	0,034	3,094	0,133	-4,772	-0,150	
	$\Delta_{200}$	-0,785	-0,023	-0,968	-0,028	-0,1	-0,003	-0,124	-0,004	1,806	0,053	-4,148	-0,122	
	$\Delta_{300}$	-1,190	-0,028	-1,804	-0,043	-1,5	-0,036	-0,706	-0,017	0,518	0,012	-1,257	-0,030	
	$\Delta_{600}$	3,130	0,046	1,932	0,028	-0,5	-0,007	0,176	0,003	-1,345	-0,020	14,375	0,211	
(3)	$\Sigma \Delta_i^2$	12,872		9,667		(7,610)		2,324		23,244		251,591		
	$\Sigma (\Delta_i)_r^2$	0,006 325		0,006 741		(0,010 304)		0,008 316		0,061 222		0,083 941		
	ERM	0,032 98		0,033 52				0,037 23		0,101 01		0,118 280		
(4)	L pour $V = 0$	10,613		11,301				0		13,618				
(5)	(a)	10,612	771 21	43,300	319 86			0,903	672 671 5	0,992	878 605	0		
	(b)	0,489	621 316 6	0,959	971 672 4			9,592	286 705	13,618	294 42	7,382	687 466	
	(c)	0,735	955 832 5	0,654	366 201 4			0,848	703 803			0,309	972 049 1	
	(d)							272,281	362 5					
(6)		$i_a = -2,822$		$i_k = -2,077$				$i_p = 6,687$		$i_A = 0,080$		$i_{K'} = 4,104$		
		$S_a = 3,801$		$S_k = 3,997$				$S_p = 12,498$		$S_A = 0,106$		$S_{K'} = 10,662$		
(7)		$i_b = 0,630$		$i_n = 0,606$				$i_R = 0,817$		$i_B = 9,803$		$i_{n'} = 0,210$		
		$S_b = 0,842$		$S_n = 0,703$				$S_R = 0,880$		$S_B = 17,433$		$S_{n'} = 0,410$		
(7)	r	0,994 622 171 4		0,998 597 503 6				0,999 644 289		0,994 787 279		0,973 832 869 7		
Significations des repères (colonne 1)								(5)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1) - Valeurs $L_i$ mesurées (deuxième colonne)								(a)	c	p		q	A	o
Valeurs calculées par chaque modèle (autres colonnes)								(b)	a	K		P	B	K'
(2) - Ecart algébrique absolu (colonnes A) sur chaque $L_i$								(c)	b	n		R		n'
Ecart algébrique relatif (colonnes B) sur chaque $L_i$								(d)	-	-		1/Q		
(3) - $\Sigma \Delta_i^2$ = somme des carrés des écarts algébriques absolus								(6) - $i$ borne inférieure de l'intervalle de confiance						
$\Sigma (\Delta_i)_r^2$ = somme des carrés des écarts algébriques relatifs								- $S$ borne supérieure de l'intervalle de confiance						
(4) - Valeur calculée (extrapolée) par chaque modèle								(7) - Coefficient de corrélation linéaire de la forme linéarisée du modèle						
Colonne (3) : les valeurs des lignes (3) et de la colonne B ne sont pas données par les auteurs (14).														

NB - Chaque lecteur arrondira les résultats avec le nombre de décimales qu'il voudra, étant entendu que le calculateur programmable opère automatiquement avec le nombre maximal des chiffres enregistrés.



pour les modèles (1) et (5). Comparer deux modèles sur la base des valeurs des coefficients de corrélation linéaire attachés aux modèles linéarisés risque donc d'introduire des conclusions inexactes (pas toujours mais quelquefois). Cela peut sans doute s'expliquer par le fait que des linéarisations différentes introduisent des changements d'échelles ayant des effets différents tandis que les critères reposant sur des indices d'écart, et notamment  $\sum \Delta_i^2$  ne présentent pas ce défaut. Dans le principe de la méthode que nous proposons, nous maximisons bien le coefficient de corrélation linéaire mais nous considérons chaque fois un même modèle ; c'est-à-dire la même forme linéarisée, avec les mêmes échelles. L'objection précédente n'est donc pas valable dans ce cas. Enfin, le problème du choix du meilleur modèle rhéologique a été quelquefois incorrectement posé dans la profession, qui n'utilise actuellement que les modèles binghamien et ostwaldien. Le Tableau 3 montre justement que limiter le choix entre ces deux modèles ne donne pas, et de loin, le meilleur choix (tout au plus ferait-on dans ce cas un moins mauvais choix et il se pourrait d'ailleurs que les précisions des deux modèles soient aussi médiocres l'une que l'autre par rapport à un autre modèle donnant une excellente précision). Limiter le choix entre deux modèles n'est d'ailleurs pas correct au plan logique puisqu'on ne considère pas d'autres modèles possibles, parmi lesquels peut se trouver le meilleur choix. Il est préférable de considérer un seul modèle à trois paramètres plutôt que deux modèles à deux paramètres, ce qui donnera une précision meilleure, compte tenu aussi du fait que le modèle à trois paramètres comporte (en théorie, mais pas en pratique, on l'a vu) les deux modèles à deux paramètres comme sous-modèles limites.

- On peut être étonné de constater que le modèle (4) qui ne prend pas en compte la limite de cisaillement (yield value) soit le plus précis sur la base des critères  $\sum \Delta_i^2$  et  $r$ . Ce paradoxe s'explique sans doute par le fait qu'on ne prend pas en considération (faute de données) la partie de la courbe d'écoulement comprise entre zéro et 3 tpm qui pénaliserait d'une manière importante le modèle (4) puisque les écarts importants sont dans cette région.

#### 4.4. Conclusions de la partie 4

L'étude critique et approfondie d'une courbe d'écoulement a montré à la fois les avantages des modèles à trois paramètres et les difficultés soulevées par la prise en considération du début de la courbe d'écoulement. Celle-ci est indispensable si le fluide est pseudo-plastique et, au contraire, néfaste si le fluide est plastique binghamien. Une interprétation purement algébrique et sans discernement de la courbe d'écoulement est donc dangereuse. D'autre part, le nombre insuffisant des points expérimentaux donnés par le viscosimètre FANN à six vitesses ne permet pas toujours de faire une analyse rhéologique satisfaisante. Une amélioration des méthodes de mesures et d'analyse paraît donc souhaitable en vue d'éliminer des erreurs d'interprétation portant sur la nature rhéologique du fluide. Adopter un modèle à trois paramètres peut constituer une amélioration importante à condition de ne pas interpréter un fluide plastique binghamien caractérisé par deux paramètres comme un fluide plastique non binghamien caractérisé par trois paramètres. Enfin, dans le cas d'un problème de régression, le critère de comparaison de la précision d'un modèle sera, de préférence à tous autres, le critère  $\sum \Delta_i^2$  (ou  $\frac{\sum \Delta_i^2}{N}$  plus généralement) ou tout critère dérivé tel que  $\sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{N}}$  ce critère étant directement rattaché à la définition la plus généralement admise de la précision.

(Nous remercions par avance les lecteurs qui voudraient bien nous faire part de leurs observations et de leurs critiques).



BIBLIOGRAPHIE

- 1 - API Recommended Practice - Standard Procedure for Testing Drilling Fluids  
API RP 13 B, Sixth Edition, April 1976 (Section 2 : Viscosity and gel strength)  
American Petroleum Institute, Production Department, 300 CORRIGAN TOWER BUILDING, DALLAS, TEXAS 75201
- 2 - BINGHAM, E.C., Fluidity and Plasticity, Mc GRAW-HILL (1922)
- 3 - OSTWALD, W.  
Kolloidzeitschrift, 36, 99, 157, 248, (1925)
- 4 - DE WAELE, A.  
Kolloidzeitschrift, 36, 332, (1925)
- 5 - METZNER, A.B., REED, J.C.  
Flow of Non-Newtonian Fluids  
A. I. Ch. E. Journal, 1, 434, (1955)
- 6 - Forages, Manuel de Rhéologie, (à paraître)  
Bulletin édité par l'A.E.M.S. Institut Français du Pétrole, BP 311, 92506 RUEIL MALMAISON Cedex
- 7 - CASSON, N.  
A flow equation for pigment oil suspensions of printing ink type. In : Rheology of disperse systems, C.C. MILL, Pergamon Press, LONDON, NEW YORK, LOS ANGELES, 1959 (voir exemple d'application dans Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, T. II, n° 2, 15 novembre 1969, p. 163-167)
- 8 - API, Bulletin on the Rheology of Oil-Well Drilling Fluids  
API Bul. 13 D, First Edition Draft, May 1977  
(Adresse : voir référence 1)
- 9 - HERSCHEL, W.H., BULKLEY, R.  
Kolloidzeitschrift, 39, 291, (1926)
- 10 - MARTIN, M.  
Caractéristiques des boues de forage  
Institut Français du Pétrole, Document Réf. 6833, octobre 1961 (p. 13)
- 11 - FORBES, G.  
Easier, more exact method speeds annulus pressure-loss calculations  
The Oil and Gas Journal, July 31, 1972, p. 110-111
- 12 - FORBES, G.  
Hydraulics : Shear Stress and Shear Rate  
Petroleum Engineer, September, 1976
- 13 - ZAMORA, M., LORD, D.L.  
Practical Analysis of Drilling Mud Flow in Pipes and Annuli  
SPE 4976 (1974) (Society of Petroleum Engineers)
- 14 - ROBERTSON, R.E., STIFF, H.A.  
An Improved Mathematic Model for Relating Shear Stress to Shear Rate in Drilling Fluids and Cement Slurries  
Society of Petroleum Engineers Journal, Vol. 16, n° 1, Febr. 1976, p. 31-36
- 15 - WALKER, R.E.  
Mud Hydraulics  
The Oil and Gas Journal, September 13, 1976, p. 64-66



- 16 - BRIANT, J.  
Etude des propriétés rhéologiques des graisses à l'aide du viscosimètre S.O.D.  
Revue de l'Institut Français du Pétrole  
XI, n° 1, janvier 1956, p. 113-133 (partie 1)  
XI, n° 2, février 1956, p. 247-287 (partie 2)
- 17 - MARTIN, M., LE FUR, B.  
Etude de l'écoulement laminaire d'un fluide non newtonien dans un tube de section circulaire. Application aux boues de forage  
Revue de l'Institut Français du Pétrole, 1963, XVIII, numéro spécial, p. 32-35
- 18 - MARTIN, M., CURTZ, P., LE FUR, B.  
Transition de l'écoulement de liquides non newtoniens dans des conduites circulaires  
Revue de l'Institut Français du Pétrole, C.R. 2e Colloque ARTFP, 31 mai-4 juin 1965, p. 113-130
- 19 - MARTIN, M., LE FUR, B.  
Transport en conduite de liquides non newtoniens  
Revue de l'Institut Français du Pétrole, Juillet-Août 1966, p. 1078-1087
- 20 - MARTIN, M.  
Caractéristiques rhéologiques et composition des boues de forage  
Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, numéro spécial hors série, novembre 1970, p. 463-470
- 21 - RICARD, G.  
Rhéologie des boues de forage et des laitiers de ciment  
Forages, n° 76, Juillet à Septembre 1977, p. 83-112 et n° 78, Janvier à Mars 1978, p. 139-141  
(Adresse : voir référence 6)