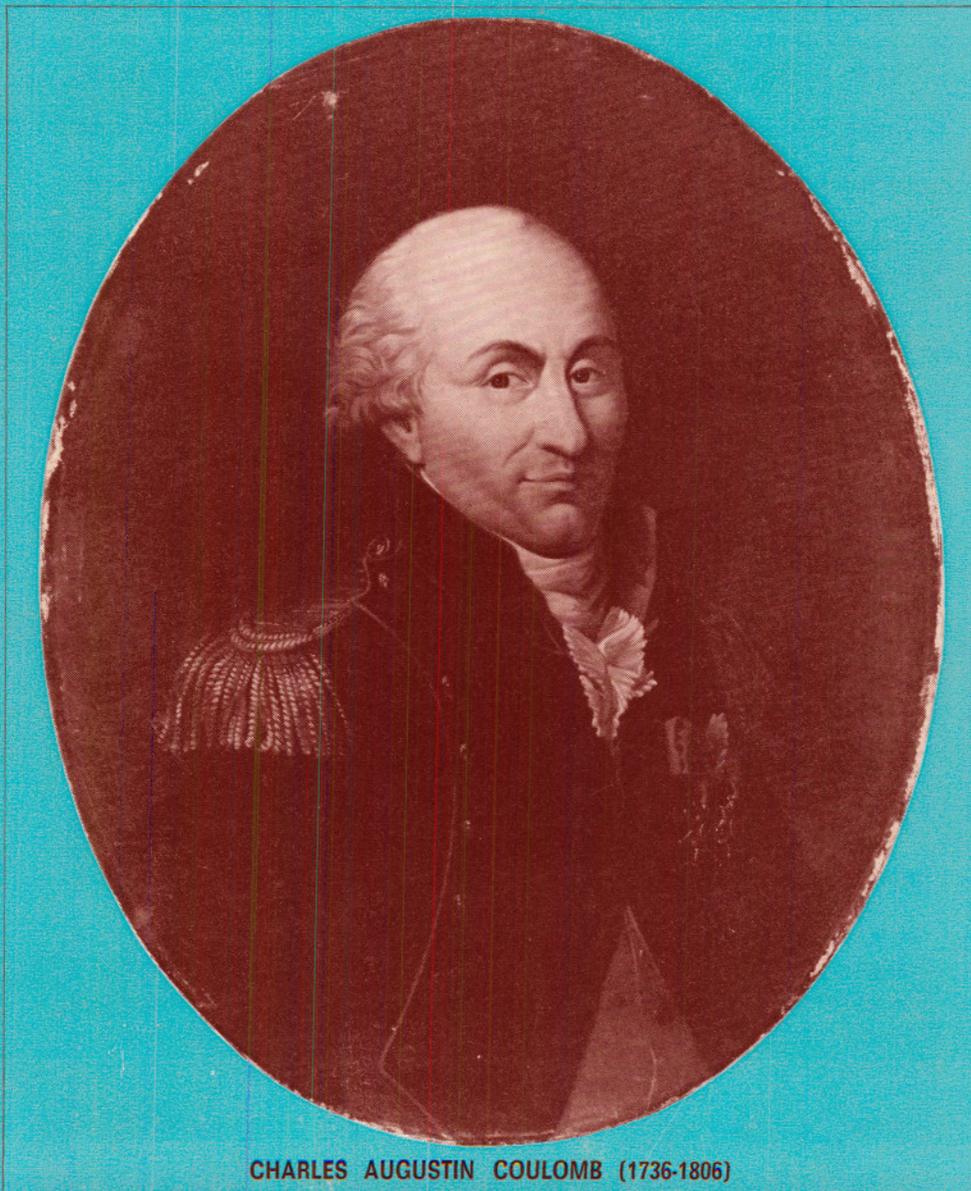


industrie minérale

CAHIERS
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME IV — NUMÉRO 6



Cliché des Musées nationaux

CHARLES AUGUSTIN COULOMB (1736-1806)

Numéro spécial du 15 juin 1978

CAHIERS
DU
GROUPE FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE

Tome IV — Numéro 6

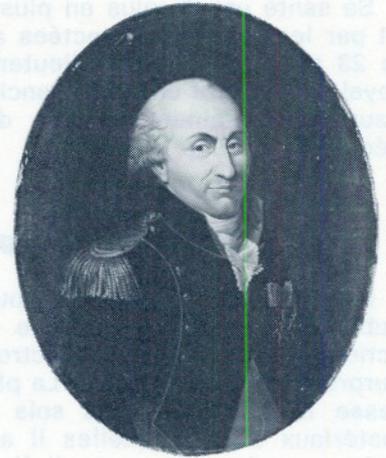
15 juin 1978

Edité par la revue Industrie Minérale
19, rue du Grand-Moulin, 42029 Saint-Etienne Cedex

■

Secrétariat du Groupe Français de Rhéologie :
M. Absi, CEBTP, 12, rue Brancion, 75737 Paris Cedex 15

Coulomb et la rhéologie



par J. KERISEL et B. PERSOZ

La plus belle consécration d'un savant est de voir son nom perdre sa majuscule pour désigner une unité ou servir de radical pour la formation d'un adjectif, voire d'un verbe. Tel fut le cas d'Ampère, de Volta, de Galvani, de Hooke, de Maxwell, de Watt, de Newton, de Debye et de bien d'autres. Tel fut aussi le cas de Coulomb, qui pourtant n'a pas de rue dans notre capitale¹, au grand étonnement des étrangers qui ne comprennent pas pourquoi, dans les pays latins, les sciences sont ignorées des Pouvoirs publics.

Vie de Coulomb

Par un hasard de la carrière de son père, inspecteur des domaines du roi, Charles Augustin est né à Angoulême le 14 juin 1736, loin du berceau des Coulomb, traditionnellement juristes à Montpellier. Sa mère est autoritaire, son père homme de tradition sans caractère. Très rapidement la famille vient s'installer à Paris. Le jeune Charles-Augustin y fait ses premières études, puis annonce son intention de devenir mathématicien ; mais il se heurte à l'opposition totale de sa mère qui le veut médecin. Son père, ruiné par des spéculations malheureuses, retourne dans son Montpellier natal, tandis que sa mère, assez fortunée, menace de déshériter Charles Augustin s'il ne se plie pas à sa volonté. Mais, sans le sous, Charles Augustin décide de passer outre et rejoint son père à Montpellier.

Cette décision va influencer ses études, car la Société royale des sciences de Montpellier se flatte d'avoir été reconnue en 1706 comme la deuxième société royale scientifique de France. Coulomb y est admis dès l'âge de 21 ans, après y avoir présenté un essai géométrique sur les courbes moyennes proportionnelles. En seize mois, il présente encore à cette vénérable société une note de mécanique et trois d'astronomie.

1. Ni dans la plupart des grandes villes de France. A Angoulême, sa ville natale, une petite rue porte son nom.

En 1760, bien que dépourvu des nécessaires quartiers de noblesse, il entre, grâce à ses aptitudes en mathématiques, à la fameuse Ecole royale militaire du génie de Mézières, puis, à 27 ans, après un bref séjour à Brest, il est envoyé à la Martinique pour y construire le fort Bourbon (périmètre : 1,2 km). En 1772, après deux maladies assez graves et le fort étant presque achevé, il est enfin accordé à Coulomb de revenir en France.

Pendant neuf ans sa vie est celle d'un officier du génie nomade. Mais, tandis que ses camarades se contentent d'exécuter docilement les travaux de routine qui leur sont imposés, son esprit curieux et inventif ne peut s'empêcher d'essayer de comprendre le pourquoi des choses et, par suite, de tenter de perfectionner les méthodes. Il s'intéresse également à des problèmes n'ayant pas de rapport direct avec son métier. Il écrira plus tard : « Un jeune sujet studieux qui sort de l'école n'a d'autre parti à prendre, pour supporter l'ennui et la monotonie de ses occupations, que de se livrer à quelque branche de science ou de littérature absolument étrangère à son état ».

Elu à l'Académie des sciences en 1781, il va résider à Paris, mais à l'époque de la Terreur, en voyant condamner ses confrères Lavoisier et Condorcet, il se réfugie près de Blois où, pendant trois ans, il étudie la circulation de la sève dans les arbres.

Le calme revenu, il vient s'installer à Paris, 15, quai de la Monnaie, non loin de l'Institut. Dans son modeste appartement il exécute ses dernières expériences sur l'électricité dans une pièce sur cour, parce qu'il y est plus tranquille et que les vibrations des voitures du quai ne secouent pas sa balance de torsion.

En 1802, Napoléon le nomme membre d'une commission chargée de réformer l'enseignement en France, puis inspecteur général de l'Instruction publique.

Sa santé est de plus en plus altérée par le travail et par les fièvres contractées aux colonies. Il meurt le 23 août 1806, ancien lieutenant-colonel du Corps royal et militaire du Génie, ancien administrateur des Eaux et Fontaines, membre de l'Institut et de la Légion d'honneur.

Travaux en rhéologie [1, 2]*

L'œuvre scientifique de Coulomb, dont le grand public ne connaît guère que ce qui concerne les actions magnétiques et électrostatiques à distance, surprend par son étendue. La plus grande partie intéresse la mécanique des sols et la résistance des matériaux avec lesquelles il a affaire dès les premières années de sa vie d'officier du Génie.

La question de la véritable nature du frottement et de la cohésion dans les corps le passionnera toute sa vie, bien au-delà de l'« essai » de 1773 sur la poussée et la cohésion des terres et de l'« essai » de 1777 sur le frottement.

Comme il est difficile de résumer en quelques lignes l'ensemble de ses travaux dans le domaine de la rhéologie, nous n'en montrerons que quelques aspects particulièrement saillants.

Rupture d'un pilier en compression

Les constructions qu'en tant qu'ingénieur il doit entreprendre l'amènent à étudier les contraintes de rupture des pierres en traction, en compression et en cisaillement. Ses recherches sur la rupture en compression d'un pilier de maçonnerie méritent d'être citées. L'expérience courante de la rupture oblique lui suggère de rechercher, pour une compression uniaxiale, l'inclinaison θ du plan selon lequel la contrainte de cisaillement est maximale. Le pilier devrait périr par cisaillement selon l'un de ces plans, lorsque le poids appliqué croît progressivement (fig. 1). Coulomb trouve évidemment $\theta = \pi/4$, mais pourquoi l'expérience donne-t-elle généralement un peu plus ? C'est pour répondre à cette question qu'il fait intervenir le frottement des deux parties sur le plan de rupture. Il écrit que la contrainte de cisaillement selon le plan de rupture, $\frac{P}{2S} \sin 2\theta$, est égale, lorsque la rupture se produit, à la contrainte de rupture R (appelée « cohérence »), augmentée de la contrainte de frottement, également elle-même au produit de la contrainte normale $\frac{P}{S} \cos^2 \theta$ par le coefficient de frottement $\operatorname{tg} \varphi$, soit :

$$\frac{P}{2S} (1 + \cos 2\theta) \operatorname{tg} \varphi :$$

$$\frac{P}{2S} \sin 2\theta = R + \frac{P}{2S} (1 + \cos 2\theta) \operatorname{tg} \varphi,$$

* Les chiffres mis entre crochets [] renvoient à la Bibliographie en fin d'article.

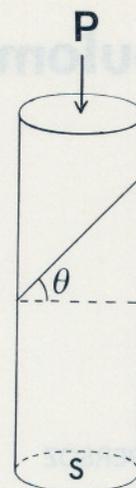


Fig. 1. — Rupture d'un pilier par compression

- P : force de compression uniaxiale appliquée au pilier,
- S : section droite du pilier,
- θ : inclinaison du plan de rupture,
- φ : angle de frottement au repos des deux parties du matériau supposé rompu,
- R : résistance à la rupture en cisaillement sans pression normale.

Ainsi que cette équation le montre, l'inclinaison θ du plan selon lequel la ruine se produit n'est plus $\pi/4$, mais :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

Poussée des terres (mécanique des sols)

Ici aussi Coulomb fait intervenir le frottement pour rendre compte de l'observation selon laquelle la contrainte de rupture en cisaillement se trouve augmentée par la présence d'une pression normale à la surface de rupture.

Un prisme de terre, de poids $P = \rho \frac{ax}{2}$ par unité de longueur, est susceptible de glisser selon un plan AB incliné d'un angle θ sur l'horizontale, mais il est retenu par un mur vertical (fig. 2), dont il reçoit une force horizontale F (par unité de longueur). Il s'agit de calculer F pour prévoir le mur à construire.

Ces forces F et P produisent sur le plan AB une contrainte normale $\frac{F}{a} \sin^2 \theta + \frac{\rho a}{2} \cos^2 \theta$ et une contrainte tangentielle $\left(\frac{\rho a}{2} - \frac{F}{a}\right) \sin \theta \cos \theta$. Il y a glissement si cette dernière est égale à la « cohérence » R (contrainte de rupture en cisaillement) augmentée du frottement $\left(\frac{F}{a} \sin^2 \theta + \frac{\rho a}{2} \cos^2 \theta\right) \operatorname{tg} \varphi$.

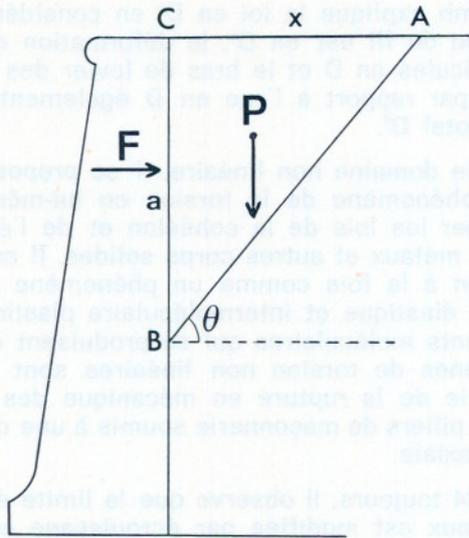


Fig. 2. — Détermination de la poussée des terres

C'est de cette égalité que l'expression de F est extraite. F est maximale pour :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2},$$

et sa valeur pour ce plan de glissement est :

$$F_m = \frac{\rho a^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - 2 R a \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

- ρ : poids spécifique de la terre,
- $x = CA$,
- $a = BC$,
- θ : inclinaison du plan de rupture,
- φ : angle de frottement,
- R : résistance en cisaillement sans pression normale.

Ces expressions, écrites par Coulomb avec d'autres notations, sont encore en usage aujourd'hui.

Il en résulte qu'un fossé peut être creusé « en découpant les terres suivant un plan vertical sans qu'elles s'éboulent » jusqu'à une profondeur calculée en faisant $F_m = 0$, ce qui conduit à :

$$a = \frac{4 R}{\rho} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Si la profondeur de l'excavation est plus grande que cette valeur, on trouve par des principes analogues l'angle sous lequel il faut couper les terres pour qu'elles se « soutiennent par leur propre cohésion ».

Coulomb étudie également le cas d'une surcharge et formule enfin quelques remarques fondamentales telles que les suivantes :

1. La cohérence des terres fraîchement remuées est nulle ;

2. Le frottement des terres contre la maçonnerie n'est pas aussi fort que celui des terres sur elles-mêmes ;

3. Souvent les eaux filtrant à travers les terres se rassemblent entre les terres et la maçonnerie et forment les nappes d'eau qui substituent la pression d'un fluide sans frottement à la pression des terres.

Frottement

Coulomb met en garde le lecteur contre les essais à petite échelle dans un cabinet de physique : ils ne peuvent suffire parce que la moindre inégalité, le moindre obstacle placé entre les surfaces en contact, la cohérence de quelques parties plus ou moins homogènes, jettent la plus grande irrégularité sur les résultats. Et il distingue deux cas très différents :

1^{er} cas. Les corps sont posés l'un sur l'autre depuis un certain temps. Le frottement, selon lui, peut dépendre des facteurs suivants :

- a) la nature des matières en contact et des enduits ;
- b) l'étendue des surfaces ;
- c) les pressions que ces surfaces transmettent ;
- d) le temps qui s'est écoulé depuis que ces surfaces sont en contact ;
- e) l'humidité de l'atmosphère.

2^e cas. Les corps glissent l'un sur l'autre avec une certaine vitesse. Les paramètres possibles sont a, b, c, et la grandeur de la vitesse.

Le dispositif expérimental de Coulomb comporte essentiellement un traîneau plus ou moins chargé, tiré par un système corde-poulie-poids et frottant sur une table de bois. En évitant la surface inférieure du traîneau, il fait varier la surface en contact.

Les résultats expérimentaux obtenus ne confirment pas complètement la loi d'Amontons (1699) attribuée à tort à Coulomb :

$$F = f P = P \operatorname{tg} \varphi.$$

- F : force tangentielle de frottement,
- f : coefficient de frottement,
- φ : angle de frottement,
- P : poids appliqué perpendiculairement aux surfaces.

Pour le frottement au repos, Coulomb note que la durée du contact préalable a une grande importance. Il propose d'abord, à pression constante, l'expression :

$$F = F_0 + k t^\gamma,$$

puis :

$$F = F_0 \frac{1 + \alpha t^\gamma}{1 + \beta t^\gamma}.$$

F_0 : force de frottement pour $t = 0$,
 t : durée du contact préalable,
 γ : exposant de l'ordre de 0,2,
 $\alpha > \beta$

Le frottement pendant le mouvement ($t = 0$) est beaucoup plus faible, jusqu'à 4,3 fois dans le cas de l'orme. Le rôle des aspérités n'est pas non plus négligé et les fibres dont la surface du bois est couverte sont comparées aux crins de deux brosses appliquées poils contre poils.

La torsion des fils

A Cherbourg en 1774, Coulomb décide de concourir au prix offert par l'Académie pour récompenser la meilleure manière de fabriquer des compas magnétiques. C'est cette circonstance qui oriente une partie de son activité vers le magnétisme et l'électrostatique et, indirectement, vers la torsion des fils, lesquels sont utilisés pour suspendre les aiguilles aimantées et pour mesurer de très faibles couples ou de très faibles forces avec la balance de torsion.

Le premier, il étudie scientifiquement la torsion des fils. Il constate que la soie et les cheveux n'opposent qu'un couple négligeable à la torsion. Néanmoins il donne en 1777 une expression du moment de ce couple :

$$M = \mu \frac{\theta D^3}{l}$$

μ : coefficient dépendant de la nature du fil,
 θ : angle de torsion,
 l : longueur du fil,
 D : diamètre du fil.

Le fait que l'expérience l'ait conduit au cube et non à la puissance quatrième du diamètre est vraisemblablement dû à la faiblesse de la plage des diamètres essayés, ainsi qu'à la difficulté de mesurer l'épaisseur de ces fils. Il corrigera plus tard lorsque l'emploi des fils métalliques lui permettra de faire varier le diamètre dans une gamme plus étendue.

En 1784, il annonce pour les fils de laiton une relation linéaire (entre M et θ) pour les faibles déformations, mais non linéaire pour les grandes. Dans le domaine linéaire il propose d'utiliser la torsion pour la mesure des faibles forces. C'est l'origine de la balance de torsion, qui lui permet de mesurer avec une bonne précision des forces de l'ordre du microgramme.

En faisant osciller en rotation un cylindre suspendu par divers fils de laiton et de fer, il détermine le moment du couple de rappel :

$$M = \mu \frac{\theta D^4}{l}$$

et annonce pour μ des valeurs numériques qui, converties en unités actuelles, conduisent à des modules de cisaillement de $7,63 \cdot 10^{10}$ Pa pour le fer et de $2,78 \cdot 10^{10}$ Pa pour le laiton.

Coulomb explique la loi en D^4 en considérant que la section du fil est en D^2 , la déformation moyenne des particules en D et le bras de levier des couples partiels par rapport à l'axe en D également, ce qui fait au total D^4 .

Dans le domaine non linéaire, il se propose d'étudier le phénomène de la torsion en lui-même pour déterminer les lois de la cohésion et de l'élasticité dans les métaux et autres corps solides. Il considère la torsion à la fois comme un phénomène intramoléculaire élastique et intermoléculaire plastique. Les glissements moléculaires qui se produisent dans les phénomènes de torsion non linéaires sont reliés à sa théorie de la rupture en mécanique des sols et dans les piliers de maçonnerie soumis à une compression uniaxiale.

En 1784 toujours, il observe que la limite élastique des métaux est modifiée par écrouissage et recuit, mais que le module reste le même. La cohésion et l'élasticité sont donc deux choses différentes. Il suppose que les déformations intramoléculaires sont restaurées élastiquement jusqu'à une certaine limite. Au-delà de cette limite, mais avant la rupture, le matériau est « réarrangé » (fluage ou écoulement le long des plans moléculaires), mais l'élasticité moléculaire reste la même. Timoshenko considère cette distinction comme l'un des plus importants résultats obtenus au 18^e siècle dans le domaine des matériaux.

Coulomb applique la balance de torsion, dans le domaine élastique, à ses études en magnétisme et en électrostatique, ainsi qu'en résistance des fluides. Il indique également une méthode pour déterminer le moment d'inertie d'un corps.

Résistance des fluides

Après Jean-Théophile Désaguliers¹, professeur à Oxford, connu pour ses études sur le frottement des poulies et qui a été conduit, en traduisant *Le mouvement des eaux* d'Edme Mariotte, à s'intéresser au frottement de l'eau dans les tuyaux et à la résistance de l'air, après Newton², D. Bernouilli, Gravesand, Borda, Bossut, d'Alembert, Condorcet, Du Buat et autres, qui ont proposé la plupart du temps des lois quadratiques, Coulomb, âgé de plus de 60 ans, s'attaque au problème de la résistance que les liquides opposent au mouvement des corps qui y sont immergés, mais sa perspicacité lui fait abandonner les méthodes par translation (bateau tiré à travers un étang, pendule simple constitué d'une sphère sus-

1. Fils d'un pasteur français qui avait dû se réfugier en Angleterre à la suite de la révocation de l'édit de Nantes (1685) et y a travaillé à la réorganisation de la franc-maçonnerie.

2. Il serait intéressant de rechercher dans les œuvres de Newton la contribution réelle que ce grand savant a apporté à l'énoncé de sa loi. D'après G.W. Scott Blair [3], il aurait simplement écrit : « La résistance qui provient du manque de souplesse des parties d'un liquide, toutes choses étant égales par ailleurs, est proportionnelle à la vitesse avec laquelle les parties du liquide sont séparées les unes des autres ». D'après Stewart Gillmor [2], il aurait proposé : $F = av + a'v^{3/2} + bv^2$, puis $F = k + v^2$.

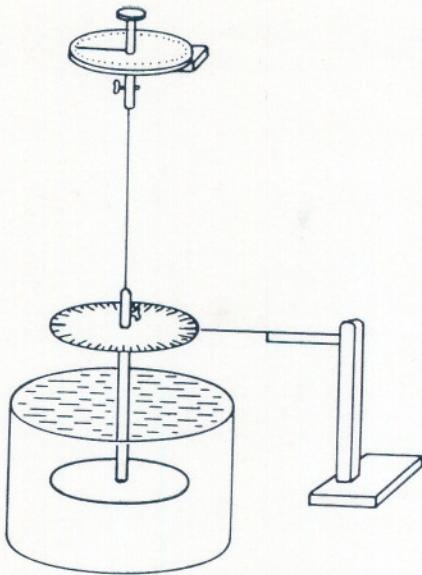


Fig. 3. — Balance de torsion pour les mesures de la résistance des fluides

pendue à un fil...) à cause notamment de l'influence des parois du récipient. Il opte dès le début pour la rotation d'un corps de révolution, cylindre ou disque, placé dans un récipient cylindrique coaxial. C'est probablement le premier viscosimètre de ce type (fig. 3). Pour des raisons de simplicité dans le montage, ce n'est pas un mouvement de rotation continue qu'il envisage, mais un mouvement oscillatoire avec des périodes de l'ordre de 20 à 30 secondes et des amplitudes de 8 à 480 degrés. Il met à profit ses connaissances sur la torsion des fils qu'il avait approfondies en construisant ses diverses balances de torsion.

Sachant que la résistance F des fluides se manifeste de plusieurs manières, fonctions de la vitesse v , il pose a priori une série entière du type :

$$F = k + av + bv^2 + cv^3 + \dots$$

mais ses expériences le conduisent à la limiter au terme carré. Il soupçonne l'existence du seuil k pour certains fluides hautement visqueux, mais cependant, il ne le détermine pas.

Un disque graissé donne les mêmes résultats qu'un disque non graissé. Cela conduit à une première conclusion fondamentale : « La partie de la résistance que nous avons trouvée proportionnelle à la vitesse est due à l'adhésion mutuelle des molécules du fluide et non à l'adhérence de ces molécules à la surface du corps ».

B. Franklin et Bossut avaient noté que la résistance à l'avancement des corps immergés dans les fluides variait avec la profondeur de l'immersion. Coulomb fait l'essai avec un disque dans l'eau à 2 cm de profondeur, puis à 50 cm et ne trouve pas de différence.

Il répète l'expérience dans le vide avec la machine pneumatique de l'Institut et ne trouve toujours pas de différence. La pression intervient peu.

Avec le même cylindre, si le terme en av est 17 fois plus élevé dans l'huile que dans l'eau, le terme quadratique (bv^2), par contre, est presque le même dans ces deux liquides. Cela est dû à la quantité de molécules en mouvement, donc à leur inertie, et non à leur cohésion. Cette résistance doit être proportionnelle à la densité de chaque fluide essayé. Le premier, Coulomb distingue bien ces deux sortes de résistances, l'une due à l'inertie, l'autre au frottement intérieur du liquide.

Il avait manifesté l'intention de poursuivre ses travaux, notamment sur l'influence de la forme du corps déplacé et, de là, essayer d'élaborer une théorie générale de la résistance des fluides, mais il mourut avant d'avoir pu achever son œuvre. Certains de ses papiers non publiés ont été perdus.

Conclusion

Quelle aurait été la carrière de Coulomb s'il avait cédé aux exigences de sa mère et s'il s'était orienté vers la médecine ? Il est probable que, dans ce domaine aussi, où il y a tant à faire, il serait arrivé à des résultats remarquables et serait cité aujourd'hui comme novateur. L'esprit, lorsqu'il est inventif, l'est en toutes circonstances, quoique cependant, comme pour les plantes, il y ait pour chaque espèce des terrains et des climats plus fertiles que d'autres.

Sans doute ses travaux sur la mécanique des sols, le frottement et la flexion des poutres résultent-ils directement des préoccupations inhérentes à l'exercice intelligent de son métier d'ingénieur, mais l'idée de concourir au prix offert par l'Académie, à l'initiative de Cassini, sur la fabrication des boussoles, prouve chez lui le besoin impérieux de créer et d'innover. C'est par ce biais qu'il s'est orienté vers la torsion des fils, la déformation élastique et plastique des métaux et enfin vers la construction de l'un des premiers viscosimètres comme application de la balance de torsion à l'étude de la résistance mécanique des liquides.

La rhéologie lui doit beaucoup et il est heureux que le module de cisaillement porte son nom.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Bicentenaire de l'essai de 1773 de Charles Augustin Coulomb*, par J. Kerisel, Special Lecture. 8^e Congrès international de Mécanique des sols et travaux de fondations. Moscou 1973.
2. *Coulomb*, par Stewart Gillmor, Princeton University Press, 1971.
3. Communication privée de G.W. Scott Blair.

Contribution à l'étude des rapports existants entre la constitution, la structure et les propriétés rhéologiques des bitumes routiers*

par Michel KENNEL, chef du service Physique des matériaux
Jean MARVILLET, chef du service Paraffines-Bitumes

RESUME

L'analyse des bitumes sur le plan de la constitution et des propriétés, alliée à une méthode de détection de la structure, permettent de montrer l'étroite relation existant entre la constitution et la structure d'une part, et entre la structure et le comportement d'autre part.

L'équilibre entre les différentes familles moléculaires des maltènes impose aux asphaltènes une structure dans une matière visqueuse : le bitume est finalement un matériau composite et c'est là que réside le secret de sa complexité.

ABSTRACT

The bitumen analysis regarding their constitution and properties, allied to a method of structure detection, allow to show the close relation existing between the constitution and the structure on one hand, and between the structure and the behaviour on the other hand.

The balance between the different molecular families of maltenes enforces a structure to asphaltenes in a viscous material : the bitumen is finally a compound material and this is where lies the secret of its complexity.

I — INTRODUCTION

Les bitumes se présentent comme des composés dont la constitution et le comportement sont extrêmement complexes, aussi leur étude en vue d'établir des relations entre la nature chimique des corps présents et les propriétés mécaniques doit-elle être précédée par la mise au point de méthodes d'analyse aussi simples que possible, à la fois pour définir les familles des constituants et en limiter le nombre.

Quelle que soit la méthode de séparation adoptée, tous les procédés tendent dans un premier temps à séparer les asphaltènes qui représentent la fraction la plus condensée du bitume mais aussi la plus significativement différente des autres fractions dont l'association est communément appelée maltènes.

Du choix du solvant de précipitation et des conditions opératoires dépendent la qualité, le poids moléculaire, les caractéristiques physiques des asphaltènes qui se présentent d'une façon générale sous la forme d'un solide noir friable ; cependant compte tenu de leur constitution chimique particulière, on

admet qu'ils jouent un rôle singulier et que leur degré de dispersion dans les maltènes conditionne le comportement rhéologique qui peut être apparenté à un état sol ou gel. Les méthodes de séparation et d'analyse mettent en évidence des éléments tels que huiles saturées, huiles aromatiques, résines dont l'ensemble des interactions vis-à-vis des asphaltènes est responsable d'un système colloïdal dans lequel on admet généralement que les asphaltènes se trouvent sous forme de micelles plus ou moins gonflées et peptisées par les résines. Si ces micelles d'asphaltènes sont bien peptisées par les résines, le bitume aura un comportement sol, par contre si la floculation des asphaltènes est grande, le bitume aura un comportement gel. On admet en général que les bitumes oxydés pour l'industrie (forte quantité d'asphaltènes) ont un comportement gel et que celui-ci est sol pour les bitumes routiers ; en fait, il est possible de réaliser à titre de témoin expérimental de laboratoire des bitumes routiers à faible taux d'asphaltènes, mais cependant gel.

Le bitume peut être considéré comme un matériau composite constitué d'une phase visqueuse, ou maltènes dans lesquels les asphaltènes constituent un squelette de renforcement plus ou moins organisé ; la constitution du bitume ou du moins les proportions

* Conférence au Groupe français de rhéologie, le 13 octobre 1977.

et la constitution des familles chimiques en présence, conditionneront l'organisation de cette ossature et imposeront le comportement rhéologique du liant.

Ainsi il apparaît que l'étude des bitumes doit s'intéresser aux trois aspects particuliers qui sont d'une part la constitution qui peut être appréhendée grâce à l'adoption de méthodes de séparation précises permettant d'identifier chimiquement les familles, d'autre part la structure qui se trouve être le reflet de la constitution et qui joue un rôle charnière vis-à-vis du troisième aspect, c'est-à-dire le comportement rhéologique dont la structure est responsable.

II — CONSTITUTION ET COMPORTEMENT RHEOLOGIQUES DES BITUMES ROUTIERS

Toute définition de la constitution, c'est-à-dire de la répartition de familles chimiques, doit être liée à une méthode d'identification précise: ainsi une méthode de Corbett datant de 1967 [1]** qui comporte d'abord un traitement au propane pour séparer un brai d'une fraction huile appelée maltènes non volatils et ensuite sur la fraction insoluble (brai) un traitement à l'heptane pour obtenir des asphaltes durs ou asphaltènes et des asphaltes mous, conduit à trois fractions de nature chimique différente dans lesquelles on retrouve pour les maltènes non volatils des hydrocarbures paraffiniques et naphthéniques ainsi qu'une faible quantité d'hydrocarbures aromatiques, pour les asphaltes mous, principalement des aromatiques, des alkyls aromatiques et des aromatiques polaires, ces derniers constituant surtout les résines; enfin pour les asphaltes durs qui sont très peu différents des asphaltènes séparés dans le schéma que nous avons adopté, que des composés très condensés.

La répartition des composés précités est différente si l'on choisit un autre schéma, ainsi Neumann [2] considérant que le bitume est un système colloïdal à trois phases, deux phases dispersées (asphaltènes plus résines) et une phase dispersante, utilise de l'acétate d'éthyle pour précipiter asphaltènes plus résines.

En ce qui nous concerne, notre choix s'est porté sur un schéma de séparation mixte qui, d'une part précipite les asphaltènes avec du normal heptane (40 vol) à froid sous agitation, et d'autre part sépare les maltènes en utilisant la chromatographie d'adsorption sur alumine: celle-ci, CBL1 200/600 est séparée en différentes fractions qui sont recombinaisonnées pour obtenir une courbe de répartition granulométrique adaptée aux maltènes. Les trois éluants choisis sont dans l'ordre: normal heptane, benzène, mélange 50/50 en volume benzène - alcool absolu; la température d'éluion est de 40 °C. Ce processus conduit aux quatre fractions classiques déjà évoquées dans les deux paragraphes précédents.

** Les chiffres entre crochets [] renvoient à la *Bibliographie* en fin d'article.

La comparaison des rendements obtenus avec ce processus et celui de Corbett de 1967 illustre bien la différence de répartition des différents composés suivant le schéma de séparation utilisé.

Asphaltes durs	Asphaltes mous	Maltènes non volatils
22,2	48,2	29,6
22,2	22,5	37,7
Asphaltènes	Résines	Huiles aromatiques
		Huiles saturées

Asphaltes durs	Asphaltes mous	Maltènes non volatils
18,2	45,5	36,3
15,7	19	32,6
Asphaltènes	Résines	Huiles aromatiques
		Huiles saturées

Les maltènes non volatils ont une courbe de répartition moléculaire comprise entre 300 et 1 000 alors que le brai au propane (association des asphaltes durs et mous) a une courbe de répartition pouvant aller jusqu'à 20 000. Pour leur part, les asphaltènes ont un poids moléculaire rarement inférieur à 1 000 et environ 60 % sont compris entre 1 000 et 20 000; au-delà de cette valeur il est difficile d'être affirmatif sur les valeurs inscrites sur la *figure 1*, l'osmométrie à tension de vapeur étant imprécise dans ce domaine.

En choisissant notre schéma de séparation qui définit d'une part les composés à disperser (asphaltènes) et la fraction précipitante (huiles saturées) et d'autre part les fractions responsables d'une bonne solubilisation (résines et huiles aromatiques), on peut adopter un indice qui rend compte de l'équilibre entre familles incompatibles et familles solubilisant.

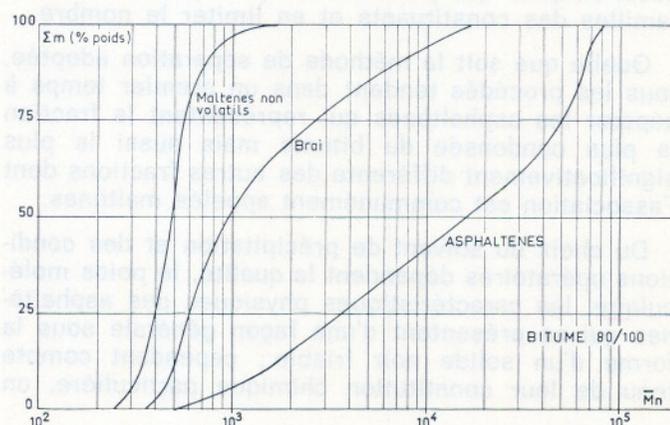


Fig. 1. — Intégrales de distributions moléculaires: bitume 80/100

tes et qui sera le reflet de la structure finale du bitume [3].

$$I_c = \frac{\text{Asphaltènes} + \text{huiles saturées}}{\text{Huiles aromatiques} + \text{résines}}$$

I_c = indice d'instabilité colloïdale.

Ainsi il est possible, grâce à des méthodes de séparation, de relier la structure (état colloïdal) des bitumes à leur constitution chimique ; de la même manière, on peut tenter d'établir des relations entre constitution et comportement rhéologique et les exemples ci-après le démontreront.

En raison du caractère non newtonien que peuvent présenter certains bitumes entre 15 et 60 °C, il est nécessaire pour apprécier une viscosité dynamique d'utiliser un viscosimètre à taux de cisaillement connu et variable : le choix d'un viscosimètre cône-

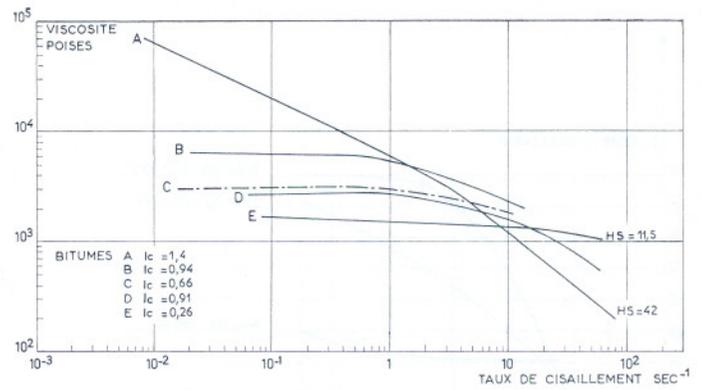


Fig. 3. — Courbes viscosité A 60 °C en fonction du taux de cisaillement Bitume 80/100

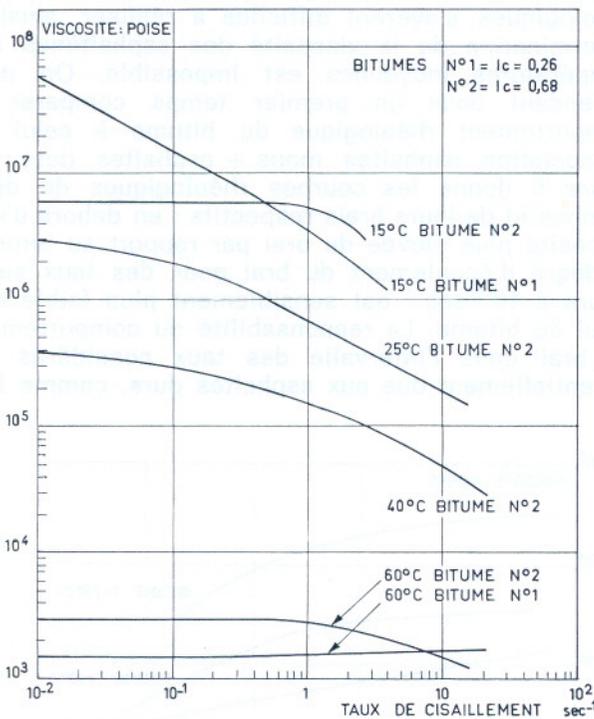


Fig. 2. — Bitumes 80/100 Courbes viscosité — Taux de cisaillement en fonction de la température

plateau s'est imposé après de nombreux essais préliminaires et les courbes obtenues montrent bien le comportement rhéologique d'un bitume donné [4] (fig. 2).

On remarquera que l'indice I_c augmente quand on passe d'un état sol à un état gel, mais qu'il n'est pas associé à un état une valeur précise ; l'influence de la température sur le comportement est importante et un bitume newtonien à 60 °C dans un intervalle de taux donné peut présenter une susceptibilité au cisaillement croissante quand la température diminue.

L'étude du comportement rhéologique dans l'optique d'une recherche de relations avec la constitution présente un intérêt accru quand on déborde largement de la plage représentée par une même classe (pénétration) de bitumes commerciaux, c'est-à-dire quand on choisit des liants fabriqués non seulement en raffinerie mais aussi au laboratoire.

La figure 3 montre à quelles différences de comportement l'on peut s'attendre quand, par exemple, des bitumes ont un taux d'asphaltènes compris entre 9 à 22 % (méthode CFR) et un taux d'huiles saturées variant de 11 à 42 % : aux faibles taux de cisaillement un bitume sol aura un comportement newtonien alors qu'un bitume gel accusera une grande susceptibilité au cisaillement.

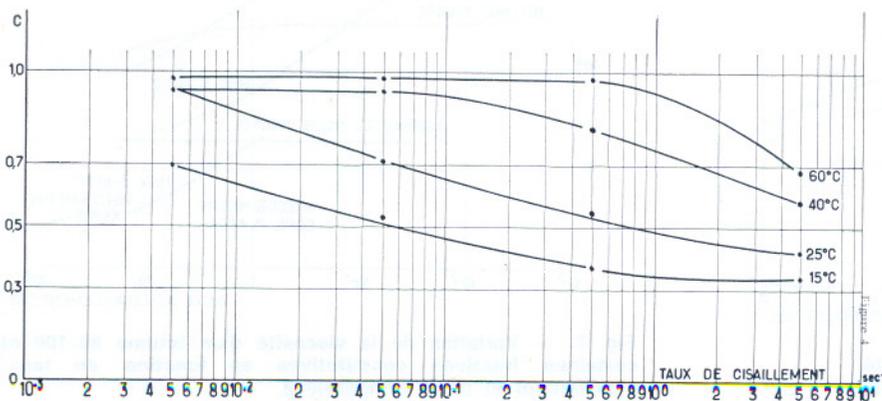


Fig. 4. — Variation du degré d'écoulement complexe en fonction du taux de cisaillement.

Bitume 80/100

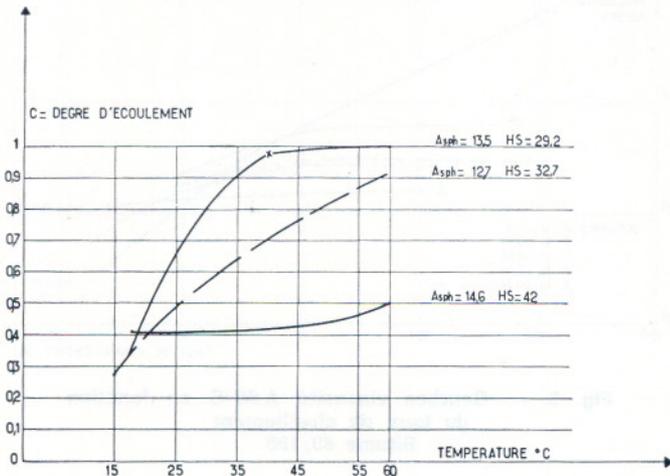


Fig. 5. — Variation du degré d'écoulement en fonction de la température
Taux de cisaillement : 0,05 sec⁻¹

Ce type de courbes est obtenu à partir de courbes contraintes - taux de cisaillement, et le comportement complexe des liants peut être plus simplement mis en évidence par une relation :

$$\sigma = \eta D^c$$

σ = contrainte de cisaillement

D = taux de cisaillement

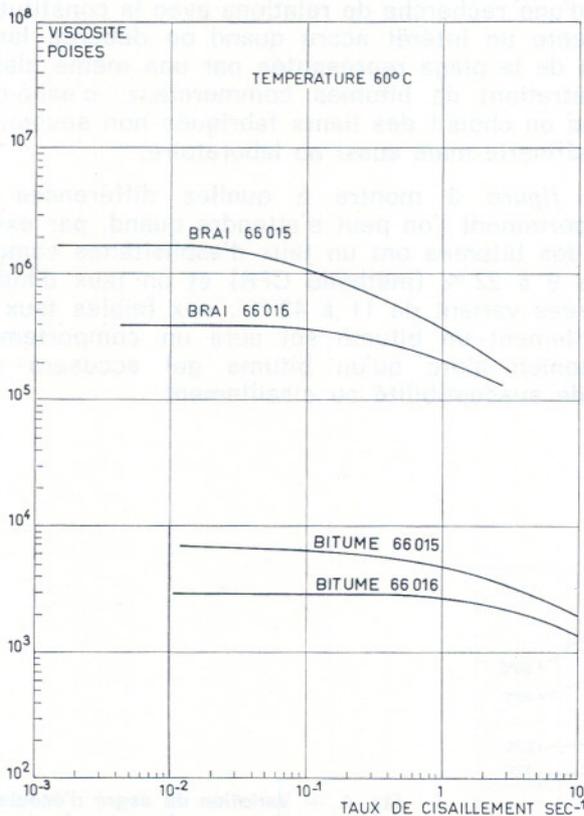


Fig. 6. — Variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement

η = viscosité
 c = degré d'écoulement

dans laquelle c rend compte du comportement.
Pour les liquides newtoniens $c = 1$.

Le degré d'écoulement complexe croît avec la température et dépend du taux de cisaillement comme le montrent les courbes de la figure 4, établies pour un bitume classique. La comparaison de bitumes de constitution différente, souligne le rôle des huiles saturées dans la responsabilité du comportement rhéologique, puisque les trois bitumes mentionnés sur la figure 5 ont pratiquement la même teneur en asphaltènes, alors que l'un est sol à 60 °C et que le plus riche en huiles saturées a une valeur de c égale à 0,5 [5].

Le rôle de chaque fraction chimique du bitume dans l'élaboration du comportement rhéologique global présente un intérêt évident à être connu, cependant il est facile de comprendre que certaines mesures rhéologiques s'avèrent difficiles à réaliser, ainsi la détermination de la viscosité des asphaltènes aux températures moyennes est impossible. On peut cependant dans un premier temps comparer le comportement rhéologique du bitume à celui de l'association asphaltés mous + asphaltés durs : la figure 6 donne les courbes rhéologiques de deux bitumes et de leurs brais respectifs ; en dehors d'une viscosité plus élevée du brai par rapport au bitume, le degré d'écoulement du brai pour des taux supérieurs à 10⁻² sec⁻¹ est sensiblement plus faible que celui du bitume. La responsabilité du comportement du brai dans l'intervalle des taux considérés est essentiellement due aux asphaltés durs, comme l'in-

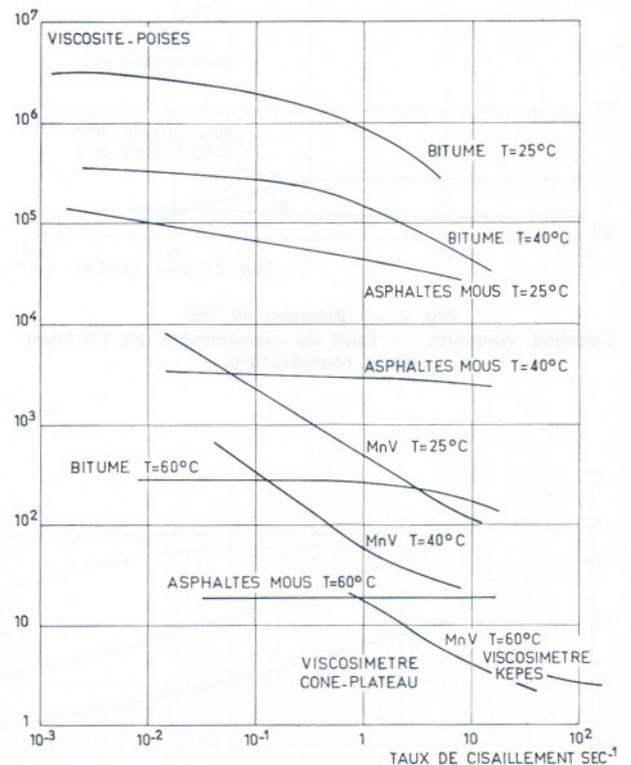


Fig. 7. — Variation de la viscosité d'un bitume 80/100 et de certaines fractions constitutives en fonction du taux de cisaillement et de la température.

dique la *figure 7* puisque la viscosité des asphaltes mous est indépendante du taux de cisaillement. Partageant cette responsabilité du comportement rhéologique complexe du bitume, les maltènes non volatils accusent une forte variation de leur viscosité en fonction du taux de cisaillement.

Ainsi les asphaltènes comme les huiles saturées ont en commun un comportement rhéologique complexe, ce qui souligne leur incompatibilité, au contraire les fractions aromatiques qui constituent une bonne phase solvante ont à la température et dans l'intervalle des taux considérés un comportement newtonien.

Dans d'autres domaines que la viscosité, la constitution présente des influences importantes, ainsi la résistance LCPC à 18 °C d'enrobés 0/10 formulés selon les directives du LCPC-SETRA peut aller de 25 bars pour un bitume gel, à 90 bars pour un bitume sol : ces deux liants ayant une pénétration comprise entre 80 et 100.

Si les enrobés à base de bitume sol sont exceptionnellement résistants aux sollicitations rapides vers 20 °C, ils sont par contre assez sensibles aux variations de température et de vitesse de déformation (*fig. 8* et *fig. 9*) : ils deviennent plus vite fragiles à froid et sont sensiblement moins résistants à chaud et aux faibles vitesses de chargement. C'est le contraire pour les bitumes gel.

Ces différences de constitution se répercutent non seulement sur la viscosité, mais aussi sur la résis-

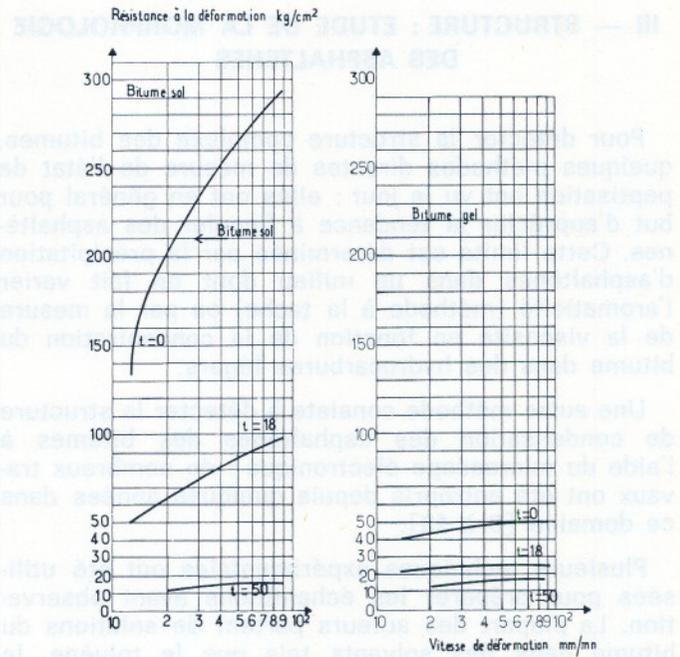


Fig. 9. — Susceptibilité des enrobés à la température et au cisaillement

tance des enrobés et d'autres caractéristiques comme le point de Fraass et la susceptibilité à la température : le tableau suivant résume ces écarts.

Type de bitume	Point de Fraass °C	Résistance LCPC (bars)					
		Température °C		0	18	50	
		Vitesse d'écrasement mm/mn		60	10	60	60
S	— 33	270	40	87	13		
G	— 5	50	20	25	16		

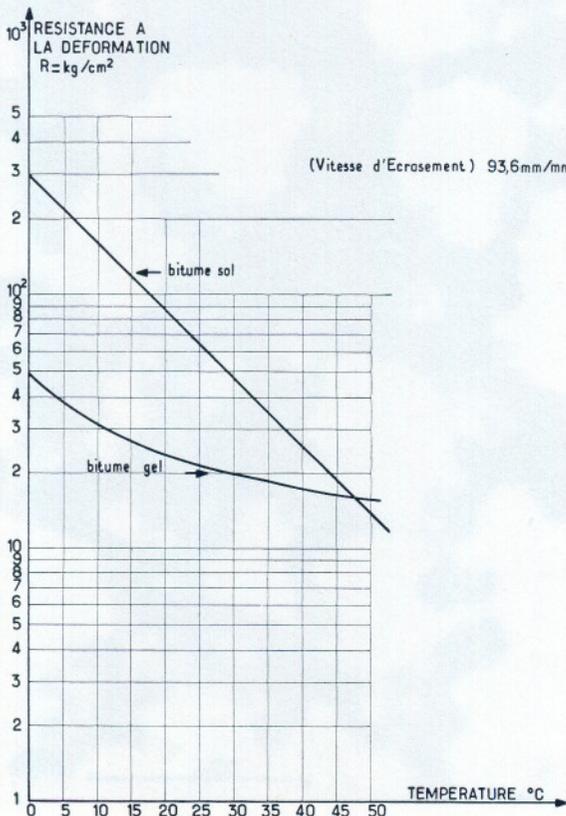


Fig. 8. — Susceptibilité des enrobés à la température

L'exemple du bitume gel choisi ici constitue en réalité un cas exceptionnel d'un bitume 80/100 fabriqué pour élargir les possibilités de l'éventail des comportements ; en fait les spécifications et directives officielles par le biais de caractéristiques faciles à mesurer, garantissent la qualité d'un liant et le situent loin des tendances extrêmes.

Un certain nombre de relations valables pour des bitumes entrant dans une même plage de pénétration, ont ainsi pu être établies entre la constitution des bitumes et les propriétés : d'une manière générale elles indiquent qu'un bitume sol aura une plus forte résistance à l'écrasement, un moins bon point de Fraass, une plus grande susceptibilité à la température, une plus faible viscosité qu'un bitume gel (dont un exemple extrême peut être un bitume oxydé utilisé dans l'industrie).

Entre ces deux états, il existe de très nombreux états intermédiaires parmi lesquels se situent les différentes catégories de bitumes routiers.

III — STRUCTURE : ETUDE DE LA MORPHOLOGIE DES ASPHALTENES

Pour détecter la structure complexe des bitumes, quelques méthodes directes de mesure de l'état de peptisation ont vu le jour : elles ont en général pour but d'apprécier la tendance à flocculer des asphaltènes. Cette limite est déterminée par la précipitation d'asphaltènes dans un milieu dont on fait varier l'aromaticité (méthode à la tache) ou par la mesure de la viscosité en fonction de la concentration du bitume dans des hydrocarbures légers.

Une autre méthode consiste à détecter la structure de condensation des asphaltènes des bitumes à l'aide du microscope électronique : de nombreux travaux ont été entrepris depuis quelques années dans ce domaine [6 à 13].

Plusieurs techniques expérimentales ont été utilisées pour préparer les échantillons avant observation. La plupart des auteurs partent de solutions du bitume dans des solvants tels que le toluène, le chloroforme, etc. et préparent des films minces par évaporation. D'autres séparent les asphaltènes, soit

directement du bitume, soit d'une solution de bitume, par précipitation avec le normal heptane, parfois le normal pentane.

Plus récemment on a vu utiliser la technique des répliques. Les répliques directes obtenues par évaporation sous vide d'un film d'or-aluminium sur une mince pellicule de bitume préalablement déposée à partir d'une solution sur un support. Le bitume est ensuite éliminé par un solvant avant observation de son empreinte superficielle [10]. Les répliques « transfert » [11] s'apparentent à des répliques extractives : du carbone est directement évaporé sur un film épais de bitume. L'échantillon est ensuite incisé à la lame de rasoir puis plongé dans un solvant du bitume. Au bout de quelques instants des pellicules de carbone se détachent, entraînant avec elles les fractions les moins solubles du bitume. Les répliques sont alors rapidement transférées dans un anti-solvant du bitume (acétone) avant traitement ultérieur et observation.

Enfin la procédé probablement le plus original est la cryo-ultramicrotomie, qui permet de prélever des coupes ultraminces (moins de 600 Å d'épaisseur) au sein même du bitume.

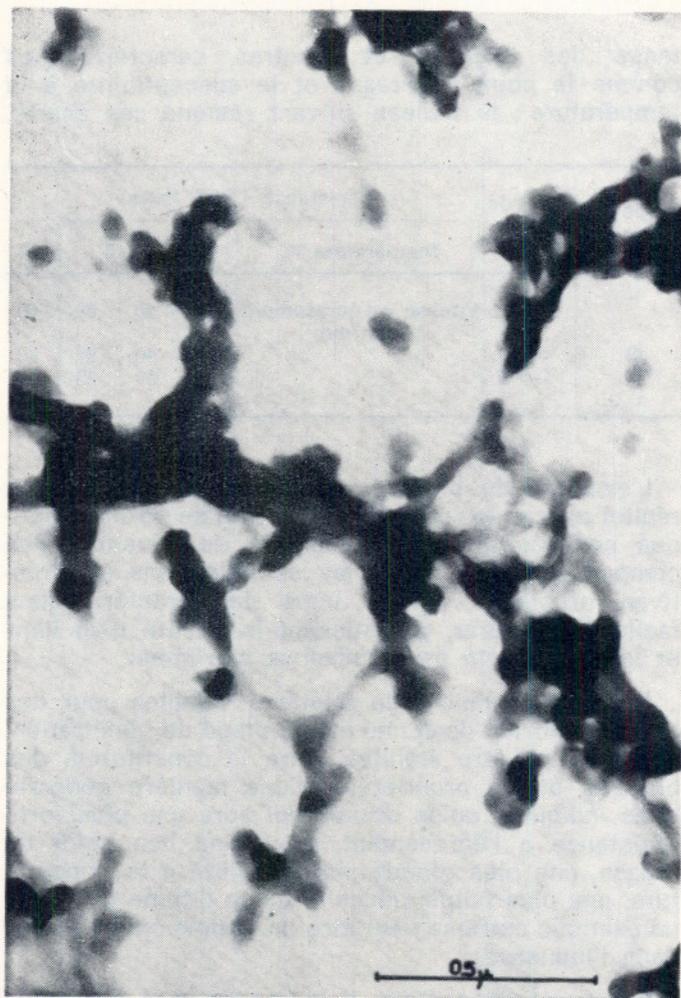


Fig. 10. — Structure d'un bitume sol après extraction à l'heptane froid

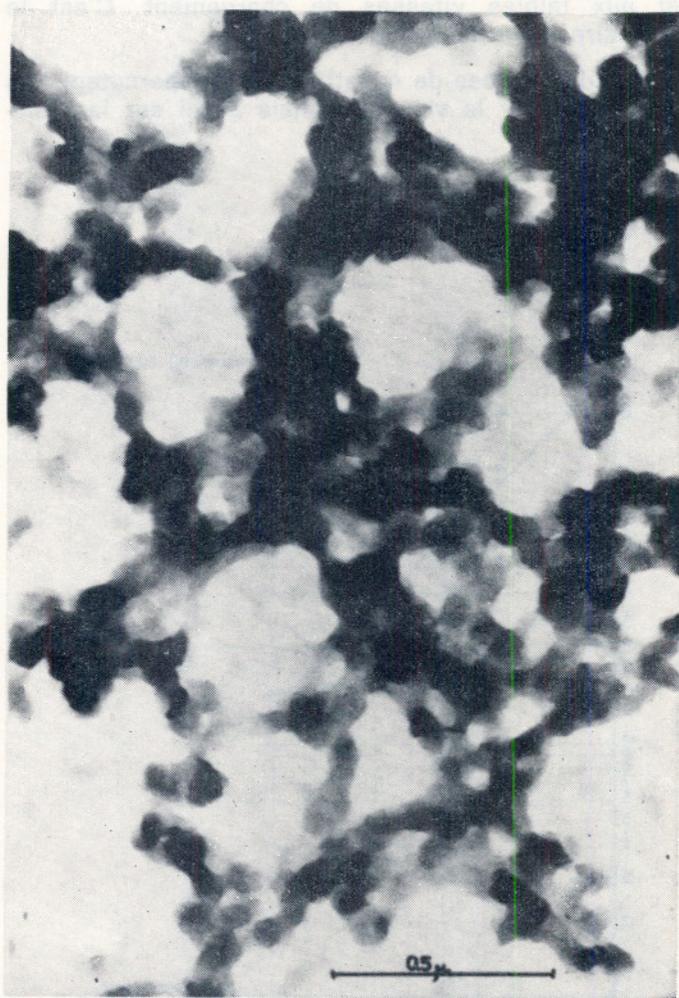


Fig. 11. — Structure d'un bitume sol après extraction à l'heptane chaud



Fig. 12. — Structure d'un bitume gel après extraction à l'heptane froid



Fig. 13. — Structure d'un bitume gel après extraction à l'heptane chaud

Ces techniques ont été longuement décrites par leurs auteurs, en particulier en ce qui concerne l'étude des précipités et des répliques « transfert » [11] [13] et celle des coupes à l'ultramicrotome [12]. Ces trois derniers auteurs se sont particulièrement attachés à mettre en évidence les types de structuration existant dans des bitumes caractéristiques du type sol ou du type gel. Pour cela ils ont traité leurs préparations, qu'il s'agisse de précipités, de répliques « transfert » ou de coupes, par lavage au n-heptane à des températures échelonnées entre 20 et 90 °C. Cette technique a l'avantage de provoquer un dépouillement progressif de l'ossature d'asphaltènes par dissolution sélective des molécules résiniques qui lui sont de plus en plus intimement associées.

On constate que les bitumes du type sol présentent toujours — dès lavage des préparations à l'heptane froid (20 °C) — des enchaînements réguliers, structurés et séparés (fig. 10), dont la morphologie rappelle celle de certains noirs de carbone. La texture de ces asphaltènes est à peine affinée par un traitement à l'heptane chaud (fig. 11). Au contraire,

un bitume gel présente toujours, que les préparations soient lavées à l'heptane froid ou chaud, une structure mal définie et diffuse. C'est l'image que l'on peut se faire d'un gel (fig. 12 et 13). Par contre, un bitume aux caractéristiques intermédiaires possède une image du type gel après lavage au n-heptane à froid et une structure du type sol lorsque cette opération est faite à chaud.

La première conclusion est que le passage d'un bitume d'une structure type gel à une structure type sol se fait progressivement. Une autre conclusion est que l'extraction au solvant paraffinique de certaines molécules non asphaltiques liées aux asphaltènes, devient de plus en plus difficile au fur et à mesure que le caractère gel prédomine. On peut peut-être retenir que le caractère gel est d'autant plus prononcé qu'avec les asphaltènes sont précipitées, et donc plus intimement liées, d'autres molécules, en particulier celles qui sont à la limite de la compatibilité avec le milieu solvant, à savoir les résines ; il est possible aussi que la taille des asphaltènes soit un paramètre non négligeable de leur association ; en effet les bitumes oxydés de structure fortement

gel ont des asphaltènes de poids moléculaires beaucoup plus élevés que ceux trouvés dans les bitumes sol.

IV — DISCUSSION

Les résultats décrits montrent que les structures observées sont caractéristiques du type de bitume considéré et qu'il est dès lors possible de relier : constitution - structure et propriétés.

Le comportement rhéologique d'un liant, par exemple en cisaillement pur est gouverné par au moins deux facteurs :

- d'une part le caractère visqueux et plus ou moins complexe de la matrice (maltènes) ;
- d'autre part le niveau de renforcement structural des asphaltènes.

Le problème est de mettre bien en évidence les facteurs responsables de la catégorie de morphologie et de comportement des bitumes routiers compte tenu d'un certain nombre de constatations. A un bitume sol sont alliés une structure bien définie des asphaltènes et un comportement qui se manifeste sous la forme d'une grande variation d'un certain nombre de caractéristiques en fonction de la température (résistance - viscosité) : tout se passe comme si la matrice montrait elle-même une semblable variation en fonction de la température, c'est-à-dire avait un comportement newtonien. Pour un bitume gel au contraire, la déformation provoquera une désagrégation de la structure et c'est de ce phénomène que provient le caractère non newtonien. La structure est floue, mal définie, comme si les asphaltènes étaient soit associés les uns aux autres, soit plus volumineux que ceux d'un bitume sol, soit encore gonflés par d'autres composés comme les résines par exemple. On peut aussi constater que ces bitumes sont moins susceptibles à la température, c'est-à-dire que tout se passe comme si la viscosité des maltènes (fraction huileuse plus ou moins riche en résines) était moins sensible aussi aux variations de température.

Les facteurs responsables de la catégorie de morphologie et de comportement à laquelle appartient un bitume, doivent être cherchés au niveau de la constitution et pour établir plus facilement une corrélation, il faut essayer de faire appel à des fractions assez bien définies plutôt qu'à des familles qui ne correspondent pas à des entités chimiques bien claires ; à cet égard la séparation par chromatographie d'adsorption paraît donner plus d'avantages que celle de Corbett de 1967, car elle fournit des huiles saturées et des huiles aromatiques au lieu de maltènes non volatils (riches en saturés mais moins « purs » que les fractions éluées au normal heptane) et d'asphaltes mous (mélange d'aromatiques et d'aromatiques polaires). Notons à cet égard qu'une nouvelle méthode publiée par M. Corbett en 1970 fait appel aussi à la chromatographie et est comparable à notre méthode mise au point à la même époque.

Les observations microscopiques ou des méthodes plus simples montrent clairement que les asphaltènes sont incompatibles avec les fractions saturées ; ainsi doit-on faire appel à deux paramètres de constitution pour comprendre la structure et le comportement des liants : l'aromaticité des maltènes est pour le moins tout aussi importante à considérer que le pourcentage d'asphaltènes.

En effet il est bien évident que les asphaltènes mis dans des maltènes riches en aromatiques et polaires aromatiques sont bien plastifiés, solubilisés et conduisent donc à une structure organisée. Au contraire, si les maltènes sont faiblement aromatiques, les asphaltènes plus ou moins associés à quelques résines précipiteront et conduiront à un réseau diffus et dense. Le rapport I_0 défini précédemment appréhende précisément les deux critères qui nous paraissent les plus importants.

Ainsi le bitume classé comme sol ne contenait qu'une faible teneur en huiles saturées (~ 9) et un indice I_0 égal à 0,26 alors que le bitume gel en avait 42 et un indice I_0 égal à 1,4.

Dans le cas d'un bitume sol, les maltènes ayant une faible teneur en huiles saturées et une forte teneur en aromatiques constitueront une matrice qui plastifiera bien les résines et seuls seront précipités les asphaltènes qui formeront une structure organisée ; le comportement rhéologique du bitume aura le caractère de celui des maltènes, c'est-à-dire un comportement newtonien comme le montrent les courbes de viscosité de la figure 3. La viscosité de la matrice

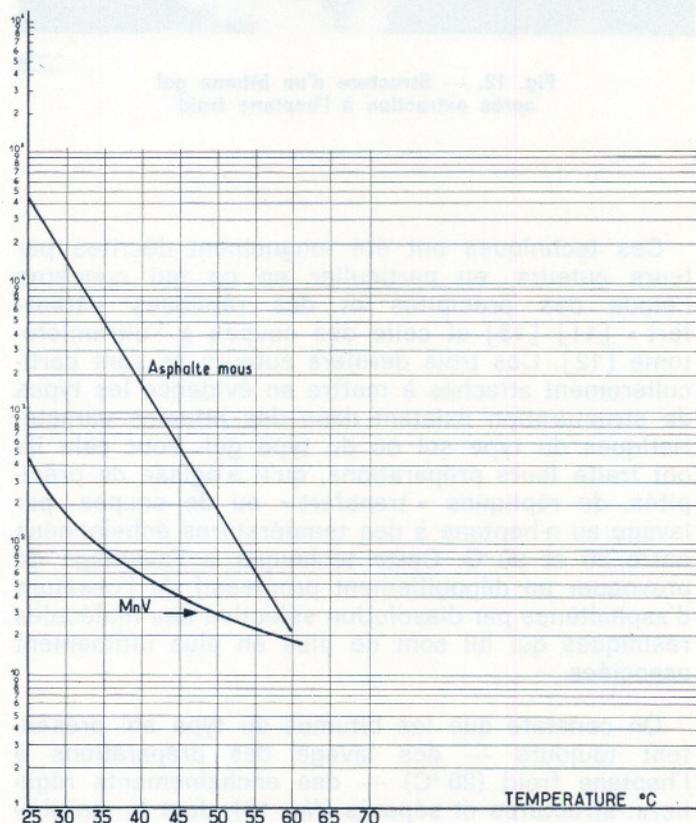


Fig. 14. — Variation de la viscosité en fonction de la température

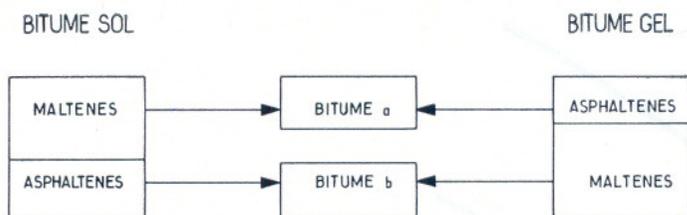


Fig. 15

aromatique variera plus rapidement que la viscosité d'une matrice saturée, ainsi que le soulignent les courbes de variation de la viscosité des asphaltes mous et maltènes non volatils entre 25 et 60 °C au taux de cisaillement de 1 sec^{-1} (fig. 14) : en effet les fractions saturées sont beaucoup moins susceptibles à la température que les fractions aromatiques.

Le comportement du bitume gel riche en huiles saturées sera évidemment opposé au précédent pour les mêmes raisons.

Il est certain qu'un seul paramètre ne peut tout expliquer, et si les huiles saturées ont de l'importance, ce sont cependant les asphaltènes par leurs caractéristiques propres qui apportent de la cohésion au produit dont la matrice par son aromaticité plus ou moins poussée est responsable du type d'organisation comme le montre l'exemple simple et suivant.

Il suffit de séparer les asphaltènes de deux bitumes au comportement nettement différent, puis de reconstituer ces bitumes en incorporant les asphaltènes du bitume sol aux maltènes du bitume gel et vice-versa [9]. La figure 15 schématise cette opération. Les asphaltènes sont séparés du bitume par précipitation au n-heptane froid (10 volumes). On

procède à plusieurs lavages successifs des asphaltènes pour parfaire l'opération. A partir des constituants des deux bitumes, S et G, on prépare alors deux bitumes artificiels, a et b, par mélange à chaud en atmosphère inerte. En observant ces bitumes « artificiels » au microscope électronique on constate que la structure est conservée avec la nature des maltènes. La morphologie des asphaltènes du bitume reconstitué « a » est celle d'un bitume sol, tandis que les asphaltènes du bitume « b » ont adopté une structure gel. C'est donc bien la constitution de la matrice huileuse qui impose la forme de précipitation des fractions lourdes des bitumes. Qu'en est-il du comportement rhéologique ?

La figure 16 donne les courbes d'écoulement obtenues à 40 °C avec un viscosimètre à cylindres coaxiaux (Rotovisko) sur un bitume sol et un bitume moyennement gel, respectivement. On distingue nettement le caractère linéaire du bitume sol et l'allure non newtonienne du bitume gel. Les courbes d'écoulement des bitumes obtenus après permutation des asphaltènes sont à la figure 17. Le bitume « a », obtenu en associant des maltènes sol aux asphaltènes gel, est newtonien, l'autre « b » ne l'est pas. D'autres caractéristiques de ces différents bitumes se trouvent dans le tableau 1.

TABLEAU 1

Type de bitume	Pénétration	IP (LCPC)	Résistance LCPC 18° - 6 cm/mn
S	87	- 1,5	98
G	87	- 0,2	57
a	75	- 1,2	95
b	72	- 0,4	58

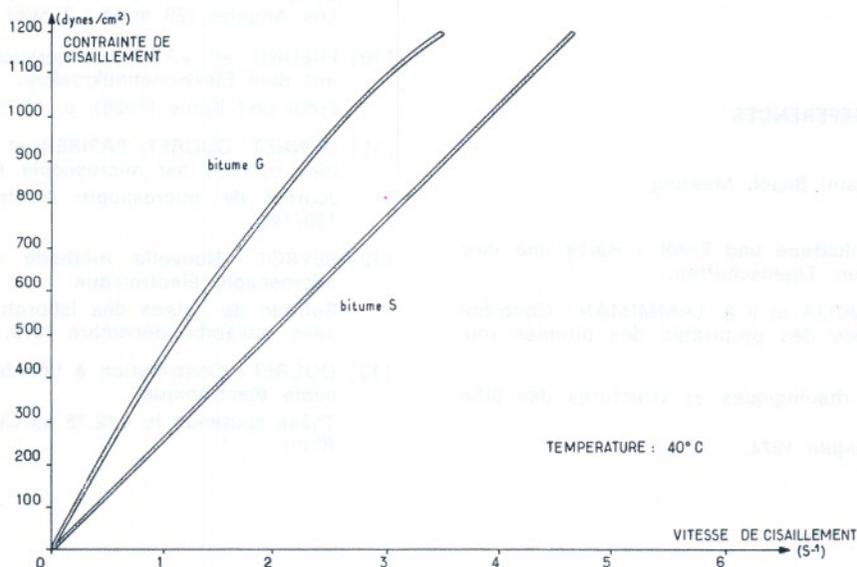


Fig. 16

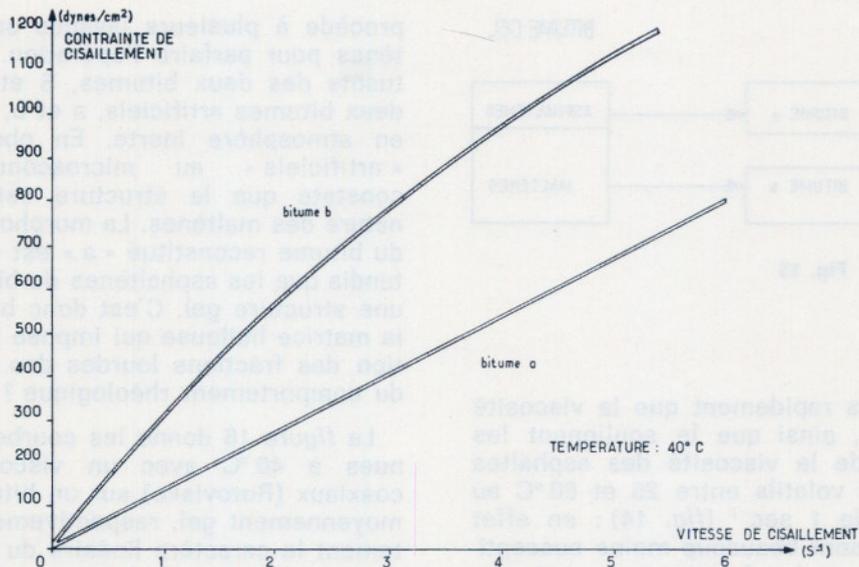


Fig. 17

V — CONCLUSION

L'étude du comportement rhéologique et de la structure de différents types de bitumes permet de montrer l'étroite relation entre la constitution et la structure, d'une part, entre la structure et le comportement d'autre part. Ce qu'il est important de retenir c'est que la constitution d'un bitume conditionne sa structure et donc ses caractéristiques rhéologiques, essentiellement par le biais de l'équilibre entre les différentes familles moléculaires des maltènes. Les asphaltènes, et éventuellement certaines résines, adoptent dans cette matrice visqueuse la structure que cet équilibre leur impose. Un bitume est finalement un matériau composite et c'est bien là que réside le secret de sa complexité.

REFERENCES

- [1] CORBETT : A.C.E. Miami Beach Meeting, 9-14 avril 1967.
- [2] H.J. NEUMANN : Asphaltene und Erdöl - Harze und ihre bedeutung für Bitumen. Eigenschaften.
- [3] Ch. GAESTEL, R. SMADJA et K.A. LAMMIMAN : Contribution à la connaissance des propriétés des bitumes routiers.
- [4] KENNEL : Propriétés rhéologiques et structures des bitumes routiers. Revue de l'AFTP, mai-juin 1974.
- [5] MARVILLET : Influence de la composition des bitumes sur leur comportement rhéologique. Annual Meeting AAPT, février 1975.
- [6] DICKIE, HALLER et TEH FU YEN : Electron microscopic investigations on the nature of petroleum asphaltics. Journal of Colloid and Interface Science, vol. 29, 3 (1969), p. 475.
- [7] DARAGAN et KOROLEV : Influence des particularités structurales des bitumes sur leurs propriétés. Trudy Kharkoskogo Politekhniceskogo Instituta, URSS, 8 (1969), p. 63/68.
- [8] PECENYJ : Structure supermoléculaire du bitume et du polymérisat-bitume. Kolloidnyj Zurnal, 32, 6 (1970), p. 890/894.
- [9] REERINK : Size and shape of asphaltene particles in relation to rheological properties of bitumes. Symposium on the science of asphalt in construction, Los Angeles (28 mars - 2 avril 1971).
- [10] FREUND et VATJA : Untersuchung der Bitumenstruktur mit dem Elektronenmikroskop. Erdöl und Kohle (1958), p. 13/18.
- [11] DONNET, DUCRET, PAPIRER et KENNEL : Etude des bitumes routiers par microscopie électronique. Journal de microscopie électronique, 17, 2 (1973), p. 139/144.
- [12] PEYROT : Nouvelle méthode d'étude des bitumes par microscopie électronique. Bulletin de liaison des laboratoires des Ponts et Chaussées, novembre-décembre 1973.
- [13] DUCRET : Contribution à l'étude des bitumes par microscopie électronique. Thèse soutenue le 4.12.75 au Centre universitaire du Haut-Rhin.

Une nouvelle méthode de calcul du module complexe des mélanges bitumineux*

par P. UGE, G. GEST, A. GRAVOIS et F. BONNAURE, Shell Française, centre de recherche de Grand-Couronne

RESUME

Douze mélanges bitumineux ont été sélectionnés pour couvrir toute la gamme utilisée en technique routière et dans les travaux hydrauliques. La détermination de leur module complexe en régime dynamique à l'aide d'un appareillage de flexion 2-points a permis de dégager les conclusions suivantes :

— le module de rigidité du mélange (quotient de l'amplitude de la contrainte exercée sur celle de la déformation relative résultante) pour des températures et des temps de charge où le module du bitume est supérieur à 5×10^6 N/m² dépend essentiellement :

- . du module de rigidité, calculé dans les conditions de sollicitation, du liant bitumineux contenu dans le mélange,
- . des proportions en volume des différents constituants du mélange (granulat, liant bitumineux, air) ;

— l'angle de perte (déphasage entre les signaux contrainte et déformation) est surtout influencé par :

- . la consistance du liant,
- . le pourcentage en volume de ce liant.

Ces observations ont permis de mettre au point une méthode de calcul du module complexe qui s'applique à toutes les compositions bitumineuses depuis des mélanges de filler et de bitume (mastics) jusqu'aux enrobés routiers très ouverts. Le module de rigidité et l'angle de perte sont déterminés soit par deux nomogrammes, soit à l'aide d'un programme de calcul sur ordinateur.

ABSTRACT

This paper deals with the study of twelve bituminous mixes selected to cover the whole range of mixes for road, air-field and hydraulic work applications. The determination of their stiffness modulus and loss angle under dynamic load, with the aid of a 2-point bending machine has led to the following conclusions :

— the stiffness modulus of the mix (ratio of the stress amplitude to the strain amplitude), at relatively low temperatures and short times of loading (stiffness of bitumen $> 5 \times 10^6$ N/m²), is essentially dependent on :

- . the stiffness modulus of the bitumen binder contained in the mix, under the applied conditions,
- . the volume percentages of the different mix components (aggregates, bitumen binder, air) ;

— the loss angle (phase lag between the stress and the strain) is mainly influenced by :

- . the bitumen binder consistency,
- . the volume percentage of this binder.

From these findings, a method of predicting the stiffness modulus and loss angle has been developed. This method is applicable to all asphalt paving mixtures from filler-bitumen (mastic) mixes to very open (high voids) mixes for roads. The stiffness modulus and the loss angle are determined with the aid of two nomographs or of a computer programme.

1. INTRODUCTION

La connaissance des caractéristiques fondamentales (module d'Young et coefficient de Poisson) et des lois de comportement (fissuration par fatigue, déformation permanente par fluage) des matériaux routiers est indispensable pour concevoir une méthode rationnelle de dimensionnement de chaussées.

Il est donc nécessaire de disposer de méthodes de calcul assez justes afin d'éviter de faire des mesures expérimentales complémentaires.

La répartition des contraintes et des déformations dans une chaussée peut être calculée dans la plupart des cas avec une très bonne précision en supposant les matériaux élastiques. Des modèles plus ou moins compliqués peuvent alors dans une deuxième phase être appliqués à telle ou telle fraction élémentaire soumise à l'état de contrainte ainsi défini. Une sommation permet ensuite de prévoir ce qui se passe dans toute l'épaisseur de la chaussée.

* Conférence au Groupe français de Rhéologie, le 17 mars 1977.

Les enrobés bitumineux sont des corps viscoélastiques, leurs propriétés mécaniques dépendent de la durée de la sollicitation qu'ils subissent et de la température à laquelle celle-ci s'exerce. L'hétérogénéité du matériau complique en outre le problème : le liant bitumineux est responsable du caractère viscoélastique alors que le squelette minéral assure la résistance. La grande variété des constituants (bitumes et granulats) et des formules d'enrobés utilisées expliquent probablement pourquoi leurs propriétés mécaniques ne sont pas encore très bien connues.

Un programme expérimental a été établi pour déterminer les facteurs qui influençaient le plus le module d'élasticité des mélanges bitumineux. Ce travail s'est inscrit dans un effort continu déployé par les laboratoires de notre groupe depuis une vingtaine d'années pour remettre à jour et simplifier tout en améliorant leur précision les outils (abaques, nomogrammes, etc.) mis à la disposition des ingénieurs routiers qui leur permettent de calculer les caractéristiques fondamentales des enrobés, lorsque le module du bitume est supérieur à $5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$.

L'analyse des résultats obtenus a permis d'élargir le champ d'application des méthodes de calcul du module déjà existantes qui étaient, en général, spécifiques à un type d'enrobé, tout en augmentant la précision du calcul [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7]**. La nouvelle approche fait appel soit à deux nomogrammes, soit à un programme de calcul sur ordinateur.

2. METHODES EXISTANTES DE CALCUL DU MODULE COMPLEXE DES MELANGES BITUMINEUX

Les corps viscoélastiques ont des propriétés mécaniques qui dépendent de la durée de la sollicitation (ou de sa fréquence) et de la température. Lorsqu'on applique sur un tel matériau une contrainte sinusoïdale de la forme $\sigma_0 \sin \omega t$, il y a accommodation et la déformation relative résultante est également sinusoïdale. Les deux signaux ont même fréquence mais ils sont déphasés : la déformation relative $\varepsilon_0 \sin(\omega t - \varphi)$ est en retard par rapport à la contrainte (fig. 1).

Nous avons désigné sous le nom de module de rigidité, S, le rapport des amplitudes respectives de la contrainte et de la déformation relative :

$$S = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Le déphasage φ est appelé angle de perte. Sa valeur donne une idée de la prédominance du caractère visqueux ou élastique du matériau dans des conditions bien déterminées (pour un corps élastique φ est nul et pour un corps visqueux φ est égal à 90 degrés).

** Les chiffres entre crochets [] renvoient à la Bibliographie en fin d'article.

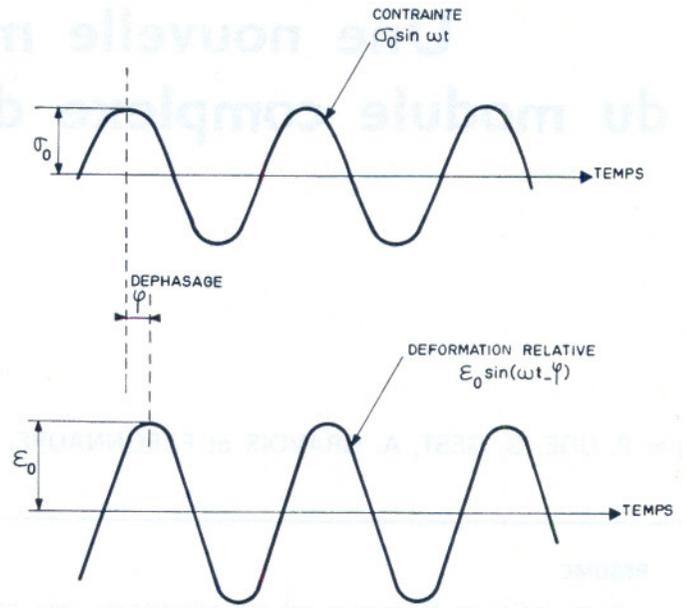


Fig. 1. — Enregistrement de signaux contrainte et déformation types

Le module complexe d'un corps viscoélastique est le nombre complexe, E^* , qui a pour module, S, et dont l'argument est égal à φ (fig. 2).

$$E^* = S e^{i\varphi} = S \cos \varphi + i S \sin \varphi \quad (2)$$

Cette notion de module complexe a été introduite pour généraliser les lois de la mécanique en principe réservées aux seuls corps élastiques. Les mêmes formules peuvent alors être appliquées à des matériaux élastiques ou viscoélastiques, moyennant pour ces derniers l'utilisation des nombres complexes. Rappelons enfin que les parties réelles et imaginaires du module complexe, $S \cos \varphi$ et $S \sin \varphi$ sont souvent respectivement appelées module de conservation et module de perte. Dans les cas particuliers du bitume et des mélanges bitumineux S et φ sont notés S_b et φ_b d'une part, et S_m et φ_m d'autre part.

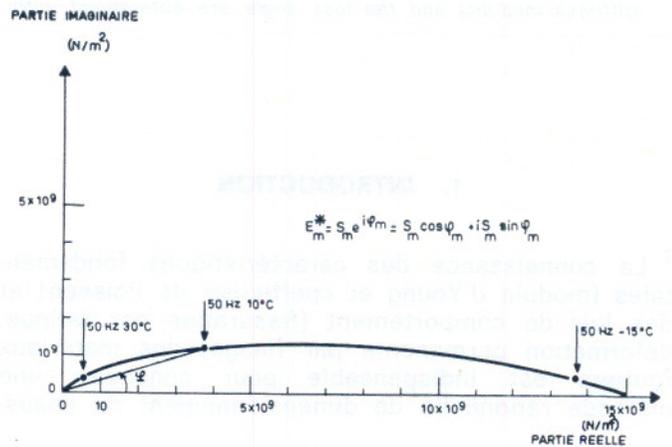


Fig. 2. — Evolution du module complexe, E_m^* , d'un mélange bitumineux lorsque la consistance du liant varie (mélange L)

La détermination du module complexe d'un bitume pur ou d'un mélange bitumineux nécessite un appareillage coûteux et du personnel qualifié ; plusieurs méthodes ont par le passé été proposées pour calculer ce module complexe.

2.1. Calcul du module de rigidité du bitume pur

Le nomogramme de Van der Poel [8] permet de calculer le module des bitumes purs. Il a été élaboré il y a une vingtaine d'années au laboratoire Shell d'Amsterdam (KSLA) et légèrement modifié récemment.

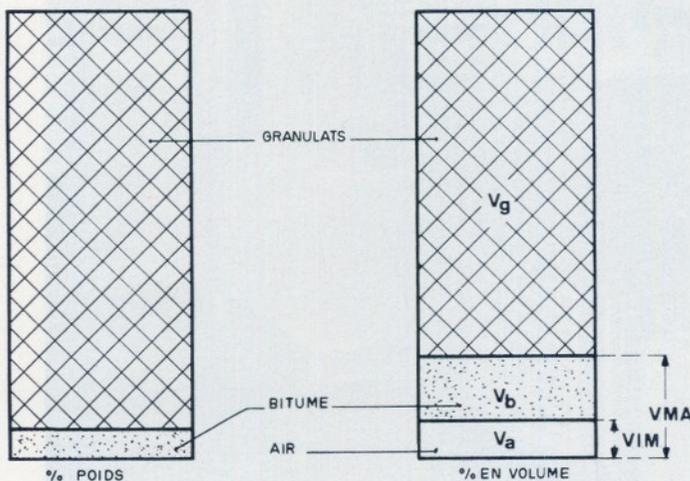
Ce nomogramme permet de calculer le module de rigidité du bitume (S_b), à un facteur 2 près, ce qui est assez remarquable compte tenu de la très grande plage de variation de S_b . Des travaux complémentaires ont depuis confirmé la validité de ce nomogramme qui est utilisé actuellement dans le monde entier.

2.2. Calcul du module de rigidité des mélanges bitumineux

La plupart des méthodes, proposées pour calculer le module de rigidité, S_m , des mélanges bitumineux¹, font appel aux pourcentages en volume des différents constituants (fig. 3). Nous avons désigné par :

- V_g , le pourcentage en volume occupé par les granulats
- V_b , le pourcentage en volume occupé par le bitume
- V_a , le pourcentage en volume occupé par l'air.

V_a n'est autre que le pourcentage de vides d'un enrobé (V.I.M.). La compacité est par conséquent



V.I.M. POURCENTAGE DE VIDES DE L'ENROBE.
V.M.A. POURCENTAGE DE VIDES DANS LES GRANULATS

Fig. 3. — Comparaison des proportions des différents constituants d'un mélange bitumineux

1. Dans des conditions où le module du bitume est supérieur à 5×10^6 N/m².

égale à la somme ($V_g + V_b$) et le pourcentage de vides des granulats (V.M.A.) est égal à la quantité ($V_a + V_b$).

Les méthodes les plus connues pour estimer S_m sont :

2.2.1. La méthode de KSLA (Laboratoire Shell d'Amsterdam)

Poursuivant ses travaux, Van der Poel [1] [2] arriva à la conclusion que le module de rigidité des enrobés S_m dépendait du module du bitume et de la concentration volumique des granulats C_v :

$$C_v = \frac{V_g}{V_g + V_b}$$

Ses travaux repris et complétés par Heukelom et Klomp [2] ont conduit en 1964 à exprimer le module de rigidité S_m d'un mélange sous la forme :

$$S_m = S_b \left(1 + \frac{2,5}{n} \frac{C_v}{1 - C_v} \right)^n$$

avec $n = 0,83 \log \frac{4 \times 10^{10}}{S_b}$

S_m et S_b : N/m²

Cette formule permet de calculer le module d'une grande variété de compositions. Elle a cependant été mise au point à l'aide d'expériences réalisées sur des enrobés contenant au plus 3 % de vides. Or, ce facteur influence fortement la valeur du module d'un enrobé et la formule s'applique mal à des enrobés relativement moins compacts.

Pour pallier cette lacune Fijn van Draat et Sommer [3] en 1965 ont proposé de remplacer C_v par C'_v :

avec $C'_v = \frac{100 \times C_v}{100 + V_a - 3}$

2.2.2. La méthode de Saunier (Centre de Recherche Shell de Grand-Couronne)

Les résultats obtenus par Saunier [4] en 1967 mettent en évidence qu'il est possible de prévoir avec une bonne approximation le module de rigidité d'un enrobé correctement dosé en liant si on connaît :

- le module du bitume ;
- le pourcentage de vide du mélange V_a .

Saunier utilisait la valeur du module du bitume déduite des caractéristiques nominales du liant, c'est-à-dire avant enrobage.

Mais il existe parfois des différences considérables entre les caractéristiques du bitume d'origine et celles du bitume réellement présent dans la route. Cela a une influence importante sur le module du bitume S_b et par conséquent sur le module de l'enrobé S_m .

2.2.3. La méthode du CRR

En 1971, M. Verstraeten [5] arrive à la conclusion qu'il existe une relation entre $\frac{S_m}{V_E}$ et le produit $S_b \times \gamma$.

(γ est un facteur qui dépend de la pénétration du bitume).

Les résultats repris par Francken [6] [7] en 1975 conduisent à la mise au point d'une méthode prévisionnelle du module complexe à partir de la connaissance de deux paramètres de composition (V_b et V_a) et du module du bitume avant enrobage.

Cependant la méthode de calcul est assez complexe et ne convient qu'à une gamme assez faible

de mélanges bitumineux. Elle ne tient pas compte par ailleurs (comme la méthode de Saunier) du vieillissement du bitume au cours du malaxage et dans le temps.

Toutes ces méthodes s'appuient sur des résultats expérimentaux obtenus sur des gammes d'enrobés plus ou moins étendues. Elles permettent donc de bien retrouver les modules des enrobés étudiés : les mastics et les enrobés denses par la méthode de Van der Poel, les enrobés ouverts par la méthode de Saunier, les bétons bitumineux pour couche de roulement par la méthode de Verstraeten. Les méthodes de MM. Van Draat et Sommer et de MM. Francken et Verstraeten permettent de couvrir une gamme plus large mais elles deviennent plus compliquées.

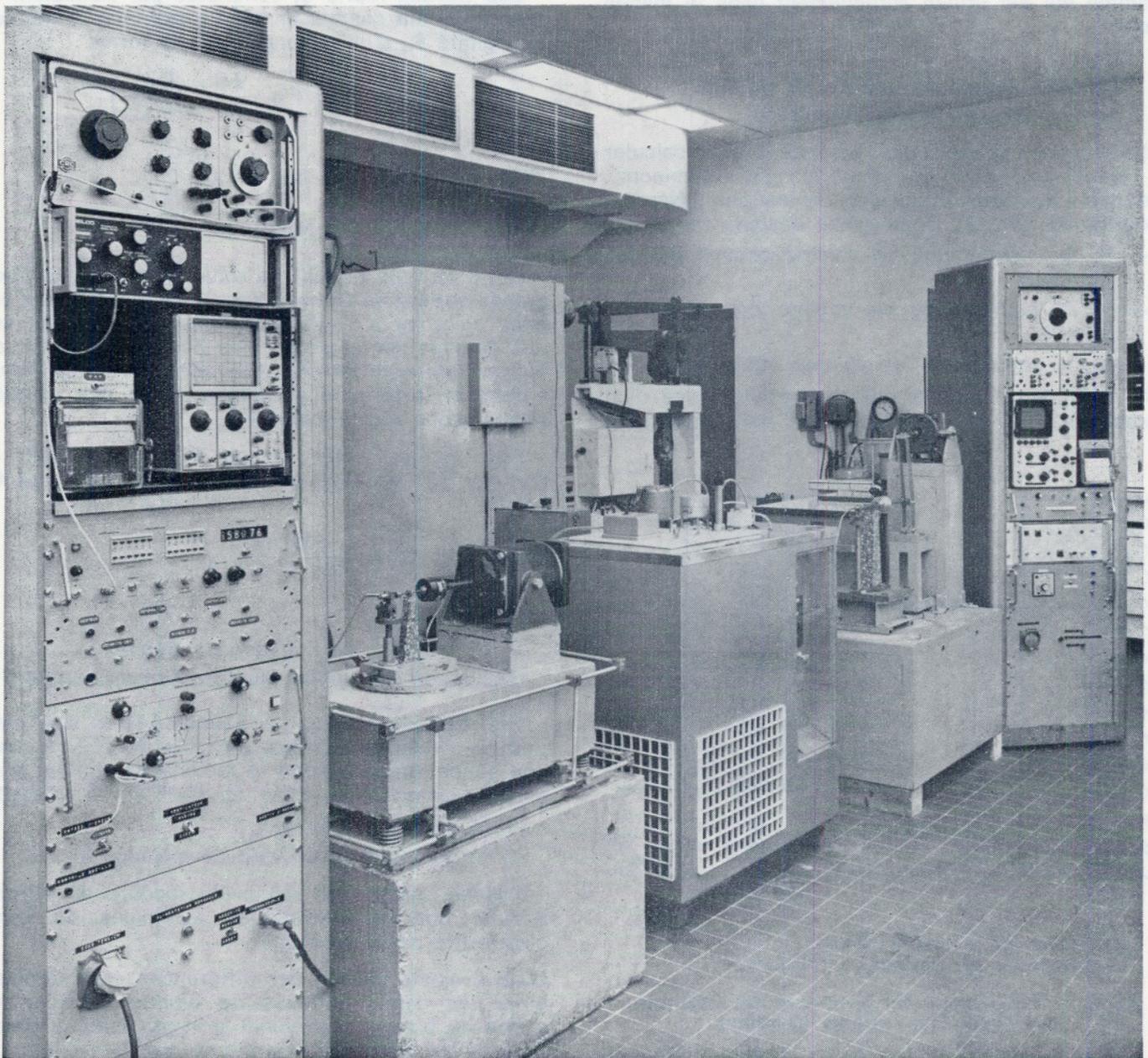


Photo 1. — Vue générale de l'appareillage pour mesurer le module complexe des mélanges bitumineux

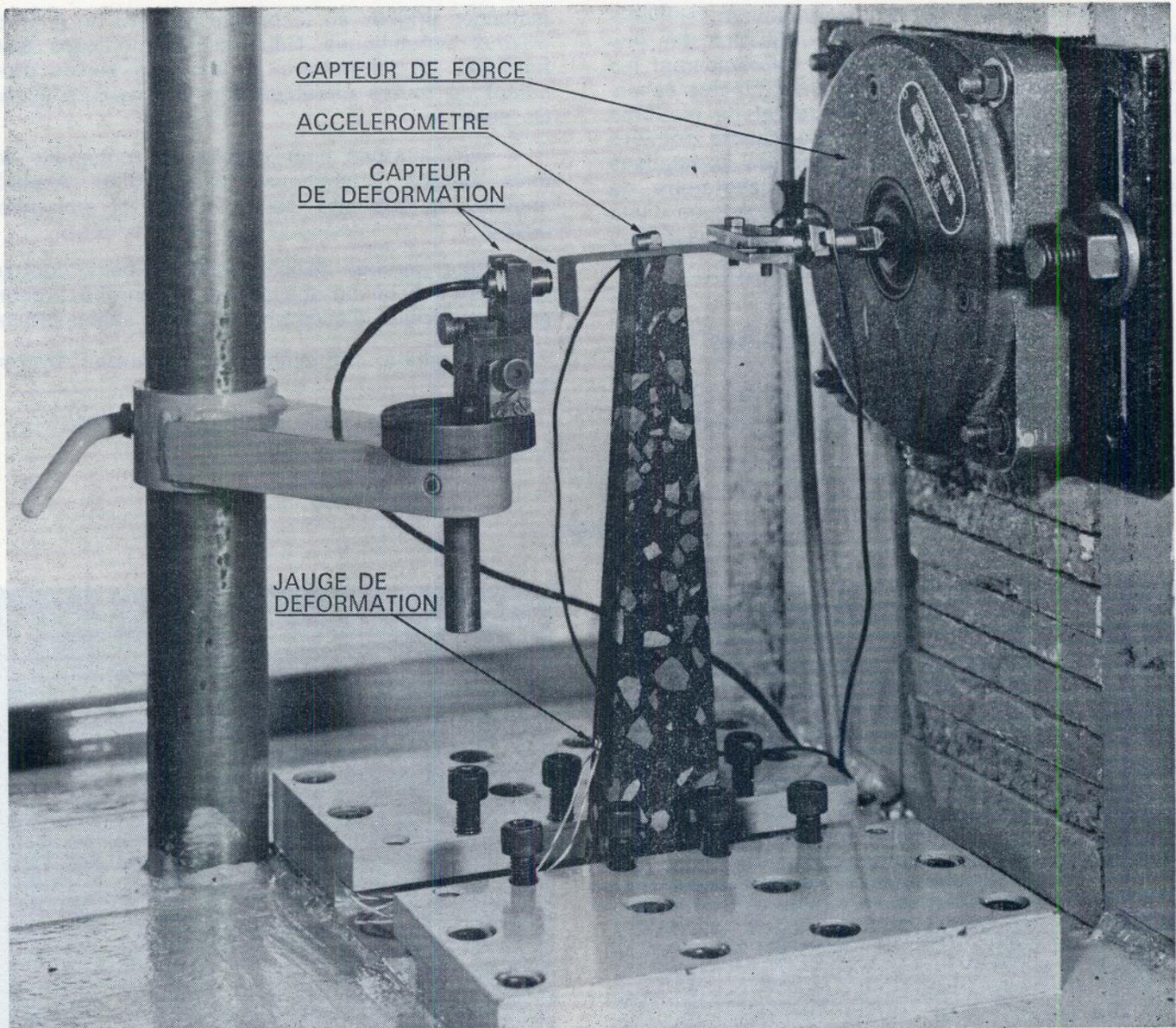


Photo 2. — Vue détaillée d'une éprouvette en cours d'essai

La méthode du CRR ainsi que la méthode de Saunier ne permettent pas en outre de tenir compte du vieillissement du bitume qui se produit au cours du malaxage ou dans le temps en particulier quand le mélange a un pourcentage de vides important.

3. DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE UTILISE

L'appareillage utilisé est décrit en détail dans des articles publiés précédemment [4] [11]. Nous en rappelons seulement le principe. Il s'agit d'un appareil de flexion « 2-points » permettant de tester des éprouvettes de profil trapézoïdal (hauteur : 250 mm, grande base : 55 mm, petite base : 20 mm, épaisseur : 20 mm) (photos 1 et 2). L'éprouvette collée à un crampon métallique par la grande base est fixée ver-

ticalement sur un bâti de béton de ciment. Une lame métallique mince, collée sur la petite base, est reliée d'un côté au vibreur électromagnétique et sert de l'autre côté à mesurer le déplacement de l'extrémité de l'éprouvette. Des jauges de déformation sont en outre collées à mi-hauteur sur les faces latérales de l'éprouvette (photo 2). L'échantillon encastré est alors soumis à des sollicitations de flexion alternée.

Les mesures de la force appliquée et du déplacement de l'extrémité de l'éprouvette permettent, par un simple calcul de résistance des matériaux, de déterminer le module de rigidité de l'échantillon. La déformation relative mesurée sur la fibre extérieure de l'éprouvette (à l'aide des jauges de déformation) et la force délivrée par le vibreur permettent de calculer d'une autre manière le module de rigidité de l'échantillon. Les deux valeurs obtenues doivent être très voisines si les mesures sont correctes.

La validité de la méthode expérimentale (solicitation, élancement de l'éprouvette, utilisation des jauges de déformation) a été vérifiée en comparant les modules d'élasticité ainsi déterminés sur des échantillons de roches (granit et marbre) et de matières plastiques (P.V.C. et nylon) avec les valeurs trouvées sur nos échantillons par des instituts spécialisés dans l'étude de ces matériaux (le laboratoire de mécanique des roches de l'Ecole polytechnique d'une part et le Centre d'études des matières plastiques d'autre part).

4. DESCRIPTION DES MELANGES

Douze formules types d'enrobés ont été sélectionnées de manière à couvrir la gamme complète des

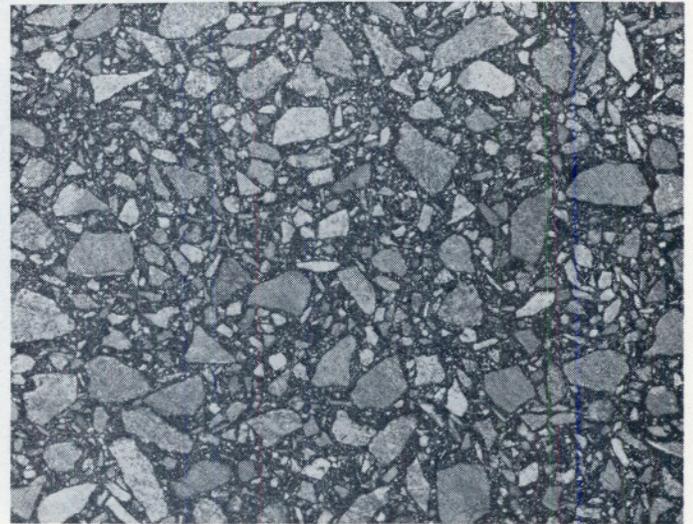
mélanges utilisés en technique routière ou pour des travaux hydrauliques. Neuf de ces mélanges furent fabriqués au laboratoire et les trois autres provenaient de routes circulées depuis plusieurs années. Ce sont :

- cinq enrobés pour couche de roulement dont deux bétons bitumineux, un « Rolled Asphalt » anglais, un asphalte coulé routier et un enrobé ouvert ;
- cinq enrobés pour couche de base dont une grave-bitume, un enrobé dense, un enrobé à courbe granulométrique discontinue et deux sables-bitume ;
- un mastic bitumineux pour travaux hydrauliques ;
- un asphalte coulé pur pour étanchéité.

PLANCHE 1



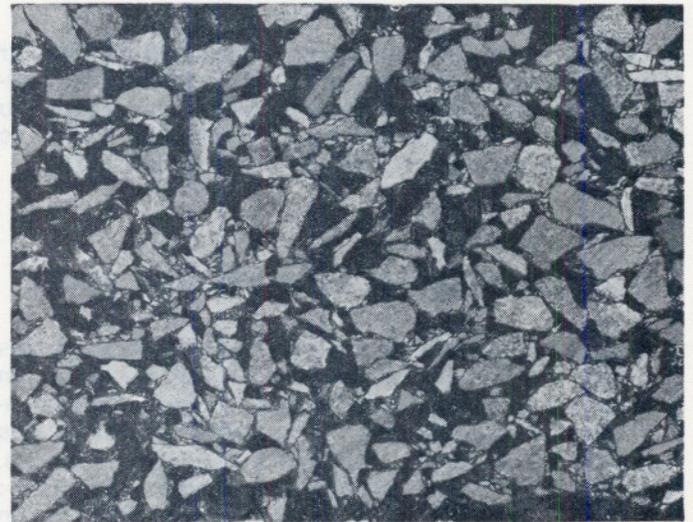
A — Béton bitumineux 0/10 semi-grenu



B — Asphalte coulé routier gravillonné 0/10



C — Enrobé dense « Rolled Asphalt »



D — Enrobé ouvert

Ces enrobés sont très différents les uns des autres. Ils contiennent entre 4 et 25 ppc de bitume et ont entre 0 et 32 % de vides.

Les douze mélanges essayés sont représentés en coupe sur les planches 1 à 3.

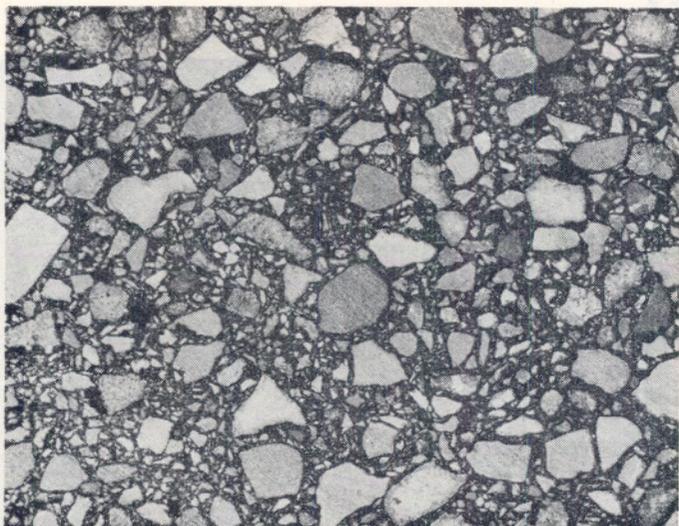
— **le mélange A** est un « béton bitumineux 0/10 mm semi-grenu » au sens des directives françaises [12]. Il ne contient que des granulats concassés très anguleux. Sa courbe granulométrique est continue et sa teneur en bitume est de 6 p.p.c. Cet enrobé a environ 7 % de vides ;

— **le mélange B** est un « asphalte coulé gravillonné routier » 0/10 mm [13], très utilisé en Allemagne sous le nom de « Gussasphalt », il a une courbe gra-

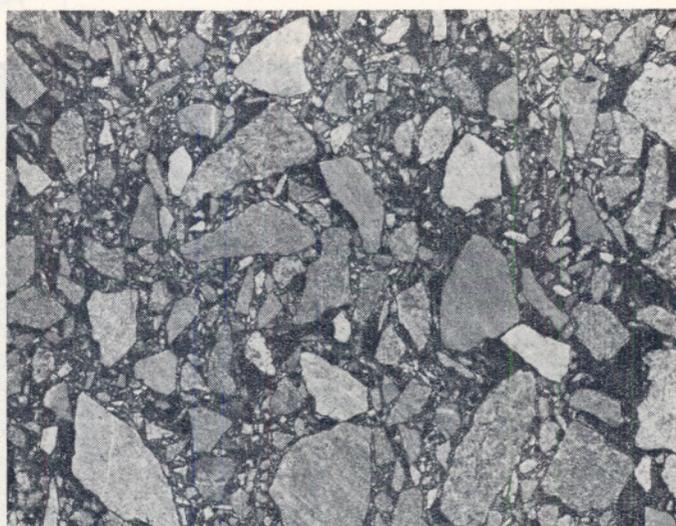
nulométrique continue et il est caractérisé par un très fort pourcentage de filler calcaire (20 % pds). Il contient 32 % de sable dont la moitié est roulé et 8,5 p.p.c. de bitume. Le mélange est répandu très chaud (à 220 °C) sans compactage. Il est cependant très dense (0,4 % de vides) ;

— **le mélange C** est un enrobé dense 0/14 mm à courbe granulométrique discontinue, très répandu en Grande-Bretagne sous le nom de « Rolled Asphalt » [14]. Il s'agit d'un mortier constitué à partir de filler calcaire et de sable roulé fin 0/1 mm dans lequel sont dispersés des gravillons concassés 10/14 mm (30 % pds). Cet enrobé qui contient 8,6 p.p.c. de bitume est très maniable. Son pourcentage de vides n'est que de 4 % ;

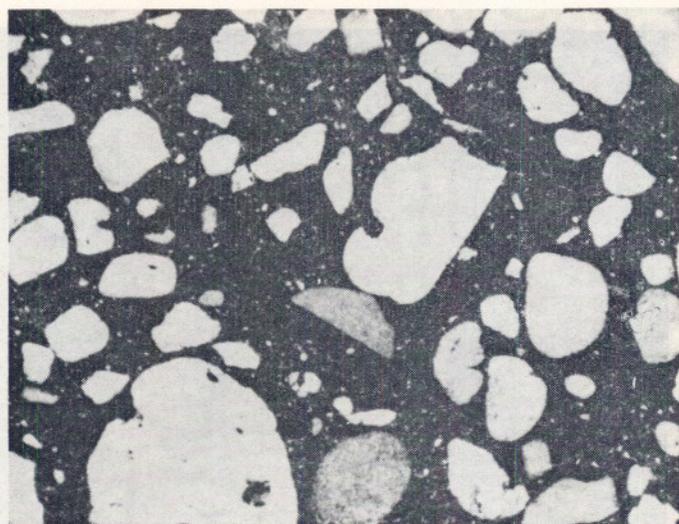
PLANCHE 2



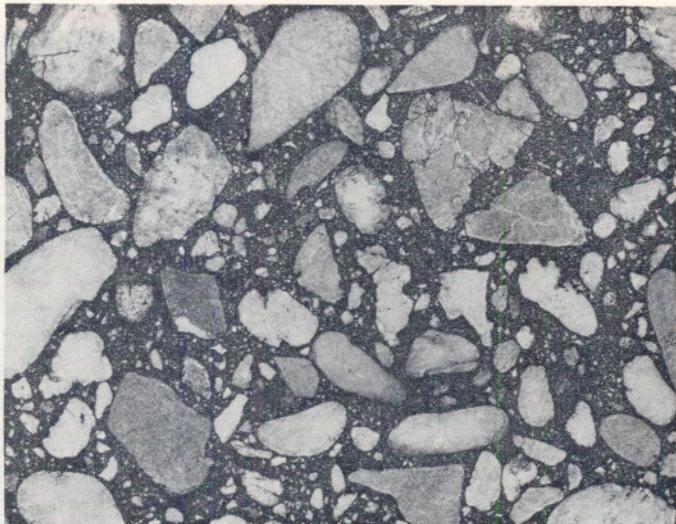
E — Béton bitumineux 0/10 prélevé sur le chantier expérimental de Marseille



F — « Grave bitume » 0/20



G — « Gravel sand Asphalt » prélevé sur la planche expérimentale de Stroe (Hollande)



H — « Enrobé dense » 0/20 prélevé sur l'autoroute nord de Bordeaux

— **le mélange D** est un « enrobé ouvert » 0/10 mm qui a un certain succès à l'heure actuelle en Grande-Bretagne comme revêtement drainant pour les routes et les aéroports [15]. Ce type de matériau améliore en effet la rugosité par temps de pluie tout en limitant les éclaboussures derrière les pneus des véhicules. Il contient peu de filler (3 % pds) très peu de sable (11 % pds) et beaucoup de gravillons. Sa teneur en liant est faible (4,5 p.p.c.) et le pourcentage de vides très important (15 %) ;

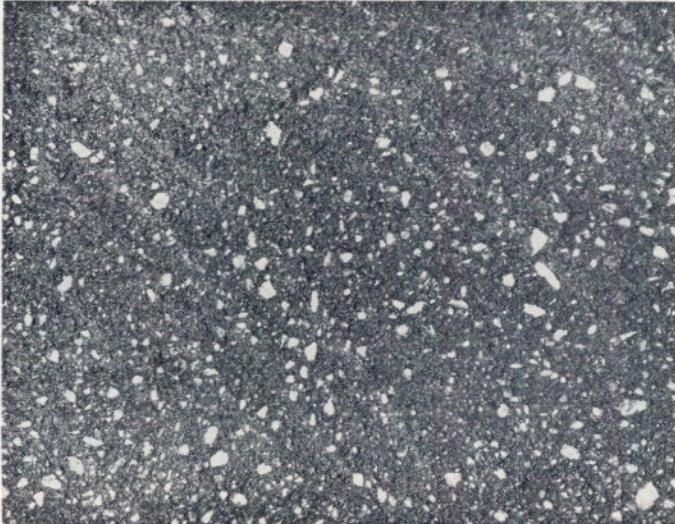
— **le mélange E** est un « béton bitumineux » 0/10 mm qui provient d'une chaussée expérimentale réalisée en 1966 à Marseille [16]. Cet enrobé prélevé en 1971 a donc été soumis au trafic pendant cinq ans, puis conservé quatre ans au laboratoire. Il contient des granulats concassés répartis selon une courbe granulométrique continue. La teneur en bitume est

de 5,7 p.p.c. et le pourcentage de vides des échantillons essayés est voisin de 9 % ;

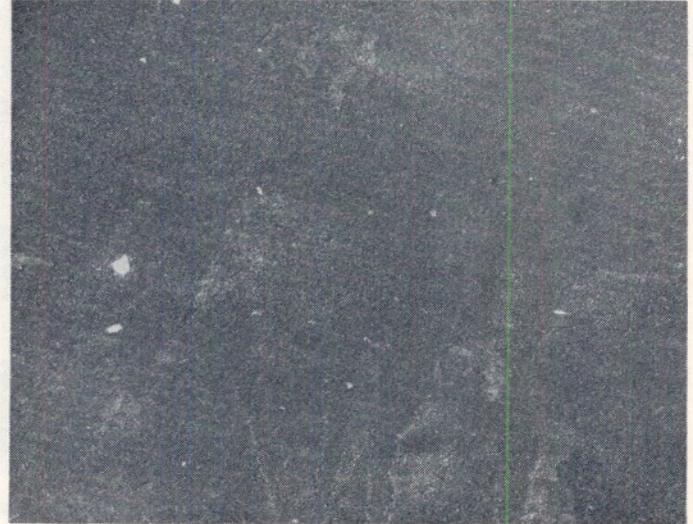
— **le mélange F** est une « grave bitume » 0/20 mm au sens des directives françaises [17]. Il ne contient que des granulats concassés répartis selon une courbe granulométrique continue. La teneur en bitume est de 4 p.p.c. et cet enrobé a environ 9 % de vides ;

— **le mélange G** est un enrobé 0/25 mm à courbe granulométrique discontinue très répandu en Hollande sous le nom de « Gravel Sand Asphalt ». Les granulats sont essentiellement roulés et il n'y a pas de gravillons intermédiaires entre 2 et 5 mm. La teneur en liant est de 5,6 p.p.c. Cet enrobé prélevé sur une section expérimentale de l'autoroute (E-8) près de Stroe en Hollande a été circulé pendant plusieurs années. Le pourcentage de vides des échantillons essayés est proche de 11 % ;

PLANCHE 3



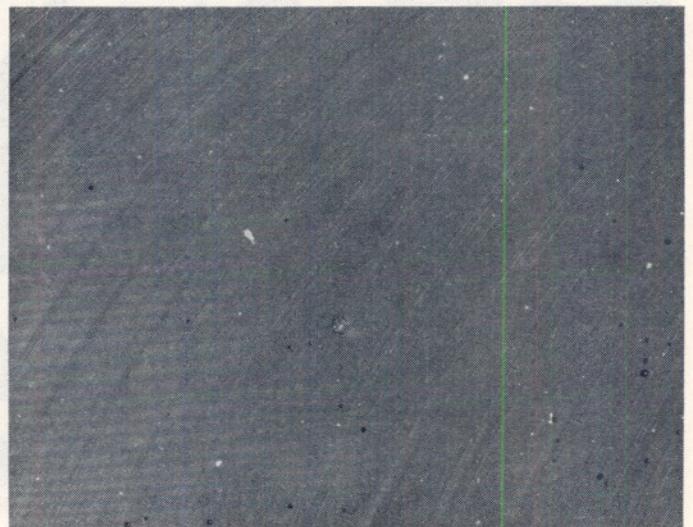
I — « Sable bitume » 0/2



J — « Sable bitume » 0/04



K — « Mastic bitumineux » 0/4



L — Mélange filler-bitume

— le mélange H est un « enrobé dense » 0/20 mm qui contient un fort pourcentage de granulats roulés. Sa courbe granulométrique est continue et sa teneur en liant de 4,7 p.p.c. Cet enrobé mis en œuvre en 1967, en 13 cm d'épaisseur, sur l'autoroute nord de Bordeaux a été circulé pendant plusieurs années ; l'échantillon prélevé en 1973 ne contenait que 2 % de vides. Cet enrobé très dense n'est pas satisfaisant d'un point de vue résistance au fluage puisqu'il est à l'origine de l'ornièrage constaté sur cette chaussée [18] ;

— le mélange I est un « sable-bitume » 0/2 mm au sens des directives françaises [17]. Il a été réalisé à partir de sable de rivière ayant une granulométrie assez étalée auquel est ajouté un peu de filler calcaire. Sa teneur en bitume est de 4 p.p.c. et le pourcentage de vides : 21 % ;

— le mélange J est un autre « sable-bitume » 0/0,4 mm réalisé cette fois avec un sable éolien monodimensionnel très fin additionné de 3 % de filler calcaire. Sa teneur en bitume est aussi de 4 p.p.c. mais le pourcentage de vides est beaucoup plus important (31 %) ;

— le mélange K est un « mastic bitumineux » 0/4 mm normalement utilisé pour fixer des enrochements dans des ouvrages hydrauliques (jetées, perrés, canaux...) [19]. Ce mastic coulé à chaud (200 °C) est caractérisé par une forte teneur en sable roulé (50 % pds) et en liant (15 p.p.c.). Le pourcentage de vides des échantillons est proche de 3,5 % ;

— le mélange L est un asphalte coulé pur [13] composé de 100 parties de filler calcaire (en poids) et de 25 p.p.c. de bitume. Ce mastic utilisé pour assurer une étanchéité a un pourcentage de vides nul.

Les enrobés A, B, C, D et E sont des mélanges types utilisés dans plusieurs pays pour faire des couches de roulement. Les mélanges F, G, H, I et J sont également assez différents les uns des autres : ils correspondent aux enrobés utilisés en général dans

les pays occidentaux comme couches de base ou de fondation. Les mélanges K et L sont des mastics très riches en bitume : moins utilisés que les enrobés routiers.

Ces enrobés couvrent toute la gamme des matériaux utilisés en pratique.

La teneur pondérale en bitume des douze mélanges étudiés varie entre 4 et 25 p.p.c.

En volume, le pourcentage de granulats, V_g , varie de 60 à 87 %, le pourcentage de bitume, V_b , de 6 à 40 % et le pourcentage d'air, V_a , de 0 à 31 %. En d'autres termes, la compacité varie de 69 à 100 % et le pourcentage de vides des granulats (V.M.A.) de 13 à 40 %.

Les trois mélanges E, G et H ont été fabriqués et mis en œuvre industriellement et circulés pendant plusieurs années alors que les neuf autres mélanges furent fabriqués au laboratoire à partir d'un même bitume de pénétration 40/50 dont les caractéristiques sont portées dans le tableau 1. Les quatre natures de granulats utilisés sont :

— des granulats concassés issus d'une même carrière et divisés en différentes fractions granulométriques (filler, sable et gravillons 2/4, 4/6, 6/10, 10/14 et 10/20 mm) ; ce sont des diorites ;

— du filler calcaire de concassage ;

TABLEAU 1

Caractéristiques du bitume 40/50 utilisé pour la préparation des neuf mélanges au laboratoire

Pénétration à 10 °C (0,1 mm)	9
Pénétration à 25 °C —	41
Pénétration à 40 °C —	189
Point de ramollissement	
Bille et anneau (°C)	53
T ₈₀₀ pen (°C)	54
Indice de pénétrabilité (P ₂₅ , T _{BA})	— 0,7

TABLEAU 2

Composition des neuf mélanges préparés en laboratoire

	A	B	C	D	F	I	J	K	L
Filler de diorite % pds	7,8	—	—	2,7	8,5	—	—	—	—
Sable 0/2 de diorite —	30,2	17	—	11,3	22	—	—	20	—
Gravillon 2/4 de diorite —	12	20	—	9	8	—	—	20	—
Gravillon 4/6 de diorite —	20	5	—	4	8	—	—	—	—
Gravillon 6/10 de diorite —	30	23	14	73	17	—	—	—	—
Gravillon 10/14 de diorite —	—	—	17	—	—	—	—	—	—
Gravillon 10/20 de diorite —	—	—	—	—	36,5	—	—	—	—
Filler calcaire —	—	20	9	—	—	3,5	3	10	100
Sable roulé de rivière 0/1 —	—	—	60	—	—	—	—	—	—
Sable roulé de rivière 0/2 —	—	15	—	—	—	96,5	—	50	—
Sable éolien 0/0,4 —	—	—	—	—	—	—	97	—	—
Bitume 40/50 ppc	6	8,5	8,6	4,5	4	4	4	15	25
Volume occupé par les granulats V_g % v	79,5	81,5	78,1	75,0	81,4	71,5	62,2	68,8	60,0
Volume occupé par le bitume V_b % v	13,6	18,1	18,0	9,5	9,3	7,7	6,4	27,6	39,8
Volume occupé par l'air V_a % v	6,9	0,4	3,9	15,5	9,3	20,8	31,4	3,6	0,2

— du sable roulé de rivière (0/1 et 0/2 mm) riche en éléments siliceux ;

— du sable roulé éolien très fin, riche en éléments siliceux.

Les compositions, les courbes granulométriques et les caractéristiques « Marshall » et « Duriez » sont rassemblées dans les *tableaux* 2, 3, 4 et 5. Les caractéristiques

mécaniques obtenues avec les enrobés B et K ne sont données qu'à titre indicatif car les essais « Marshall » et « Duriez » ne sont pas utilisés normalement pour de tels mélanges ; l'enrobé B n'a pas été compacté alors que l'enrobé K ne l'a été que faiblement.

Il faut noter :

— la forte susceptibilité thermique des mélanges B, C et K : leurs caractéristiques « Marshall à 60 °C » sont très faibles (voire non mesurables), alors que leurs caractéristiques « Duriez à 18 °C » sont assez bonnes. Ceci est dû à la teneur en liant élevée de ces mélanges ;

— les caractéristiques mécaniques assez faibles dans l'ensemble des mélanges D, I et J à cause de leur pourcentage de vides important.

Les caractéristiques des bitumes extraits des enrobés (le solvant utilisé est le sulfure de carbone) sont rassemblées dans le *tableau* 6. Le « vieillissement » constaté pour les enrobés fabriqués au laboratoire est dans tous les cas à peu près similaire ; les liants extraits ont des caractéristiques de bitume 20/30. Le « vieillissement » est du même ordre de grandeur pour les enrobés G et H prélevés sur des routes car ils étaient protégés par une couche de roulement. Il y a eu par contre une évolution importante dans le cas du béton bitumineux E assez ouvert (9 % de vides) qui était directement exposé à l'action de l'oxygène de l'air [16].

TABLEAU 3

Composition des trois mélanges prélevés in-situ

		E	G	H
Sable 0/4 silico-calcaire	% pds	68	—	—
Gravillons 5/8 silico-calcaires	—	16	—	—
Gravillons 8/12 silico-calcaires	—	16	—	—
Filler calcaire	—	—	7	—
Sable roulé siliceux 0/1	—	—	43	—
Gravillons roulés 5/20	—	—	50	—
Chaux	—	—	—	2
0/12 silico-calcaires	—	—	—	50
Gravillons roulés 10/20 silico-calcaires	—	—	—	50
Bitume 80/100	ppc	5,7	—	—
Bitume 60/70	ppc	—	—	4,7
Bitume 50/60	ppc	—	5,6	—
Volume occupé par les granulats V_g	% v	79,1	77,8	87,1
Volume occupé par le bitume V_b	% v	12,2	11,2	10,8
Volume occupé par l'air V_a	% v	8,7	11,0	2,1

TABLEAU 4

Courbes granulométriques des douze mélanges

% de passant au travers du tamis (mm)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
0,08	8	21	10	3	7,5	8	7	6	5	3	11	100
0,16	11	22	17	3,5	13	10	20	8	14	24	15	—
0,4	16	32	51	5,5	22	15	46	21	59	100	40	—
1	26	43	69	10	36	22	51	31	86	—	64	—
2	37	53	69	15	49	30	52	33	97	—	79	—
4	53	73	70	25	69	40	54	39	100	—	99	—
6,3	75	82	73	42	84	50	74	46	—	—	100	—
10	99	99	87	97	99	66	83	55	—	—	—	—
14	100	100	99	100	100	81	—	66	—	—	—	—
16	—	—	100	—	—	91	95	74	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	97	—	—	—	—	—	—
20	—	—	—	—	—	99	98	93	—	—	—	—
25	—	—	—	—	—	100	100	100	—	—	—	—

TABLEAU 5
Caractéristiques Duriez et Marshall des neuf mélanges préparés au laboratoire

	A	B	C	D	F	I	J	K
Essai Marshall								
Vides de l'enrobé, VIM %	9	0,9	3,9	12,3 ⁽⁴⁾	11,5	22,5	32,6	3,0
Vides des granulats, VMA %	22	19,6	21,8	22,1	20,4	29,5	38,9	30,7
Stabilité à 60 °C N	6 500	— ⁽¹⁾	3 550	2 270	5 600	5 000 ⁽²⁾	1 760 ⁽²⁾	— ⁽¹⁾
Fluage à 60 °C mm	3,0	— ⁽¹⁾	6,7	3,2	2,8	3,0 ⁽²⁾	3,1 ⁽²⁾	— ⁽¹⁾
Essai Duriez								
Vides de l'enrobé, VIM %	10	1,2	4,4	11,9 ⁽⁴⁾	9,5 ⁽³⁾	25,6	36,5	2,7
Vides des granulats, VMA %	23	19,8	22,2	21,8	18,6 ⁽³⁾	32,6	42,5	30,5
Résistance à 18 °C 10 ⁵ N/m ²	84	109	88	49,4	105 ⁽³⁾	37	12,7	50

(1) La force enregistrée n'est pas passée par un maximum.

(2) Ecrasements effectués à 40 °C.

(3) Eprouvettes dites « Duriez dilaté ».

(4) Ces pourcentages de vides ont été obtenus par la méthode hydrostatique, le pourcentage de vide aux cotes est de 20 %, les pourcentages de vides réels doivent être de 15 %.

TABLEAU 6
Caractéristiques des bitumes extraits des douze mélanges

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Pénétration à 25 °C 0,1 mm	27	22	27	27	18	27	26	44	24	24	22	22
Point de ramollissement												
Bille et anneau °C	60	62	60	60	70	60	62	53	61	61	62	62
T ₈₀₀ pen °C	62	65	62	62	70	62	62	55	64	64	65	65
Indice de pénétabilité (2 pen)	0	+ 0,2	0	0	+ 0,6	0	0	- 0,3	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2

TABLEAU 7
Moyenne des modules de rigidité et des angles de perte obtenus sur les douze mélanges (3 éprouvettes par essais)

Température °C	Fréquence Hz	(1)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
- 15	50	S _m φ _m	325 0	338 0	280 0	— —	259 0	279 0	— —	365 0	152 0	— —	— —	— —
	40	S _m φ _m	324 0	333 0	276 0	158 0	255 0	282 0	187 0	360 0	149 0	84 2	206 1	137 2
	4	S _m φ _m	311 0	313 0	268 0	150 1	235 0	273 0	168 0	339 0	141 0	75 2	185 2	123 3
+ 9	50	S _m φ _m	170 8	176 9	111 10	— —	134 8	170 7	— —	192 11	80 10	— —	— —	— —
	40	S _m φ _m	163 9	173 10	107 11	76 12	132 9	166 7	48 ⁽²⁾ 15 ⁽²⁾	187 12	77 10	35 12	74 14	39 19
	4	S _m φ _m	108 13	117 16	70 19	47 21	94 13	114 13	27 ⁽²⁾ 21 ⁽²⁾	124 21	49 16	21 19	38 23	22 25
+ 30	50	S _m φ _m	51 27	60 26	30 32	— —	54 19	69 21	— —	48 33	33 20	— —	— —	— —
	40	S _m φ _m	46 29	56 28	29 35	22 30	49 20	62 24	31 21	42 35	29 23	13 21	12 37	6,5 31
	4	S _m φ _m	16 42	20 38	7 47	10 40	25 25	28 33	14 27	14 43	12 32	6 33	3,4 54	2,0 50

(1) S_m est exprimé en 10⁸ N/m² et φ_m en degrés.

(2) Les essais ont été faits à + 20 °C au lieu de + 9 °C.

5. INFLUENCE DES CONDITIONS EXPERIMENTALES ET DES PARAMETRES DE FORMULATION

5.1. Mise en évidence de courbes maîtresses

Pour chaque mélange, trois éprouvettes furent découpées. Chacune d'elles a été testée à trois températures (-15 , $+9$ et $+30$ °C) et à deux ou trois fréquences (4, 40 et 50 Hz). Les modules ont dans tous les cas été déterminés pour des faibles déformations (5×10^{-6} à -15 °C et à $+9$ °C ; 20×10^{-6} à $+30$ °C). Le phénomène de non linéarité (décroissance de S_m lorsque la contrainte augmente) n'apparaît qu'au delà de niveaux de déformation bien supérieurs (voisins de 100×10^{-6}).

Les résultats obtenus (tableau 7) dans ces conditions expérimentales concordent bien avec ceux déjà obtenus dans ce domaine [4]. Pour chaque composition d'enrobé :

— une augmentation de la température ou du temps de charge entraîne une diminution du module de

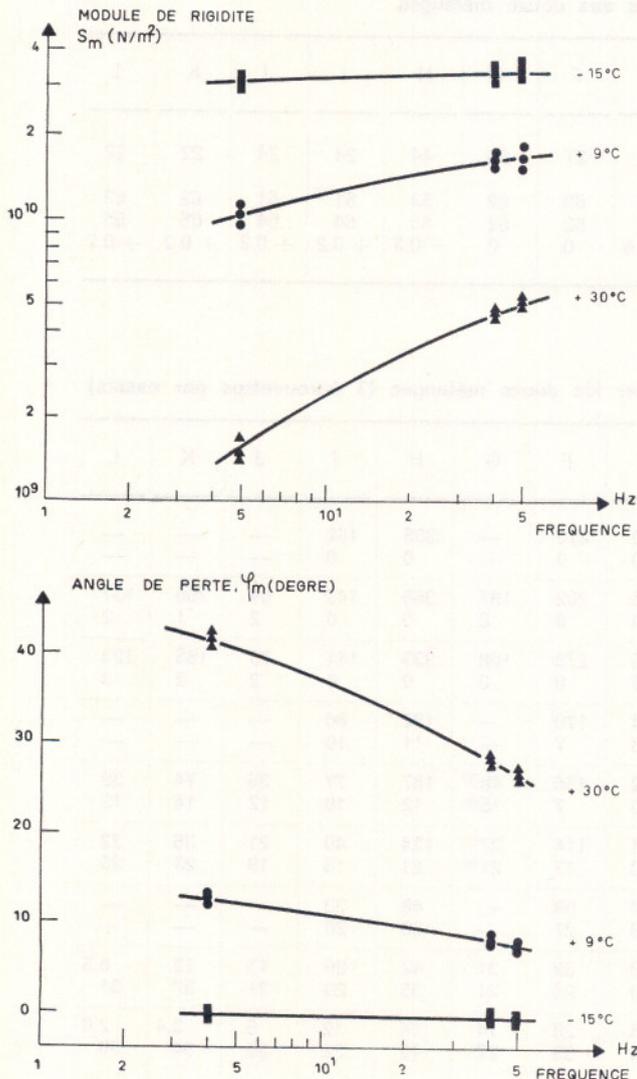


Fig. 4. — Influence des conditions opératoires sur le module de rigidité S_m , et sur l'angle de perte φ_m , du béton bitumineux A

rigidité et une augmentation de l'angle de perte (fig. 4) ;

— il y a équivalence entre le temps de charge et la température : en effet, il est possible de superposer par simple translation les courbes obtenues pour différentes fréquences et différentes températures :

. en choisissant une température de référence, on peut obtenir une courbe maîtresse au moyen d'un facteur de translation a_T obtenu en utilisant une relation du type William, Landel et Ferry ;

— à un module de rigidité ne correspond qu'un seul angle de perte. De même, à une valeur de la partie réelle du module complexe ne correspond qu'une seule valeur de la partie imaginaire.

En définitive, on voit que la température et le temps de charge influencent de manière très marquée la déformation en flexion des enrobés bitumineux, puisque, dans des conditions courantes d'utilisation, le module de rigidité peut varier de 10^7 N/m² à près de 3×10^{10} N/m².

La consistance du liant bitumineux dans les conditions de la sollicitation est en fait le paramètre qui fixe la rigidité d'une composition d'enrobé donnée. Le nomogramme de Van der Poel permet d'estimer le module de rigidité du bitume (annexe 1) ; cette méthode de calcul est très simple et d'une précision largement suffisante [8] [9]. De ce fait, nous nous trouvons en présence d'une variable réduite, facilement accessible, qui, en plus de la fréquence et de la température, a l'avantage d'intégrer le type de bitume utilisé (fig. 5).

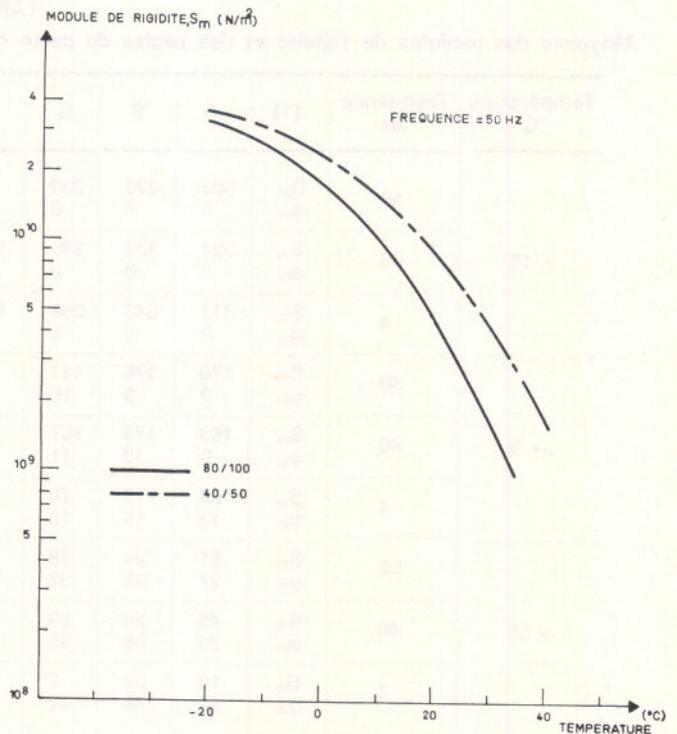


Fig. 5. — Influence du type de bitume sur le module de rigidité S_m , d'un mélange bitumineux

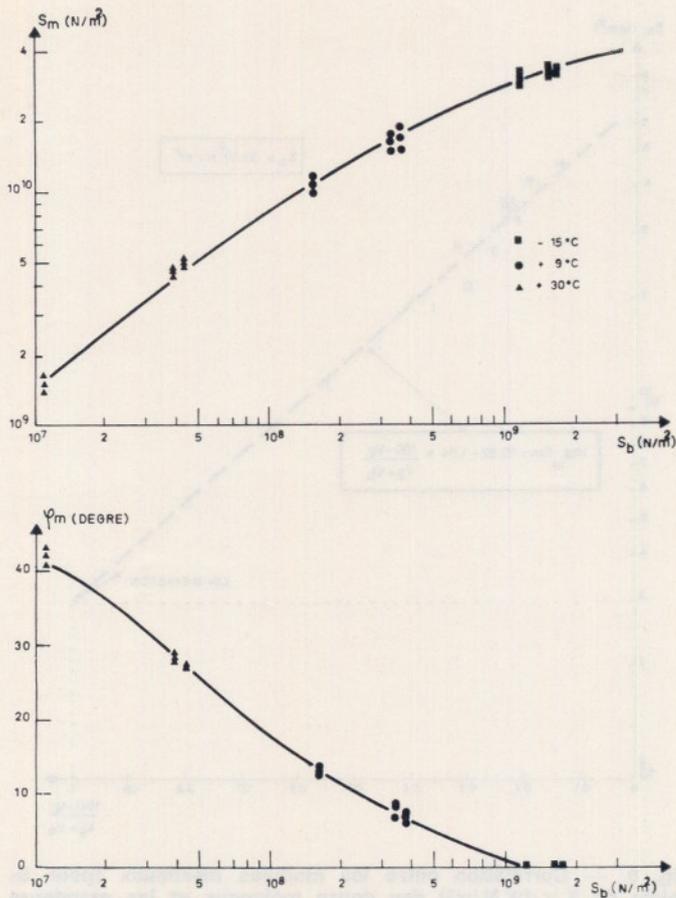


Fig. 6. — Relation entre le module de rigidité S_m , et l'angle de perte φ_m , du béton bitumineux A et le module de rigidité du bitume S_b .

Nous avons considéré les variations du module de rigidité des douze mélanges en fonction du module de rigidité du bitume qu'ils renferment. Des représentations analogues concernant certaines propriétés mécaniques et notamment la résistance à la rupture et le comportement en fluage ont fait l'objet d'autres publications [20] [21] [22].

Les courbes de la figure 6 représentent les variations du module de rigidité, S_m , et de l'angle de perte, φ_m , du béton bitumineux, A, en fonction du module de rigidité du bitume, S_b , qu'il contient. Ce dernier a été déterminé à l'aide du nomogramme de Van der Poel à partir des caractéristiques du bitume extrait et des conditions expérimentales. Dans la gamme de températures et de temps de charge, correspondant à une variation du module du bitume allant de $5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ jusqu'au module maximal (environ $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$), on constate (à la dispersion des résultats près) que les valeurs de S_m obtenues se situent sur une courbe maîtresse, caractéristique de la formule d'enrobé qui reste valable quel que soit le bitume utilisé. Il en est de même pour l'angle de perte, φ_m .

Douze couples de courbes maîtresses correspondant aux douze mélanges ont donc été tracés. Nous avons recherché dans une deuxième phase les paramètres qui avaient une influence sur la forme et sur la position de ces courbes.

5.2. Recherche des paramètres influençant le module de rigidité, S_m

Les douze fonctions $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$ sont toutes des fonctions monotones croissantes mais les courbes représentatives sont plus ou moins concaves et sont situées à des niveaux très différents. De plus, elles se croisent (fig. 7).

A partir de ces douze courbes des corrélations ont été cherchées entre le module de rigidité S_m et les caractéristiques des mélanges. Le but était avant tout de trouver des relations aussi simples que possible et qui s'appliquent à tous les mélanges bitumineux.

Après avoir tenté de découvrir une formulation globale de la courbe $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$, nous avons préféré retrouver des valeurs caractéristiques (points particuliers, pentes) de la courbe qui permettent de la retracer avec une bien meilleure précision.

Nous avons obtenu les meilleures corrélations pour :

1. des valeurs de S_m à S_b données (10^8 et $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) ;
2. des pentes de la courbe $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$ en fonction de V_a, V_b, V_g .

5.2.1. Calcul du module de rigidité S_m pour un module du bitume déterminé

Il est apparu particulièrement intéressant de comparer les ordonnées de ces douze courbes pour une même abscisse (fig. 7). Ceci a été fait d'une part au milieu de notre gamme expérimentale pour $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$, par interpolation de l'ensemble des

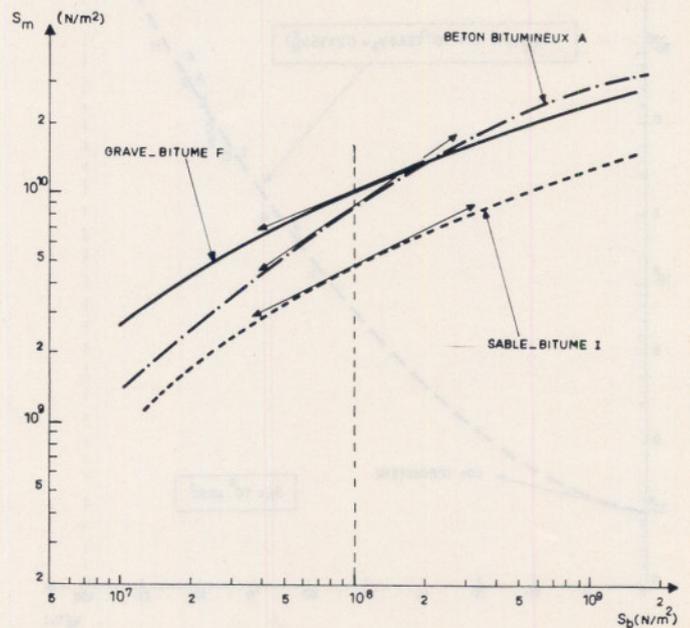


Fig. 7. — Relation entre les modules de rigidité S_m des mélanges A, F et I, et les modules de rigidité des bitumes S_b qu'ils contiennent.

résultats obtenus. Ce niveau de rigidité a en outre le mérite d'être réaliste puisqu'il correspond au cas d'un bitume routier de type 40/50, à + 10 °C et pour un temps de charge de 0,015 s, ce qui équivaut à une vitesse moyenne des véhicules de 50 km/h.

Ceci a été aussi fait, d'autre part, par extrapolation à la limite supérieure de notre gamme expérimentale pour $S_b = 3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, valeur maximale que peut atteindre ce paramètre.

Une analyse statistique a montré que le module S_m (pour $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$) dépendait essentiellement du pourcentage en volume occupé par les granulats, V_g , le module de rigidité est d'autant plus grand que les granulats sont enchevêtrés les uns dans les autres. Une relation du type parabolique a été trouvée (fig. 8) :

$$\log_{10} S_m = 8 + 10^{-3} (5,68 V_g + 0,2135 V_g^2) \quad (3)$$

Rappelons que $V_g = 100 - (V_a + V_b) = 100 - \text{V.M.A.}$ (fig. 3). Cette relation (3) permet de retrouver le module du bitume pur ($S_m = 10^8 \text{ N/m}^2$) lorsque $V_g = V_a = 0$ et $V_b = 100$ et permet également d'approcher les modules d'élasticité des roches puisque $S_m = 5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ lorsque $V_g = 100$. Elle est également en parfait accord à l'origine avec l'équation d'Einstein qui permet de calculer l'augmentation de viscosité due à l'addition de particules en suspension dans une phase continue :

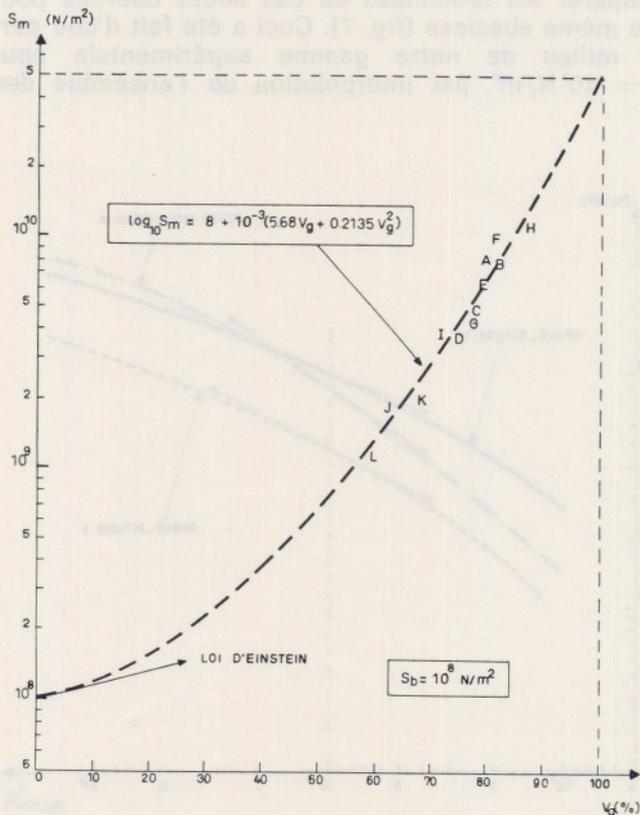


Fig. 8. — Corrélation entre les modules de rigidité S_m , des douze mélanges lorsque $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$, et les pourcentages en volume (V_g) occupé par les granulats.

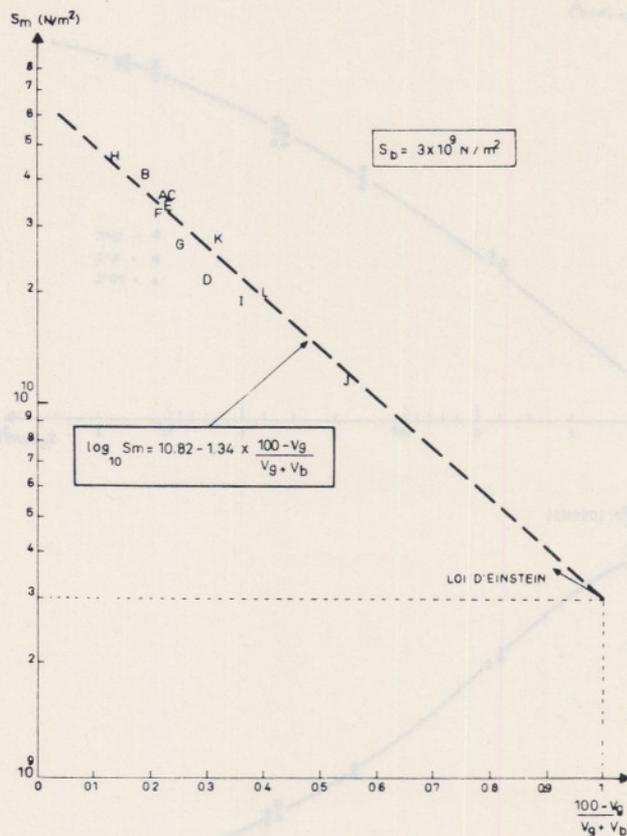


Fig. 9. — Corrélation entre les modules maximaux (pour S_b voisin de $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) des douze mélanges et les grandeurs $\frac{100 - V_g}{V_g + V_b}$ correspondantes.

$$\frac{S_m}{S_b} = 1 + 2,5 \times C_v \quad (4)$$

dans ce cas particulier ($C_v \approx 10^{-3} V_g$ et $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$) l'équation (4) peut encore s'écrire :

$$\log_{10} S_m = 8 + \log_{10} (1 + 2,5 \times 10^{-3} V_g) \quad (5)$$

les équations (4) et (5) ne sont valables que pour des faibles valeurs de V_g .

Nous avons corrélié les modules S_m maximaux, obtenus lorsque S_b est voisin de $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, avec les pourcentages volumiques des trois constituants de base (granulats, bitume, air) du mélange bitumineux. Il est apparu que ce module extrapolé est d'autant plus élevé que la grandeur $\frac{100 - V_g}{V_g + V_b}$ est faible (fig. 9).

La relation trouvée s'écrit sous la forme :

$$\log_{10} S_m = 10,82 - 1,342 \frac{100 - V_g}{V_g + V_b} \quad (6)$$

Il est difficile de cerner ce que signifie cette relation d'un point de vue physique.

Cette relation (6) permet de retrouver le module du bitume pur ($S_m = 3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) lorsque $V_g =$

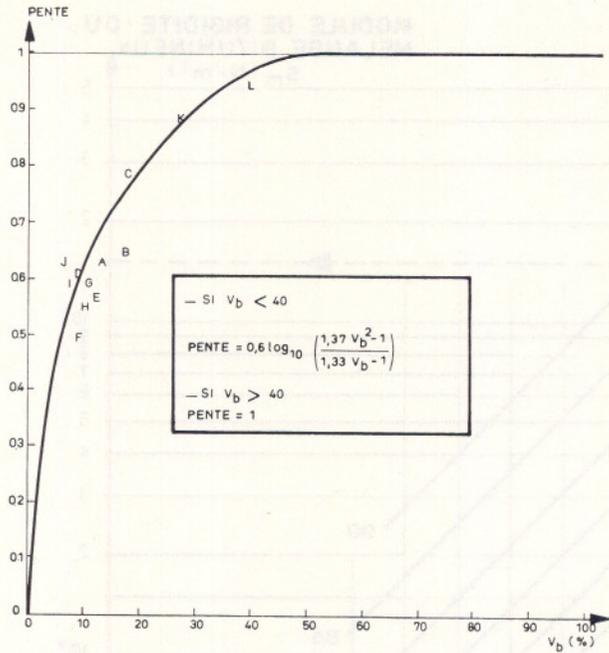


Fig. 10. — Corrélation entre les pentes des courbes $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$ des douze mélanges lorsque $5.10^6 < S_b < 10^8 \text{ N/m}^2$ et les pourcentages en volume (V_b) de bitume contenu dans ces mélanges.

$V_a = 0$ et $V_b = 100$ et permet également d'approcher le module d'élasticité des roches lorsque $V_g = 100$ et V_a et $V_b = 0$.

5.2.2. Calcul des pentes des courbes : $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$

Il est apparu que les pentes des courbes $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$ pour $5 \times 10^6 < S_b < 10^8 \text{ N/m}^2$ dépendaient du pourcentage en volume de bitume, V_b , contenu dans le mélange. Cette relation, représentée sur la figure 10, montre que la susceptibilité du mélange (pente) à des variations de consistance du liant est d'autant plus importante que la teneur en liant est élevée, ce qui semble logique. Pour des mélanges qui contiennent moins de 45 % en volume de bitume ($V_b < 45$) la pente peut être donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{pente des courbes } \log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b) \\ \text{pour } 5 \times 10^6 < S_b < 10^8 \text{ N/m}^2 \\ = 0,6 \times \log_{10} \left(\frac{1,37 \times V_b^2 - 1}{1,33 \times V_b - 1} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Des mélanges qui contiendraient plus de 45 % en volume de bitume auraient des pentes égales à 1 comme le bitume pur.

Ceci signifie qu'au delà de ce pourcentage de bitume ($V_b = 45$), le liant a comblé tous les vides du squelette minéral, le bitume alors en excès guide les caractéristiques mécaniques et rhéologiques du mélange. Nous retrouvons là des concepts évoqués

il y a quelques années par MM. Rigden et Heukelom [23] [24]. Un autre cas extrême est celui de la roche pure ($V_g = 100$ et $V_b = V_a = 0$) pour lequel la pente est bien évidemment nulle.

Pour $10^8 < S_b < 10^9 \text{ N/m}^2$, il est apparu que les pentes des courbes $\log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b)$ ne dépendaient plus uniquement de V_b , mais aussi de V_g .

Pour le calcul de cette pente la relation simple suivante a été trouvée :

$$\begin{aligned} \text{pente des courbes } \log_{10} S_m = f(\log_{10} S_b) \text{ pour } 10^8 < S_b < 10^9 \text{ N/m}^2 = \\ = \frac{1,12 \times (\log_{10} S_m \text{ pour } S_b = 3 \times 10^9 \text{ N/m}^2 - \log_{10} S_m \text{ pour } S_b = 10^8 \text{ N/m}^2)}{\log_{10} 30} \end{aligned} \quad (8)$$

Pour $10^9 < S_b < 3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, les valeurs du module S_m sont interpolées entre les valeurs du module à $S_b = 10^9 \text{ N/m}^2$ (3) et (8) et à $S_b = 3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ (6).

5.3. Recherche des paramètres influençant l'angle de perte, φ_m

Les douze fonctions $\varphi_m = g(\log_{10} S_b)$ sont toutes des fonctions monotones décroissantes dans la gamme étudiée. Il se peut cependant qu'il y ait un maximum d'angle de perte lorsque la température devient élevée [4] [25].

L'interprétation des résultats obtenus fait apparaître que, pour un module du bitume S_b donné, l'angle de perte du mélange φ_m est d'autant plus grand que le pourcentage en volume de bitume est important (fig. 11). Cette tendance, valable quelle que soit la consistance du liant, est logique car c'est le liant bitumineux qui confère à l'enrobé son caractère viscoélastique. Pour des pourcentages en volume de bitume inférieur ou égaux à 40 l'angle de perte est donné par la formule :

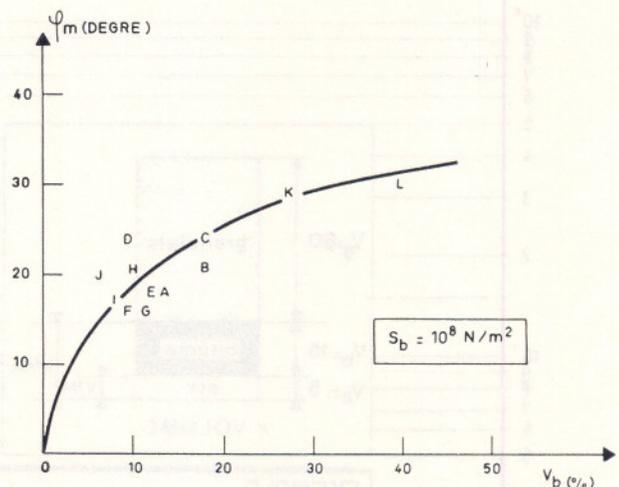


Fig. 11. — Corrélation entre les angles de perte φ_m , des douze mélanges lorsque $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$, et les pourcentages en volume V_b de bitume contenu dans ces mélanges.

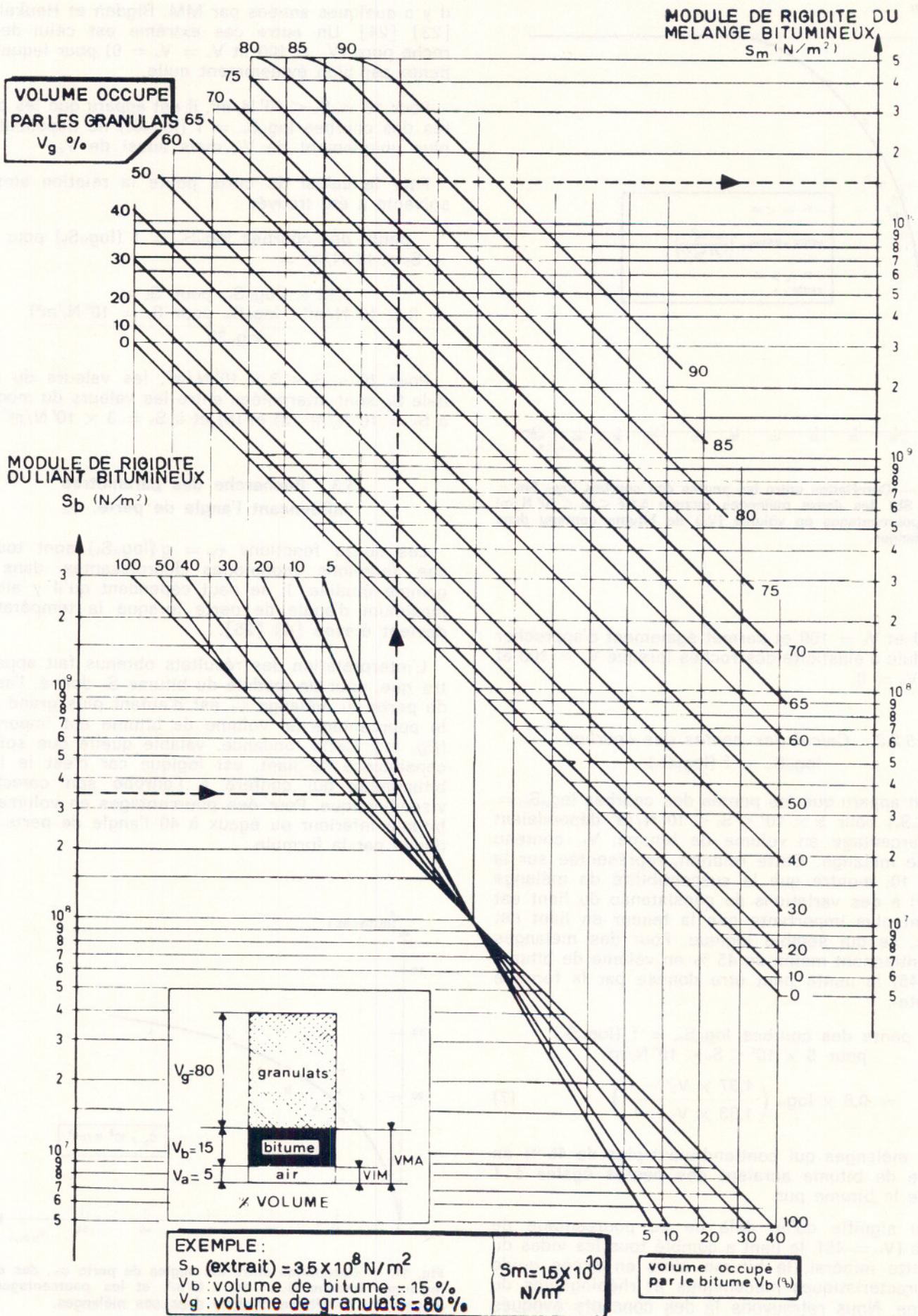


Fig. 12. — Nomogramme de calcul du module de rigidité des mélanges bitumineux

$$16,36 \times V_b^{0,352} \times \exp. \left[\frac{\log_{10} \frac{S_b}{5 \times 10^6}}{\log_{10} \frac{S_b}{2 \times 10^9}} \times 0,974 \times V_b^{-0,173} \right]$$

(9)

en degrés

pour S_b compris entre 5×10^6 et 2×10^9 N/m².

Pour S_b compris entre 2×10^9 et 3×10^9 N/m², φ_m est nul.

Signalons enfin que des bitumes de type industriel, très peu susceptibles à la température, conduisent à des angles de pertes plus faibles que des bitumes de type routier, même lorsque les modules de rigidité sont identiques (10) (11). Il vaudrait mieux ainsi représenter l'angle de perte du mélange, φ_m , en fonction de l'angle de perte du bitume, φ_b , mais on ne dispose pas encore à l'heure actuelle de méthode pour calculer aisément φ_b .

6. UNE NOUVELLE METHODE DE CALCUL DU MODULE COMPLEXE DES MELANGES BITUMINEUX

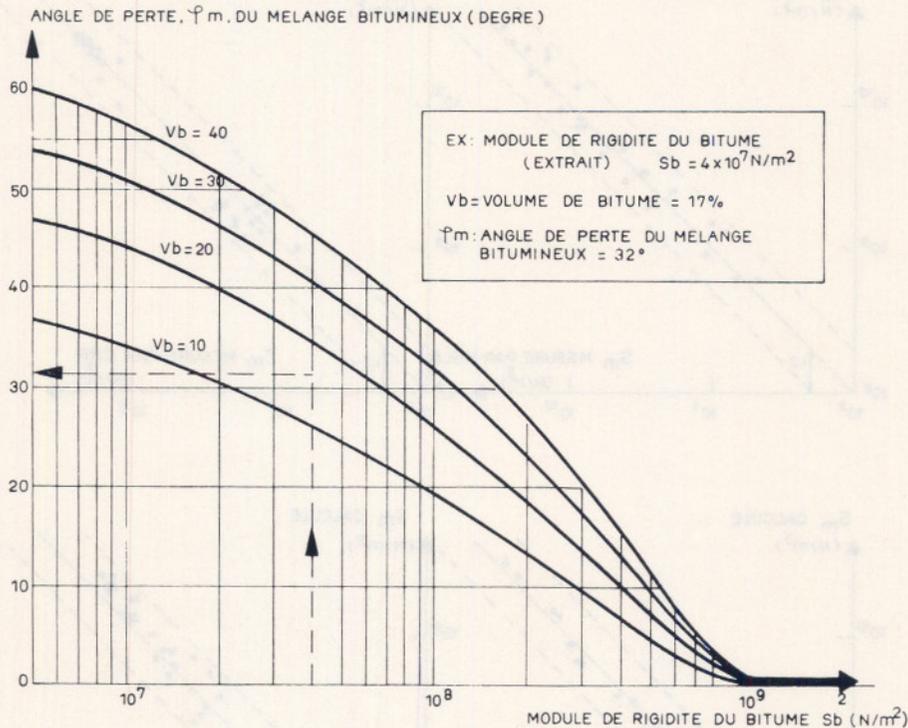
Une méthode de calcul de S_m et de φ_m a été mise au point à partir des conclusions précédentes. Elle permet de calculer ces deux grandeurs à partir :

— du module de rigidité du bitume, S_b , dans les conditions de sollicitation ;

— du pourcentage **en volume** de granulat, V_g , contenu dans le mélange ;

— du pourcentage **en volume** de bitume, V_b , contenu dans le mélange (les calculs nécessaires pour obtenir V_g et V_b se trouvent en annexe 1).

Le module de rigidité du bitume, S_b , peut être mesuré expérimentalement. Il est cependant plus simple et suffisamment précis de le déterminer en utilisant le nomogramme de Van der Poel [8] (annexe 1) à partir :



CALCUL DE L'ANGLE DE PERTE, φ_m , D'UN MELANGE BITUMINEUX

$$\varphi_m = 16,36 V_b^{0,352} \text{ EXP } \left[\frac{\log_{10} \left(\frac{S_b}{5 \cdot 10^6} \right)}{\log_{10} \left(\frac{S_b}{2 \cdot 10^9} \right)} \times 0,974 V_b^{-0,172} \right]$$

POUR $5 \times 10^6 < S_b < 2 \times 10^9$

Fig. 13

- de la température à laquelle a lieu la sollicitation ;
- du temps de charge pendant lequel l'effort est appliqué ;
- des caractéristiques du bitume réellement présent dans le mélange :

. l'indice de pénétrabilité, I.P. [9] ;

. la température $T_{800 \text{ pen}}$ (à laquelle la pénétration du bitume serait de 800 dixièmes de millimètre) : elle est extrapolée par prolongation de la droite logarithme de la pénétration fonction de la température. Elle est en général assez voisine du point de ramollissement bille et anneau qui peut dans la plupart des cas être utilisé.

Cette méthode de calcul se présente sous la forme de deux outils équivalents :

— soit les deux nomogrammes représentés sur les figures 12 et 13 en liaison éventuellement avec l'abaque de Van der Poel (annexe 1) ; le premier

nomogramme permet d'estimer le module de rigidité du mélange, le second l'angle de phase ;

— soit un programme de calcul sur ordinateur dénommé « Module » (annexe 2). Un sous-programme, appelé « Poel », permet de calculer le module de rigidité du bitume en simulant le procédé graphique de l'abaque de Van der Poel.

Le fait que les courbes caractéristiques du pourcentage en volume de bitume se coupent sur la figure 12 lorsque $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$, ne signifie pas qu'à ce niveau de rigidité, le module de l'enrobé, S_m , soit indépendant du pourcentage en volume de bitume : il est en effet clair sur la figure 8 que S_m , (pour $S_b = 10^8 \text{ N/m}^2$), dépend beaucoup du pourcentage en volume occupé par les granulats, V_g , et ce paramètre est bien sûr fortement influencé par le volume de bitume, V_b , (les trois grandeurs V_a , V_b et V_g sont des paramètres dépendants et liés par définition par la relation $V_a + V_b + V_g = 100$).

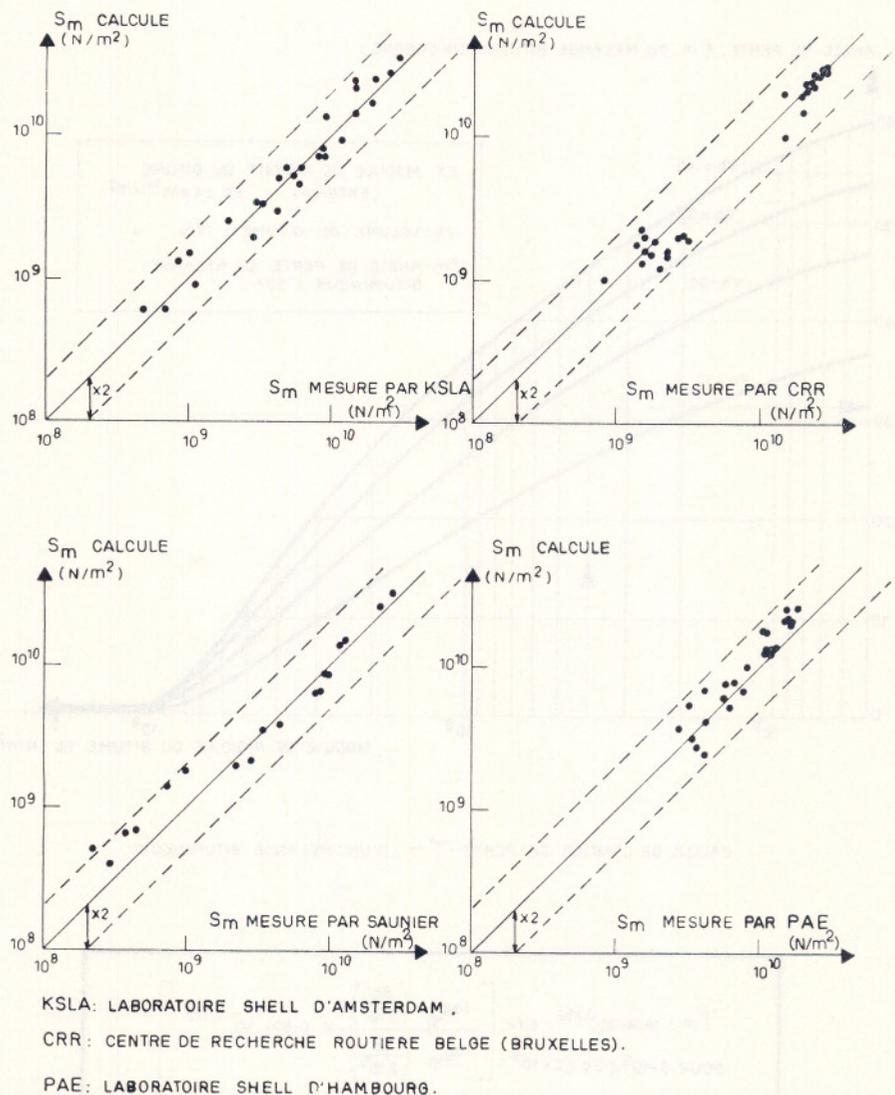


Fig. 14. — Quelques exemples de comparaison du module de rigidité S_m , calculé à l'aide du nomogramme de la figure 14, avec celui mesuré dans différents laboratoires

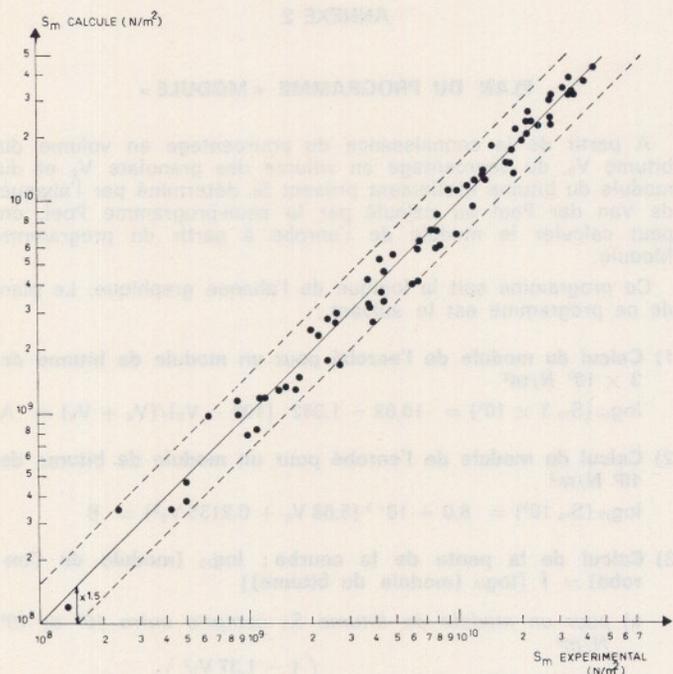


Fig. 15. — Modules de rigidité issus du nomogramme en fonction de ceux déterminés expérimentalement pour les douze mélanges étudiés (6 points par mélange).

7. PRECISION ET DOMAINE D'APPLICATION DE LA NOUVELLE METHODE DE CALCUL

La comparaison des modules ainsi calculés avec les mesures effectuées dans d'autres laboratoires par des méthodes d'essai et sur des matériaux très divers [1-6-25-26-27-28-29-30-31] fait apparaître que la méthode de calcul est très générale : les valeurs calculées et expérimentales s'écartent au plus d'un facteur 2 (*fig. 14*) ce qui est assez remarquable si l'on tient compte de la grande variété des résultats analysés. Si on se limite aux mélanges étudiés dans notre laboratoire, couvrant une gamme très étendue, l'écart maximal entre les mesures et les évaluations correspond à un facteur multiplicatif de 1,5 (*fig. 15*).

Cette approche est applicable à tous les mélanges de bitumes et de granulats, quelles que soient leurs proportions, à condition que le liant bitumineux soit suffisamment rigide (pour des modules de rigidité, S_b , supérieurs à 5×10^6 N/m²). On considère ainsi que dans cette gamme de rigidité, S_m et φ_m dépendent uniquement des pourcentages en volume du mélange (V_a , V_b , V_g) qui intègrent les paramètres de formulation (énergie de compactage, nature, angularité et dimensions des granulats). Il n'en est bien sûr plus de même lorsque le liant est plus mou ($S_b < 5 \times 10^6$ N/m²) comme le laissent apparaître des essais de fluage par exemple [21] [22].

8. CONCLUSIONS

Le module de rigidité des mélanges bitumineux, S_m , est une caractéristique mécanique très importante car il permet de relier les amplitudes des contraintes et des déformations relatives. Il est indispensable pour concevoir une méthode rationnelle de dimensionnement de chaussées. L'angle de perte, φ_m , quant à lui est une grandeur plus fondamentale qui permet d'apprécier le comportement rhéologique du matériau.

Pour améliorer la précision et simplifier le calcul du module complexe, un programme expérimental a été établi.

Un appareillage de flexion 2-points nous a permis d'étudier les variations du module complexe de divers mélanges bitumineux dans des conditions similaires à celles que l'on rencontre en pratique. Les résultats obtenus mettent en évidence le rôle prépondérant joué par les paramètres suivants :

- la température ;
- le temps de charge ;
- la dureté et la susceptibilité thermique du bitume utilisé ;
- les pourcentages en volume des granulats, du bitume et de l'air dans le mélange.

Il semble que les autres paramètres ne jouent qu'un rôle secondaire, tout au moins lorsque le liant est suffisamment rigide. On doit en effet s'attendre à ce que le granulat prenne plus d'importance pour des sollicitations où le bitume a un comportement à prédominance visqueuse.

Il est possible d'obtenir par nomogrammes ou à l'aide d'un programme de calcul sur ordinateur et avec une bonne approximation le module de rigidité et l'angle de perte d'un mélange bitumineux à partir des paramètres précités dont les valeurs sont facilement accessibles. Il est commode pour cela de passer par le biais du module de rigidité du bitume contenu dans le mélange, en utilisant l'abaque de Van der Poel.

Bien entendu les valeurs ainsi obtenues ne peuvent remplacer entièrement les mesures effectuées en laboratoire, en particulier dans le domaine des longs temps de charge et des hautes températures où le granulat prend de plus en plus d'importance ; par contre elles peuvent donner aux calculateurs de chaussées une assez bonne approximation des niveaux de contrainte et de déformation relative compte tenu des conditions climatiques et de la vitesse de la circulation. Elles permettent en outre d'évaluer l'effet qu'aurait un changement de bitume ou une modification dans la formulation des mélanges.

CALCULS NECESSAIRES POUR EVALUER LE MODULE COMPLEXE D'UN MELANGE BITUMINEUX

1. DETERMINATION DES POURCENTAGES EN VOLUME DES DIFFERENTS CONSTITUANTS DES MELANGES

Supposons que l'enrobé soit un mélange de :

P_1 % en poids de granulats g_1 , de masse volumique MVR_{g_1}

P_2 % en poids de granulats g_2 , de masse volumique MVR_{g_2}

.....
 P_n % en poids de granulats g_n , de masse volumique MVR_{g_n}

P_l parties pour cent en poids de bitume de masse volumique MVR_l

on a $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 100$

La masse volumique réelle des granulats est :

$$MVR_g = \frac{100}{\frac{p_1}{MVR_{g_1}} + \dots + \frac{p_n}{MVR_{g_n}}}$$

$$MVR = \frac{100 + p_l}{\frac{100}{MVR_g} + \frac{p_l}{MVR_l}}$$

soit MVA la masse volumique apparente de l'enrobé.

Les pourcentages en volume des trois constituants de base (air - bitume - granulats) se calculent de la façon suivante :

$$V_a = 100 \left(1 - \frac{MVA}{MVR} \right)$$

$$V_b = 100 \left(1 - \frac{MVA \left(\frac{100}{100 + p_l} \right)}{MVR_g} \right) - V_a$$

$$V_g = 100 - (V_a + V_b)$$

Si l'on ne connaît pas la masse volumique du bitume et des granulats on peut prendre respectivement :

$$MVR_l \approx 1,02 \text{ g/cm}^3$$

et $MVR_g \approx 2,85$ — dans le cas des porphyres et des diorites

2,65 — pour les silico-calcaires, les sables de rivière et de dune

2,70 — dans le cas des fillers calcaires

2,95 — pour les matériaux basaltiques.

2. DETERMINATION DU MODULE DE RIGIDITE DU BITUME

Les caractéristiques du bitume à prendre en considération sont celles du liant réellement présent dans le mélange.

Il y aura donc lieu :

— soit d'extraire ce liant avec un solvant approprié puis de caractériser celui-ci après évaporation du solvant ;

— soit de faire une hypothèse sur la façon dont le bitume a vieilli (un bitume 80/100 est en général devenu un bitume 60/70 après enrobage).

Le module de rigidité, S_b , du bitume peut alors être déterminé à l'aide du nomogramme de Van der Poel joint.

PLAN DU PROGRAMME « MODULE »

A partir de la connaissance du pourcentage en volume du bitume V_b , du pourcentage en volume des granulats V_g et du module du bitume réellement présent S_b déterminé par l'abaque de Van der Poel ou calculé par le sous-programme Poel, on peut calculer le module de l'enrobé à partir du programme Module.

Ce programme suit la logique de l'abaque graphique. Le plan de ce programme est le suivant :

1) Calcul du module de l'enrobé pour un module de bitume de $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\log_{10} (S_m \cdot 3 \times 10^9) = 10,82 - 1,342 (100 - V_g)/(V_g + V_b) = A$$

2) Calcul du module de l'enrobé pour un module de bitume de 10^8 N/m^2

$$\log_{10} (S_m \cdot 10^8) = 8,0 + 10^{-3} (5,68 V_g + 0,2135 V_g^2) = B$$

3) Calcul de la pente de la courbe ; \log_{10} (module de l'enrobé) = f [\log_{10} (module du bitume)]

a) pour un module de bitume S_b compris entre 10^7 et 10^8 N/m^2

$$\text{pente} (10^7, 10^8) = 0,6 \times \log_{10} \left(\frac{1 - 1,37 V_b^2}{1 - 1,33 V_b} \right) = N$$

b) pour un module de bitume S_b compris entre 10^8 et 10^9 N/m^2

$$\text{pente} (10^8, 10^9) = (A - B) \times 1,12 / \log_{10} 30 = M$$

4) Calcul du module de l'enrobé pour un module de bitume donné

a) pour un module de bitume S_b compris entre 10^7 et 10^8 N/m^2

$$\log_{10} S_m = \frac{M + N}{2} (\log_{10} S_b - 8) + \frac{M - N}{2} |\log S_b - 8| + B$$

b) pour un module de bitume S_b compris entre 10^8 et $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\log_{10} S_m = B + M + (A - B - M) (\log_{10} S_b - 9) / \log_{10} 3$$

5) Calcul de l'angle de phase φ_m pour $V_b \leq 40$

a) $S_b < 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\varphi_m = 16,36 V_b^{0,352} e^{\left[\frac{\log_{10} \left(\frac{S_b}{5 \times 10^6} \right)}{\log_{10} \left(\frac{S_b}{2 \times 10^9} \right)} \times 0,974 V_b^{-0,172} \right]}$$

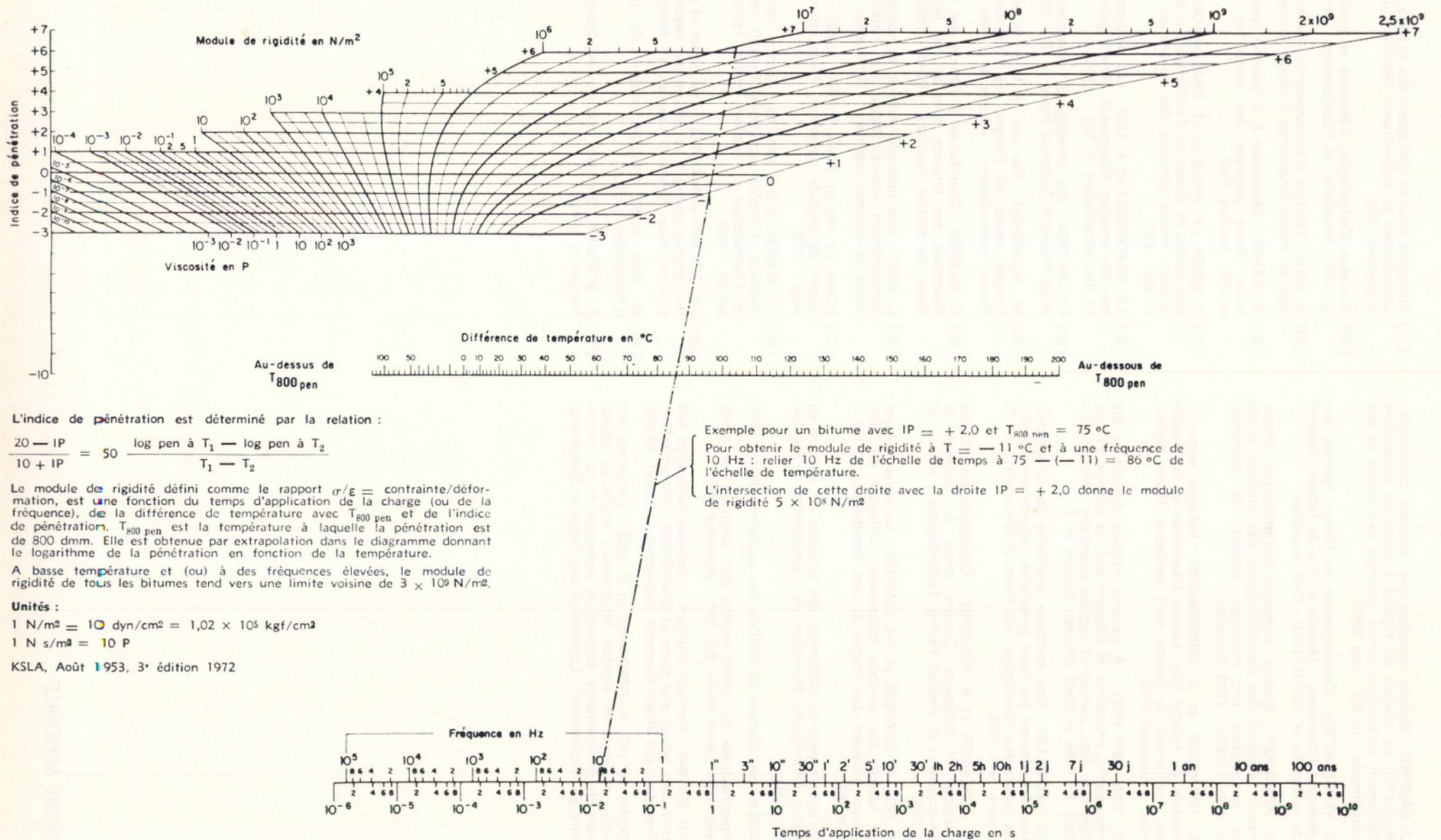
b) $S_b \geq 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$$\varphi_m = 0$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. VAN DER POEL : Time and temperature effects on the deformation of asphaltic bitumens and bitumen mineral mixtures. SPE Journal, sept. 1955.
- [2] W. HEUKELOM et A.J.G. KLONP : Road design and dynamic loading. Compte rendu du Congrès de l'Association of Asphalt Paving Technologists - Volume 33, 1964.
- [3] W.E. FIJN VAN DRAAT et P. SOMMER : Ein Gerät zur bestimmung der dynamischen elastizitätsmoduln von asphalt. Strasse und Autobahn - 6 - 1965.

Fig. 16. — Abaque de Van Der Poel : Détermination du module de rigidité des bitumes



L'indice de pénétration est déterminé par la relation :

$$\frac{20 - IP}{10 + IP} = 50 \frac{\log \text{pen à } T_1 - \log \text{pen à } T_2}{T_1 - T_2}$$

Le module de rigidité défini comme le rapport $\sigma/\epsilon =$ contrainte/déformation, est une fonction du temps d'application de la charge (ou de la fréquence), de la différence de température avec $T_{800 \text{ pen}}$ et de l'indice de pénétration. $T_{800 \text{ pen}}$ est la température à laquelle la pénétration est de 800 dmm. Elle est obtenue par extrapolation dans le diagramme donnant le logarithme de la pénétration en fonction de la température.

A basse température et (ou) à des fréquences élevées, le module de rigidité de tous les bitumes tend vers une limite voisine de $3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$.

Unités :

1 N/m² = 10 dyn/cm² = 1,02 × 10⁵ kgf/cm²

1 N s/m² = 10 P

KSLA, Août 1953, 3^e édition 1972

Exemple pour un bitume avec IP = +2,0 et $T_{800 \text{ pen}} = 75^\circ\text{C}$
 Pour obtenir le module de rigidité à $T = -11^\circ\text{C}$ et à une fréquence de 10 Hz : relier 10 Hz de l'échelle de temps à $75 - (-11) = 86^\circ\text{C}$ de l'échelle de température.
 L'intersection de cette droite avec la droite IP = +2,0 donne le module de rigidité $5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$

- [4] J. SAUNIER : Module complexe des enrobés bitumineux : évaluation du module de rigidité à partir de paramètres facilement accessibles. Revue générale des routes et des aérodromes - n° 421 - mai 1967.
- [5] J. VERSTRAETEN : Comportement en flexion répétée des mélanges bitumineux - Module et lois de fatigue. Rapport de recherche n° 156/JV/1971 - CRR Bruxelles.
- [6] L. FRANCKEN : Module complexe des mélanges bitumineux : influence des caractéristiques des bitumes et de la composition des mélanges. Rapport de recherche n° 164/FL/1973 - CRR Bruxelles.
- [7] L. FRANCKEN et J. VERSTRAETEN : Relation entre le module de rigidité d'un enrobé bitumineux et le module en cisaillement du bitume qu'il renferme. Rilem Symposium - Budapest 1975.
- [8] C. VAN DER POEL : A general system describing the viscoelastic properties of bitumen and its relation to routine test data. Journal of applied chemistry - Volume 4 - Part 5 - 1954 et Shell Bitumen Reprint n° 9.
- [9] W. HEUKELOM : Une méthode améliorée de caractérisation des bitumes par leurs propriétés mécaniques. Bulletin de liaison des laboratoires des Ponts et Chaussées - n° 76 - mars/avril 1975.
- [10] R. JONGEPIER et B. KUILMAN : Characteristics of the rheology of bitumens. Compte rendu du Congrès de l'Association of Asphalt Paving Technologists - volume 38 - 1969.
- [11] P. UGE, A. GRAVOIS et J.N. LEMAIRE : Le comportement en fatigue des enrobés bitumineux : influence du liant. Revue générale des routes et des aérodromes n° 521 - juin 1976.
- [12] Directives pour la réalisation des couches de surface en béton bitumineux. Ministère de l'Equipement - septembre 1969.
- [13] Cahier des charges de l'Office des asphaltes, Paris, 1974.
- [14] Specifications for rolled asphalt (hot process) for roads and other paved areas. B.S. 594 - décembre 1973.
- [15] J.R. BROWN : Pervious bitumen - macadam surfacings laid to reduce splash and spray at Stonebridge - Warwickshire. Transport and Road Research Laboratory - Report LR 563.
- [16] DOAN TU HO, A. GRIGNARD et P. UGE : Evaluation sur route de liants et enrobés bitumineux : étude en laboratoire de prélèvements. Rapport de recherche n° 45 - ministère de l'Equipement - Laboratoire des Ponts et Chaussées.
- [17] Directives pour la réalisation des assises de chaussées en grave-bitume et sable-bitume. Ministère de l'Equipement - septembre 1972.
- [18] Journées d'information « Bitumes et enrobés bitumineux » (p. 374). Ministère de l'Equipement - Paris 1972.
- [19] V. LELU : Fixation d'enrochements immergés par pénétration de mastic bitumineux à chaud. Travaux n° 383 - 1967.
- [20] G. CARRE : Résistance à la traction des enrobés bitumineux. Revue générale des routes et des aérodromes n° 414 - octobre 1966.
- [21] D. BRIEN, J.F. HILLS et J.P. VAN de LOO : Relation entre des essais de fluage et d'ornièrage sur des enrobés bitumineux. Revue générale des routes et des aérodromes n° 499 - 1974.
- [22] J.P. SIMONCELLI et P. UGE : Les déformations permanentes des enrobés bitumineux. Revue générale des routes et des aérodromes n° 500 - 1974.
- [23] P.J. RIGDEN : The rheology of non-aqueous suspensions. Road Research Technical Paper n° 28 - 1954.
- [24] W. HEUKELOM : The role of filler in bituminous mixes. Compte rendu du Congrès de l'Association of Asphalt Paving Technologists - volume 34 - 1965.
- [25] G. SAYEGH : Contribution à l'étude des propriétés viscoélastiques des bitumes purs et des bétons bitumineux. Thèse de docteur ingénieur - Paris - 1965.
- [26] C. HUET : Une méthode d'étude en régime dynamique du comportement viscoélastique des matériaux bitumineux. Thèse de docteur ingénieur - Paris 1963.
- [27] DOAN TU HO et DINH TUONG LONG : Application des essais de module complexe. Rilem Symposium - Budapest - 1975.
- [28] J.F. SHOOK et B.F. KALLAS : Factors influencing dynamic modulus of asphalt concretes. Compte rendu du Congrès de l'Association of Asphalt Paving Technologists - Volume 38 - 1969.
- [29] K.E. COOPER et P.S. PELL : The effect of mix variables on the fatigue strength of bituminous materials. Transportation and Road Research Laboratory - Report 633 - 1974.
- [30] W. VAN DIJK : Rapport interne du laboratoire Shell d'Amsterdam (KSLA).
- [31] P. SOMMER : Rapport interne du laboratoire Shell de Hambourg (PAE).

Opérateurs matriciels pour la viscoélasticité avec vieillissement*

par C. HUET, Centre technique des tuiles et briques, et Ecole nationale des ponts et chaussées, Paris

RESUME

Extension matricielle des opérateurs intégrô-différentiels scalaires, à noyau convolutif, définis précédemment par J. Mandel (1958). Propriétés et règles opératoires. Exemple d'application au problème de l'évolution des contraintes et déformations dans les systèmes multiplaques viscoélastiques avec vieillissement. Présentation d'algorithmes de base destinés à l'exploitation numérique.

ABSTRACT

Scalar operators, previously introduced by J. Mandel (1958) are used to define matrix operators. Main properties and operating rules are given. As an example, application is made to composite plates made of viscoelastic aging materials. Principles for basic numerical algorithms are described.

1. INTRODUCTION

Pour faciliter l'étude des corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge (corps viscoélastiques « vieillissants »), J. Mandel [1] [2]** a introduit des opérateurs intégrô-différentiels scalaires \hat{f} définis, quelle que soit la fonction $\varphi(t, \tau)$ où τ n'est qu'un paramètre, par :

$$(1) \quad \hat{f}\varphi = \int_0^t f(t, u) \frac{\partial \varphi(u, \tau)}{\partial u} du$$

Dans l'équation (1), l'origine des temps t est prise avant la naissance du système.

M. Mandel a montré que ces opérateurs forment un corps non commutatif, et qu'ils ramènent les équations de la viscoélasticité avec vieillissement à la forme des équations de l'élasticité, la reprise des calculs pour tenir compte de la non commutativité étant toutefois nécessaire en général.

Nous avons nous-mêmes appliqué précédemment les opérateurs de M. Mandel à la détermination de la distribution des contraintes et déformations dans les multilames viscoélastiques vieillissants considérés comme unidimensionnels [3], [4]. Nous géné-

ralisons ici la méthode en introduisant des matrices construites sur le corps des opérateurs de Mandel, et qui permettent ainsi une étude commode des systèmes héréditaires vieillissants à plusieurs fonctions observables. Ceci permet d'étendre au cas des structures viscoélastiques avec vieillissement le bénéfice du développement très important pris par l'emploi des techniques matricielles dans le calcul des structures élastiques, et ce sans restriction aucune sur les comportements rhéologiques (dans le cadre linéaire), et de retrouver un « principe de correspondance ».

2. REPONSE FONCTIONNELLE D'UN MATERIAU A COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE LINEAIRE VIEILLISSANT

Dans le cas viscoélastique linéaire vieillissant, les lois de comportement définissant les relations entre contraintes σ et déformations ε sont données, en l'absence de contraintes et déformations initiales par

$$(2) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t f(t, u) d\sigma(u)$$

ou réciproquement par

$$(3) \quad \sigma(t) = \int_0^t r(t, u) d\varepsilon(u)$$

(intégrales de Stieltjes).

* Conférence prononcée le 14 octobre 1976 devant le Groupe français de Rhéologie.

** Les chiffres entre crochets [] renvoient à la Bibliographie en fin d'article.

Dans (2) le noyau $f(t, \tau)$ de l'intégrale est la fonction fluage donnant la déformation à l'instant t pour une contrainte échelon unité appliquée à l'instant τ . De même $r(t, \tau)$ dans (3) est la fonction relaxation donnant la contrainte à l'instant t pour une déformation échelon unité appliqué à l'instant τ :

$$(4) \quad \sigma(t) = \sigma_0 Y(t - \tau) \Rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 f(t, \tau) Y(t - \tau)$$

$$(5) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 Y(t - \tau) \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 r(t, \tau) Y(t - \tau)$$

où $Y(t)$ est l'échelon unité de Heaviside.

Il est bien connu que f et r ne sont pas indépendants, mais se correspondent par une équation de Volterra de deuxième espèce avec second membre, dont la solution est donc unique (cf. par exemple [3]).

3. RAPPELS SUR LES OPERATEURS RHEOLOGIQUES SCALAIRES DE J. MANDEL

Soit une observable $y(t)$ constituant la réponse d'un système linéaire vieillissant à une action $x(t)$.

Cette réponse pourra se mettre sous la forme :

$$(6) \quad y(t) = \int_{0^-}^t h(t, u) dx(u)$$

l'origine étant prise avant toute application de l'action, et l'intégrale étant de Stieltjes.

Nous utiliserons l'opérateur intégral-différentiel \hat{f} de Mandel, associé à toute fonction $f(t, u)$ dépendant du temps et de l'âge et définie par, $\forall \varphi(t, \tau)$ fonction du temps et du paramètre τ [1] :

$$(7) \quad \hat{f}\varphi = \int_{0^-}^{t^+} f(t, u) d_u \varphi(u, \tau).$$

On ramène ainsi (6) à la forme algébrique :

$$(8) \quad y(t) = \hat{h}x(t)$$

Les opérateurs ainsi définis sont linéaires et forment un corps non commutatif. La somme de deux opérateurs \hat{h} et \hat{k} est l'opérateur \hat{g} associé à la fonction $h + k$. Leur produit $\hat{p} = \hat{h}\hat{k}$ est l'opérateur associé à la fonction $p = \hat{h}k$. Ce produit est non commutatif en général :

$$(9) \quad \hat{h}\hat{k} \neq \hat{k}\hat{h}$$

L'opérateur identique $\hat{1}$ est l'opérateur associé à la fonction $h \equiv 1$. Tout autre opérateur $\hat{h} \neq \hat{0}$ ($\hat{0}$ opérateur associé à $h \equiv 0$) possède un inverse \hat{l} tel que :

$$(10) \quad \hat{h}\hat{l} = \hat{l}\hat{h} = \hat{1}$$

L'opérateur $\hat{l} = \hat{h}^{-1}$ est l'opérateur associé à la solution d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce. En effet, $\hat{h}\hat{l} = \hat{1}$ signifie que $hl = 1$ soit, d'après la formule de définition :

$$(11) \quad \int_{0^-}^t h(t, u) d_u l(u, \tau) du = Y(t - \tau)$$

En revenant à l'intégrale de Riemann habituelle et en intégrant par parties, il vient :

$$l(t, \tau) h(t, t) - \int_{\tau}^t \frac{\partial h}{\partial u}(t, u) l(u, \tau) du = 1$$

Compte tenu de ce que :

$$(12) \quad h(t, t) = h_{\infty}(t) = \frac{1}{l_{\infty}(t)}$$

puisque l'élasticité instantanée à l'âge t n'a pas de caractère héréditaire, il vient :

$$(13) \quad l(t, \tau) - l_{\infty}(t) \int_{\tau}^t \frac{\partial h(t, u)}{\partial u} l(u, \tau) du = l_{\infty}(t)$$

L'équation (13) est la forme canonique d'une équation intégrale de seconde espèce non homogène, de noyau $K(t, u) = \frac{\partial h(t, u)}{\partial u}$ dont la solution, unique, donne l'expression de $l(t, \tau)$ connaissant celle de $h(t, \tau)$, et définit donc parfaitement l'opérateur \hat{l} , inverse de \hat{h} , qui lui est associé.

4. EXTENSION MATRICIELLE : MATRICES OPERATORIELLES SUR LE CORPS DES OPERATEURS DE MANDEL

Dans les problèmes pratiques on aura le plus souvent à considérer plusieurs fonctions observables, lesquelles dépendront de plusieurs fonctions arguments.

Ceci nous a donné l'occasion [5] [6] d'une généralisation des opérateurs de Mandel sous forme d'opérateurs matriciels.

Nous considérons un système dans lequel nous étudions m observables $y_i(t)$ dépendant de n actions $x_k(t)$.

Soit $Y(t)$ le vecteur formé par les y_i , et $X(t)$ celui formé par les x_k . Soit $a_{ik}(t; u)$ le noyau de la réponse fonctionnelle pour la variable y_i correspondant à l'action $x_k(t)$. Soit $\mathbf{A}(t; u)$ la matrice $(m \times n)$ des $a_{ik}(t; u)$. D'après (8) et la linéarité, on pourra écrire :

$$(14 i) \quad y_i(t) = \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} x_j(t) \quad (i = 1 \text{ à } m)$$

qui a la même forme que celle que l'on obtiendrait pour un système non héréditaire (i.e. dans lequel les noyaux $a_{ij}(t, \tau)$ seraient des constantes a_{ij}).

4.1. Définition des matrices operatorielles

De façon formelle, nous pouvons, comme on le ferait dans le cas non héréditaire, écrire l'ensemble

des (14 i) ($i = 1$ à m) sous forme matricielle, soit, avec des notations évidentes :

$$(15) \quad Y(t) = \hat{A} X(t)$$

où \hat{A} est la matrice (de taille $m \times n$) dont les éléments sont les opérateurs \hat{a}_i :

$$(16) \quad \hat{A}_{mn} = [\hat{a}_{ij}]_{mn}$$

Si l'on connaît les $x_i(t)$ et que l'on cherche à connaître les $y_i(t)$, le formalisme (15) n'apporte rien de plus qu'une commodité d'écriture. Mais si les $x_i(t)$ eux-mêmes ne sont pas connus, mais doivent résulter de la résolution d'un problème physique ou mécanique dont on aura à effectuer auparavant la mise en équation, nous n'avons jusqu'à présent aucun moyen d'utiliser ce formalisme. Pour pouvoir le faire, il est d'abord nécessaire d'examiner s'il est possible d'effectuer des opérations algébriques sur des matrices opératorielles (à éléments « abstraits ») telles que (16), ou des équations telles que (15). Nous avons montré en [5] qu'une réponse positive à cette question peut être fournie à partir des théorèmes d'algèbre relatifs aux matrices à éléments dans un corps [7], [8]. La propriété qu'ont les opérateurs scalaires de Mandel de former un corps joue donc un rôle fondamental dans l'extension que nous en présentons ici.

4.2. Règles opératoires

Moyennant les correspondances d'indices habituelles, on peut en effet définir la somme et le produit de matrices telles que (16). On peut également définir les éléments nul et unité (à droite et à gauche), neutres pour ces opérations. On peut également définir la multiplication scalaire (à droite ou à gauche) de telles matrices par un opérateur (scalaire) de Mandel. Enfin, on peut montrer (cf. [5]) que toute matrice opératorielle carrée possède un inverse, dont les éléments sont solution (unique) d'un système linéaire de Volterra (d'ordre n^2 , mais qui se réduit à n sous-systèmes d'ordre n).

On a ainsi les définitions et règles opératoires suivantes (matrices de taille mn ou nn).

α — matrices rectangles :

somme :

$$*(D1) \quad \hat{C}_{mn} = \hat{A}_{mn} + \hat{B}_{mn} = [\hat{a}_{ij} + \hat{b}_{ij}]_{mn} = [\hat{c}_{ij}]_{mn}$$

produit matriciel :

$$(D2) \quad \hat{D}_{mn} = \hat{A}_{mp} \hat{B}_{pn} = \left[\sum_{k=1}^p \hat{a}_{ik} \hat{b}_{kj} \right]_{mn} = [\hat{d}_{ij}]_{mn}$$

élément nul :

$$\hat{O}_{mn} = [\hat{o}]_{mn}$$

éléments unités à gauche et à droite :

$$(D3) \quad \hat{I}_{mm} = [\hat{\delta}_{ij}]_{mm}; \quad \hat{I}_{nn} = [\hat{\delta}_{ij}]_{nn}$$

($\hat{\delta}_{ij}$ symbole de Kronecker)

* Les définitions sont notées (D_i), et les propriétés (R_i).

produits scalaires à gauche et à droite :

$$(D4) \quad \hat{\lambda} \hat{A} = [\hat{\lambda} \hat{a}_{ij}]; \quad \hat{A} \hat{\lambda} = [\hat{a}_{ij} \hat{\lambda}]$$

commutativité de la somme :

$$*(R1) \quad \hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$$

non commutativité des produits :

$$(R2) \quad \hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A} \text{ et } \hat{\lambda} \hat{A} \neq \hat{A} \hat{\lambda} \text{ en général}$$

distributivité des produits :

$$(R3) \quad \hat{C} (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{C} \hat{A} + \hat{C} \hat{B};$$

$$(\hat{A} + \hat{B}) \hat{C} = \hat{A} \hat{C} + \hat{B} \hat{C}$$

$$(R4) \quad \hat{\lambda} (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{\lambda} \hat{A} + \hat{\lambda} \hat{B}; \quad (\hat{A} + \hat{B}) \hat{\lambda} = \hat{A} \hat{\lambda} + \hat{B} \hat{\lambda}$$

$$\hat{A} (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) = \hat{A} \hat{\lambda} + \hat{A} \hat{\mu}; \quad (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \hat{A} = \hat{\lambda} \hat{A} + \hat{\mu} \hat{A}$$

neutralité du produit par l'unité :

$$(R5) \quad \hat{I}_{mm} \hat{A}_{mn} = \hat{A}_{mn} \hat{I}_{nn} = \hat{A}_{mn}$$

associativité du produit :

$$(R6) \quad \hat{A} (\hat{B} \hat{C}) = (\hat{A} \hat{B}) \hat{C} = \hat{A} \hat{B} \hat{C}$$

β — matrices carrées

inverse $\hat{B}_{nn} = \hat{A}_{nn}^{-1}$:

$$(D5) \quad \hat{A}_{nn} \hat{B}_{nn} = \mathbf{1} \text{ ou } \sum_{k=1}^n \hat{a}_{ik} \hat{b}_{kj} = \delta_{ij} \quad (i = 1 \text{ à } n; j = 1 \text{ à } n)$$

bilatérarité, commutativité et réflexivité de l'inverse :

$$(R7) \quad \hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{I}; \quad (\hat{A}^{-1})^{-1} = \hat{A}$$

On retrouve bien, avec l'essentiel de leurs propriétés, la plupart des opérations courantes du calcul matriciel numérique. Elles peuvent en différer par certains détails (par exemple non commutativité de la multiplication scalaire) qui ne demandent cependant qu'un peu d'attention dans l'exécution des calculs. Chaque ensemble $\hat{M}_{m,n}$ des matrices opératorielles rectangle de même taille $m \times n$ forme un bi-espace vectoriel sur le doublet (\hat{K}, \hat{K}) où \hat{K} est le corps des opérateurs scalaires de Mandel.

Chaque ensemble des matrices opératorielles carrées $\hat{M}_{n,n}$ de même taille n (et à éléments non tous égaux à zéro) forme un corps (non commutatif). De plus, les corps \hat{K} et $\hat{M}_{n,n}$ peuvent être munis d'une structure d'algèbre associative sur le sous-corps $\hat{K}_0 \subset \hat{K}$ des opérateurs associés aux constantes réelles $k_0 \in K_0$ (en effet les $\hat{k}_0 \in \hat{K}_0$ commutent avec les \hat{k} et les $\hat{A}_{m,n}$). \hat{K} et $\hat{M}_{n,n}$ possèdent donc tous deux la triple structure de « corps non-commutatif ; bi-espace vectoriel sur le corps de définition ; algèbre sur \hat{K}_0 ».

4.3. Principe de correspondance

Chaque ensemble $M_{m,n}$ de matrices numériques rectangles de même taille $m \times n$, définies sur le corps des constantes K_0 , forme un bi-espace vectoriel sur

le doublet (K_0, K_0) . De plus l'ensemble $GL_n(K_0)$ des matrices numériques carrées inversibles de taille n sur K_0 (sous-corps des constantes de K) possède également la triple structure de « corps non commutatif ; bi-espace vectoriel sur le corps de définition ; algèbre sur K_0 ».

Notons $\bar{M}_{p,q}$ l'ensemble des matrices numériques A_{mn} non singulières telles que $m < p$ et $n < q$; et $\hat{M}_{p,q}$ l'ensemble des matrices opératorielles \hat{A}_{mn} telles que $m < p$ et $n < q$.

Ce qui précède montre qu'il existe un certain isomorphisme algébrique entre les ensembles $\hat{M}_{p,q}$ et $\bar{M}_{p,q}$, munis respectivement des structures définies ci-dessus. Cet isomorphisme n'est toutefois pas total puisque les multiplications externes sur le corps des scalaires de définition, \hat{K} ou K_0 respectivement, ne sont pas commutatives en général dans $\hat{M}_{p,q}$ alors qu'elles le sont toujours dans $\bar{M}_{p,q}$.

Il en résulte cependant que nos matrices opératorielles permettent d'établir une certaine correspondance entre les problèmes héréditaires linéaires vieillissants et les problèmes non héréditaires linéaires homologues lorsque ces derniers sont traités par la représentation matricielle, et ce, quel que soit le nombre de fonctions de comportement intervenant dans le problème.

En effet, considérons un problème non héréditaire écrit en formulation matricielle. D'après (16), les équations de départ écrites dans le cas héréditaire à l'aide de nos matrices opératorielles auront même forme (à condition de n'introduire que les coefficients naturels, multiplicatifs, dans ces équations de départ). De plus, d'après ce qui précède, et si la solution ne fait intervenir que des opérations algébriques autres que la multiplication externe de la matrice par des opérateurs rhéologiques scalaires, la suite d'opérations qui sera appliquée conduira à des résultats également de même forme, et qui seront donc directement transposables (sans reprise des calculs) du cas non héréditaire au cas héréditaire.

5. APPLICATION A L'ECRITURE DES LOIS DE COMPORTEMENT TRIDIMENSIONNELLES

Nous allons voir que les opérateurs rhéologiques matriciels permettent, pour un comportement viscoélastique vieillissant linéaire, d'écrire les relations de comportement du cas tri-dimensionnel sous une forme simple, et identique à l'écriture matricielle du cas élastique homologue. Rappelons d'abord la forme des équations du cas élastique.

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_{11} \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_{22} \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad , \quad \sigma_5 = \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad , \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{array} \right. \\
 (27) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \epsilon_{11} \quad , \quad \epsilon_2 = \epsilon_{22} \quad , \quad \epsilon_3 = \epsilon_{33} \\ \epsilon_4 = 2 \epsilon_{23} = 2 \epsilon_{32} = \gamma_1 \quad , \quad \epsilon_5 = 2 \epsilon_{31} = 2 \epsilon_{13} = \gamma_2 \quad , \quad \epsilon_6 = 2 \epsilon_{12} = 2 \epsilon_{21} = \gamma_3 \end{array} \right. \\
 (28) \quad & \sigma = \{ \sigma_i \} \quad ; \quad \epsilon = \{ \epsilon_i \}
 \end{aligned}$$

5.1. Cas élastique linéaire isotrope

De façon classique, dans le cas des petites déformations d'un milieu élastique linéaire isotrope, les relations contraintes-déformations pourront prendre les différentes formes suivantes (le nombre des coefficients élastiques indépendants étant égal à 2) :

$$(17) \quad \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (\theta = \sum_i \epsilon_{ii})$$

(où λ et μ sont les coefficients de Lamé)

$$(18) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2 \mu} \sigma_{ij} - \frac{3 \lambda}{2 \mu (3 \lambda + 2 \mu)} \sigma_m \delta_{ij} \quad (\sigma_m = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii})$$

ou encore :

$$(19) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{3 \nu}{E} \sigma_m \delta_{ij}$$

(où E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson).

En séparant en tenseur isotrope et déviateur, on a encore :

$$(20) \quad \sigma_m = K \theta \quad ; \quad s_{ij} = 2 G e_{ij}$$

où K et μ sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, et où les déviateurs s_{ij} et e_{ij} sont définis par :

$$(21) \quad \sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} \quad ; \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + e_{ij}$$

Rappelons les relations bien connues suivantes :

$$(22) \quad E = \frac{\mu (3 \lambda + 2 \mu)}{\lambda + \mu} \quad ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2 (\lambda + \mu)}$$

$$(23) \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad ; \quad G = \mu = \frac{E}{2 (1 + \nu)}$$

$$(24) \quad \lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu) (1 - 2 \nu)} \quad ; \quad K = \frac{E}{3 (1 - 2 \nu)}$$

$$(25) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{3 G} + \frac{1}{9 K}$$

5.2. Cas élastique linéaire anisotrope

Dans le cas linéaire anisotrope, le nombre de coefficients indépendants est supérieur à 2 et la transformation « contraintes en fonction des déformations » à déformations en fonction des contraintes est moins simple. Plutôt que sous forme tensorielle, on peut écrire les équations (17) sous forme matricielle, en posant

La relation contrainte déformation s'écrit alors, si l'on introduit en outre le vecteur ε^0 des déformations libres en l'absence de contrainte (par exemple dilata-tions thermiques ou hygroscopiques) :

$$(29) \quad \varepsilon = \mathbf{C} \sigma + \varepsilon^0$$

où \mathbf{C} est la matrice (carrée) des complaisances élas-tiques, matrice 6×6 .

On a encore

$$(30) \quad \sigma = \mathbf{C}^{-1} (\varepsilon - \varepsilon^0)$$

soit

$$(31) \quad \sigma = \mathbf{M} (\varepsilon - \varepsilon^0)$$

où

$$(32) \quad \mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1}$$

est la matrice (6×6) des modules élastiques.

On sait que l'existence d'un potentiel élastique restreint à 21 le nombre de composantes indépen-dantes de chacune des matrices \mathbf{C} ou \mathbf{M} dans le cas le plus général d'anisotropie.

5.4. Cas viscoélastique linéaire avec vieillissement

Dans le cas viscoélastique avec vieillissement, l'équation (17) reste valable si l'on remplace λ et μ par les opérateurs de Mandel $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ associés aux fonctions relaxation $\lambda(t, \tau)$ et $\mu(t, \tau)$.

Mais les équations (18) à (25) ne sont plus valables du fait qu'elles ont été établies dans une algèbre commutative, alors que les opérateurs de Mandel forment, nous l'avons vu, un corps non commutatif.

Par contre les relations matricielles que nous avons utilisées dans le cas élastique anisotrope se trouvent conservées dans le cas viscoélastique (isotrope et anisotrope) avec vieillissement du fait que les matrices carrées de module ou de complaisance forment elles-mêmes un corps non commutatif, et que, comme nous l'avons vu on peut, dans l'ensemble des opérateurs matriciels, construire un corps non commutatif d'opérateurs matriciels carrés.

On aura dans ce cas

$$(33) \quad \varepsilon(t) = \hat{\mathbf{C}} \sigma(t) + \varepsilon^0(t)$$

$$(34) \quad \sigma(t) = \hat{\mathbf{M}} [\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t)]$$

$$(35) \quad \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}$$

Rappelons (cf. paragraphe 4) que (35) représente la solution de l'équation matricielle.

$$(36) \quad \hat{\mathbf{M}} \mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{M} = \mathbf{1}$$

et peut s'écrire, sous forme symétrique

$$(37) \quad \hat{\mathbf{M}} \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{1}}$$

L'équation (36) se ramène à un système linéaire intégral de Volterra d'ordre 36, qui se décompose en 6 sous-systèmes d'ordre 6.

Dans le cas isotrope, la matrice $\hat{\mathbf{M}}$ des modules pourra s'écrire, par exemple :

$$(38) \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & \hat{\lambda} & \hat{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & \hat{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda} & \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix}$$

où, comme nous l'avons dit, $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ sont les opéra-teurs scalaires associés aux fonctions relaxation $\lambda(t, \tau)$ et $\mu(t, \tau)$ homologues des coefficients de Lamé du cas élastique.

On en déduira $\hat{\mathbf{C}}$ en résolvant le système (36).

On constate que, dans le cas isotrope, $\hat{\mathbf{M}}$ est la somme directe de deux sous-matrices opératorielles d'ordre 3 :

$$(39) \quad \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{N}} \dot{+} \hat{\mathbf{G}}$$

Il en résulte que, dans ce cas isotrope, l'opérateur complaisance $\hat{\mathbf{C}}$ sera aussi la somme directe de deux sous-matrices opératorielles, inverses des précédentes :

$$(40) \quad \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} = \hat{\mathbf{N}}^{-1} \dot{+} \hat{\mathbf{G}}^{-1} = \hat{\mathbf{L}} \dot{+} \hat{\mathbf{J}}$$

On aura ainsi

$$(41) \quad \hat{\mathbf{C}} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) & -\frac{1}{2}\hat{\beta} & -\frac{1}{2}\hat{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\hat{\beta} & \frac{1}{2}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) & -\frac{1}{2}\hat{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\hat{\beta} & -\frac{1}{2}\hat{\beta} & \frac{1}{2}(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\alpha} \end{bmatrix}$$

L'identification à $\hat{\mathbf{1}}$ des produits $\hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{J}}$ fournit alors pour solution :

$$(42) \quad \hat{\alpha} = \hat{\mu}^{-1} ; \hat{\beta} = \frac{1}{3} \hat{\mu}^{-1} - \frac{2}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1}$$

Sous forme explicite, en fonction des coefficients de Lamé opératoriels $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$, on obtient, pour la matrice complaisance opératorielle $\hat{\mathbf{C}}$ définie par (32) :

$$(43) \hat{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} + \frac{1}{3} \hat{\mu}^{-1} & \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} - \frac{1}{6} \hat{\mu}^{-1} & \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} - \frac{1}{6} \hat{\mu}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} - \frac{1}{6} \hat{\mu}^{-1} & \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} + \frac{1}{3} \hat{\mu}^{-1} & \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} - \frac{1}{6} \hat{\mu}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} - \frac{1}{6} \hat{\mu}^{-1} & \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} - \frac{1}{6} \hat{\mu}^{-1} & \frac{1}{3} (3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})^{-1} + \frac{1}{3} \hat{\mu}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mu}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mu}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mu}^{-1} \end{bmatrix}$$

On remarquera que \hat{C} s'exprime facilement en fonction du module de cisaillement \hat{G} et du module de compressibilité \hat{K} opératoriels, définis par

$$(44) \hat{G} = \hat{\mu} : 3\hat{K} = 3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}$$

Les coefficients de (43) sont en effet fonctions linéaires des complaisances de cisaillement et de compressibilité opératoriels

$$(45) \hat{J} = \hat{G}^{-1} ; \hat{H} = \hat{K}^{-1}$$

On évitera de mettre les relations contraintes déformations sous une forme faisant intervenir le module d'Young et le coefficient de Poisson, du fait que la non commutativité fait apparaître pour ce dernier deux opérateurs différents, qui sont (cf. [2]) :

$$(46) \hat{v}' = 1/2 (\hat{\lambda} + \hat{\mu})^{-1} \hat{\lambda}$$

$$(47) \hat{v}'' = 1/2 \hat{\lambda} (\hat{\lambda} + \hat{\mu})^{-1}$$

sans que l'on puisse établir, en général, l'identité entre ces deux expressions.

6. EXEMPLE DE MISE EN EQUATIONS

La méthode précédente permet d'obtenir facilement, sous une forme compacte et universelle, les équations locales des structures composites telles que plaques stratifiées (ou multiplaques), barres composites à plan de symétrie (ou multilames) ou sans plan de symétrie (déflexion gauche) sous l'effet de sollicitations internes (variations dimensionnelles telles que retrait du béton, dilatations thermiques différentielles, etc.) aussi bien qu'externes (efforts et moments en travée), ainsi que les équations de leurs assemblages (par exemple ossatures). Faute de place, nous nous limiterons ci-après au cas particulièrement significatif des multiplaques.*

Avec les hypothèses des plaques minces et de Love-Kirchhoff, on peut écrire pour les contraintes et les déformations, en notation matricielle :

* On trouvera en [12] l'exposé d'autres cas.

— contraintes nulles suivant l'épaisseur

$$(48) \sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

— vecteur déformation ε fonction linéaire de la cote z suivant l'épaisseur.

$$(49) \varepsilon(t) = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T = A + Bz$$

— équation rhéologique de la plaque i :

$$(50) \sigma_i(t) \equiv [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]^T = \hat{E}_i [\varepsilon(t) - \varepsilon_i^o(t)]$$

où $\varepsilon_i^o(t) = [\varepsilon_{xx}^o \ \varepsilon_{yy}^o \ \gamma_{xy}^o]^T$ est le vecteur des dilatations libres, et où \hat{E}_i est un opérateur matriciel symétrique de taille 3×3 .

Les vecteurs effort normal n et moment (flexion et torsion) m s'écrivent :

$$(51) n \equiv \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_2} \sigma(z) dz ;$$

$$m \equiv \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_2} z \sigma(z) dz$$

où $z_2 - z_1$ est l'épaisseur totale du multiplaque.

En reportant (49) dans (50), on trouve l'équation de comportement local du multiplaque, qui relie le vecteur des efforts, au vecteur des déformations (déformations A dans le plan origine et courbures B) :

$$(52) \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{H} \\ \hat{H} & \hat{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$$

où l'on a posé :

$$(53) \hat{G} = \sum_i S_i \hat{E}_i ; \hat{H} = \sum_i S_i h_i \hat{E}_i ; \hat{K} = \sum_i (I_i + S_i h_i^2) \hat{E}_i$$

$$(54) p(t) = \sum_i S_i \hat{E}_i \varepsilon_i^o(t) ; q(t) = \sum_i S_i h_i \hat{E}_i \varepsilon_i^o(t)$$

où S_i est l'aire d'une section de largeur unité de la plaque, I_i le moment d'inertie de cette section par rapport à l'axe médian, h_i l'ordonnée de cet axe par rapport à une origine fixe quelconque.

Si l'on connaît l'évolution des efforts n et m (par exemple déformation libre : $n = m = 0$), on obtient ainsi la déformation moyenne A et la courbure B par résolution de

$$(55) \quad \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{H} \\ \hat{H} & \hat{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n + p \\ m + q \end{bmatrix}$$

Un tel système constitue alors un système d'équations de Volterra, de taille 6 pour les multiplaques.

La taille du système à résoudre apparaît donc indépendante du nombre de couches entrant dans la composition de multiplaque. Nous avons montré en [12] que l'on obtient des systèmes de même forme pour les multilames (poutres composites à plan de symétrie sollicitées dans ce plan) pour lesquels la taille du système est égale à 2, ainsi que pour les poutres composites en sollicitation gauche dans l'espace, pour lesquelles cette taille est de 4.

En particulier, dans le cas des multilames, ce système s'écrit :

$$(56) \quad \begin{bmatrix} \hat{G} & \hat{H} \\ \hat{H} & \hat{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n + p \\ m + q \end{bmatrix}$$

ce qui montre que l'introduction de nos opérateurs matriciels offre ici un avantage significatif, par rapport à la méthode des opérateurs scalaires que nous avons utilisée en [3] [4].

Le report de A et B dans (49) et (50) fournit alors l'évolution de la distribution des contraintes et déformations sur l'épaisseur du multiplaque au point considéré. Ces résultats ont même forme que dans le cas des multiplaques élastiques traités en représentation matricielle (cf. [11]), ce qui illustre le principe de correspondance avec le cas élastique établi plus haut.

7.2. Equations locales aux déplacements

En général, dans le cas d'un multiplaque il ne sera pas possible de connaître a priori les valeurs des efforts n et moments m en travée. De même que dans le cas élastique, leur connaissance passe en effet par la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles par rapport aux coordonnées x et y avec conditions données à la limite. En général, on écrira ces équations par rapport au vecteur déplacement $W = [u \ v \ w]^T$. On les obtient alors en reportant les équations de comportement local (52) dans les équations d'équilibre, puis en remplaçant A et B par leurs expressions en fonction de (u, v, w) (relations cinématiques).

L'équation de comportement local (52) du multiplaque ayant même forme qu'en élasticité (en représentation matricielle), il en sera de même pour les équations aux dérivées partielles par rapport aux déplacements auxquelles on aboutit. Le calcul direct montre d'ailleurs qu'il en est bien ainsi.

L'utilisation d'une autre classe d'opérateurs matriciels, à éléments dans l'anneau des opérateurs différentiels scalaires (d'ordre quelconque) par rapport aux variables d'espace x et y , nous a permis de les écrire sous une forme compacte, mettant bien en lumière la structure du système et qui est (cf. [6] et [12]) :

$$(57) \quad \left[\hat{D}_2 \hat{E} \hat{D}_2 - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho^T \hat{D}_2 \end{Bmatrix} + \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] W(M, t) = Q(M, t)$$

où, en notant $\dot{+}$ la somme directe, l'opérateur différentiel \hat{D}_2 (de taille 6×3) et son adjoint \hat{D}_2^T (de taille 3×6) s'expriment par :

$$(58) \quad \hat{D}_2 = \hat{D}_1 \dot{+} \hat{D}_2 ; \quad \hat{D}_2^T = -\hat{D}_1^T \dot{+} \hat{D}_2^T$$

avec (en notant $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$) :

$$(59) \quad \hat{D}_1^T = \begin{bmatrix} D_x & 0 & D_y \\ 0 & D_y & D_x \end{bmatrix} ; \quad \hat{D}_2^T = [D_{xx}^2 \ D_{yy}^2 \ 2 D_{xy}^2]$$

L'opérateur intégral-différentiel matriciel symétrique \hat{E} (de taille 6×6) et le vecteur Q (de taille 6) sont définis par :

$$(60) \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} -\hat{G} & \hat{H} \\ \hat{H} & -\hat{K} \end{bmatrix} ;$$

$$Q(M, t) = [\hat{D}_1^T p \quad -f + \hat{D}_2 q]^T$$

On trouvera également en [12] une discussion des possibilités de résolution d'un tel système (lorsque les couches sont isotropes, on parvient au même découplage que dans le cas élastique traité par Verchery [11]).

Par ailleurs, nous avons également pu, à l'aide de nos opérateurs matriciels, écrire, par la méthode des déplacements, la solution formelle du problème d'une ossature (hétérogène ou non) de barres viscoélastiques vieillissantes. Cette solution a bien même forme que la solution matricielle du cas élastique. (cf. [12]).

7. ALGORITHMES NUMERIQUES

Dans le cas (le plus fréquent dans les applications) où plusieurs paramètres rhéologiques interviennent dans le problème, il n'est pas possible d'écrire une solution explicite (autre que formelle), ce qui conduit à la nécessité d'un traitement numérique adapté à la méthode des opérateurs. D'ailleurs, même dans le cas d'un seul paramètre, l'obtention de résultats numériques à partir d'histoires qui seront le plus souvent données sous une forme numérique tirée de l'expérience, exige également un traitement du même type.

L'expérience montre que la méthode des opérateurs se prête particulièrement bien à de tels traitements numériques du fait que chaque opération algébrique élémentaire sur ces opérateurs peut faire l'objet, dans le cadre d'un traitement sur ordinateur, d'un sous-programme que l'on peut ensuite appeler à volonté.

Nous donnons ici quelques indications sur des algorithmes destinés à représenter les opérations de

— application à une fonction

- somme et produit
- inversion

tant d'opérateurs matriciels que d'opérateurs scalaires.

Les fonctions associées aux opérateurs pourront se présenter

- soit sous forme analytique explicite
- soit sous forme de données purement numériques correspondant à une grille de valeurs discrètes du couple (t, τ) .

Dans le deuxième cas, le stockage des données correspondantes pourra donner lieu à des problèmes d'encombrement mémoire. Dans certains cas, on pourra les tourner à l'aide de procédures d'interpolation, permettant l'emploi de grilles à maille assez lâche.

On notera qu'en eux-mêmes, les opérateurs n'apportent aucune contribution à la résolution effective des problèmes numériques qui peuvent se poser.

Ils permettent cependant d'une part de limiter en nombre les problèmes et de les circonscrire ; d'autre part, ils peuvent faciliter leur analyse (notamment dans le cas des opérateurs matriciels) grâce aux manipulations rendues possibles par leurs propriétés algébriques (de façon très analogue au rôle joué par le calcul matriciel classique en analyse numérique).

Il existe divers algorithmes possibles, et nous nous contentons de donner ici des exemples de principe.

7.1. Opérateurs scalaires

7.1.1. Application de l'opérateur à une fonction

Si $g(t, \tau)$ est une fonction de t et τ , appliquer l'opérateur \hat{g} à une fonction $\varphi(t)$, c'est trouver la fonction $\psi(t)$ définie par l'intégrale de Stieltjes.

$$(61) \quad \psi(t) = \int_{0^-}^t g(t, u) d\varphi(u) \iff \psi = \hat{g}\varphi$$

où $g(t, \tau)$ est nulle pour $t < \tau$.

On pourra évaluer l'intégrale dans (61) par une formule de quadrature. Par exemple, en revenant à la définition de l'intégrale de Stieltjes comme limite d'une suite de fonctions $h_n(t)$, on écrira :

$$(62) \quad \psi_n(t) = \sum_{k=1}^n g(t, \xi_k) [\varphi(u_{k+1}) - \varphi(u_k)]$$

avec $u_k < \xi_k < u_{k+1}$

En pratique, on fera le calcul pour une suite discrète de valeurs t_r de t , que l'on fera coïncider avec la suite des $u_k = t_{k-1}$.

On pourra prendre pour ξ_k l'abscisse donnant à g une valeur égale à sa médiane sur l'intervalle $(u_k, u_{k+1}) = (t_{k-1}, t_k)$, soit, en nommant t , l'instant origine des temps :

$$(63) \quad \psi_k(t_r) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^r [g(t_r, t_k) + g(t_r, t_{k-1})] \Delta\varphi(t_k)$$

où l'on a noté :

$$(64) \quad \Delta\varphi(t_k) = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$$

7.1.2. Somme et combinaisons linéaires d'opérateurs

Les opérations de sommes ou de combinaisons linéaires d'opérateurs à coefficients constants ne posent aucun problème particulier :

$$(65) \quad \hat{h} = a\hat{f} + b\hat{g} \iff h(y, \tau) = a f(t, \tau) + b g(t, \tau)$$

Après discrétisation des temps, cela revient pour chaque couple des temps, à faire la combinaison linéaire de deux nombres algébriques.

7.1.3. Produits d'opérateurs

Faire le produit $\hat{g}\hat{f}$ des deux opérateurs associés aux fonctions $g(t, \tau)$ et $f(t, \tau)$ revient à calculer, pour toutes les valeurs de τ , la fonction $h(t, \tau)$ définie par :

$$(66) \quad h(t, \tau) = \hat{g}f.$$

Après discrétisation sur t et τ , cela revient donc à appliquer un grand nombre de fois (autant que d'intervalles sur l'axe des τ) l'algorithme (63) défini au paragraphe précédent.

Toutefois, si le produit $\hat{h} = \hat{g}\hat{f}$ est destiné à être appliqué à une fonction $\varphi(t)$, on aura avantage à calculer d'abord la fonction :

$$(67) \quad \psi(t) = \hat{f}\varphi(t)$$

puis la fonction

$$(68) \quad \theta(t) = \hat{k}\psi(t) \equiv \hat{h}\varphi(t)$$

Ceci n'entraîne en effet que deux applications successives de l'algorithme (63). De plus, il n'y a à chaque fois qu'un seul tableau (f ou k) à deux indices à stocker (au lieu de 3 : f , k et h , dans le cas direct).

Pour des produits en chaîne d'opérateurs, il sera donc avantageux d'utiliser le même procédé, de proche en proche de la droite vers la gauche.

7.1.4. Inversions d'opérateurs

Les inversions d'opérateurs posent en pratique des problèmes numériques délicats de convergence, de stabilité, de place mémoire et de temps (et donc de coût) de calcul. On les évitera donc le plus possible en se ramenant à une résolution opératoire.

Si par exemple, on dispose d'une solution formelle du type

$$(69) \quad \psi(t) = \hat{g}^{-1}\varphi(t)$$

où \hat{g} et φ sont connus, on ne cherchera pas à inverser d'abord \hat{g} , et à l'appliquer ensuite à φ , mais à résoudre directement l'équation :

$$(70) \hat{g}\psi = \varphi$$

L'équation (70) constitue en effet une équation de Volterra, dont la résolution numérique pose déjà des problèmes pratiques ardu.

L'inversion de \hat{g} correspond au contraire à un grand nombre de telles résolutions (autant que d'intervalles dans la discrétisation de l'axe des temps).

On retrouve ici le même principe qu'en calcul matriciel numérique, où l'on évite le plus possible d'inverser une matrice en ne traitant que les résolutions de systèmes algébriques.

Pour résoudre une équation telle que (70), on pourra utiliser l'algorithme incrémental décrit par Bažant en [13]. D'après cet auteur*, cet algorithme donne en effet de bons résultats sur un intervalle de temps étendu (plusieurs puissances de 10, comme il est nécessaire dans le cas du béton, et par conséquent dans la plupart des problèmes de construction), tout en limitant le nombre de pas (la discrétisation du temps pouvant se faire sur une échelle logarithmique).

Nous en avons établi une version améliorée qui divise le temps de calcul par 3 et que l'on trouvera en [12].

7.2. Opérateurs matriciels

Des algorithmes effectuant l'application d'opérateurs matriciels, leurs sommes et leurs produits, peuvent s'écrire simplement à partir des algorithmes correspondant à des opérateurs scalaires : il suffit d'introduire ces algorithmes dans des boucles emboîtées convenables. Pour les produits d'opérateurs, simples ou en chaîne, les mêmes remarques s'appliquent que pour les produits scalaires.

7.2.1. Application d'un opérateur matriciel à une fonction vectorielle

On a :

$$(71) G(t) = \hat{A}F(t) \iff g_i(t) = \sum_j a_{ij} f_j(t)$$

On écrira donc facilement un sous-programme appliquant \hat{A} à F par :

- boucle sur i
- boucle sur j
- appel du sous-programme d'application scalaire
- sommation du résultat final pour chaque temps.

7.2.2. Somme

On a :

$$(72) \hat{H} = \hat{F} + \hat{G} \iff \hat{h}_{ij} = \hat{f}_{ij} + \hat{g}_{ij}$$

La programmation est donc immédiate par deux boucles sur i et j.

7.2.3. Produit

On a :

$$(73) \hat{H} = \hat{G}\hat{F} \iff \hat{h}_{ij} = \sum_k \hat{g}_{jk} \hat{f}_{ki} \iff h_{ij}(t, \tau) = \sum_k \hat{g}_{jk} f_{ki}(t, \tau)$$

Sur le plan numérique, ceci conduit à un grand nombre d'applications de l'opérateur \hat{G} à la fonction $f(t, \tau)$ paramétrée en τ .

Pour calculer une fonction

$$(74) \Theta = \hat{H}\Phi(t) \equiv \hat{G}\hat{F}\Phi(t)$$

on préférera donc calculer d'abord :

$$(75) \psi(t) = \hat{F}\Phi(t)$$

puis :

$$(76) \Theta = \hat{G}\psi(t)$$

ce qui ne fait que deux applications de l'opérateur matriciel à une fonction.

7.2.4. Inversion

De façon plus marquée que dans le cas scalaire, l'inversion pose des problèmes importants qui devront faire l'objet d'études attentives dans chaque cas d'espèce (en fonction notamment de la taille et du conditionnement de la matrice opératoire).

De même que dans le cas des matrices numériques, et aussi, nous l'avons vu, des opérateurs rhéologiques scalaires, il y aura lieu d'éviter une réelle inversion en se ramenant dans toute la mesure du possible à une résolution.

Une expression du type :

$$(77) F(t) = \hat{A}^{-1}G(t)$$

où \hat{A} est un opérateur connu et G une fonction connue, se calculera par résolution de :

$$(78) \hat{A}F(t) = G(t)$$

qui représente un système d'équations de Volterra, linéaires, de seconde espèce, avec second membre où les intégrales sont des intégrales simples.

On sait en principe ramener le cas matriciel au cas scalaire par un changement de variable et de fonction. Cependant, ce procédé multiplie par n, taille de la matrice, le nombre d'intervalles de temps à considérer, et introduit des discontinuités dans le noyau.

Il semble donc préférable de traiter directement la résolution sous forme matricielle.

On peut envisager plusieurs méthodes, qui pourront se révéler plus ou moins avantageuses ou applicables suivant les cas d'espèces.

On trouvera en [12] un algorithme pas à pas que nous avons établi par généralisation au cas matriciel de l'algorithme de Bažant amélioré mentionné plus haut.

* Et nos propres vérifications.

8. CONCLUSION

Nous avons vu que la méthode des opérateurs rhéologiques matriciels permet de mettre en équation de façon rapide, aisée et compacte les problèmes de calcul des structures où interviennent des matériaux viscoélastiques linéaires avec vieillissement (dont l'exemple le plus caractéristique, mais aussi le plus répandu, est le béton hydraulique).

De plus, le formalisme auquel on est conduit est très analogue à celui couramment utilisé pour les structures élastiques homologues.

Enfin, dans un grand nombre de cas, les propriétés de correspondance permettent de pousser l'analogie au cas élastique jusqu'à la forme même des équations finales.

De par la facilité avec laquelle elle peut s'adapter, grâce à l'élaboration de sous-programmes opératoires de base, aux moyens modernes de calcul numérique des structures, cette méthode (qui s'applique également au cas non vieillissant avec en plus le bénéfice de la commutativité scalaire) apparaît constituer un outil relativement puissant, qui devrait contribuer efficacement à une meilleure approche des problèmes posés, pour la durabilité des constructions, par les comportements rhéologiques différés des matériaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDEL — Sur les corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge. C.R. Acad. Sc., Paris. t 247, 175-198 ; 1958).
- [2] J. MANDEL — Un principe de correspondance pour les corps viscoélastiques linéaires vieillissants. Communication au symposium IUTAM sur la mécanique des milieux et corps viscoélastiques, Göteborg (septembre 1974, Chalmers University).
- [3] J.M. SERVAS et C. HUET — Relations entre fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire avec vieillissement (Cahiers du Groupe français de Rhéologie, t. IV, n° 2, 30 sept. 1976).
- [4] C. HUET — Le séchage des pâtes argileuses et la mécanique des milieux continus évolutifs. Bul. G. français des argiles, 23 (1970), 39-54.
- [5] C. HUET — Opérateurs intégrés-différentiels matriciels pour l'étude des systèmes à réponse différée présentant du vieillissement. — C.R. Acad. Paris, 278, 1 (1974) 1119-1122.
- [6] C. HUET — Opérateurs matriciels en viscoélasticité linéaire avec vieillissement, et application aux structures viscoélastiques hétérogènes (Symposium IUTAM, the Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies, Göteborg ; 2-6 septembre 1974).
- [7] S. MAC LANE et G. BIRKHOFF — Algèbre, I, Gauthier-Villars, Paris (1971).
- [8] A. KORGANNOF et M. PAVEL-PARVU — Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique, Dunod, Paris (1967).
- [9] A. CHAILLEUX et P. FERTE — Etude théorique et expérimentale du couplage thermoélastique dans les plaques composites, Fibres Science and Technology, 5 (1972) 173-196.
- [10] J.E. ASHTON et J.M. WITNEY — Theory of laminated plates, Technomic (1970) USA.
- [11] G. VERCHERY — Les plaques élastiques couplées, leur calcul dans le cas isotrope, thèse, Paris VI (23 mai 1973).
- [12] C. HUET — Contributions à une théorie de la durabilité des constructions. (Thèse, Paris VI, 21 mai 1975 ; C.T.T.B.).
- [13] Z.P. BAŽANT — Numerical determination of stress response to a given strain history in concrete (Bulletin d'information du Comité européen du béton, n° 80, février 1972 ; cf. aussi revue RILEM n° 5, 1972).

TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS D'ÉTUDES DE RHEOLOGIE (édités par le CNRS)

Tome I, n° 1 (1956)

- Pourquoi un « Cahier de Rhéologie » ? par P. Thirion, p. 3.
 Les groupes d'études de rhéologie : une famille internationale, par G.W. Scott Blair, p. 5.
 La vie du Groupe français d'études de Rhéologie, par P. Thirion, p. 8.
 Quelques remarques sur les courbes de fluage des métaux, par A. Constant et C. Crussard, p. 22.
 Etude rhéologique des matières plastiques. Essais à charge constante et température croissante sur polyméthylméthacrylate, par G. Fabre, p. 25.
 Le choix d'un viscosimètre, par G. Vallet, p. 29.
 Microrhéomètre universel à grande gamme de mesure, par A. Képès, p. 33.
 Projet de terminologie française de rhéologie, p. 36.
 Bibliographie, p. 43.

Tome I, n° 2 (1956)

- La vie du Groupe français d'études de Rhéologie, par P. Thirion, p. 3.
 Quelques expériences de biréfringence mécanique des plastiques, par B. Persoz et J. Bonnet, p. 6.
 Critères d'une expérimentation reproductible sur les matières plastiques, par A.J. Kovacs, p. 11.
 Industrial rheology and rheological structures (livre), par H. Green, p. 17.
 Traduction du tableau de classification rhéologique terminant le « report on the principles of rheological nomenclature », par J.M. Burgers et G.W. Scott Blair, p. 20.
 Note sur le microconsistomètre, par A. Képès, p. 26.
 Le coin du constructeur, p. 27.
 Commission nationale de rhéologie, p. 28.
 Les relations internationales, p. 30.
 Bibliographie, p. 31.

Tome I, n° 3 (1956)

Colloque avec la Société hydrotechnique de France

- Introduction, par H. Hupner, p. 5.
 Présentation, par R. Gibrat, p. 6.
 Le groupe français de rhéologie, par G. Vallet, p. 7.
 Quelques généralités sur la rhéologie des suspensions, par R. Durand et H. Lafuma, p. 8.
 Solutions scientifiques à des problèmes techniques en rhéologie, par A. Képès, p. 12.
 Propriétés rhéologiques des boues de forage, par A. Thomas, p. 13.
 La rhéologie dans l'industrie du ciment, par M. Papadakis, p. 20.
 La rhéologie des coulis d'injection, par R. Barbedette, p. 23.
 La rhéologie et la thixotropie des liants hydrocarbonés et de

- leurs compounds, par M. Duriez, p. 26.
 Allocution de clôture, par H. Weiss, p. 30.
 Remerciements et conclusions, par R. Gibrat, p. 31.

Tome II, n° 1 (1957)

- La vie du Groupe français de Rhéologie, par P. Thirion, p. 3.
 Sur un nouveau modèle rhéologique élémentaire, par A. Blaquièrre, p. 6.
 Le principe de superposition de Boltzmann, par B. Persoz, p. 18.
 Les relations internationales, p. 40.
 Bibliographie, p. 42.

Tome II, n° 2 (1957)

- La vie du Groupe français d'études de Rhéologie, par P. Thirion, p. 3.
 La liaison entre la théorie et la pratique en rhéologie, par G.W. Scott Blair, p. 5.
 Interprétation structurale et énergétique des phénomènes de thixotropie et de rhéopexie dans les couches monomoléculaires (résumé), par M. Joly, p. 8.
 Rôle de la thixotropie dans les boues de forage, par G. Labbé, p. 11.
 Propriétés rhéologiques de certaines suspensions de Fe_2O_3 , par E. Savostianoff, p. 23.
 Projet de définition de quelques termes fondamentaux de la rhéologie, p. 32.
 Les relations internationales, p. 38.
 Bibliographie, p. 41.

Tome II, n° 3 (1957)

- Hommage à Paul Le Rolland (1887-1957), p. 3.
 La vie du Groupe français d'études de Rhéologie, p. 4.
 Rhéologie des polymères fondus, par A. Képès, p. 6.
 Recherches sur les rapports entre les propriétés diélectriques et les propriétés viscoélastiques de certains isolants, par P. Caillon, p. 19.
 Le système argile-eau et ses propriétés rhéologiques, par S. Hénin, p. 26.
 Comportement rhéologique des suspensions et pâtes céramiques, par A. Baudran, p. 31.
 Diplômes d'études supérieures soutenus en Sorbonne le 12 juin 1957 (analyse), par Blaquièrre et Viovy, p. 42.
 Les relations internationales, p. 47.
 Bibliographie, p. 49.

Tome II, n° 4 (1957)

- La vie du Groupe français d'études de Rhéologie, par P. Thirion, p. 3.
 Les méthodes expérimentales en rhéologie, par J. Coste, p. 7.
 Rhéologie des savons, par J. Hirtz, p. 24.
 Etude des contraintes résiduelles (résumé), par M. Moretti, p. 37.
 Les relations internationales, p. 39.
 Agricultural rheology (livre), par G.W. Scott Blair et M. Reiner.
 Analyse bibliographique, p. 42.

Tome III, n° 1 (1958)

- La vie du Groupe français d'études de Rhéologie, par P. Thirion, p. 3.
 Un exemple de liquide non newtonien. La suspension diluée de particules rigides anisodiamétriques, par C. Sadron, p. 5.
 La rhéologie dans l'industrie verrière, par P. Acloque, p. 15.
 Quelques problèmes rhéologiques posés par le sang, par A. Dognon et P. Suquet, p. 27.
 La mesure de l'aptitude du beurre à l'étalement, par S. Kuzdzal-Savoie et J. Verge, p. 33.
 Relations internationales, p. 41.
 Bibliographie, p. 45.

Tome III, n° 2 (1958)

- Introduction à l'article de J. Huet, par J. Bonitzer, p. 3.
 Propriétés rhéologiques et physico-chimiques des bitumes, par J. Huet, p. 5.
 Thermodynamique du caoutchouc en extension. Etude des relations entre la tension et la température à l'équilibre. Partie I, réversibilité et méthode d'analyse, par P. Thirion et R. Chasset, p. 19.
 Analyse bibliographique, p. 31.

Tome III, n° 3 (1958)

- La vie du groupe, par P. Thirion, p. 3.
 Le troisième congrès international de rhéologie (Bad-Oeynhausen, 23-30 septembre 1958) — I. Organisation et ambiance du congrès, par H. Weiss, p. 5 — II. Remarques sur les communications relatives aux systèmes liquides, par M. Joly, p. 11 — III. Questions diverses de rhéologie théorique soulevées au congrès, par R. Buvet, p. 14 — IV. Remarques sur les deux systèmes de classification présentés au congrès, par R. Buvet, p. 15.
 Déformation plastique et dislocations, par J. Friedel, p. 17.
 La rhéologie aux journées d'automne 1957 de la Société française de Métallurgie, par A. Constant, p. 23.
 La rhéologie des produits bitumineux, par L.W. Nijboer, p. 47.
 Relations internationales, p. 57.
 Bibliographie, p. 59.

Tome III, n° 4 (1958)

- Séminaire de rhéologie linéaire, par R. Buvet, p. 3.
 Application du calcul opérationnel à l'étude des corps visco-élastiques, par J. Mandel, p. 5.
 Théorie générale de la viscoélasticité linéaire, par J. Mandel, p. 21.
 Rhéologie linéaire expérimentale, par R. Buvet, p. 37.
 Analyse bibliographique, p. 49.

Tome IV, n° 1 (1959)

- Colloque international de rhéologie (CNRS, juin 1960), p. 3.
 Comportement rhéologique et structure (rhéologie linéaire), par M. Mathieu, p. 5.
 Relaxation diélectrique et calcul opérationnel, par P. Ducros, p. 31.
 Changements de structures statiques et dynamiques de solutions de polyélectrolytes (Etudes rhéoptiques de ces solutions), par D. Bourgoïn, p. 33.
 Travaux interlaboratoires du Groupe français d'études de Rhéologie, par R. Buvet, p. 39.
 Participation aux travaux interlaboratoires sur le polystyrène P3, par B. Persoz, G. Grenier et J. Bonnet, p. 41.
 Caractéristiques moléculaires et thermiques d'un polystyrène, par G. Braun, p. 45.
 Analyse bibliographique, p. 49.

Tome IV, n° 2 (1959)

- Séminaire de rhéologie non-linéaire, par R. Buvet, p. 3.
 Les grandes déformations élastiques, par P. Thirion, p. 5.
 Bases physiques des théories mathématiques de la plasticité, par J. Mandel, p. 17 (voir errata, p. 59 du n° 3).
 Nouvelles internationales, p. 47.
 Analyse bibliographique, p. 49.

Tome IV, n° 3 (1959)

- Colloque international de rhéologie (juin 1960), p. 3.
 L'écrouissage, par B. Jaoul, p. 5.
 Modèles analogiques non linéaires, par B. Persoz, p. 31.
 Bibliographie, p. 61.

Tome IV, n° 4 (1959)

- Activité du groupe, p. 3.
 La rhéologie des roches silicatées, par H. Saucier, p. 5.
 Comportement rhéologique et structure (rhéologie non linéaire), par M. Mathieu, p. 11.
 Viscosité des polymères dilués ou non, IV. Théories moléculaires de l'écoulement, par T.G. Fox, S. Gratch et S. Loshaek (traduction), p. 29.
 Bibliographie, p. 57.

Tome V, nos 1, 2, 3, 4 (1960)

- Phénomènes de relaxation et de fluage en rhéologie non linéaire (Actes du colloque international de rhéologie, organisé à Paris, du 27 juin au 2 juillet 1960, dans le cadre des colloques internationaux du CNRS).
 Liste des participants, p. 11.
 Introduction, par R. Thiry, p. 13.
 Non-analytic relations in rheology, par W. Prager, p. 15.
 Phenomenological theory of viscoelasticity of three dimensional bodies, par M. Yamamoto, p. 25.
 Généralisations non linéaires des corps de Maxwell et de Kelvin. Fluage et relaxation, par J. Mandel, p. 37.
 Recent network theories of the rheological properties of moderately concentrated polymer solutions, par A.S. Lodge, p. 51.
 The flow of elastic liquids at room temperature, par J.J. Benbow, R.N. Brown et E.R. Howells, p. 65.
 Some reflections on non-linear visco-elastic fluids, par R.S. Rivlin, p. 83.
 Non-linear creep phenomena of an alkyd resin, par N. Brunt et F. Schwarzl, p. 95.
 Introduction à l'étude des phénomènes de thixotropie à l'aide du viscosimètre de Couette, par M. Matschinski, p. 109.
 On the theory of creep in a solid in which the elastic strain is large, par J.G. Oldroyd, p. 127.
 Termes d'élasticité non-linéaires intervenant aux grandes déformations des élastomères; extension d'un vulcanisat de caoutchouc naturel, par P. Thirion, p. 137.
 Sur l'interprétation des déformations plastiques comme phénomènes héréditaires, par G. Colonnetti, p. 147.
 Application de modèles rhéologiques linéaires et non-linéaires au fluage des métaux, par C. Crussard, p. 163.
 Le comportement visco-élastique non linéaire des hauts polymères fondus, par A.J. de Vries et J. Tochon, p. 173.
 La viscosité volumétrique des liquides surfondus au voisinage de leur transition vitreuse, par A.J. Kovacs, p. 191.
 Quantitative regularities in the flow of commercial alloys, par A. Graham, p. 213.
 Applications rhéologiques de la méthode des réseaux, par P. Dantu, p. 229.
 Stress relaxation, flow and recovery in vulcanized rubber, par A.N. Gent, p. 241.
 Fluage et biréfringence du polystyrène au voisinage de la température de ramollissement, par B. Persoz, G. Grenier et J. Bonnet, p. 253.

Tome VI, n° 1 (1961)

- Quatrième congrès international de rhéologie 1963, p. 3.
Nouvelles internationales, p. 5.
Etudes viscosimétriques des solutions d'acans en cours de gélification, par M. Joly, p. 7.
Quelques problèmes rhéologiques non résolus dans le domaine des élastomères, par P. Thirion, p. 17.
Bibliographie, p. 29.

Tome VI, n° 2 (1961)

- Activités du groupe, p. 3.
Etude expérimentale de l'effet électrovisqueux, par C. Reitzer et J.B. Donnet, p. 5.
Dureté pendulaire du polystyrène, par G. Grenier et B. Persoz, p. 49.
Bibliographie, p. 55.

Tome VI, n° 3 (1961)

- Activités du groupe, p. 3.
Nouvelles internationales, p. 5.
Table ronde des idées nouvelles en génie chimique, Royaumont, 17-18 novembre 1961, par H. Weiss, p. 7.
Remarques sur les propriétés mécaniques des corps pulvérulents (anisotropie, écoulement, élasticité, plasticité) par J. Biarez, p. 9.
La capillarité interne, par P. Casal, p. 31.
Etude expérimentale de l'effet des vibrations sur le fluage du Plexiglass, par A. Guy, p. 39.
Bibliographie, p. 49.

Tome VI, n° 4 (1961)

- In memoriam : le doyen J. Pérès, par H. Weiss, p. 3.
Une carrière de métallurgiste prématurément brisée (B. Jaoul), par C. Crussard, p. 5.
La vie de la Commission nationale de Rhéologie (CNRS), p. 9.
Activités du groupe, p. 13.
Le quatrième congrès international de rhéologie, p. 15.
Nouvelles internationales, p. 19.
Rhéologie des systèmes polyphasés, par M. Mathieu, p. 21.
Rhéologie et génie chimique, par A. Képès, p. 33.
Contribution à la rhéologie des alliages métalliques, par R. Jacquesson, J. Caisso et J. de Fouquet, p. 41.
Appareillage, p. 67.
Physique des explosifs solides (livre), par J. Berger et J. Viard, p. 69.
Fiches bibliographiques, p. 71.

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

(édités par le SEDOCAR)

Tome I, n° 1 (septembre 1965)

- Avant-propos, par J. Mandel, p. 1.
Modèle de Bingham généralisé et rhéologie des métaux usuels, par J. Leclerc, p. 3.
Energie élastique et travail dissipé dans les modèles, par J. Mandel, p. 9.
Dissipation d'énergie dans une déformation plastique, par H.D. Bui, p. 15.
Possibilités théoriques de simulation analogique discrète du mouvement des structures élastoplastiques, par B. Nayroles, p. 21.
Etude expérimentale du domaine élastique d'un milieu pulvérulent, par F. Schlosser, p. 25.

Tome I, n° 2 (avril 1966)

- Avant-propos (colloque du 20 mai 1965 : la rhéologie des systèmes à deux phases, une phase solide, une phase liquide), par J. Mandel, p. 33.
Recherches sur les propriétés rhéologiques des suspensions minérales concentrées, par J.P. Bombled, p. 35.
Variation des modules de quelques bitumes purs et bétons bitumineux, par G. Sayegh, p. 51.
Sur l'emploi d'équations doublement logarithmiques pour décrire l'écoulement des suspensions telles que les crèmes laitières aux basses températures, par G.W. Scott Blair et J.H. Prentice, p. 75.
Variation de la pression de l'eau interstitielle des sols saturés, par Y. Tcheng, p. 81.
Essai d'interprétation visco-élastique du comportement des sols sous chargements répétés, par J. Verstraeten et J. Romain, p. 87.

Tome I, n° 3 (novembre 1966)

- Application d'un microtest de torsion à l'étude de la caractérisation d'un alliage à base de magnésium soumis à des contraintes alternées, par A. Popoff et R. Caze, p. 101.
Phénoménologie du fluage et de la recouvrance de volume des systèmes vitreux, par A.J. Kovacs, p. 123.
Comportement mécanique de volume des polymères solides amorphes au voisinage de leur température de transition vitreuse, par J.C. Robinet et R. Buvet, p. 131.
Comportement des lubrifiants soumis à des chocs et à des taux de cisaillement élevés, par F. Lagarde, p. 143.
Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. Application à la rhéologie de ces milieux, par J. Weber, p. 161.

Tome I, n° 4 (avril 1967)

- Avant-propos (colloque du 17 mai 1966), par J. Mandel, p. 171.
Les méthodes modernes d'expression de la thermodynamique appliquées à la représentation des systèmes visco-élastiques, par J.C. Robinet et R. Buvet, p. 173.
Application de la thermodynamique aux systèmes visco-élastiques linéaires à paramètres cachés, par J. Mandel, p. 181.
Thermodynamique et visco-élasticité, par L. Brun, p. 191.
Energétique des systèmes physiques en évolution imposée, par M. Frias, p. 203.
Energy changes on stretching filled and unfilled rubbers, par J.A.C. Harwood et A.R. Payne, p. 207.
Application de la viscosimétrie superficielle à la détermination des énergies d'interaction et de déformation moléculaires, par M. Joly, p. 217.

Tome I, n° 5 (novembre 1967)

- Intérêt des essais de relaxation appliqués à l'étude des corps élasto-visco-plastiques, par J. Lemaître, p. 225.
Représentation des modules et complaisances complexes dans les plans complexes arithmétique et logarithmique, par C. Huet, p. 237.
Etude des propriétés visco-élastiques des bétons bitumineux par une méthode d'ébranlements par choc, par W. Bismuth et R. Blanc, p. 259.
Sur l'hésitation au fluage, par L. Brun et A. Zaoui, p. 267.
La rhéologie des systèmes à base de carbohydrates macromoléculaires, par Y. Nédonchelle et R.A. Schütz, p. 285.
Structure des liquides et processus d'écoulement, par D. Bourgoin, p. 293.
Brève note sur le calcul des contraintes dans les éprouvettes tubulaires en torsion élastoplastique (à propos d'une erreur), par A. Popoff, p. 299.

Tome I, n° 6 (avril 1968)

- Avant-propos (colloque du 19 juin 1967 : progrès récents de l'étude des effets du second ordre), par J. Mandel, p. 301.
- Sur la définition du taux de variation de contrainte et ses applications en rhéologie, par G. Mayne et R. Van Geen, p. 303.
- Quelques expériences sur l'effet Weissenberg, par V. Bismuth et M. Chezeaux, p. 315.
- Effets du second ordre en plasticité, par A. Freudenthal, p. 329.
- La mécanique des milieux continus et la chimie physique des liquides. Etude des contraintes normales se produisant dans les liquides à structure simple, par F.W. Smith, p. 341.
- Présentation d'une machine industrielle appliquant l'effet Weissenberg, par M. Allard et M. Chatain, p. 345.
- Problèmes instrumentaux en rhéologie, par B. Shorthouse, p. 349.

Tome II, n° 1 (janvier 1969)

- Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire (Méthodes numériques et graphiques pour obtenir les fonctions de relaxation et de fluage visco-élastiques à partir de courbes expérimentales), par N.P. Vinh Tuong, p. 1.
- Etude théorique de deux types d'essais de déformation homogène. Application de la visco-élasticité non linéaire et à la plasto-élasticité dans le cas de déformations finies, par J.D. Weber, p. 41.
- Glissement et distorsion dans des fibres de polyamide 6-6 soumises au tordage lent à longueur constante, par M. Averous, p. 57.
- Etude photo-élastique d'un empilement de disques, par G. de Josselin de Jong et A. Verruijt, p. 73.
- Contribution à l'étude des propriétés rhéologiques des copolymères polyester insaturés-styrolène. Influence de la température et de la réticulation. I. Etude du fluage en traction, par J.C. Rosso, p. 87.
- Détermination des propriétés visco-élastiques des bétons bitumineux par vibrations longitudinales, par G. Sayegh, p. 107.

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

(édités par la Revue de l'Industrie minière, en tant que numéros spéciaux)

Tome II, n° 2 (novembre 1969)

- L'histoire ancienne de la rhéologie, par G.W. Scott Blair, p. 127.
- Etude des propriétés mécaniques du polyméthacrylate de méthyle par une méthode statique, par D. Bonsignour, p. 131.
- Etudes statistiques sur la rupture en vue de l'ajustement d'un modèle non-linéaire, par M. Davin, p. 143.
- Etude de la relation pression — débit applicable au sang, par J.F. Stoltz, A. Larcen et M. Stoltz, p. 163.
- Contribution à l'étude des propriétés rhéologiques des copolymères polyester insaturés-styrolène. Influence de la température et de la réticulation. II. Propriétés rhéothermiques et rhéoptiques, par J.C. Rosso, p. 169.

Tome II, n° 3 (mai 1970)

- Avant-propos (colloque du 30 octobre 1968 sur la rhéologie en relation avec la structure), par M. Joly, p. 185.
- La cristallisation du polycarbonate de bisphénol-A et l'étude des propriétés physiques du polymère cristallisé (résumé), par J.P. Mercier et G. Groeninckx, p. 186.
- Microdureté et structure, par H. Bückle, p. 188.
- Le frottement et la déformation des métaux et alliages, par R. Courtel, p. 216.
- Rhéologie des polymères semi-cristallins, par G. Vallet, C. Smadja, P. Lissac et A. Joly, p. 228.

- Etude, à l'aide de mesures diélectriques, de l'évolution de structure des polymères à l'état solide au voisinage de leur température de transition vitreuse, par G. Guioy, p. 237.
- Relaxation diélectrique de quelques copolymères de butadiène de d'acrylonitrile. Etude en fonction de leurs compositions, par J.P. Nottin, p. 258.

Supplément au tome II, n° 3 (septembre 1970 : *Comportements mécaniques des matériaux composites*, journées des 20 et 21 novembre 1969 organisées avec le Groupement pour l'avancement de la mécanique industrielle et le Centre d'études des matières plastiques.

- Etude comparative et classification des matériaux composites, par M. Chatain, p. 2.
- Les modules viscoélastiques des composites (calcul et prévision, étude critique), par T. Vinh, p. 10.
- Mesures du module d'Young d'éléments filiformes, par G. Verchery, p. 21.
- Frottement et usure de certains matériaux composites, par J. Blouet et E. Sztrygler, p. 24.
- Perspectives d'emploi des matériaux composites dans le domaine spatial, par F. Jean-Louis, p. 30.
- Comportement mécanique des fontes considérées comme matériaux à plusieurs phases, par E. Plénard et J. Plessier, p. 34.
- Les matériaux stratifiés : utilisation et conception des pièces industrielles, par J. Bruslé, p. 40.
- Le rôle des copolymères séquencés et greffés dans les mélanges de polymères. Etude de systèmes résistant au choc, par G. Riess, p. 44.
- Les fibres continues de carbure de silicium, par M. Marchal et A. Clouet, p. 52.
- Problèmes soulevés par la métallisation des fibres de verre, par M. Bré, p. 58.
- Etude par les voies de la métallurgie des poudres du renforcement d'une matrice à base de nickel par les trichites d'alumine, par A. Walder et A. Hivert, p. 62.
- Paramètres d'élaboration des composites eutectiques orientés, par G. Lesoult et P. Annarumma, p. 70.
- Comportement mécanique des vitrages feuilletés, par M. Jamet, p. 77.
- Un exemple d'emploi de plastique renforcé pour la réalisation de pièces précises, par P. Lamicq, p. 82.

Numéro spécial hors série (novembre 1970) : *Rhéologie et hydrotechnique*, session des 19 et 20 mars organisée avec la Société hydrotechnique de France.

- Allocution de M. le Président Banal, p. 396.
- Allocution de M. le Président Mandel, p. 396.
- Comportement rhéologique des liquides et suspensions, par M. Joly, p. 397.
- Comportement rhéologique des solides et pseudo-solides, par D. Radenkovic, p. 407.
- Mesure des divers paramètres rhéologiques, par D. Bellet et Cl. Thirriot, p. 415.
- Les principes en mécanique des milieux continus (principe d'isotropie de l'espace, d'objectivité, des repères rhéologiques), par P. Anglès d'Auriac, p. 427.
- Formulation du principe de Boltzmann en repère rhéologique et interprétation de certains résultats expérimentaux dans le cadre de cette hypothèse, par P. Le Roy et J.M. Pierrard, p. 433.
- Les fluides non-newtoniens dans le contexte industriel français, par Cl. Thirriot et D. Amoros, p. 437.
- Effets viscoélastiques dans les mesures des pressions statiques et d'arrêt, par D. Fruman, G. Loiseau et P. Sulmont, p. 445.
- Rhéologie des coulis d'injection, par C. Caron, p. 453.
- Caractéristiques rhéologiques et composition des boues de forage, par M. Martin, p. 463.
- Comportement des roches sous contrainte en fonction de leur teneur en eau, par P. Morlier, p. 471.
- Les propriétés rhéologiques de la craie et leur influence sur le percement de galeries, par J.L. Dessenne et P. Duffaut, p. 477.
- Le fluage de la glace, par L. Lloubrou, p. 489.

Tome II, n° 4 (décembre 1970)

- Etude de l'influence de la morphologie sur les propriétés mécaniques dynamiques des matériaux semi-cristallins, par G. Vallet et C. Smadja, p. 263.
- Amortissement interne dans le domaine de la déformation plastique, par J.F. Delorme, J. Perez, P. Péguin et P. Gobin, p. 273.
- L'étude des lois de comportement viscoélastique liquide au moyen d'écoulements de révolution, par P. Le Roy et J.M. Pierrard, p. 287.
- Comportement mécanique des solides poreux. Domaine élastique des corps poreux. Rôle de la pression de pore, par P. Morlier, p. 295.

Tome II, n° 5 (juin 1971)

- L'effet photoélastique dans le cadre de la mécanique rationnelle des milieux continus, par P. Boulanger, G. Mayné, A. Hermanne, J. Kestens et R. Van Geen, p. 313.
- Critère de rupture des bétons soumis à des sollicitations triaxiales, par J. Bergues, P. Habib et P. Morlier, p. 347.
- Etat actuel des recherches faites au CERILH sur le fluage du béton à la température ambiante, par M. Vénuat, p. 355.
- Sur une méthode d'approximation des courbes rationnelles de traction, par A. Popoff, p. 369.

Tome II, n° 6 (juin 1972)

- Avant-propos (colloque du 17 septembre 1970 sur l'influence de la température et de la pression sur le comportement rhéologique) par M. Joly, p. 375.
- Influence de la température et de la pression sur le comportement mécanique des protergols composites, par M. Guérin, p. 377.
- Les méthodes modernes d'expression de la thermodynamique appliquées à la représentation des systèmes viscoélastiques. II. Cinétique des comportements, par J.C. Robinet, p. 389.
- Effet de la pression sur la nucléation et la propagation des fissures, par K. Dang Van et D. Radenkovic, p. 395.
- Influence de la pression sur le comportement rhéologique des roches, par P. Morlier, p. 405.
- Contribution à l'étude de la perte de précontrainte par fluage-relaxation combinés dans les éléments en béton précontraint, par R. Atallah, p. 414.

Tome III, n° 1 (janvier 1973)

- Définition des fluides selon W. Noll, par J. Mandel, p. 3.
- Notes concernant l'écoulement des colloïdes, par P. Langevin, p. 7.
- Propriétés rhéologiques du globule rouge humain, par A. Larcen, J.F. Stoltz et C. Vigneron, p. 10.
- Sur deux cas particuliers d'écoulements viscosimétriques, par M. Chezeaux, p. 21.

Tome III, n° 2 (avril 1973)

- Exposé introductif au colloque sur la viscoplasticité (colloque du 8 décembre 1971), par J. Mandel, p. 33.
- Les trois fonctions viscosimétriques d'un fluide incompressible, par J. Mandel, p. 35.
- Bases physiques de la viscoplasticité, par G. Fantozzi, J. Perez et P.F. Gobin, p. 38.
- Modèle phénoménologique unidimensionnel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations, par J. Zarka, p. 53.
- Simulation électronique de modèles viscoplastiques, par C. Dumont et P. Morlier, p. 62.
- Les domaines d'application de la viscoplasticité, par R. Mazet, p. 71.
- Le formage à froid des matières plastiques, par C. Wippler, p. 73.

- Détermination des caractéristiques rhéologiques des corps viscoplastiques à thixotropie partielle, application aux mortiers frais, par Cl. Legrand, p. 82.
- Déformation plastique du carbure de tantale jusqu'à 2 200 °C (résumé), par J.L. Martin, P. Lacour-Gayet et P. Costa, p. 91.
- Sur l'accommodation viscoplastique intergranulaire dans les polycristaux métalliques, par A. Zaoui, p. 92.

Tome III, n° 3 (novembre 1973)

- Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse, par J.D. Weber, p. 99.
- Etude de quelques phénomènes viscoplastiques transitoires de polycristaux métalliques en traction simple (modèle statistique et confrontation avec l'expérience), par A. Zaoui, p. 104.
- Aspect rhéologique du gonflement d'une membrane en caoutchouc. Mesure des configurations de forme, par J.C. Paisant, p. 111.
- Théories du frottement d'adhésion viscoélastique par des processus de rupture d'agrégats moléculaires, par J.M. Tatraux-Paro, p. 123.
- Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux. Première partie : bases théoriques, par C. Huet, p. 128.

Tome III, n° 4 (septembre 1974)

- Essai de définition de quelques comportements rhéologiques, par J. Mandel, p. 145.
- Viscoélasticité non linéaire et calcul symbolique, par C. Huet, p. 150.
- La superplasticité, par B. Baudalet, p. 160.
- Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux. Deuxième partie : conséquences pratiques et expérimentation, par C. Huet, p. 164.
- Modèle du système cardio-vasculaire. Etude sur calculateur analogique de l'autorégulation mécanique et de la fonction ventriculaire gauche, par G. Demoment, P. Peronneau, R. Duperdu et J. Hinglais, p. 177.

Tome III, n° 5 (avril 1975)

- Contribution à l'analyse viscoélastique des tunnels forés : exemple du tunnel sous la Manche, par J. Fauchart et J. Hueber, p. 189.
- Essais sur la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques en béton précontraint sous l'effet du fluage du béton, par Fauchart, Kavrychine et Nung, p. 211.
- Influences respectives de la pâte et des granulats sur la mesure des caractéristiques rhéologiques du béton frais vibré, par M. Barrioulet et C. Legrand, p. 225.
- L'évaluation des effets du comportement à long terme du béton dans les structures en béton armé, par M.A. Chiorino, p. 230.

Tome III, n° 6 (novembre 1975)

- Henri Tresca, par J.D. Weber, p. 237.
- Relations entre l'hétéroplasticité et la notion de charge limite, par R. Mazet, p. 239.
- Sur les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage, par B. Halphen et Q.S. Nguyen, p. 247.
- Evolution des structures des textiles par fatigues thermiques et mécaniques, par M. Sotton, p. 251.
- La fatigue des matériaux polymériques : application aux textiles, par R.A. Schutz, p. 281.
- Hypothèse des variables internes et représentation de certains fluides viscoélastiques, par J.D. Weber, p. 267.
- Mécanique de la circulation sanguine, par R. Comolet, p. 274.

Tome IV, n° 1 (mars 1976)

- Introduction (colloque du 16 janvier 1975 sur les phénomènes de surface) par P. Habib, p. 3.
- Energie superficielle et adhésion élastique, par D. Maugis, p. 4.
- Etude expérimentale de l'adhésion et du frottement d'une bille de verre contre un plan de caoutchouc, par M. Barquins, J.P. Jaccoux et R. Courtel, p. 10.
- Contribution à l'étude théorique du contact élastique d'un frotteur cylindrique glissant sur un massif élastique, par H.D. Bui et K. Dang-Van, p. 21.
- Remarques sur l'ensemble des résultats obtenus par MM. Maugis, Barquins et Bui, par R. Courtel, p. 29.
- Etude de la propagation différée des fissures dans les terres cuites, par J.M. Servas, p. 31.
- Energie superficielle et lubrification, par M. Massin, p. 39.

Tome IV, n° 2 (septembre 1976)

- Poiseuille ou les paradoxes d'un destin, par M. Joly, p. 51.
- Etude expérimentale des lois de comportement en grandes déformations à l'aide d'une presse réellement tridimensionnelle, par J. Lanier, p. 53.
- Relations entre fonctions fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire avec vieillissement, par J.M. Servas et C. Huet, p. 61.
- Mécanique générale des corps biologiques solides, par M. Dikmen, p. 69.
- Bruits de roulement sur un rail, par W. Bismuth, p. 75.

Tome IV, n° 3 (mars 1977)

- Colloque du 18 décembre 1975, influence de la température sur les propriétés des matériaux, introduction, par P. Habib, p. 83.
- Influence de la température sur le comportement mécanique des aciers, par J. Zarka, J. Casier et J.J. Engel, p. 84.
- Variations avec la température des propriétés physiques et mécaniques des aciers de construction. Application à la prévision de la tenue au feu des structures en acier, par B. Barthélémy, p. 103.
- Les polyimides et matériaux composites à hautes propriétés en température, par J.C. Quinat, p. 109.
- Viscosité des verres industriels, son rôle dans le formage des verres, par M. Bré, p. 115.
- Le comportement rhéologique à haute température des produits réfractaires façonnés, par H. Le Doussal, p. 119.
- Comportement des bétons réfractaires à hautes températures, par A. Mathieu, p. 129.

Tome IV, n° 4 (avril 1977)

- Les essais de Jean Rey et la viscosité, par B. Persoz, p. 135.
- Note sur une formulation commune de certains problèmes d'équilibre de deux corps élastiques adhésifs, par R. Courtel, D. Maugis, M. Barquins, p. 137.
- Simulation analogique sur ordinateur du comportement thixotrope de certaines suspensions. Etude avec le rhéomètre plan-cône Ferranti-Shirley, par R. Sève et J.M. Raynal, p. 145.
- Influence de l'environnement sur la propagation de la fissuration en fatigue, par B. Bouchet, p. 155.
- Analyse mathématique des propriétés viscoélastiques passives de la paroi rectale, par B. Persoz, P. Arhan, Cl. Faverdin, G. Devroede, C. Dornic et D. Pellerin, p. 163.

Tome IV, n° 5 (novembre 1977)

- Introduction (colloque de décembre 1976 sur la rhéologie des corps mous), par P. Habib, p. 175.
- Remarques sur le comportement rhéologique en cisaillement de certaines classes de systèmes condensés et sur ses méthodes d'étude, par M. Joly, p. 176.
- Effets non newtoniens dans les solutions de polyélectrolytes, par M. Moan, M.N. Layec-Raphalen et C. Wolff, p. 183.
- Propriétés rhéologiques des solutions aqueuses de galactomannanes : rôle de la masse moléculaire moyenne et de la concentration, par J.L. Doublie et B. Launay, p. 191.
- Rhéologie des systèmes dispersés concentrés et principe d'énergie dissipée minimum ; application à la caractérisation de ces systèmes, par D. Quémada, p. 199.
- Modèles rhéologiques du globe rouge humain. Etude critique, par J.F. Stoltz, B. Guerlet et M. Lucius, p. 205.
- Comportement du béton frais. Etudes sur modèle réduit, par Ph. Baudeau et J.D. Weber, p. 219.
- Rhéologie des propegols en cours de polymérisation, par B. Schaeffer, p. 225.
- Comportement en écoulement simple et en régime oscillant du système lamellaire eau-lécithine, par D. Bourgoïn, p. 235.

Tome IV, n° 6 (1978)

- Coulomb et la rhéologie, par J. Kerisel et B. Persoz, p. 243.
- Contribution à l'étude des rapports existants entre la constitution, la structure et les propriétés rhéologiques des bitumes routiers, par M. Kennel et J. Marvillet, p. 249.
- Une nouvelle méthode de calcul du module complexe des mélanges bitumineux, par P. Uge, G. Gest, A. Gravois et F. Bonnaure, p. 259.
- Opérateurs matriciels pour la viscoélasticité avec vieillissement, par C. Huet, p. 281.
- Table générale des matières, p. 291.
- Table des auteurs, p. 297.

TABLE DES AUTEURS

A

Acloque (P.)
III, 1 (1958)
Allard (M.)
I, 6 (1968)
Amoros (D.)
N.S. (nov. 1970)
Anglès d'Auriac (P.)
N.S. (nov. 1970)
Annarumma (P.)
II, 3 suppl. (1970)
Arhan (P.)
IV, 4 (1977)
Atallah (R.)
II, 6 (1972)
Avérous (M.)
II, 1 (1969)

B

Banal
N.S. (nov. 1970)
Barbedette (R.)
I, 3 (1956)
Barquins (M.)
IV, 1 (1976)
IV, 4 (1977)
Barrioulet (M.)
III, 5 (1975)
Barthélémy (B.)
IV, 3 (1977)
Baudeau (Ph.)
IV, 5 (1977)
Baudeflet (B.)
III, 4 (1974)
Baudran (A.)
II, 3 (1957)
Bellet (D.)
N.S. (nov. 1970)
Benbow (J.J.)
V, (1960)
Berger (J.)
VI, 4 (1961)
Bergues (J.)
II, 5 (1971)
Biarez (J.)
VI, 3 (1961)
Bismuth (W.)
I, 5 (1967)
I, 6 (1968)
IV, 2 (1976)
Blanc (R.)
I, 5 (1967)
Blaquière (A.)
II, 1 (1957)
II, 3 (1957)

Blouet (J.)
II, 3 suppl. (1970)
Bombléd (J.P.)
I, 2 (1966)
Bonitzer (J.)
III, 2 (1958)
Bonnaure (F.)
IV, 6 (1978)
Bonnet (J.)
I, 2 (1956)
IV, 1 (1959)
V (1960)
Bonsignour (D.)
II, 2 (1969)
Bouchet (B.)
IV, 4 (1977)
Boulangier (P.)
II, 5 (1971)
Bourgoin (D.)
IV, 1 (1959)
I, 5 (1967)
IV, 5 (1977)
Braun (G.)
IV, 1 (1959)
Bré (M.)
II, 3 suppl. (1970)
IV, 3 (1977)
Brown (R.N.)
V (1960)
Brun (L.)
I, 4 (1967)
I, 5 (1967)
Brunt (N.)
V (1960)
Bruslé (J.)
II, 3 suppl. (1970)
Bückle (H.)
II, 3 (1970)
Bui (H.D.)
I, 1 (1965)
IV, 1 (1976)
Burgers (J.M.)
I, 2 (1956)
Buvet (R.)
III, 3 (1958)
III, 4 (1958)
IV, 1 (1959)
IV, 2 (1959)
I, 3 (1966)
I, 4 (1967)

C

Caillon (P.)
II, 3 (1957)
Caisso (J.)
VI, 4 (1961)
Caron (C.)
N.S. (nov. 1970)

Casal (P.)
VI, 3 (1961)
Casier (J.)
IV, 3 (1977)
Caze (R.)
I, 3 (1966)
Chasset (R.)
III, 2 (1958)
Chatain (M.)
I, 6 (1968)
II, 3 suppl. (1970)
Chezeaux (M.)
I, 6 (1968)
III, 1 (1973)
Chiorno (M.A.)
III, 5 (1975)
Clouet (A.)
II, 3 suppl. (1970)
Colonnetti (G.)
V (1960)
Comolet (R.)
III, 6 (1975)
Constant (A.)
I, 1 (1956)
III, 3 (1958)
Costa (P.)
III, 2 (1973)
Coste (J.)
II, 4 (1957)
Courtel (R.)
II, 3 (1970)
IV, 1 (1976)
IV, 4 (1977)
Crussard (C.)
I, 1 (1956)
V (1960)
VI, 4 (1961)

D

Dang Van (K.)
II, 6 (1972)
IV, 1 (1976)
Dantu (P.)
V (1960)
Davin (M.)
II, 2 (1969)
Delorme (J.F.)
II, 4 (1970)
Demoment (G.)
III, 4 (1974)
Dessenne (J.L.)
N.S. (nov. 1970)
Devroede (G.)
IV, 4 (1977)
Dikmen (M.)
IV, 2 (1976)
Dognon (A.)
III, 1 (1958)

Donnet (J.B.)
VI, 2 (1961)
Dornic (C.)
IV, 4 (1977)
Doublie (J.L.)
IV, 5 (1977)
Ducros (P.)
IV, 1 (1959)
Duffaut (P.)
N.S. (nov. 1970)
Dumont (C.)
III, 2 (1973)
Duperdu (R.)
III, 4 (1974)
Durand (R.)
I, 3 (1956)
Duriez (M.)
I, 3 (1956)

E

Engel (J.J.)
IV, 3 (1977)

F

Fabre (G.)
I, 1 (1956)
Fantozzi (G.)
III, 2 (1973)
Fauchart (J.)
III, 5 (1975)
Faverdin (Cl.)
IV, 4 (1977)
de Fouquet (J.)
VI, 4 (1961)
Fox (T.G.)
IV, 4 (1959)
Freudenthal (A.)
I, 6 (1968)
Frias (M.)
I, 4 (1967)
Friedel (J.)
III, 3 (1958)
Fruman (D.)
N.S. (nov. 1970)

G

Gent (A.N.)
V (1960)

- Gest (G.)
IV, 6 (1978)
- Gibrat (R.)
I, 3 (1956)
- Gobin (P.)
II, 4 (1970)
III, 2 (1973)
- Graham (A.)
V (1960)
- Gratch (S.)
IV, 4 (1959)
- Gravois (A.)
IV, 6 (1978)
- Green (H.)
I, 2 (1956)
- Grenier (G.)
IV, 1 (1959)
V (1960)
VI, 2 (1961)
- Groeninckx (G.)
II, 3 (1970)
- Guérin (M.)
II, 6 (1972)
- Guerlet (B.)
IV, 5 (1977)
- Guiroy (G.)
II, 3 (1970)
- Guy (A.)
VI, 3 (1961)
- H**
- Habib (P.)
II, 5 (1971)
IV, 1 (1976)
IV, 3 (1977)
IV, 5 (1977)
- Halphen (B.)
III, 6 (1975)
- Harwood (J.A.C.)
I, 4 (1967)
- Hénin (S.)
II, 3 (1957)
- Hermanne (A.)
II, 5 (1971)
- Hinglais (J.)
III, 4 (1974)
- Hirtz (J.)
II, 4 (1957)
- Hivert (A.)
II, 3 suppl. (1970)
- Howells (E.R.)
V (1960)
- Hueber (J.)
III, 5 (1975)
- Huet (C.)
I, 5 (1967)
III, 3 (1973)
III, 4 (1974)
IV, 2 (1976)
IV, 6 (1978)
- Huet (J.)
III, 2 (1958)
- Hupner (H.)
I, 3 (1956)
- J**
- Jaccoux (J.P.)
IV, 1 (1976)
- Jacquesson (R.)
VI, 4 (1961)
- Jamet (M.)
II, 3 suppl. (1970)
- Jaoul (B.)
IV, 3 (1959)
- Jean-Louis (F.)
II, 3 suppl. (1970)
- Joly (A.)
II, 3 (1970)
- Joly (M.)
II, 2 (1957)
III, 3 (1958)
VI, 1 (1961)
I, 4 (1967)
II, 3 (1970)
N.S. (nov. 1970)
II, 6 (1972)
IV, 2 (1976)
IV, 5 (1977)
- Josselin de Jong
II, 1 (1969)
- K**
- Kavrychine
III, 5 (1975)
- Kennel (M.)
IV, 6 (1978)
- Képès (A.)
I, 1 (1956)
I, 2 (1956)
I, 3 (1956)
II, 3 (1957)
VI, 4 (1961)
- Kerisel (J.)
IV, 6 (1978)
- Kestens (J.)
II, 5 (1971)
- Kovacs (A.J.)
I, 2 (1956)
V (1960)
I, 3 (1966)
- Kuzdzal-Savoie (S.)
III, 1 (1958)
- L**
- Labbé (G.)
II, 2 (1957)
- Lacour-Gayet (P.)
III, 2 (1973)
- Lafuma (H.)
I, 3 (1956)
- Lagarde (F.)
I, 3 (1966)
- Lamicq (P.)
II, 3 suppl. (1970)
- Langevin (P.)
III, 1 (1973)
- Lanier (J.)
IV, 2 (1976)
- Larcen (A.)
II, 2 (1969)
III, 1 (1973)
- Launay (B.)
IV, 5 (1977)
- Layec-Raphalen (M.N.)
IV, 5 (1977)
- Leclerc (J.)
I, 1 (1965)
- Le Doussal (H.)
IV, 3 (1977)
- Legrand (C.)
III, 2 (1973)
III, 5 (1975)
- Lemaître (J.)
I, 5 (1967)
- Le Roy (P.)
N.S. (nov. 1970)
II, 4 (1970)
- Lesoult (G.)
II, 3 suppl. (1970)
- Lissac (P.)
II, 3 (1970)
- Lliboutry (L.)
N.S. (nov. 1970)
- Lodge (A.S.)
V (1960)
- Loiseau (G.)
N.S. (nov. 1970)
- Loshaek (S.)
IV, 4 (1959)
- Lucius (M.)
IV, 5 (1977)
- M**
- Mandel (J.)
III, 4 (1958)
IV, 2 (1959)
V (1960)
I, 1 (1965)
I, 2 (1966)
I, 4 (1967)
I, 6 (1968)
N.S. (nov. 1970)
III, 1 (1973)
III, 2 (1973)
III, 4 (1974)
- Martin (J.L.)
III, 2 (1973)
- Martin (M.)
N.S. (nov. 1970)
- Marvillet (J.)
IV, 6 (1978)
- Massin (M.)
IV, 1 (1976)
- Mathieu (A.)
IV, 3 (1977)
- Mathieu (M.)
IV, 1 (1959)
IV, 4 (1959)
VI, 4 (1961)
- Matschinski (M.)
V (1960)
- Maugis (D.)
IV, 1 (1976)
IV, 4 (1977)
- Mayné (G.)
I, 6 (1968)
II, 5 (1971)
- Mazet (R.)
III, 2 (1973)
III, 6 (1975)
- Mercier (J.P.)
II, 3 (1970)
- Moan (M.)
IV, 5 (1977)
- Moretti (M.)
II, 4 (1957)
- Morlier (P.)
N.S. (nov. 1970)
II, 4 (1970)
II, 5 (1971)
II, 6 (1972)
III, 2 (1973)
- N**
- Nayroles (B.)
I, 1 (1965)
- Nédonchelle (Y.)
I, 5 (1967)
- Nguyen (Q.S.)
III, 6 (1975)
- Nijboer (L.W.)
III, 3 (1958)
- Nottin (J.P.)
II, 3 (1970)
- Nung
III, 5 (1975)
- O**
- Oldroyd (J.G.)
V (1960)
- P**
- Paisant (J.C.)
III, 3 (1973)
- Papadakis (M.)
I, 3 (1956)
- Payne (A.R.)
I, 4 (1967)
- Péguin (P.)
II, 4 (1970)
- Pellerin (D.)
IV, 4 (1977)
- Pérez (J.)
II, 4 (1970)
III, 2 (1973)
- Peronneau (R.)
III, 4 (1974)

- Persoz (B.)
I, 2 (1956)
II, 1 (1957)
IV, 1 (1959)
IV, 3 (1959)
V (1960)
VI, 2 (1961)
IV, 4 (1977)
IV, 6 (1978)
- Pierrard (J.M.)
N.S. (nov. 1970)
II, 4 (1970)
- Plénard (E.)
II, 3 suppl. (1970)
- Plessier (P.)
II, 3 suppl. (1970)
- Popoff (A.)
I, 3 (1966)
I, 5 (1967)
II, 5 (1971)
- Prager (W.)
V (1960)
- Prentice (J.H.)
I, 2 (1966)
- Q**
- Quémada (D.)
IV, 5 (1977)
- Quinat (J.C.)
IV, 3 (1977)
- R**
- Radenkovic (D.)
N.S. (nov. 1970)
II, 6 (1972)
- Raynal (J.M.)
IV, 4 (1977)
- Reiner (M.)
II, 4 (1957)
- Reitzer (C.)
VI, 2 (1961)
- Riess (G.)
II, 3 suppl. (1970)
- Rivlin (R.S.)
V (1960)
- Robinet (J.C.)
I, 3 (1966)
I, 4 (1967)
II, 6 (1972)
- Romain (J.)
I, 2 (1966)
- Rosso (J.C.)
II, 1 (1969)
II, 2 (1969)
- S**
- Sadron (C.)
III, 1 (1958)
- Saucier (H.)
IV, 4 (1959)
- Savostianoff (E.)
II, 2 (1957)
- Sayegh (G.)
I, 2 (1966)
II, 1 (1969)
- Schaeffer (B.)
IV, 5 (1977)
- Schlosser (F.)
I, 1 (1965)
- Schutz (R.A.)
I, 5 (1967)
III, 6 (1975)
- Schwarzl (F.)
V (1960)
- Scott Blair (G.W.)
I, 1 (1956)
I, 2 (1956)
II, 2 (1957)
II, 4 (1957)
I, 2 (1966)
II, 2 (1969)
- Servas (J.M.)
IV, 1 (1976)
IV, 2 (1976)
- Sève (R.)
IV, 4 (1977)
- Shorthouse (B.)
I, 6 (1968)
- Smadja (C.)
II, 3 (1970)
II, 4 (1970)
- Smith (F.W.)
I, 6 (1968)
- Sotton (M.)
III, 6 (1975)
- Stoltz (F.)
II, 2 (1969)
III, 1 (1973)
IV, 5 (1977)
- Stoltz (M.)
II, 2 (1969)
- Sulmont (P.)
N.S. (nov. 1970)
- Suquet (P.)
III, 1 (1958)
- Sztrygler (E.)
II, 3 suppl. (1970)
- T**
- Tatraux-Paro (J.M.)
III, 3 (1973)
- Tcheng (Y.)
I, 2 (1966)
- Thirion (P.)
I, 1 (1956)
I, 2 (1956)
II, 1 (1957)
II, 2 (1957)
II, 4 (1957)
III, 1 (1958)
III, 2 (1958)
III, 3 (1958)
IV, 2 (1959)
V (1960)
VI, 1 (1961)
- Thirriot (Cl.)
N.S. (nov. 1970)
- Thiry (R.)
V (1960)
- Thomas (A.)
I, 3 (1956)
- Tochon (J.)
V (1960)
- U**
- Uge (P.)
IV, 6 (1978)
- V**
- Vallet (G.)
I, 1 (1956)
I, 3 (1956)
II, 3 (1970)
II, 4 (1970)
- Van Geen (R.)
I, 6 (1968)
II, 5 (1971)
- Vénuat (M.)
II, 5 (1971)
- Verchery (G.)
II, 3 suppl. (1970)
- Verge (J.)
III, 1 (1958)
- Verruijt (A.)
II, 1 (1969)
- Verstraeten (J.)
I, 2 (1966)
- Viard (J.)
VI, 4 (1961)
- Vigneron (C.)
III, 1 (1973)
- Vinh Tuong (N.P.)
II, 1 (1969)
II, 3 suppl. (1970)
- Viovy
II, 3 (1957)
- de Vries (A.J.)
V (1960)
- W**
- Walder (A.)
II, 3 suppl. (1970)
- Weber (J.D.)
I, 3 (1966)
II, 1 (1969)
III, 3 (1973)
III, 6 (1975)
IV, 5 (1977)
- Weiss (H.)
I, 3 (1956)
III, 3 (1958)
VI, 3 (1961)
VI, 4 (1961)
- Wippler (C.)
III, 2 (1973)
- Wolff (C.)
IV, 5 (1977)
- Y**
- Yamamoto (M.)
V (1960)
- Z**
- Zaoui (A.)
I, 5 (1967)
III, 2 (1973)
III, 3 (1973)
- Zarka (J.)
III, 2 (1973)
IV, 3 (1977)

Institut National de la Recherche Agronomique, Service documentation, Etoile de Choisy, 78000 Versailles.

Institut National des Sciences Appliquées, Département de génie civil, avenue de Rangueil, 31400 Toulouse.

Institut National des Sciences Appliquées, Bibliothèque 106, 20, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne.

Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 3, rue Fernand-Hainaut, 93400 Saint-Ouen.

Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 9, rue La Pérouse, 75016 Paris.

Institut Universitaire de Technologie, Département de génie électrique, 1, chemin Desvallières, 92410 Ville-d'Avray.

Institut Universitaire de Technologie, Service Bibliothèque, rue Engel-Gros, 90016 Belfort.

Johns Hopkins University, Department of Mechanics — 120 Lahobe Hall — Maryland 21218 (U.S.A.).

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, boulevard Lefebvre, 75732 Paris Cédex 15.

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique théorique et appliquée (LEMTA), 2, rue de la Citadelle, B.P. n° 850, 54011 Nancy Cedex.

Laboratoire de Mécanique des Fluides, 2, rue Boussingault, 67000 Strasbourg.

Laboratoire de Mécanique et Physique des Matériaux, Faculté des sciences de Metz, Ile du Saulcy, 57000 Metz.

Laboratoire de Mécanique des Sols, Faculté des sciences, Domaine Universitaire, Cédex 83, 38000 Grenoble.

Laboratoire de M. Cupcic, C.S.U., route de Laval, 72000 Le Mans.

Laboratorio de Engenharia de Angola, Caixa postal 6500, Luanda (Angola).

Lamy J. et Cie (S.A.), 19, avenue Barthélémy-Thimonnier, 69000 Caluire.

Libreria Martinez Perez, Seccion Revistas, Ramba de Cataluna, 60 Barcelona-7 (Espagne).

Linda Hall Library, Serials Department — 5109 Charry Kansas-City, Mo 64110 (U.S.A.).

L'Oréal, 1, avenue Saint-Germain, 93600 Aulnay-sous-Bois.

M.A.I.R., 9 bis, avenue de Lattre-de-Tassigny, 92100 Boulogne.

Messageries du Livre, Service Importation, 27, rue de Seine, 75006 Paris.

Michelin et Cie, Bibliothèque technique, place des Carmes, 63000 Clermont-Ferrand.

Milton S. Eisenhower Library, Serials Department — Baltimore, Maryland 21218 (U.S.A.).

National Lending Library for Science and Technology, Walton, Boston Spa, Yorkshire (England).

National Research Council Canada Institute for STI Library Kardex Section Ottawa, Ontario, Canada K1A - 052.

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, avenue de la Division-Leclerc, 92320 Châtillon-sous-Bagneux.

Orta Dogu Teknik Universitesi, Engeneering Fakultesi, Ankara (Turquie).

Régie Nationale des Usines Renault, Documentation générale, 10, avenue Emile-Zola, 92100 Boulogne.

Rijksinstituut Voor Grondmechanica, Hertogsstraat 89 — Bruxelles (Belgique).

Serials Record, Pattee Library — Pennsylvania State University, University Park, PA. 16802 (U.S.A.).

SHELL française, Centre de Recherches — Services Bitumes, 76530 Grand Couronne.

Société Chimique des Charbonnages, CDF Chimie, B.P. n° 1, 62670 Mazingarbe.

Société Commerciale Paulstra, Laboratoire central, route de Péringondas, 28200 Châteaudun.

Société Kléber-Colombes, 49, rue Jean-Jaurès, 95870 Bezons.

Société Rhodiaceta, Service Etudes physiques, 45, rue S. Michel-Berthet, 69009 Lyon.

Société Rhône-Poulenc, Direction Technique, 103, rue du Professeur-Roux, 69633 Vénissieux.

Société Thibaud-Gibbs, Laboratoire de recherches Unilever, 8, impasse de la Montjoie, 93210 La-Plaine-Saint-Denis.

Statens Väg-och Trafikinstitut (National Road and Traffic Research Int.) I and D Section, Fack, S-58101 Linköping (Sueden).

U.E.R., Sciences fondamentales et appliquées, Laboratoire de mécanique, 40, avenue du Recteur-Pineau, 86000 Poitiers.

Ustav, Institut de mécanique théorique et appliquée, Vysehradská 49, Praha 2, Nové Mesto (Tchécoslovaquie).