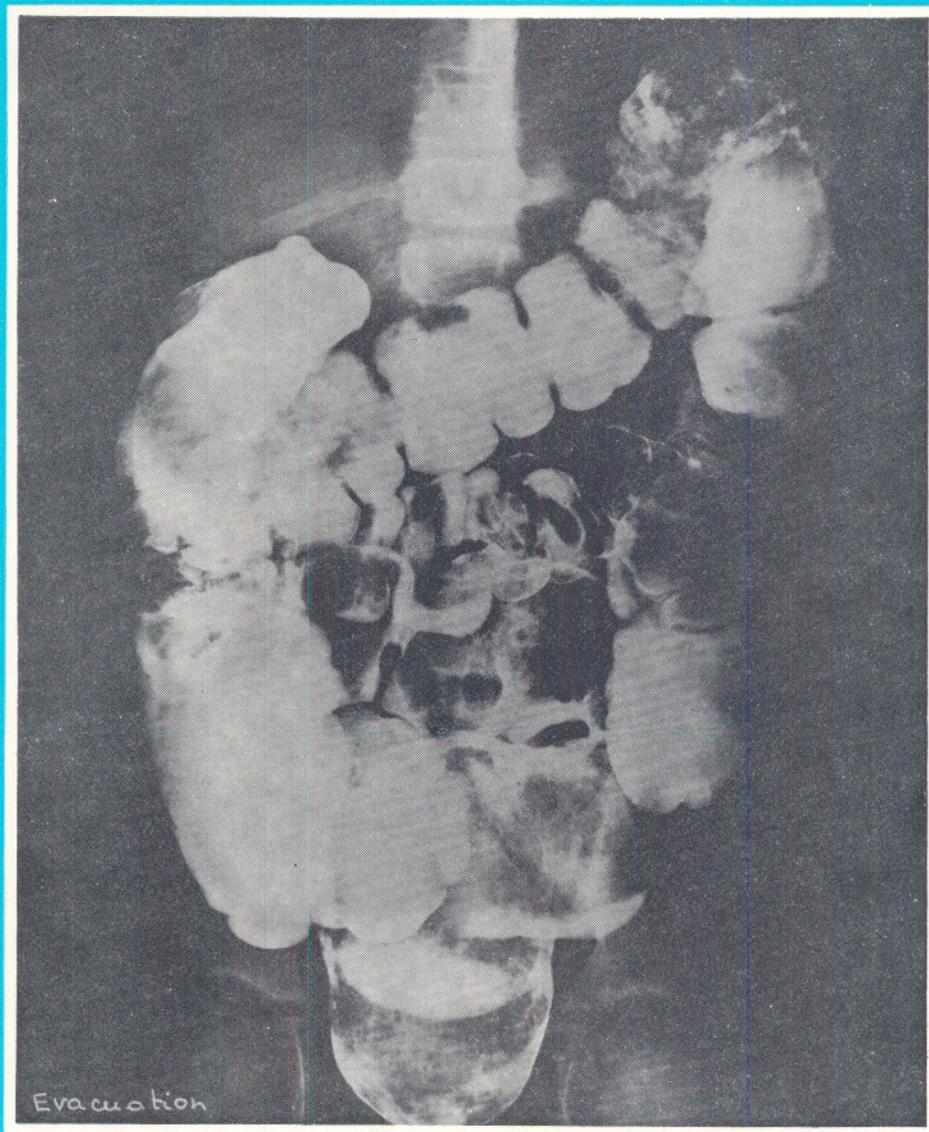


industrie minérale

CAHIERS
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME IV - NUMÉRO 4



Numéro spécial du 15 avril 1977

GRUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

PERSONNES MORALES

- Bassin d'Essais des Carènes, 6, boulevard Victor, 75015 Paris.
Bibliotheek, Weg-en Waterbouw der T.H. — Stevinweg 1 — Delft (Hollande).
Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., 26, rue Boyer, 75020 Paris.
The British Library, Holborn Division — 25 Southampton Buildings, London WC2A 1AW (England).
Cedocar, Bibliothèque Centrale, 26, boulevard Victor, 75996 Paris Armées.
Centre d'Essais et de Recherches, Technique des Tabacs, 4, rue André-Deseaux, 45400 Fleury-Aubrais.
Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75013 Paris.
Centre d'Etudes du Bouchet, 91710 Vert-le-Petit.
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Service de Chimie-Physique, B.P. n° 2, 91190 Gif-sur-Yvette.
Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75008 Paris.
Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, Laboratoire de Verneuil-en-Halatte, B.P. n° 27, 60103 Creil.
Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton Manufacturé (CERIB), B.P. n° 42, 28230 Epernon.
Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75015 Paris.
Centre de Mathématiques et Calcul de l'I.N.S.A., 20, avenue Albert-Einstein, 69100 Villeurbanne.
Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67000 Strasbourg.
Centre de Recherches Routières, boulevard de la Woluwe, 42 - 1200 Bruxelles (Belgique).
Centre National d'Enseignement Technique, Laboratoire de Recherches, M. Lemaitre, 61, avenue du Président-Wilson, 94230 Cachan.
Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 4, avenue du Recteur-Poincaré, 75782 Paris Cédex 16.
Centre Technique du Cuir, 181, avenue Jean-Jaurès, 69006 Lyon.
Centre Technique des Industries Mécaniques, B.P. n° 67, 60300 Senlis.
Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses, B.P. 175, Centre de Tri Grenoble Gare (38042).
Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, avenue Hoche, 75008 Paris.
Ciments Lafarge, M^{me} Faurie, ing. Direction Recherches, 28, rue Emile-Menier, 75782 Paris Cédex 16.
Compagnie Française de Raffinage, Centre de recherches — Documentation, B.P. n° 27, 76700 Harfleur.
Compagnie Saint-Gobain, Service Central de Recherches, 39, av. Lucien-Lefranc, 93304 Aubervilliers.
Département Génie Civil et Urbanisme (I.N.S.A.), 20, avenue Albert-Einstein, 69100 Villeurbanne.
Direction de la Recherche des Fédérations Nationales du Bâtiment et des Travaux Publics, 12, rue Brancion, 75737 Paris Cédex 15.
Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de mécanique des sols, Grande Voie des Vignes, 92290 Chatenay-Malabry.
Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique, 2, rue Charles-Camichel, 31000 Toulouse.
Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, 151, boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris.
Ecole Polytechnique, Bibliothèque — CP 6079 — Succursale « A », Montréal, Québec H 3 C 3 A 7 Canada.
Electricité de France, Service géologique et géotechnique, 3, rue de Messine, 75008 Paris.
ESSO-Standard S.A.F., Centre de recherches, 76130 Mont-Saint-Aignan.
Filial Biblioteki, Akademü Nank SSSR — Baltijskaja ul. 14 — Moskva A-219 (U.R.S.S.).
IMETAL (M.A. Fillon), 1, boulevard de Vaugirard, 75751 Paris Cedex 15.
Institut Français du Pétrole, 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92500 Rueil-Malmaison.
Institut de l'Information Scientifique de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., Baltijskaja ulitasa 14 — Moscou D. 219 (U.R.S.S.).
Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Charles-Camichel, 31000 Toulouse.
Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, Faculté des sciences de Paris, Tour 66, 9, quai Saint-Bernard, 75005 Paris.
Institut Mécanique de Grenoble (M^{lle} Saulnier), B.P. n° 53, Centre de Tri, 38041 Grenoble Cedex.

(suite page 3 couverture)

CAHIERS
DU
GROUPE FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE

Tome IV — Numéro 4

15 avril 1977



Edité par la revue Industrie Minérale
19, rue du Grand-Moulin, 42029 Saint-Etienne Cedex

sommaire

ISSN 0373-5699

Les Essais de Jean Rey et la viscosité..... 135

par B. PERSOZ

Note sur une formulation commune de certains problèmes d'équilibre de deux corps élastiques adhésifs 137

par R. COURTEL, D. MAUGIS, M. BARQUINS

Simulation analogique sur ordinateur du comportement thixotrope de certaines suspensions. Etude avec le rhéomètre plan-cône Ferranti-Shirley 145

par R. SEVE et J.M. RAYNAL

Influence de l'environnement sur la propagation de la fissuration en fatigue..... 155

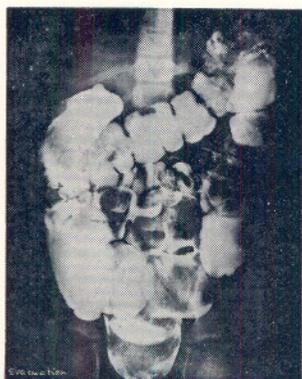
par B. BOUCHET

Analyse mathématique des propriétés visco-élastiques passives de la paroi rectale..... 163

par B. PERSOZ, P. ARHAN, Cl. FAVERDIN, G. DEVROEDE, C. DORNIC et D. PELLERIN

Photographie de la couverture :

Radiographie de la partie inférieure du tube digestif montrant les méandres et les replis du côlon et, en bas, l'ampoule rectale.



Les Essais de Jean Rey et la viscosité

par B. PERSOZ

L'OUVRAGE

C'est en 1630 que ces *Essays*, au nombre de 28, ont été publiés avec le sous-titre : *Sur la recherche de la cause pour laquelle l'étain et le plomb augmentent de poids quand on les calcine*. Ils constituaient la réponse à une question posée par le sieur Brun, maître apothicaire à Bergerac.

Partant de la création de l'univers, le célèbre médecin du Bugue (Dordogne) arrive petit à petit à montrer que l'air s'épaissit par la chaleur et se mêle à ces métaux comme l'eau appesantit le sable : *...je répons et soutiens glorieusement que ce surcroît de poids vient de l'air, qui, dans le vase, a été épaissi, appesanti et rendu aucunement (1) adhésif, par la véhémence et longuement continuée chaleur du fourneau ; lequel air se mêle avec la chaux (à ce aidant l'agitation fréquente) et s'attache à ses plus menues parties (Essai 16).*

EPAISSEUR = VISCOSITE

Au fil de ces écrits le lecteur moderne est surpris par la confusion constante entre des notions qui, aujourd'hui, lui paraissent clairement distinctes. *Poids*, par exemple, signifie selon les cas : masse, poids ou densité. La vitesse est confondue avec l'accélération. Mais le mot *épais* et ses contraires : *subtil, ténu...* semblent bien concerner la viscosité et non la densité. De nombreux passages, en effet, comportent les deux termes liés : *épais* et *pesant*, comme si ces deux notions (viscosité et densité) allaient de pair, bien que distinctes. L'auteur prend d'ailleurs le soin de le préciser dans l'essai 13 : *...sa moindre pesanteur (compagne inséparable d'une moindre épaisseur)...*

1. *aucunement* a évidemment un sens affirmatif.

Voici des exemples (essai 12) :

Le vitriol est un corps homogène, puisque ses parties ont même nom et même définition que le tout ; or agit le feu tellement sur icelui, mis dans la cornue, qu'il nous fait voir séparément son phlegme, son huile et son colcotar ; parties différentes en épaisseur et pesanteur.

La térébenthine est un corps homogène, la moindre partie n'étant pas moins térébenthine que son tout : icelle mise dans l'alambic, le feu par son action dilate aucunes de ses parties et épaissit les autres, mettant à part son eau, son esprit, son huile et sa colophane ; dont la différence est notoire touchant le poids et la subtilité. J'ai ci-devant parlé du vin (corps homogène aussi) sur lequel le feu déployant ses forces en la distillation, il l'étend et le dilate jusques à en tirer l'eau de vie et la petite eau, qu'on appelle : mais le résidu est d'autant plus épais qu'on a tiré plus de cette eau ou bien le phlegme.

La jolie tirade sur les asthmatiques (essai 14) laisse de côté la pesanteur de l'air pour n'invoquer que son épaisseur : *Ceux qui font dignement la médecine se trouvent parfois à visiter des asthmatiques, qui pantelants au lit dans des chambrettes chaudes, ne peuvent avoir leur haleine qu'à grande difficulté. Ce qu'apercevant, ils font ouvrir les fenêtres, les y conduisent et leur font humer l'air extérieur, dont ils reçoivent un grand soulagement. Si vous demandez à ces messieurs d'où vient aux malades un si prompt soulas, ils vous diront que c'est que l'air de la chambre, pour son trop de chaleur, ne peut fournir le cœur du rafraichissement nécessaire, ce que l'air extérieur opère mieux par sa froidure. Or, Messieurs mes honorés collègues, m'étant désabusé en ce point par les méditations précédentes, agréez, je vous supplie, que je vous désabuse. Ce n'est point la chaleur de l'air de la chambre qui cause ce pantèlement pour ne pouvoir assez rafraichir le cœur, mais bien son épaisseur, qui retarde son cours à travers l'obstruction des poumons, si [bien] qu'il*

ne peut fournir le cœur à temps de manière suffisante à la génération des esprits vitaux, ce que l'air frais, comme plus subtil, peut mieux faire.

Les disciples actuels d'Hippocrate ont sans doute d'autres explications à donner que la variation thermique de la viscosité de l'air, mais la signification du mot épaisseur vient d'être néanmoins clairement exprimée. Elle est conforme au langage commun actuel : soupe, crème... épaisses. D'ailleurs Jean Rey emploie aussi le mot corpulence dans ce sens (essai 13), ce qui n'est pas surprenant, quand on sait qu'encore aujourd'hui les fabricants de peintures ou de colles disent couramment : avoir du corps, donner du corps.

Il est juste cependant de faire remarquer que Jean Rey fait intervenir aussi l'épaisseur de l'air — agissant sur l'indice de réfraction — pour expliquer son *trémoussement* sur la gueule d'un canon dressé verticalement et dans lequel a été jeté un boulet chaud (essai 14).

VISCOSITE = ADHERENCE ?

Il n'est pas nécessaire de consulter un dictionnaire bien ancien pour constater que nos pères entendaient autrement que nous le mot *visqueux*. Le Nouveau Larousse Illustré en 7 vol. (1896-1904) dit : *Qui*

adhère aux corps et y forme une couche molle et gluante. Qui est couvert d'un enduit gluant. Cette ancienne signification est relativement conforme à l'étymologie du mot : *viscum*, gui, glu. C'est, semble-t-il, l'acception de Jean Rey lorsqu'il écrit que, sur un fourneau rougi d'un brasier ardent : *L'eau commune et toutes sortes de liqueurs s'exhaleront en peu d'heures. L'air néanmoins y fera subsistance (n'y ayant autre corps qui remplisse ce lieu) mais ce sera un air épais et pesant au possible, un air qu'il m'échappe de dire non plus air, mais un air dénaturé, ayant changé sa subtile fluidité en une grossièreté visqueuse... une espèce de lie, qui, par sa gluante pesanteur ne sait prendre la fuite (essai 11).*

C'est le seul passage où intervient le mot *visqueux*.

Il est toujours charmant de lire des textes de vieux français, a fortiori s'il s'agit de science. Mais là plus qu'ailleurs, on est surpris de la distance parcourue en trois siècles dans le domaine du vocabulaire, des connaissances et surtout dans celui des méthodes. Les longs raisonnements qui apparaissent dans les écrits d'autrefois s'appuient rarement sur l'expérience ou, s'ils le font, c'est quelquefois sur des expériences qui n'ont pas été faites et dont le résultat est annoncé avec certitude. Aucune mesure n'intervient, sauf quelques pesées.

C'était le règne de la philosophie.

Note sur une formulation commune de certains problèmes d'équilibre de deux corps élastiques adhésifs*

par R. COURTEL, D. MAUGIS, M. BARQUINS

RESUME

L'analogie entre le problème de l'équilibre statique de deux sphères en contact élastique, adhésif (K.L. Johnson et al. 1971) et le problème classique de la fissure de Griffith (1920) a été mise en évidence par Kendall (1971) et étudiée par D. Maugis et al. (1975), notamment.

On propose ici une formulation générale de l'équilibre d'un système mécanique décrit par deux paramètres, quand il existe entre eux une relation à l'équilibre.

Ce mode de présentation permet notamment de donner une démonstration de l'indépendance du coefficient de restitution de l'énergie par rapport au système de chargement, en s'appuyant sur la notion de « grandeur imposée » et en faisant l'analyse du mode pratique de sa réalisation.

SUMMARY

An analogy between the problem of equilibrium of two adhesive spheres in elastic contact (K.L. Johnson and al. 1971), and the problem of Griffith (crack propagation, 1920), was evidenced by Kendall (1971), and studied by Maugis and al. (1975).

A general formulation is proposed here for the case where a mechanical system is described by two parameters, taking in account the minimum equilibrium condition for energy.

This mode of presentation enables to demonstrate the independance of the energy release factor G , when the loading system is changed. The concept of « fixed parameter » is further analyzed.

I. EQUILIBRE D'UN SYSTEME MECANIQUE A DEUX PARAMETRES NON INDEPENDANTS NOTION DE GRANDEUR IMPOSEE

1

Soit $W(X, Y)$ la fonction énergie totale d'un système mécanique ne subissant que des transformations réversibles et dont l'état peut être décrit par les valeurs de deux paramètres X et Y . On suppose que la variances est 1, c'est-à-dire que X et Y sont liés dans tout état d'équilibre par une relation unique $\gamma(X, Y) = 0$.

On ne connaît pas, a priori, cette relation, mais on peut la déterminer par des expériences effectuées

« à grandeur imposée ». On fixe expérimentalement la valeur d'une certaine grandeur $\phi(X, Y)$ et l'on attend que quelque processus dissipatif (dont l'influence sur l'état d'équilibre est par ailleurs négligeable) amène le système au repos ; on mesure alors X et Y ; on obtient chaque fois un point de $\gamma(X, Y) = 0$.

On peut voir que la condition de minimum pour $W(X, Y)$ qui exprime l'équilibre, établit entre W et ϕ une relation qui a la forme d'une équation aux dérivées partielles. En effet, on doit avoir simultanément, pour une petite variation $\{dX, dY\}$ qui laisse ϕ et W invariants au 2nd ordre près :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial X} dX + \frac{\partial W}{\partial Y} dY = 0$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial X} dX + \frac{\partial \phi}{\partial Y} dY = 0$$

* Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 11 mars 1976.

Il n'existe de solution non nulle pour dX et dY que si

$$\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \frac{\partial W}{\partial Y} \frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

dans l'état d'équilibre {X, Y} considéré.

Cette équation représente une relation entre X et Y qui doit être satisfaite dans tout état d'équilibre du système ; la relation $\gamma(X, Y) = 0$ doit donc s'identifier à (1), ou à toute relation équivalente : c'est la relation d'équilibre.

Si, de plus, d^2W est positif pour la même variation {dX, dY} qui annule au premier ordre dW et dφ, l'équilibre est dit stable. Cette condition s'écrit :

$$d^2W = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} dX^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} dX dY + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} dY^2 \right\} > 0$$

ce qui, compte tenu de :

$$\frac{\partial W}{\partial X} dX + \frac{\partial W}{\partial Y} dY = 0$$

est équivalent à :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 > 0 \quad (2)$$

L'inégalité (2) doit être vérifiée en tout point de la « courbe d'équilibre » d'équations :

$$\begin{cases} \gamma(X, Y) = 0 \\ W = W(X, Y) \end{cases}$$

dans l'espace à trois dimensions {X, Y, W}*.

2

Dans la pratique X, Y et φ assument une signification physique particulière ; on considérera spécialement le cas où X et Y sont mis pour A et Δ, respectivement aire de contact et rapprochement des solides dans les problèmes qui nous intéressent.

— Admettons d'abord que les expériences soient faites à Δ imposé, c'est-à-dire que pour toute fluctuation susceptible de se produire lors de l'équilibre, on ait dφ = dΔ = 0. L'équation (1) se réduit alors, du fait que $\frac{\partial \Delta}{\partial \Delta} = 1$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0$, à :

$$\frac{\partial W}{\partial A} = 0 \quad (3)$$

C'est la condition bien connue de Griffith.

* On peut naturellement exposer tous ces résultats dans le langage de la théorie des surfaces qui est moins abstrait. Nous l'avons en fait utilisé d'abord pour construire les raisonnements qui vont suivre.

La stabilité de l'équilibre s'exprime de son côté par la relation obtenue en faisant dΔ = 0 dans l'expression donnée plus haut de d²W :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial A^2} > 0 \quad (4)$$

On notera, en passant, que la variation d'énergie, lorsqu'on passe d'un état d'équilibre au voisin, est :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial A} dA + \frac{\partial W}{\partial \Delta} d\Delta = \frac{\partial W}{\partial \Delta} d\Delta \quad (5)$$

= 0

— Si l'on veut maintenant procéder à charge P imposée, le dispositif expérimental qui a été utilisé pour travailler à Δ imposé devra être modifié. Il peut en résulter une nouvelle expression W'(A, Δ) de l'énergie totale du système actif. On caractérisera l'équilibre à P imposé en écrivant, d'après (1) :

$$\frac{\partial W'}{\partial A} \frac{\partial P}{\partial \Delta} - \frac{\partial W'}{\partial \Delta} \frac{\partial P}{\partial A} = 0 \text{ et } d^2W' > 0 \text{ (cf. éq. 2)}$$

en restant dans les variables {A, Δ}.

Si l'on effectue le changement de variables {A, Δ} → {A, P}, il y correspond une nouvelle forme de la fonction énergie totale : W'(A, Δ) = \bar{W}' (A, P). En raisonnant sur \bar{W}' comme on l'a fait sur W au paragraphe précédent (où Δ était grandeur imposée) on trouve de même les conditions d'un équilibre stable :

$$\frac{\partial \bar{W}'}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial^2 \bar{W}'}{\partial A^2} > 0$$

On sait que les deux modes d'écriture en {A, Δ} et {A, P} sont équivalents à condition que le jacobien $\frac{\partial \Delta}{\partial P}$ de la transformation soit ≠ 0.

En coordonnées {A, P} la différence d'énergie entre deux états d'équilibre voisins sera

$$dW' = d\bar{W}' = \frac{\partial \bar{W}'}{\partial P} dP + \frac{\partial \bar{W}'}{\partial A} dA$$

= 0

c'est-à-dire :

$$d\bar{W}' = \frac{\partial \bar{W}'}{\partial P} dP$$

3

De façon générale, à grandeur φ(A, Δ) imposée, si l'énergie du système est W'(A, Δ) = \bar{W}' (A, φ) les relations d'équilibre sont les suivantes :

$$\frac{\partial \bar{W}'}{\partial A} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{W}'}{\partial A^2} > 0 \quad (7)$$

et on a : $dW' = d\bar{W}' = \left(\frac{\partial \bar{W}'}{\partial \phi} \right) d\phi \quad (8)$

entre états d'équilibre voisins.

Réciproquement, si l'étude directe d'un système montre que la variation d'énergie dW' entre états d'équilibre voisins est de la forme $dW' = F(A, \Delta) d\theta$, θ étant une fonction dérivable $\theta(A, \Delta)$ c'est que θ est la grandeur imposée ϕ , et que la fonction énergie totale $= W'(A, \Delta) = \bar{W}'(A, \phi)$ est telle que l'on ait :

$$\frac{\partial \bar{W}'}{\partial \phi} = \bar{F}(A, \phi) = F(A, \Delta)$$

La condition d'équilibre à ϕ imposé est alors :

$$\frac{\partial \bar{W}'}{\partial A} = 0$$

II. CARACTERISATION ENERGETIQUE D'UN SYSTEME « DECOMPOSABLE »

1

Lorsqu'on examine de plus près la modification du dispositif expérimental qui permet de passer d'une grandeur imposée — par exemple Δ — à une autre — par exemple P —, on s'aperçoit qu'elle suit dans tous les cas qui nous intéressent le même processus : laissant inchangé un « noyau » constitué par l'échantillon en essai, on adapte la sollicitation qui lui est appliquée, en remplaçant simplement une « machine de chargement » par une autre. On constate également que cette substitution peut s'effectuer sans aucune dépense d'énergie, si les deux parties du « système décomposable » sont bloquées de façon appropriée au moment de la séparation ou de l'association.

Soit W_1 et W_2 les énergies propres des deux parties considérées dans leurs états correspondants, l'énergie du système total est alors

$$W = W_1 + W_2 \quad (9)$$

(Condition qu'on peut appeler d'additivité ou de linéarité).

Enfin, on observe que le mode d'association est toujours tel que le noyau ne puisse échanger d'énergie avec l'extérieur que par l'intermédiaire de la machine de chargement, qui exerce sur son armature mobile la force P , et lui fournit au cours de toute transformation réversible élémentaire le travail

$$dW_1 = Pd\Delta \quad (10)$$

(condition dite de réversibilité).

Ce raisonnement, d'apparence un peu abstraite, s'éclaire si l'on considère les exemples classiques qui ont donné lieu à sa formulation par généralisation.

2. Exemples

Dans les systèmes classiques étudiés par Johnson et par Griffith on peut considérer les noyaux comme constitués :

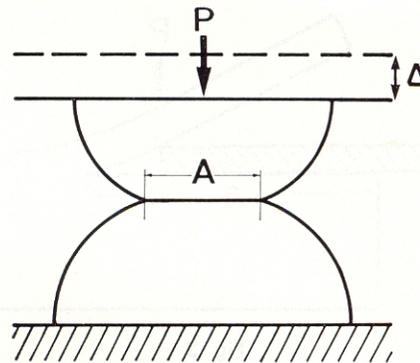


Fig. 1

a) par l'ensemble de deux sphères élastiques en contact adhésif sur une aire A lorsqu'une charge P s'exerce sur les armatures externes et les rapproche de Δ (figure 1) ;

b) ou par une éprouvette fissurée, où la fissure de longueur a est en équilibre sous l'action d'une traction $+P$, l'écartement des lèvres étant $+ \Delta$ (figure 2).

L'énergie propre W_1 d'un noyau comprend conventionnellement un terme d'origine élastique W_{E1} , dû aux contraintes qui se développent dans le système et un terme énergie superficielle et interfaciale W_{S1} . Par exemple :

a) K.L. Johnson a donné pour le cas (a) les expressions suivantes :

$$W_{E1} = \frac{a^3 K}{15 R^2} + \frac{P^2}{3 a^3 K}$$

$$W_{S1} = -\pi a^2 w$$

avec

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}$$

$$A = \pi a^2$$

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

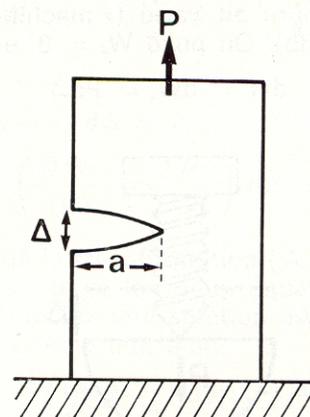


Fig. 2

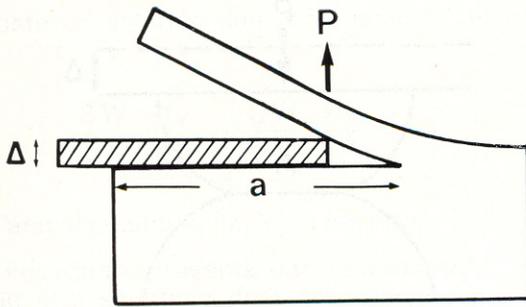


Fig. 3

et

$$\Delta = \frac{a^2}{3R} + \frac{2P}{3aK}$$

$$P = \frac{3aK}{2} \Delta - \frac{a^3K}{2R}$$

b) Pour le cas de l'échantillon fissuré (figure 2), Lawn indique l'expression suivante, d'après le mémoire de Griffith (1920)

$$W_{El} = \frac{\pi a^2 P^2}{2E}$$

$$W_{St} = 2wa$$

avec $\Delta = \pi a^2 \frac{P}{E}$

b') Lawn présente un autre cas d'échantillon fissuré (figure 3) d'après Obreimoff (1930). Il s'agit du clivage d'une lame de mica par une cale de verre (Δ imposé)

$$W'_{El} = E \frac{\Delta^2 d^3}{8a^3}$$

$$W_{St} = 2wa$$

— Les machines de chargement sont traditionnellement constituées à partir de divers mécanismes élémentaires : vis, leviers, poulies, treuils, engrenages, ressorts, masses pesantes, etc.

c) la vis micrométrique (à laquelle on peut comparer la cale d'Obreimoff) qui impose le déplacement Δ à l'armature mobile du noyau (figures 3, 4), et lui fournit à chaque fois le travail $Pd\Delta = dW_1$, sans que son énergie propre ait varié (« machine simple » au sens de Coulomb). On pose $W_2 = 0$, et on a donc

$$dW = dW_1 = Pd\Delta$$

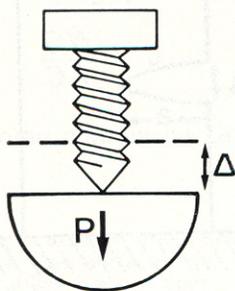


Fig. 4

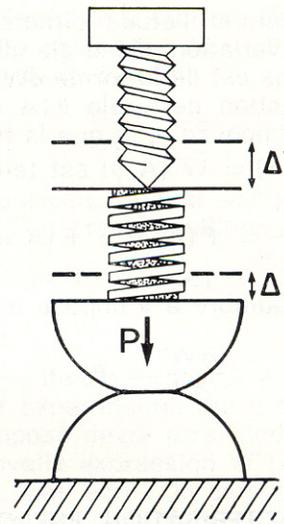


Fig. 5

d) la vis micrométrique associée en série à un ressort de raideur K (figure 5) lorsque son extrémité mobile se déplace de $d\Delta'$, l'armature du noyau se déplace de $d\Delta = d\Delta' - \frac{dP}{K}$. L'énergie $dW = Pd\Delta'$ fournie à la vis, en provenance de l'extérieur, sert à augmenter

W_1 de $dW_1 = Pd\Delta$, et W_2 de $dW_2 = P \frac{dP}{K} = d\left(\frac{P^2}{2K}\right)$. On a $dW = P \left(d\Delta + \frac{dP}{K} \right)$, c'est-à-dire

$$dW = Pd \left(\Delta + \frac{P}{K} \right)$$

e) une masse pesante de poids P, agissant sur l'armature mobile du noyau au niveau Δ (figure 6). Pour pouvoir effectuer réversiblement les transformations élémentaires au cours desquelles $P \rightarrow P + dP$ et $\Delta \rightarrow \Delta + d\Delta$, il est commode d'inclure dans le dispositif des surcharges dP situées au niveau $\Delta = 0$. On commence par déplacer la surcharge de $z = 0$ à $z = \Delta$ en fournissant le travail $-\Delta dP$, puis on laisse agir la force $P + dP$ qui transfère au noyau l'énergie $Pd\Delta$. Au total $dW_1 = Pd\Delta$, $dW_2 = -\Delta dP - Pd\Delta = -d(P\Delta)$. On pose $W_2 = -P\Delta$ et on a

$$dW = -\Delta dP$$

Au total les grandeurs ϕ_c, ϕ_d, ϕ_e imposées par les dispositifs c, d, e, et les fonctions énergies correspondantes, sont d'après (8) et (9) :

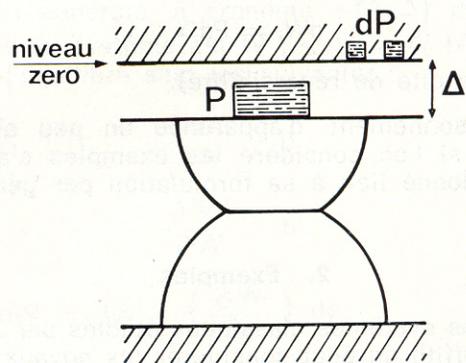


Fig. 6

$$c) \phi_c = \Delta, \quad W = W_1 \quad \text{avec} \quad \frac{\partial W_1(A, \Delta)}{\partial \Delta} = P \quad (11)$$

$$d) \phi_d = \Delta + \frac{P}{K}, \quad W = W_1 + \frac{P^2}{2K} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial W \left(A, \Delta + \frac{P}{K} \right)}{\partial \left(\Delta + \frac{P}{K} \right)} = P \quad (12)$$

$$e) \phi_e = P, \quad W = W_1 - P\Delta \quad \text{avec} \quad \frac{\partial W(A, P)}{\partial P} = -\Delta \quad (13)$$

3

Une grandeur imposée ϕ apparaît comme une caractéristique de la machine de chargement, indépendante du noyau auquel celle-ci est associée : c'est la conséquence du fait que la relation (10) est valable quel que soit le noyau considéré.

L'ensemble des relations (9) et (10), et de leur conséquence (11) $\frac{\partial W_1(A, \Delta)}{\partial \Delta} = P$, implique l'indépendance de la relation d'équilibre $\gamma(A, \Delta) = 0$ vis-à-vis du choix particulier de la machine de chargement. (Cette propriété est souvent invoquée sans démonstration dans la littérature).

En effet, lors d'un équilibre à ϕ imposé, et quelle que soit la nature de ϕ , la fluctuation permise dA est $\neq 0$; celle de W_1 d'après (9) et (10) où l'on fait $dW = 0$ est :

$$dW_1 = \frac{\partial W_1}{\partial A} dA + \frac{\partial W_1}{\partial \Delta} d\Delta = -dW_2 = Pd\Delta$$

On a donc

$$\frac{\partial W_1}{\partial A} dA + \left(\frac{\partial W_1}{\partial \Delta} - P \right) d\Delta = 0$$

Mais $\frac{\partial W_1}{\partial \Delta} = P$ d'après (11), d'où

$$\frac{\partial W_1}{\partial A} dA = 0 \iff \frac{\partial W_1(A, \Delta)}{\partial A} = 0$$

ce qui est la condition de Griffith relative au noyau seul. Elle est donc vérifiée dans tous les cas d'équilibre où le noyau reste le même (c'est-à-dire où W_1 garde la même expression), bien que la fonction énergie totale $W = W_1 + W_2$ puisse changer chaque fois que l'on change ϕ .

Réciproquement, on peut montrer, en utilisant les formules de transformations relatives aux dérivées partielles, et en s'appuyant toujours sur les conditions (9), (10) et (11) que $\frac{\partial W_1(A, \Delta)}{\partial A} = 0$ entraîne

$$\frac{\partial \bar{W}(A, \phi)}{\partial A} = 0 \text{ dans tout état d'équilibre à } \phi \text{ imposé,}$$

pourvu que ϕ ne soit pas fonction que de A ($\frac{\partial \phi}{\partial A} = 0$).

(Rappelons la notation : $W(A, \Delta) = \bar{W}(A, \phi)$ par le changement de variable $\{A, \Delta\} \rightarrow \{A, \phi\}$).

En effet, pour une fonction quelconque $F(A, \Delta) = F[A, \Delta(A, \phi)] = \bar{F}(A, \phi)$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial A} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial A}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \Delta}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial A} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial \Delta} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial A}}{\frac{\partial \phi}{\partial \Delta}} \\ \frac{\partial F}{\partial \Delta} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \Delta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Appliquons ces formules à

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial A} \text{ et } \frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} (W_1 + W_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial A} &= \frac{\partial W}{\partial A} - \frac{\partial W}{\partial \Delta} \frac{\dot{\phi}_A}{\dot{\phi}_\Delta} \\ &= \frac{\partial W_1}{\partial A} + \left[\frac{\partial W_2}{\partial A} - \frac{\partial W_2}{\partial \Delta} \frac{\dot{\phi}_A}{\dot{\phi}_\Delta} - \frac{\partial W_1}{\partial \Delta} \frac{\dot{\phi}_A}{\dot{\phi}_\Delta} \right] \end{aligned}$$

Le terme entre crochets représente le déterminant, multiplié par $-\frac{1}{\dot{\phi}_A}$, des deux équations homogènes valables à l'équilibre

$$\left\{ \begin{aligned} d\phi &= \dot{\phi}_A dA + \dot{\phi}_\Delta d\Delta = 0 \\ dW_2 &= -dW_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial \Delta} d\Delta = \frac{\partial W_2}{\partial A} dA + \frac{\partial W_2}{\partial \Delta} d\Delta \end{aligned} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} d\phi &= \dot{\phi}_A dA + \dot{\phi}_\Delta d\Delta = 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial A} dA + \left(\frac{\partial W_1}{\partial \Delta} + \frac{\partial W_2}{\partial \Delta} \right) d\Delta &= 0 \end{aligned} \right.$$

Le jacobien $\dot{\phi}_\Delta$ de la transformation $\{A, \Delta\} \iff \{A, \phi\}$ étant supposé $\neq 0$, et les deux équations ci-dessus devant avoir au moins une solution $dA \neq 0$, le déterminant doit donc être nul, d'où

$$\frac{\partial \bar{W}(A, \phi)}{\partial A} = \frac{\partial W_1(A, \Delta)}{\partial A}$$

la valeur commune étant zéro.

On donne souvent à cette propriété une forme qui fait intervenir le facteur G dit « taux de restitution de l'énergie ». En effet, le choix du paramètre A permet la mise en évidence, dans l'expression de l'énergie totale d'un système adhésif, du terme $-Aw$ qui représente l'énergie interfaciale W_s dans l'aire de contact A : $W_s = -Aw$. L'expression de l'énergie totale est alors : $W = W_{\text{Mécanique}} - Aw$; l'équation d'équilibre à grandeur imposée est $\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial A}\right)_\phi = 0$, qui s'écrit : $\left(\frac{\partial \bar{W}_M}{\partial A}\right)_\phi = w$. On pose $\left(\frac{\partial \bar{W}_M}{\partial A}\right)_\phi = G_\phi$, la relation d'équilibre $G_\phi = w$ est dite « critère de Griffith ».

On a donc montré ci-dessus que l'on a, à l'équilibre, $G_\phi = G_\Delta = w$. Pour d'autres couples de valeurs de A et Δ , la différence $G_\phi - G_\Delta$ (calculée plus haut sous la forme $\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial A} - \frac{\partial W_1}{\partial A}\right)$) n'a pas de raison d'être nulle. On le voit bien lorsque l'on se reporte à la représentation analytique dans l'espace à trois dimensions A, Δ, W : c'est seulement aux points d'intersection du cylindre droit $\frac{\partial W_1}{\partial A} = 0$ (ou encore $G_\phi = G_\Delta = w$) avec la surface $W = W_1 + W_2$, que la tangente à la courbe $W = W_1 + W_2 = c^{te}$ (c'est-à-dire $dW = 0$) est parallèle au plan (A, Δ) et coïncide avec la tangente à la courbe $\phi = c^{te}$ (c'est-à-dire $d\phi = 0$) tracée sur cette même surface.

III. STABILITE DE L'EQUILIBRE DANS LE CAS D'UN SYSTEME DECOMPOSABLE

$G = w$ est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour un équilibre stable.

La condition de stabilité de l'équilibre d'un système caractérisé par la fonction énergie totale $W = W_1 + W_2$ s'exprime par l'inégalité en coordonnées $\{A, \phi\}$

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial A^2} > 0$$

où $\bar{W}(A, \phi)$ représente la forme prise par $W(A, \Delta) = W_1(A, \Delta) + W_2(A, \Delta)$ quand on passe des variables $\{A, \Delta\}$ aux variables $\{A, \phi\}$.

S'il existe des couples de valeurs $\{A, \phi\}$ solutions du système d'équations simultanées

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial A} = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2} = 0 \quad (15)$$

ils limitent les domaines éventuels de stabilité et d'instabilité.

Adoptons comme référence le domaine de stabilité défini par $\frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2} > 0$, correspondant au déplacement

Δ imposé. On peut exprimer $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2}$ en fonction de $\frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2}$ en appliquant la formule de changement de variable (14) à la fonction

$$\theta = \left(\frac{\partial W_1}{\partial A}\right)_\Delta = \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial A}\right)_\phi = \bar{\theta} \quad (\text{égalité démontrée précédemment comme étant valable dans tout état d'équilibre})$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial A}\right)_\phi &= \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2}\right)_\phi = \left(\frac{\partial \theta}{\partial A}\right)_\Delta - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \Delta}\right)_\Delta \frac{\phi_A}{\phi_\Delta} \\ &= \frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial A \partial \Delta} \cdot \frac{\phi_A}{\phi_\Delta} \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial W_1}{\partial \Delta} = P$ on a

$$\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2} - \frac{\partial P}{\partial A} \frac{\phi_A}{\phi_\Delta}$$

(16)

On voit que $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2}$ ne s'annulera généralement pas en même temps que $\frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2}$, c'est-à-dire que les limites de stabilité à ϕ imposé ne seront pas les mêmes qu'à Δ imposé, quoique la relation d'équilibre soit la même dans tous les cas.

— A titre d'exemple, plaçons-nous à P imposé : $\phi_A = \frac{\partial P}{\partial A}$, et le terme $\lambda = -\frac{\partial P}{\partial A} \frac{\phi_A}{\phi_\Delta}$ devient

$$\lambda = -\left(\frac{\partial P}{\partial A}\right)^2 \times \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial \Delta}}$$

Pour les systèmes compressibles qui nous intéressent, on peut admettre que $\frac{\partial P}{\partial \Delta}$ est toujours positif, si bien que λ est toujours négatif. Si $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2}$ s'annule, ce sera pour une valeur positive de $\frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2}$, et de

toute façon on aura $\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial A^2} < \frac{\partial^2 W_1}{\partial A^2}$: la stabilité à P imposé est moindre qu'à Δ imposé. On sait que c'est bien le cas pour le système fissuré, pour lequel il y a toujours instabilité à P imposé, ou pour des sphères élastiques adhésives (Maugis 1975). En se reportant aux formules de la page 6, on voit en effet que dans le cas de sphères adhésives : $\frac{\partial P}{\partial \Delta} = \frac{3aK}{2} > 0$.

Dans le cas de l'échantillon fissuré, tandis que :

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial a^2} = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(\frac{E}{2\pi} \frac{\Delta^2}{a^3} + 2aw \right) = \frac{3E}{\pi} \frac{\Delta^2}{a^5}$$

toujours > 0 , (équilibre à Δ imposé toujours stable), on a par contre

$$\frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial a^3} = \frac{\partial^2}{\partial a^2} (\bar{W}_{E1} + \bar{W}_{S1} - P\Delta) = \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left(-\frac{\pi a^3}{2E} P^2 + 2aw \right) = -\frac{\pi P^2}{E}$$

toujours < 0 (régime à P imposé toujours instable). Dans le cas du dispositif d'Obreimoff (h imposé) $\frac{\partial^3 W_1}{\partial C^3} = + \frac{12 E d^3 h^2}{8 C^5} > 0$, le régime est toujours stable.

- $A \left(\Delta + \frac{P}{K} \right)$ imposé, on a $\frac{\partial \Delta}{\partial A} = 0$ (les variables A et Δ sont supposées indépendantes) et le terme λ vaut

$$\lambda = -\left(\frac{\partial P}{\partial A}\right)^2 \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\partial P}{K \partial \Delta}} = -\left(\frac{\partial P}{\partial A}\right)^2 \frac{1}{K + \frac{\partial P}{\partial \Delta}}$$

Comme $K = 0$ correspond à $\phi = P$ et K à $\phi = \Delta$, on voit que la stabilité décroît de façon monotone quand on passe du déplacement imposé à la charge imposée, K passant de l'infini à 0.

CONCLUSION

La méthode ci-dessus ne prétend pas apporter de résultat nouveau en soi, mais seulement donner le

moyen de grouper de façon cohérente des résultats généralement dispersés dans la littérature. Elle peut être commode pour étudier plus particulièrement la stabilité de l'équilibre, et relier entre eux les différents cas qui se présentent. Enfin, elle permet l'introduction éventuelle de termes énergétiques représentant des processus irréversibles.

REFERENCES

- K.L. JOHNSON, K. KENDALL et A.D. ROBERTS : Proc. Roy. Soc. London. A. 324 (1971), p. 301.
- K. KENDALL : J. Phys. D, 4, 1186-1195 (1971).
- K. KENDALL : J. Adhesion 5 77-79 (1973).
- D. MAUGIS, M. BARQUINS, R. COURTEL : Métaux, Corrosion, Industrie n° 605, p. 1-10 (1976).

Simulation analogique sur ordinateur du comportement thixotrope de certaines suspensions

Etude avec le rhéomètre plan-cône Ferranti-Shirley*

par R. SEVE et J.M. RAYNAL. Centre de Recherches — Kodak-Pathé (Vincennes)

RESUME

Une analyse détaillée du fonctionnement du rhéomètre plan-cône Ferranti-Shirley a permis d'écrire l'équation différentielle du second ordre régissant son fonctionnement. Dans le cas général où le comportement du fluide n'est pas newtonien, l'équation différentielle a été intégrée numériquement avec un ordinateur I.B.M. 1130, selon un programme I.B.M. simulant un fonctionnement de calculateur analogique.

On a d'abord montré de quelle façon et dans quels cas, l'inertie des parties tournantes et la flexibilité du ressort spiral de mesure du couple visqueux modifiaient les rhéogrammes.

On s'est ensuite attaché à étudier de façon plus approfondie l'effet mécanique de diverses grandeurs : viscosité variable, seuil, rigidité, thixotropie. On a montré que l'on pouvait obtenir le tracé d'un rhéogramme de substance thixotrope par une simulation très satisfaisante avec des hypothèses peu nombreuses et simples conduisant à caractériser numériquement les traits essentiels des dispersions thixotropes.

SUMMARY

A detailed analysis of the operating of the Ferranti-Shirley cone and plate viscometer has allowed to write the second order differential equation that governs its operation. In the general case where the rheological behavior of the fluid is Non-Newtonian the differential equation has been integrated numerically with an I.B.M. 1130 computer according to the I.B.M. C.S.M.P. program which allows to work as with an analog simulator.

First it has been shown how and in what cases, the inertia of the rotating parts and the spiral spring flexibility which measures the viscous torque modify flow curves patterns.

In the last part a more elaborate study shows the mechanical effect of the various parameters : variable dynamic viscosity, yield value, rigidity modulus, thixotropy. It has been shown that it is possible to record a thixotropic flow curve by a satisfactory simulation made with few simple assumptions giving numerically the characteristics of the main parameters for such thixotropic dispersions.

DESCRIPTION SOMMAIRE DU RHEOMETRE FERRANTI

C'est un rhéomètre plan-cône, le fluide à étudier étant naturellement placé entre le plan et le cône (figure 1). Pendant la mesure le plan est fixe et horizontal, le cône tourne autour de son axe vertical son sommet étant juste en contact avec le plan.

Le cône est entraîné en rotation par un moteur à vitesse variable qui suit une loi de variation qui peut être choisie à l'avance. L'entraînement est indirect, par l'intermédiaire d'un ressort spiral, ce qui fait que le cône, en raison du frottement auquel il est soumis est généralement en retard sur le mouvement du

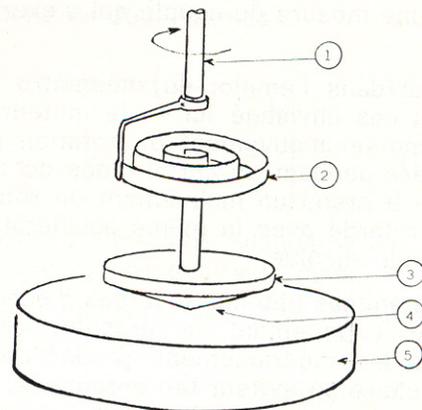


Fig. 1. — Schéma du rhéomètre plan-cône Ferranti

1 — Arbre moteur 2 — Ressort spiral 3 — Cône
4 — Fluide en essai 5 — Plan fixe

* Communication du Groupe Français de Rhéologie, le 10 juin 1976.

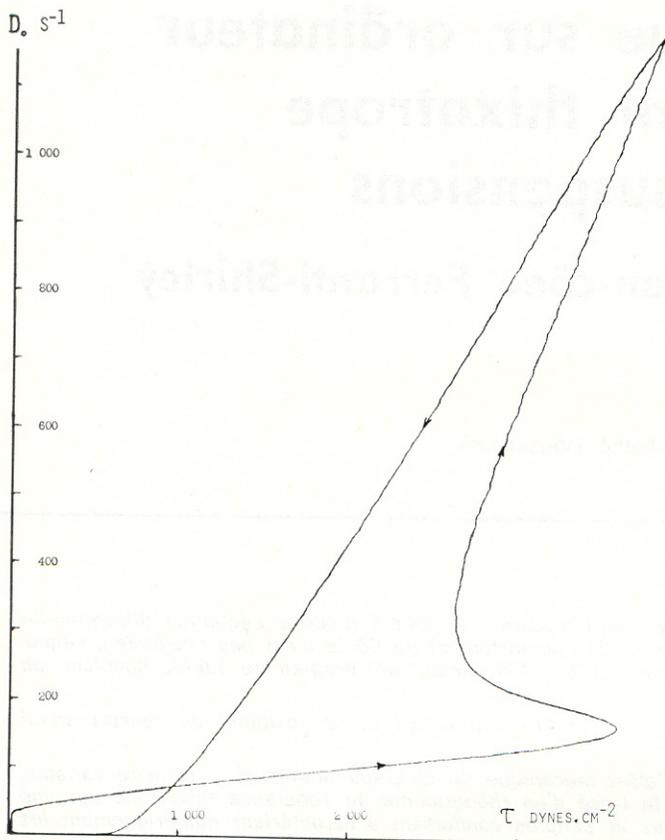


Fig. 2. — Rhéogramme expérimental d'une suspension concentrée d'oxyde de fer dans une solution d'un liant organique (comportement thixotrope).

Cône large $R = 3,5$ cm.

Gradient de vitesse maximum $D_m = 1200$ s⁻¹.

Temps pour obtenir D_m : $t_m = 80$ s.

En abscisses τ tension de cisaillement, proportionnelle au couple de frottement exercé sur le cône.

En ordonnée D_0 gradient de vitesse théorique, proportionnel à la vitesse de rotation du moteur.

moteur. Le décalage angulaire correspond à la flexion du ressort spiral et fournit, grâce à une transmission électrique, une mesure du couple qui s'exerce sur le cône.

En général dans l'emploi du rhéomètre — et ce sera le seul cas envisagé ici — le moteur d'entraînement prend un mouvement de rotation uniformément accéléré pendant un certain laps de temps, au bout duquel il prend un mouvement de rotation uniformément retardé avec la même accélération angulaire en valeur absolue.

Les rhéogrammes obtenus (courbes d'écoulements) représentent usuellement le gradient de vitesse dans le fluide, théoriquement proportionnel à la vitesse angulaire du moteur (en ordonnées) et la tension de cisaillement due au fluide, théoriquement proportionnelle au couple de frottement appliqué au cône (en abscisses). Voir en figure 2 un rhéogramme typique, pour une suspension à comportement approximativement plastique et avec thixotropie.

EQUATION DE FONCTIONNEMENT DU RHEOMETRE

Appelons θ l'angle en tours dont tourne le cône pendant un essai (à partir de sa position de départ, à l'équilibre, moteur arrêté, ressort spiral non fléchi), et appelons θ_0 l'angle en tours dont tourne également le moteur dans les mêmes conditions. On a évidemment les relations : $\dot{\theta}$ vitesse du cône, $\dot{\theta}_0$ vitesse théorique du cône, en fait vitesse de l'arbre d'entraînement. (Ces vitesses angulaires sont exprimées en tours par seconde).

En écrivant que le couple d'inertie du système en rotation, que le couple de frottement visqueux et que le couple élastique appliqué au cône par le ressort sont en équilibre, on trouve l'équation de base du rhéomètre.

Le calcul du couple de freinage visqueux est facilité parce que le cône est très ouvert et ne se distingue d'ailleurs pas visuellement d'un plan. A une distance r du sommet du cône l'épaisseur de fluide est $r\psi$, si ψ est l'angle entre le plan et le cône. La vitesse linéaire du cône sur cette verticale est $2\pi\dot{\theta}r$. Le gradient de vitesse dans la suspension est assimilable au quotient de ces quantités soit $D = 2\pi\dot{\theta}/\psi$ qui est indépendant de r . Par suite le gradient de vitesse est identique en tous les points du fluide étudié.

Sur une aire ds autour d'un point du cône, la force de frottement est $df = \eta \frac{2\pi}{\psi} \dot{\theta} ds$ en appelant η le coefficient de proportionnalité qui est identique à la viscosité pour un fluide newtonien. Ici on suppose que η n'est pas une constante, mais comme $\frac{2\eta}{\psi} \dot{\theta}$ ne varie pas quand l'élément ds varie, η est une constante vis-à-vis de ds . Pour son calcul l'angle très ouvert du cône permet d'assimiler sa génératrice à son rayon, de cette façon $ds = 2\pi r dr$. On a donc df/ds identique en tous les points du fluide étudié. On pose $df/ds = \tau$ tension de cisaillement.

Le couple exercé sur le cône de rayon total R est donc :

$$\Gamma = \int r df = \tau \int r ds = \tau \int_0^R 2\pi r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3} \tau$$

$$\text{soit encore } \frac{2\pi R^3}{3} \eta \frac{2\pi}{\psi} \dot{\theta} = K\dot{\theta}$$

En posant : I moment d'inertie du système (dimension ML^2)

C_r constante du ressort (dimension ML^2T^{-2})

K défini précédemment caractérise le comportement visqueux du fluide (dimension ML^2T^{-1}).

On trouve donc l'équation du rhéomètre :

$$I\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + C_r(\theta - \theta_0) = 0 \quad (1)$$

La quantité K n'étant pas, en général, une constante, cette équation différentielle est difficile à

étudier par des méthodes analytiques. C'est là tout l'intérêt du calcul analogique, ou à défaut, du calcul numérique.

Dans l'hypothèse du fluide newtonien par contre, on peut intégrer si on a pu expliciter les variations de θ_0 avec le temps t .

Il est évidemment nécessaire d'évaluer numériquement les coefficients de l'équation ci-dessus. Cette évaluation est indirecte, notamment pour le moment d'inertie. Par ailleurs des complications inévitables sont dues aux questions d'unités. Enfin l'utilisation de l'appareil nécessite d'introduire les constantes numériques du constructeur. Sans entrer dans les détails nous poserons :

$$C_D = \frac{2\pi}{\psi} \quad \text{constante du gradient de vitesse, d'où} \\ D = C_D \dot{\theta}$$

$$C_\tau = \frac{3}{2\pi R^3} C_r \quad \text{constante de tension de cisaillement,} \\ \text{d'où } \Gamma = \frac{C_r C_D}{C_\tau} \eta \dot{\theta}$$

$$\sigma = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C_r}} \quad \text{période propre d'oscillation du cône} \\ \text{autour de son axe.}$$

L'équation du système devient alors :

$$\frac{\sigma^2}{4\pi^2} \ddot{\theta} + \frac{C_D}{C_\tau} \dot{\theta} + \theta = \theta_0(t) \quad (2)$$

En général, les diverses constantes du rhéomètre sont déterminées après un certain nombre de mesures. On détermine aussi les constantes du rhéomètre avec des huiles étalonnées ayant un comportement newtonien.

Avec notre appareil en utilisant le cône de plus grand rayon et en adoptant le système d'unités C.G.S. nous avons :

$$\begin{aligned} R &= 3,50 \text{ cm} \\ \psi &= 0,005808 \text{ radian} \\ C_D &= 1\,080 \\ C_\tau &= 13\,700 \text{ dyn/cm}^2 \\ C_r &= 1\,230\,500 \text{ dyn.cm par tour} \\ \frac{C_D}{C_\tau} &= 0,0788 \\ \sigma &= 0,55 \text{ s} \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'opérateur choisit sur le rhéomètre une combinaison d'engrenages à la sortie de l'arbre du moteur pour fixer la vitesse de rotation maximum qui pourra être réalisée. Cette vitesse fixe la limite supérieure du gradient de vitesse réalisable. En général on procède à un réglage plus fin de ce gradient maximum que nous désignerons par D_m . En outre l'opérateur fixe le taux de croissance de ce gradient de vitesse dans le fluide, en imposant le temps t_m mis pour l'atteindre. Il fixe donc de cette façon l'accélération angulaire du moteur.

Tous calculs faits on a : $\dot{\theta}_0 = \frac{D_m}{C_D} \frac{t}{t_m}$ pendant la période de vitesse croissante, puis à partir de $t > t_m$ $\dot{\theta}_0 = \frac{D_m}{C_D} \frac{2t_m - t}{t_m}$. Le mouvement s'arrête au temps $t = 2t_m$.

Avec cet appareil on n'a pas accès au gradient de vitesse D mais on lui substitue en ordonnées le gradient de vitesse théorique $D_0 = C_D \dot{\theta}_0$ qui lui serait égal si le cône était rigidement lié au moteur. La tension de cisaillement en abscisses est l'objet de la mesure, on admet qu'à défaut de τ qui a déjà été défini, la grandeur $\tau_0 = C_\tau (\theta_0 - \theta)$ qui est proportionnelle au couple exercé par le ressort en est une mesure correcte.

APPLICATION AUX LIQUIDES NEWTONIENS

Si le fluide étudié est de comportement newtonien, sa viscosité est une constante. En ce cas l'équation différentielle (2) est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. La solution est classique : il y a un mouvement permanent qui dépend du second membre, c'est-à-dire du régime imposé au moteur et il s'y superpose un mouvement oscillatoire amorti.

En ce qui concerne le mouvement permanent, la comparaison entre l'expérience et le calcul est intéressante. Nous nous sommes limités au cas où le moteur possède une accélération angulaire constante $\dot{\theta}_0$ puis $-\dot{\theta}_0$.

Nous ne donnons pas les calculs qui ne présentent pas de difficultés. On trouve d'abord que la vitesse angulaire du cône diffère, en régime permanent rappelez-le, de la vitesse du moteur $\dot{\theta}_0 - \dot{\theta} = \varepsilon \frac{D_m}{C_\tau} \frac{\eta}{t_m}$ avec $\varepsilon = +1$ si $t \leq t_m$ $\varepsilon = -1$ si $t > t_m$

On trouve aussi que la tension de cisaillement mesurée est la somme de deux termes dont l'un est lié au gradient de vitesse et l'autre aux effets d'inertie du cône :

$$\tau_0 = C_\tau (\theta_0 - \theta) = \eta D + \varepsilon \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \frac{C_\tau}{C_D} \frac{D_m}{t_m}$$

mais puisque le gradient de vitesse enregistré est le gradient théorique D_0 et non pas le gradient réel D la valeur du premier doit elle-même être remplacée par la somme de deux termes :

$$\eta D = \eta \left(D_0 - \varepsilon \frac{C_D}{C_\tau} \frac{D_m}{t_m} \eta \right)$$

$$\text{Donc } \tau_0 = D_0 \eta + \varepsilon \frac{D_m}{t_m} \frac{C_\tau}{C_D} \left[\frac{\sigma^2}{4\pi^2} - \left(\frac{C_D}{C_\tau} \right)^2 \eta^2 \right]$$

Le couple de freinage visqueux est en fin de compte la somme de quatre termes :

1. Le couple théorique que l'on devrait évaluer si l'appareil était idéal.
2. Un terme correctif lié à l'élasticité du ressort et dépendant de la viscosité.
3. Un terme correctif d'inertie indépendant de la viscosité et se manifestant clairement dans le mouvement permanent.

TABLEAU I

Viscosité newtonienne η Po	0,33	0,33	1,11	1,11	2,45	2,45	2,45	2,45	11,8	11,8	11,8	
Gradient de vitesse maximum D_m s ⁻¹	900	9 000	900	9 000	900	900	9 000	9 000	900	900	9 000	
Temps mis pour l'obtenir t_m s	60	5	60	5	5	60	5	60	5	60	5	
1) Erreur due à l'inertie dyn/cm ²	1,46	174,96	1,46	174,96	17,5	1,46	174,96	14,58	17,5	1,46	174,96	
Erreur de gradient de vitesse ($D_0 - D$) s ⁻¹	0,4	46,8	1,3	158	34,8	2,9	348	29	167,4	14	1 674,4	
2) Erreur due au gradient de vitesse dyn/cm ²	-0,13	-15,45	-1,46	-174,83	-85,17	-7,10	-851,74	-70,98	-1 975,8	-164,6	-19 758	
1) + 2) Erreur totale sur la ten- sion de cisaillement ($\tau_0 - \tau$) dyn/cm ²	1,33	159,5	0	0	-67,67	-5,64	-676,7	-56,4	-1 958,3	-163,1	-19 583	
Erreur relative sur la tension de cisaillement %	0,45	5,37	0	0	-3,07	-0,26	-3,07	-0,26	-18,44	-1,54	-18,44	
	Fig. 3				Fig. 7				Fig. 5			

4. Un terme transitoire dont dépendent les oscillations et qui est lié à la viscosité, à l'inertie et à la constante du ressort.

Pour préciser les ordres de grandeur de ces divers termes correctifs nous avons rassemblé dans le tableau I quelques résultats numériques.

Les valeurs du tableau permettent de mieux comprendre comment varient les erreurs de mesure. Les figures représentatives illustrent trois cas caractéristiques relatifs à des huiles.

On voit que les erreurs d'inertie et les erreurs dues au gradient de vitesse sont de signes contraire et se compensent exactement pour 1,11 Poise, viscosité exactement égale à la moitié de celle qui procure l'amortissement critique. Pour d'autres viscosités, les erreurs relatives dépendent principalement de la durée mise pour atteindre le gradient de vitesse maximum, mais pas de la valeur de ce maximum.

Si ces durées sont de l'ordre de la minute, les erreurs restent d'un ordre de grandeur tout à fait acceptable.

Ces termes ont pour effet de produire une translation du rhéogramme. Comme ils changent de signe avec $\dot{\theta}_0$, la droite du rhéogramme se dédouble pour prendre la forme d'un parallélogramme étroit. Le sens de parcours de cette figure dépend du signe du terme entre crochets. Les extrémités du rhéogramme ne peuvent être décrites sans prendre en considération la partie transitoire de l'équation du mouvement.

Les figures 3 et 5 représentent les rhéogrammes obtenus avec des huiles de comportement newtonien, respectivement de 0,33 et 11,8 Po. Les conditions d'essais qui sont différentes dans les deux cas sont indiquées sur les figures.

Il est indispensable de souligner que ces rhéogrammes qui paraissent inhabituels, représentent en effet des cas extrêmes. Si le temps de balayage (sweep time) s'accroît, le terme correctif décroît avec D_m/t_m

et les deux branches de courbes se rapprochent au point d'être éventuellement indiscernables. C'est ce que montre la figure 7 qui correspond au cas d'une huile newtonienne de 2,45 Po de viscosité, dont le rhéogramme est tracé dans les conditions expérimentales habituellement utilisées au laboratoire.

Si l'on désire vérifier minutieusement les résultats que nous venons d'établir, on constate qu'il faut

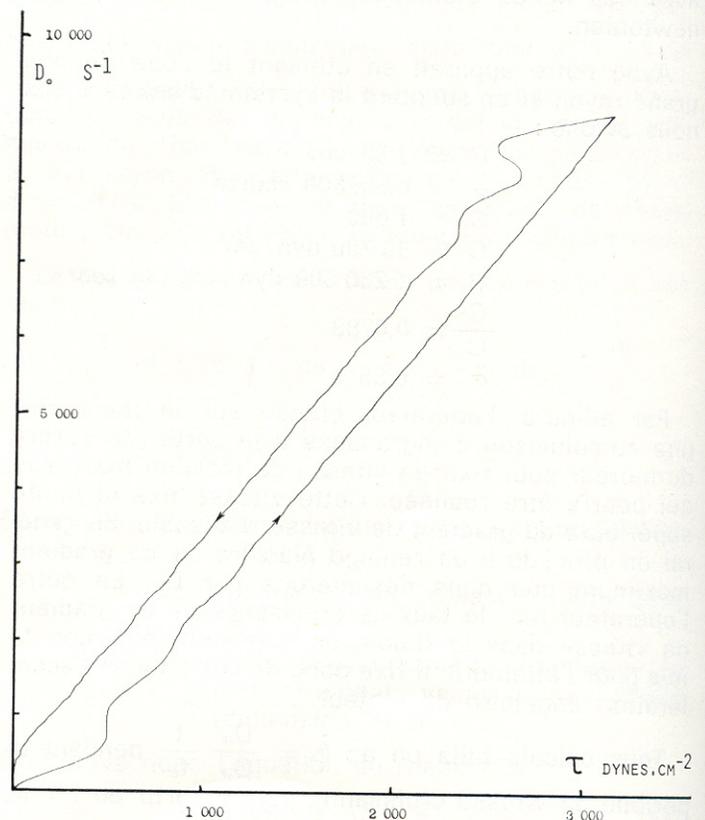


Fig. 3. — Rhéogramme expérimental d'une huile étalon
Viscosité 0,33 Po $D_m = 9 000$ s⁻¹ $t_m = 5$ s

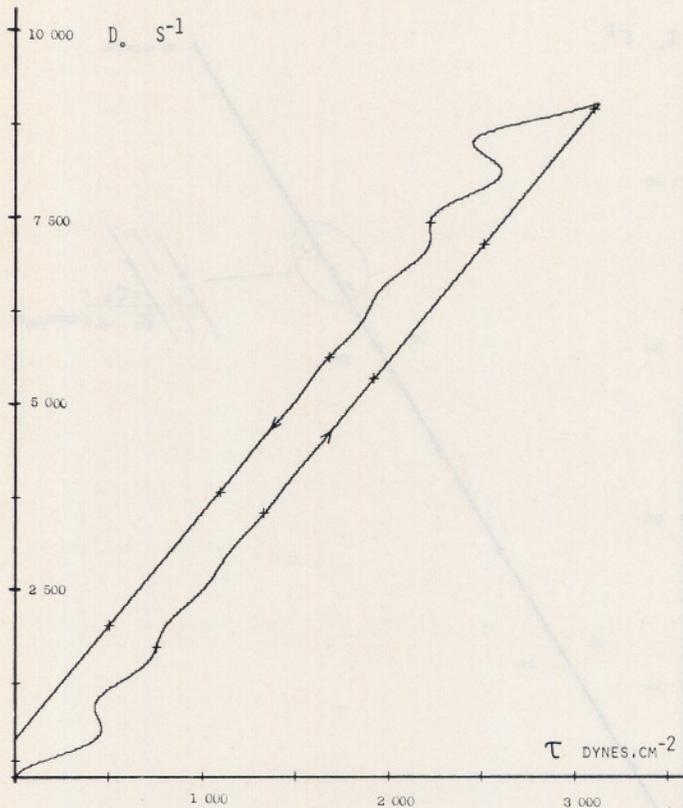


Fig. 4. — Rhéogramme simulé pour les conditions de la figure 3
Les croix marquent les secondes

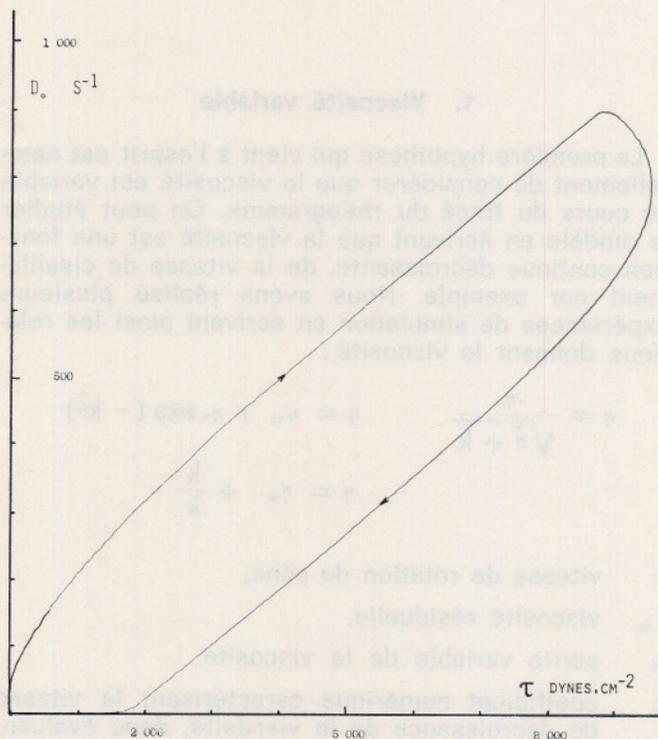


Fig. 5. — Rhéogramme expérimental d'une huile étalon
Viscosité 11,8 Po $D_m = 900 \text{ s}^{-1}$ $t_m = 5 \text{ s}$

mesurer sur les courbes expérimentales un certain nombre de valeurs numériques et les confronter à celles qui peuvent être calculées à partir des formules littérales. Ce travail est assez laborieux. Si en outre on voulait aborder le cas d'une viscosité non newtonienne, il faudrait en plus traiter le problème de l'intégration de l'équation différentielle du second ordre non linéaire. C'est dire que les possibilités dans cette voie sont des plus limitées.

Il est certain qu'un tracé de courbe qui pourrait être superposé à celui obtenu avec le rhéomètre serait extrêmement intéressant. Or ce tracé peut être obtenu par des méthodes de calcul sans qu'il y ait un travail de programmation à envisager. Cette méthode est même applicable si on ne sait pas résoudre l'équation différentielle proposée. Nous ne développerons aucunement le principe de cette méthode de calcul sur ordinateur puisque l'utilisateur peut tout ignorer et appliquer sans grande difficulté les programmes existants. Pour notre part nous avons utilisé avec l'ordinateur I.B.M. 1130, le programme I.B.M. C.S.M.P.¹ qui est un programme de résolution d'équation différentielle par la méthode de Runge-Kutta. Le programme est agencé pour simuler un calcul analogue ce qui offre à l'utilisateur une facilité de travail qui lui évite de rentrer dans les détails de la programmation et ne nécessite qu'un faible apprentissage. Les figures 4 et 6 représentent les rhéogrammes simulés à comparer aux rhéogrammes expérimentaux reproduits figures 3 et 5. On note un très bon accord.

Nous allons maintenant exposer les résultats d'application de cette méthode au cas de fluides non newtoniens. Ce qui a été obtenu dans l'étude des fluides newtoniens montre que l'équation différentielle de départ avec ses coefficients numériques est une base correcte de travail, qui autorise le passage à l'étape ultérieure.

APPLICATION A L'ETUDE RHEOLOGIQUE DES DISPERSIONS THIXOTROPES

Dans l'étude de la résolution de l'équation (2) discutée précédemment on a supposé que la seule intervention du fluide se faisait par l'intermédiaire du coefficient constant de viscosité newtonienne.

Cette restriction étant posée, tous les éléments numériques du problème étaient évaluables préalablement à l'emploi du calculateur, et il était possible de se fixer les échelles graphiques de représentation pour vérifier si la résolution par le calculateur était ou non correcte. C'est ce qui a été fait pour les figures 4 et 6 sans aucune intervention de termes correctifs arbitrairement choisis².

1. Continuous System Modeling Program.

2. Précisons toutefois que cette étude nous a montré que le régime du moteur — c'est-à-dire l'accélération $\ddot{\theta}_0$ — ne s'établissait pas instantanément pour suivre les équations déjà écrites pour θ_0 . Nous avons de ce fait introduit des périodes de 0,04 seconde au moment du démarrage du moteur et au moment de l'inversion du signe de l'accélération pendant lesquelles nous avons considéré qu'il y avait une variation progressive de l'accélération angulaire du moteur.

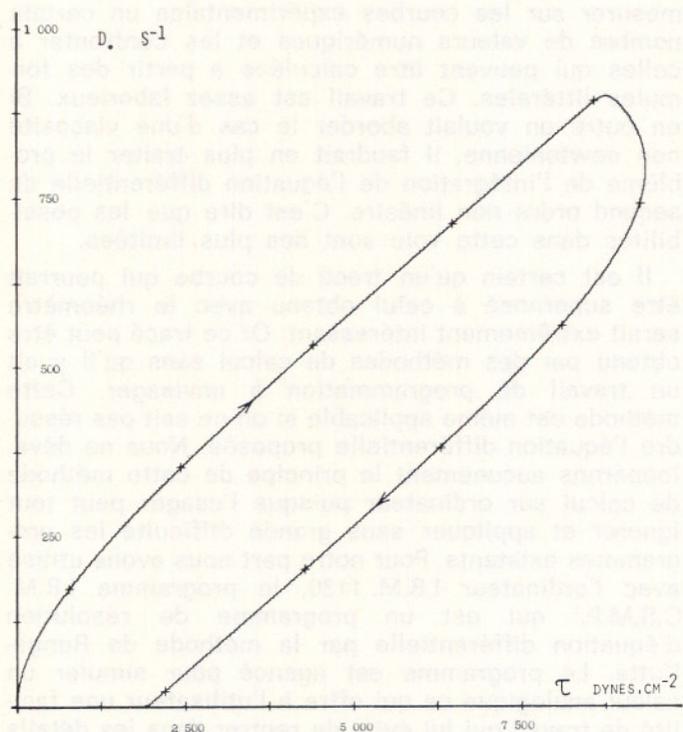


Fig. 6. — Rhéogramme simulé pour les conditions de la figure 5
Les croix marquent les secondes

Si maintenant vous voulons étudier des situations plus compliquées, par exemple pour décrire le comportement d'une dispersion pseudo-plastique et thixotrope, comme celle illustrée sur la figure 2, nous devons procéder différemment. En effet, nous ne savons pas exactement comment modifier l'équation (2). Par suite, nous allons adopter diverses hypothèses, ce qui va nous conduire à de nouvelles équations déduites de l'équation (2) et nous allons résoudre ces équations à l'aide du calculateur. Ce faisant, de nouvelles constantes vont être introduites, pour lesquelles nous n'aurons que peu d'éléments susceptibles de nous fixer une valeur. Lorsqu'un résultat satisfaisant aura été trouvé, nous pourrons en déduire que l'hypothèse envisagée n'est pas contredite par l'expérience, et que dans le cadre de cette hypothèse l'expérience conduit à attribuer telle et telle valeur aux coefficients numériques introduits.

Il faut évidemment garder présent à l'esprit le fait que les hypothèses envisagées n'auront que des présomptions d'exactitude, car il faut aussi que les hypothèses faites s'accordent avec les connaissances rhéologiques. Un progrès de l'étude pourrait naturellement être fait en variant les conditions d'utilisation du rhéomètre et en s'efforçant de les simuler toutes par un même modèle. C'est un travail possible et d'une certaine manière indispensable mais long que nous n'avons que partiellement abordé.

Ceci montre de façon générale, l'intérêt, mais aussi les limites de l'étude d'un modèle, et plus particulièrement de l'utilisation du calculateur.

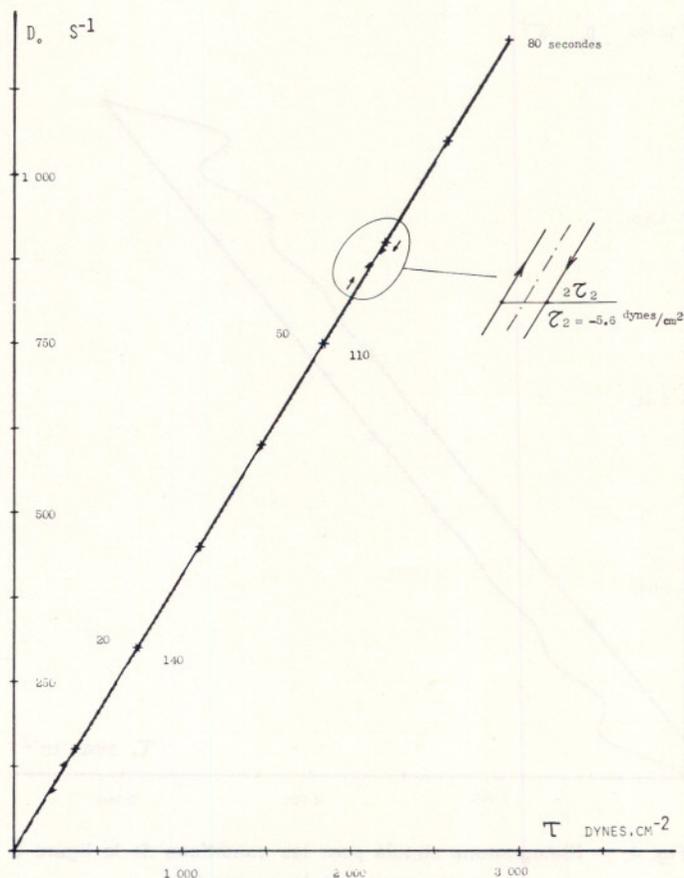


Fig. 7. — Rhéogramme simulé
Fluide newtonien, viscosité 2,45 Po
Gradient de vitesse maximum $D_m = 1\ 200\ s^{-1}$
Temps mis pour atteindre D_m , $t_m = 80\ s$

1. Viscosité variable

La première hypothèse qui vient à l'esprit est naturellement de considérer que la viscosité est variable au cours du tracé du rhéogramme. On peut étudier le modèle en écrivant que la viscosité est une fonction continue décroissante, de la vitesse de cisaillement par exemple. Nous avons réalisé plusieurs expériences de simulation en écrivant ainsi les relations donnant la viscosité :

$$\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\dot{\theta} + k}} \qquad \eta = \eta_\infty + \eta_0 \exp(-k\dot{\theta})$$

$$\eta = \eta_\infty + \frac{k}{\dot{\theta}}$$

- $\dot{\theta}$ vitesse de rotation du cône.
- η_∞ viscosité résiduelle.
- η_0 partie variable de la viscosité.
- k coefficient numérique caractérisant la vitesse de décroissance de la viscosité, donc évaluant la facilité plus ou moins grande avec laquelle la viscosité du fluide se dégrade lors d'un cisaillement.

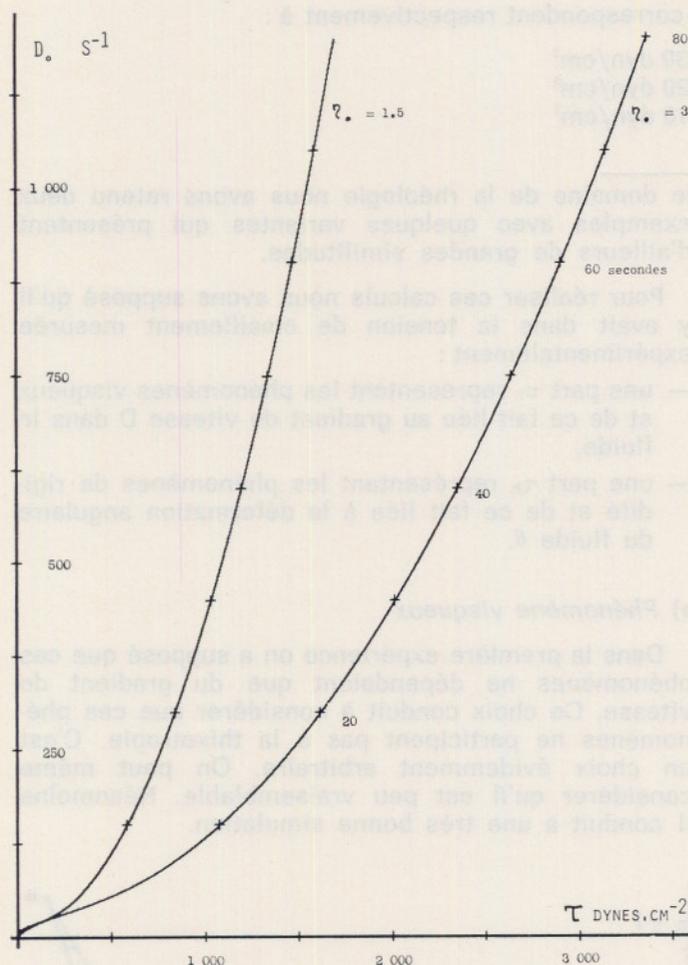


Fig. 8. — Rhéogrammes simulés

Fluide non newtonien sans rigidité

Loi supposée de variation de viscosité $\eta = \eta_0 / \sqrt{\dot{\theta} + k}$
 $k = 1/36$ tour par seconde

Courbe de droite $\eta_0 = 3$ Po

Courbe de gauche $\eta_0 = 1,5$ Po

Les croix marquent le temps écoulé depuis le début du rhéogramme

Les deux premières de ces simulations ont été représentées graphiquement *figure 8* et *figure 9* avec un gradient de vitesse maximum de $1\,200\text{ s}^{-1}$ obtenu au bout de 80 secondes, correspondant aux conditions de l'essai qui a donné le rhéogramme de la *figure 2*.

2. Seuil rhéologique

La grandeur portée en abscisses du rhéogramme est proportionnelle au couple de frottement exercé sur le cône. Un rhéogramme se présentant sous forme d'une droite coupant l'axe des abscisses traduit donc l'existence d'un couple de frottement qui est la somme d'un couple constant et d'un couple proportionnel à la vitesse de rotation. Mais le couple constant de frottement, n'existe qu'autant que le cône a commencé à tourner. Ce couple n'est donc constant qu'après un certain laps de temps qui cor-

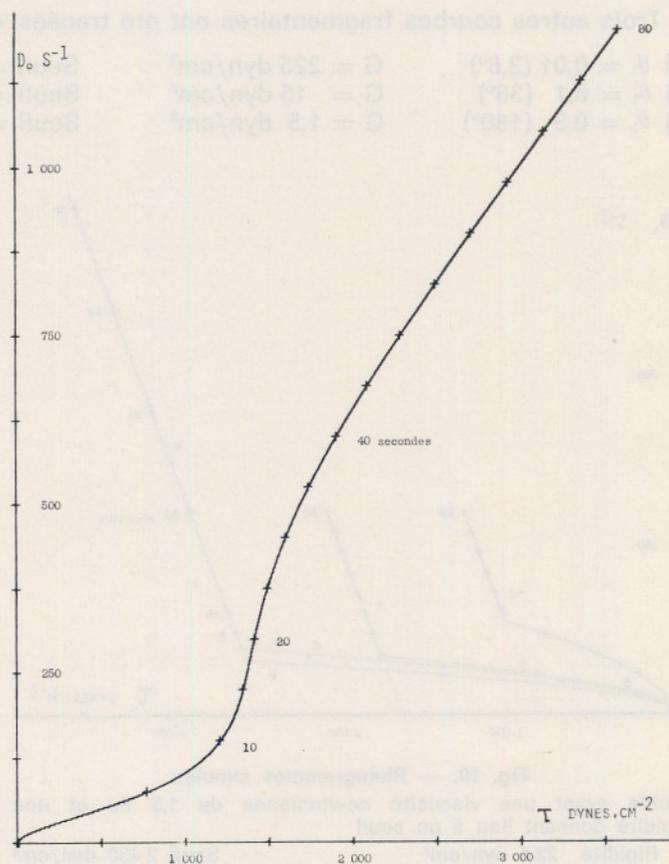


Fig. 9. — Rhéogramme simulé

Fluide non newtonien sans rigidité

Loi supposée de variation de viscosité $\eta = \eta_\infty + \eta_0 \exp(-k\dot{\theta})$
 $\eta_\infty = 2$ Po $\eta_0 = 18,5$ Po $k = 8$ secondes par tour

respond à un certain mouvement du cône, donc à une certaine déformation du fluide. La prise en considération de cette hypothèse, dans le modèle pour le calculateur, suppose que l'on établisse une loi de croissance de ce couple jusqu'à la valeur constante qui lui est assignée. L'hypothèse la plus raisonnable consiste à supposer que le couple croît d'abord proportionnellement à la déformation du fluide. C'est alors faire l'hypothèse que dans la phase de croissance du couple, le fluide se comporte comme un solide exerçant un effort proportionnel à la déformation de cisaillement. Le coefficient de proportionnalité entre les deux, caractérise le module de cisaillement G du matériau en essai. Avec les notations précédentes on a, pour le moment \mathcal{M} de ce couple, la relation :

$$\frac{\mathcal{M}}{C_r} = \frac{C_D}{C_t} G\theta \quad (6)$$

Sur cette base on a obtenu le tracé de la *figure 10* avec les conditions déjà mentionnées du rhéogramme de la *figure 2*.

Sur la *figure 10* on voit un tracé complet (repéré a) pour lequel on a adopté un module de cisaillement de $G = 22,5\text{ dyn/cm}^2$ et un seuil correspondant à une rotation du cône de $\theta_1 = 0,1$ tour (soit 36°) d'où un seuil limite de $2\,430\text{ dyn/cm}^2$.

Trois autres courbes fragmentaires ont été tracées, elles correspondent respectivement à :

b) $\theta_1 = 0,01$ ($3,6^\circ$)	$G = 225 \text{ dyn/cm}^2$	Seuil = $2\,430 \text{ dyn/cm}^2$
c) $\theta_1 = 0,1$ (36°)	$G = 15 \text{ dyn/cm}^2$	Seuil = $1\,620 \text{ dyn/cm}^2$
d) $\theta_1 = 0,5$ (180°)	$G = 1,5 \text{ dyn/cm}^2$	Seuil = 810 dyn/cm^2

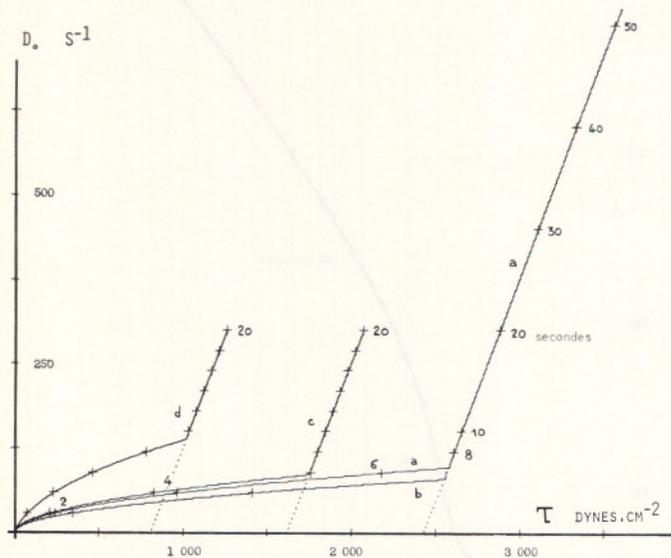


Fig. 10. — Rhéogrammes simulés

Fluide ayant une viscosité newtonienne de $1,5 \text{ Po}$ et une rigidité donnant lieu à un seuil

a) Rigidité $22,5 \text{ dyn/cm}^2$	Seuil $2\,430 \text{ dyn/cm}^2$
b) Rigidité 225 dyn/cm^2	Seuil $2\,430 \text{ dyn/cm}^2$
c) Rigidité 15 dyn/cm^2	Seuil $1\,620 \text{ dyn/cm}^2$
d) Rigidité $1,5 \text{ dyn/cm}^2$	Seuil 810 dyn/cm^2

On voit clairement ce qui, dans le rhéogramme représente l'effet de la rigidité au cisaillement : la pente de la première partie du rhéogramme, et ce qui représente le couple limite de résistance au cisaillement (seuil) : abscisse égale au produit $C_D G \theta_1$ du point d'intersection de l'axe des x avec le prolongement de la deuxième partie (rectiligne) du rhéogramme.

3. Modèle complet avec thixotropie

On peut maintenant considérer que nous avons tous les éléments pour mener à bien des calculs de simulation du comportement d'une dispersion pseudo-plastique à comportement thixotrope sur le rhéomètre Ferranti.

Dans la cinquantaine d'essais qui ont ainsi été réalisés et qui nous ont permis de mieux cerner l'expérience, nous avons pu tirer un certain nombre de conclusions simples mais importantes qui seront discutées plus loin. C'est l'un des apports les plus intéressants de cette méthode de travail, un autre étant évidemment une meilleure connaissance rhéologique du modèle étudié.

Parmi les expériences de simulation les plus intéressantes par leurs résultats et leur apport dans

le domaine de la rhéologie nous avons retenu deux exemples avec quelques variantes qui présentent d'ailleurs de grandes similitudes.

Pour réaliser ces calculs nous avons supposé qu'il y avait dans la tension de cisaillement mesurée expérimentalement :

- une part τ_V représentant les phénomènes visqueux et de ce fait liée au gradient de vitesse D dans le fluide,
- une part τ_R représentant les phénomènes de rigidité et de ce fait liée à la déformation angulaire du fluide θ .

a) Phénomène visqueux

Dans la première expérience on a supposé que ces phénomènes ne dépendaient que du gradient de vitesse. Ce choix conduit à considérer que ces phénomènes ne participent pas à la thixotropie. C'est un choix évidemment arbitraire. On peut même considérer qu'il est peu vraisemblable. Néanmoins il conduit à une très bonne simulation.

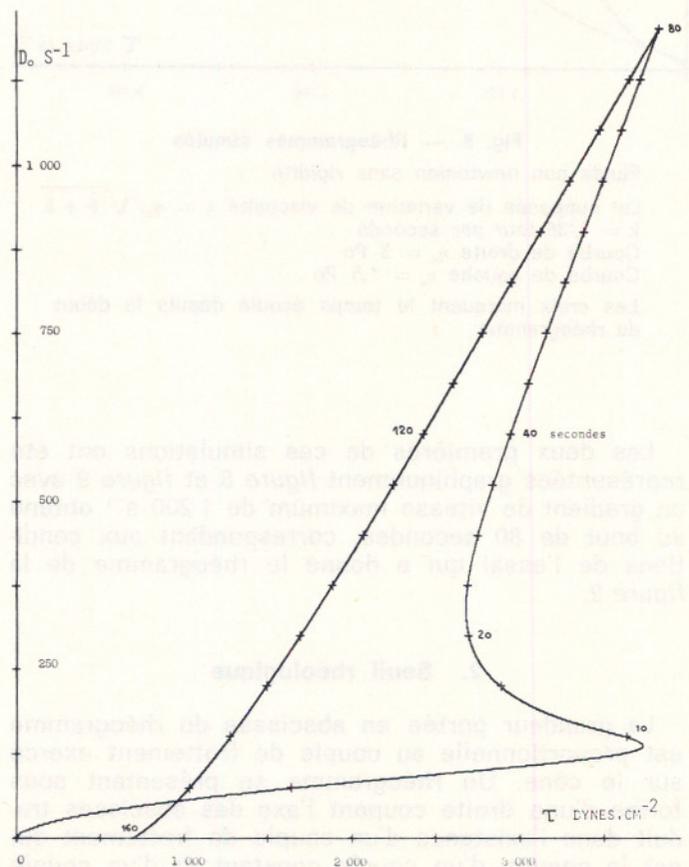


Fig. 11. — Rhéogramme simulé pour les conditions de la figure 2. Fluide ayant une viscosité non linéaire et une rigidité lentement détruite au cours du cisaillement, responsable de la thixotropie. La simulation a été faite à partir de la formule 1.3 du texte.

On a fait l'hypothèse que la tension de cisaillement τ_v due à la viscosité, était donnée par une relation dont la base était un terme de viscosité newtonienne, auquel s'ajoutait un terme supplémentaire non linéaire, ayant pour effet de faire décroître la viscosité apparente depuis une valeur initiale relativement forte, jusque vers une valeur plus faible correspondant au gradient de vitesse maximal réalisé. Cette hypothèse permet de reproduire la branche de retour du rhéogramme de la *figure 2*. Elle rend compte aussi du rhéogramme limite qui est obtenu après un cisaillement fort et prolongé qui détruit la thixotropie.

Trois relations ont été dégagées avec succès dans l'intervalle D de 0 à 1 200 s⁻¹.

Exemples :

$$1.1. \text{ et } 1.2 \quad \tau_v = 2,2 D + 0,4 C_D \left[1 - \exp\left(-\frac{5,5 D}{0,4 C_D}\right) \right]$$

$$1.3 \quad \tau_v = 1,4 D + 1,2 C_D \sqrt{\frac{D}{C_D}}$$

$$1.4 \quad \tau_v = 1,5 D + 1,05 C_D \log \left[1 + \frac{11 D}{C_D} \right]$$

Dans la deuxième expérience de simulation on a supposé au contraire, que durant l'expérience, les phénomènes dépendaient irréversiblement du cisaillement auquel le fluide était soumis. Ce choix revient donc à supposer que l'effet de thixotropie est au moins, en partie, lié à l'évolution non immédiatement réversible de la viscosité. S'appuyant sur le travail fait pour l'évaluation des effets de rigidité qui seront évoqués plus loin. On a adopté l'hypothèse que le cisaillement efficace dans ce processus pouvait être évalué à tout instant à partir de la déformation totale subie par le fluide, soit l'angle θ exprimé en nombre de tours (ce qui est à un coefficient près l'intégrale par rapport au temps, du gradient de vitesse : $k \int D dt$).

On a de plus considéré que ce cisaillement faisait décroître exponentiellement l'un des termes de viscosité. Une relation a été dégagée avec succès :

$$2.1. \quad \tau_v = 1,56 D + C_D \sqrt{\frac{D}{C_D}} [1,1 + 2,6 \exp(-0,40 \sqrt{\theta})]$$

b) Phénomènes de rigidité

Une démarche comparable a été adoptée. On a considéré d'abord que la part due à la rigidité τ_R dans la tension de cisaillement croissait proportionnellement à la déformation pour les petites déformations, puis que cette croissance cessait progressivement, la tension τ_R tendant alors vers une valeur limite τ_R' indépendante de la déformation. On a ensuite tenu compte des phénomènes de thixotropie en considérant que τ_R' décroissait progressivement au fur et à mesure du cisaillement.

Pour évaluer le cisaillement efficace de très nombreuses tentatives ont été faites. Notamment, profi-

tant des facilités des méthodes de calcul on a évalué l'énergie dépensée dans le fluide. De fait cette méthode ne présente pas d'avantages par rapport à des méthodes plus simples. Après étude on a trouvé comme nous l'avons dit précédemment que l'évaluation de la déformation du fluide était un paramètre simple, meilleur que le temps de cisaillement. Au cours d'un cycle de cisaillement tels que ceux que nous avons étudiés, le gradient de vitesse suit une évolution en dent de scie à profil triangulaire symétrique, la déformation suit une évolution en S très lente quand la vitesse est faible, c'est-à-dire en début et en fin de cycle, rapide au moment du renversement de l'accélération. La racine carrée de la déformation suit une évolution mixte. Dans le cycle montant cette racine carrée est proportionnelle à la vitesse, puis dans le cycle descendant cette racine carrée se rapproche de la fin de l'évolution en S, procurant ainsi un mode d'action intermédiaire.

Dans les deux expériences de simulation, la seule différence essentielle a porté sur la façon de calculer la décroissance de τ_R' . Les relations utilisées ont été :

Exemples :

1.1.

$$\tau_R = C_D \tau_R' \left[1 - \exp\left(-\frac{50 \theta}{\tau_R'}\right) \right]$$

$$\tau_R' = 1,55 \exp(-0,8 W) + 1,2 \exp(-0,0045 W)$$

$$W = \frac{1}{C_D} \int \tau_v d\theta$$

1.2

$$\tau_R \text{ comme en } 1.1$$

$$\tau_R' = 1,8 \exp(-0,8 \theta) + 1,0 \exp(-0,025 \theta) + 0,40$$

1.3 et 1.4

$$\tau_R = C_D \tau_R' \left[1 - \exp\left(-\frac{30 \theta}{\tau_R'}\right) \right]$$

$$\tau_R' = 4,5 \exp(-1,9 \sqrt{\theta}) + 1,5 \exp(-0,11 \sqrt{\theta})$$

2.1.

$$\tau_R \text{ comme en } 1.3$$

$$\tau_R' = 2,3 \exp(-0,95 \theta) + 0,5$$

CONCLUSIONS DEGAGEES

A la suite des essais que nous avons relatés nous pouvons dégager les conclusions suivantes :

1° La simulation du fonctionnement du rhéomètre Ferranti, avec des fluides ou avec des dispersions montrant des comportements rhéologiques divers et notamment le comportement thixotrope, est réalisable facilement à partir de l'équation différentielle de base citée et avec l'aide d'un calculateur numérique.

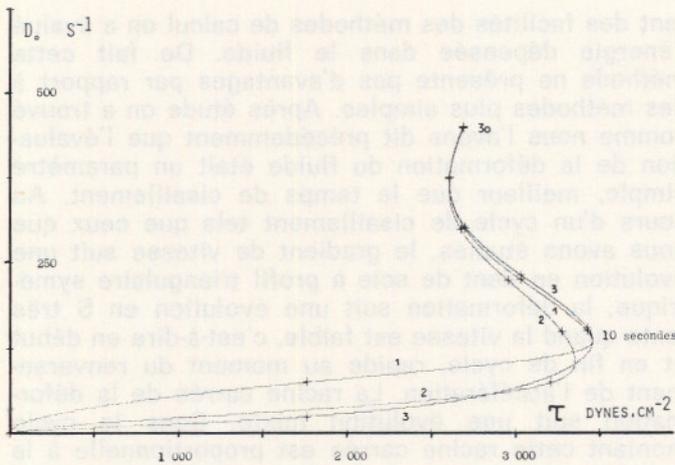


Fig. 12. — Rhéogrammes simulés

Les conditions sont voisines de celles de la figure 11.

1. Rhéogramme simulant le fonctionnement réel du rhéomètre Ferranti.
3. Rhéogramme simulant le fonctionnement du rhéomètre Ferranti mais avec le gradient de vitesse réel D au lieu de D_0 en ordonnées.
2. Rhéogramme simulant le fonctionnement d'un rhéomètre idéal sans inertie et dans lequel la loi de variation du gradient de vitesse D serait la même que la loi de variation D_0 pour le rhéomètre Ferranti (appareil à ressort de flexibilité nulle).

Les croix qui repèrent le temps de 5 en 5 secondes permettent de comparer les effets de ces facteurs de variation.

La différence entre les rhéogrammes 2 et 3 n'est pas essentiellement due à l'inertie mais au fait que la tension de cisaillement maximum est obtenue deux fois plus rapidement pour le rhéogramme 2.

2° Dans le cas de la dispersion thixotrope du type de la figure 2, on a ainsi calculé l'effet de l'inertie du cône et celui de l'élasticité du ressort. On a montré que par rapport à un appareil idéal sans inertie et à transmission rigide, seul le début du rhéogramme était modifié, mais que dans les conditions de cette expérience en aucun cas l'allure du rhéogramme, et notamment de la « corne » qu'il présente ne pouvait être due à l'inertie ou à une oscillation parasite (figure 12).

On a donc démontré ainsi que cette « corne » est due à un effondrement de la structure gélifiée dont on a pu étudier les caractères et chiffrer les paramètres.

A titre de conséquence on peut ramener l'équation différentielle du rhéomètre à une équation du 1^{er} ordre.

3° La simulation d'un rhéogramme donné peut être réalisée par des hypothèses variées et qui ne sont que partiellement justifiables par la vraisemblance des hypothèses et l'identité avec le rhéogramme expérimental. A la limite nous reconnaissons (avec le lecteur) le risque de jeu graphique et mathématique que pourrait avoir la recherche de ces simulations. Ce qui permet de rester dans un domaine moins arbitraire c'est la constatation que les mêmes modèles ont pu, en modifiant seulement quelques constantes numériques, représenter très correcte-

ment d'autres fluides de composition très différente. A ce sujet on peut constater que 7 à 9 valeurs numériques sont à la fois nécessaires et suffisantes pour ces simulations. De plus bien que notre travail n'ait pas été très approfondi en ce domaine, les mêmes simulations avec des coefficients numériques inchangés peuvent rendre compte correctement du tracé de cycles successifs, de cycles réalisés avec des gradients de vitesse moindres, de cycles interrompus et poursuivis à des gradients de vitesse constants.

De sorte qu'en notant l'aspect d'hypothèses que manifeste ce type de simulation, on doit aussi noter sa capacité à représenter une classe de phénomènes relativement vaste.

4° Cette étude de simulation suggère des prolongements précisément dans des directions telles que la part d'arbitraire dans les hypothèses soit réduite par de nouvelles expériences. C'est ainsi que l'étude du rhéogramme limite obtenue après un cisaillement fort et prolongé permet de préciser dans le modèle mathématique ce que sont réellement les termes de viscosité.

De la même façon, l'angle que les deux branches du rhéogramme forment au point de rebroussement est une mesure, à cet instant, de l'évolution irréversible par rapport au gradient de vitesse, de la tension de cisaillement. Dans notre modèle, cet angle permet de fixer la valeur de la constante de temps la plus grande qui régit la dégradation de la rigidité (1^{re} expérience) ou de la viscosité (2^e expérience).

On peut encore s'accorder à reconnaître que le rhéomètre Ferranti n'est pas l'appareil le plus susceptible de préciser l'importance de la rigidité dans le couple de cisaillement, même en début d'expérience.

Il y aurait beaucoup à ajouter sur ce chapitre qui dépasse le cadre de notre travail. Néanmoins il nous a conforté dans l'idée qui reste à démontrer, qu'il y a dans ces phénomènes de thixotropie deux phénomènes de dégradation indépendants, l'un relatif à la rigidité et au seuil et l'autre à la viscosité. Nous avons, par les formules utilisées, une possibilité de chiffrer numériquement certains paramètres de la thixotropie. Dans le cadre de nos expériences quatre paramètres ont été évalués à cet effet. Leur signification physique demande à être certainement mieux dégagée.

Quoi qu'il en soit de l'aspect partiel de ce travail nous espérons que les résultats ainsi exposés inciteront d'autres chercheurs à poursuivre dans une voie analogue.

BIBLIOGRAPHIE

- CHENG D.C.H. — The interpretation of cone-and-plate viscometer loop experiments — *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, Volume 4, pp. 693-699 (1971).
- CRAMER S.D. and MARCHELLO J.M. — Numerical Evaluation of models Describing Non-Newtonian Behavior. — *AIChE Journal*, vol. 14, n° 6, pp. 980-983, November (1978).
- FREDRICKSON. — A Model for the Thixotropy of Suspensions. *AIChE Journal*, vol. 16, n° 3, pp. 436-441, May (1970).

Trois autres courbes fragmentaires ont été tracées, elles correspondent respectivement à :

- b) $\theta_1 = 0,01$ ($3,6^\circ$) $G = 225 \text{ dyn/cm}^2$ Seuil = $2\,430 \text{ dyn/cm}^2$
- c) $\theta_1 = 0,1$ (36°) $G = 15 \text{ dyn/cm}^2$ Seuil = $1\,620 \text{ dyn/cm}^2$
- d) $\theta_1 = 0,5$ (180°) $G = 1,5 \text{ dyn/cm}^2$ Seuil = 810 dyn/cm^2

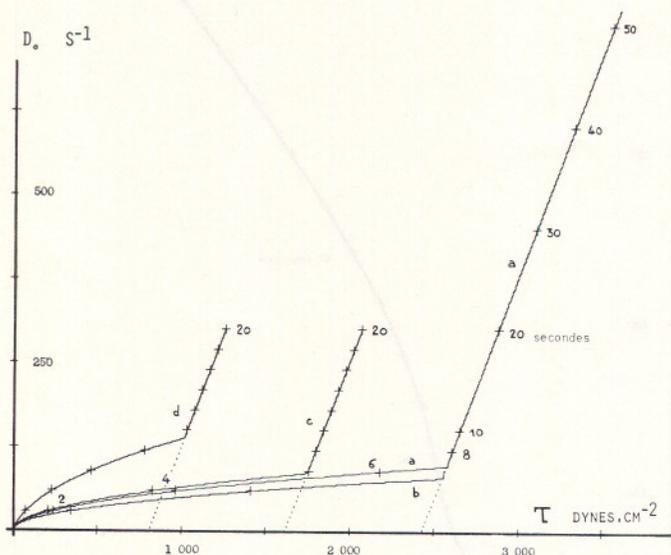


Fig. 10. — Rhéogrammes simulés

Fluide ayant une viscosité newtonienne de $1,5 \text{ Po}$ et une rigidité donnant lieu à un seuil

- a) Rigidité $22,5 \text{ dyn/cm}^2$ Seuil $2\,430 \text{ dyn/cm}^2$
- b) Rigidité 225 dyn/cm^2 Seuil $2\,430 \text{ dyn/cm}^2$
- c) Rigidité 15 dyn/cm^2 Seuil $1\,620 \text{ dyn/cm}^2$
- d) Rigidité $1,5 \text{ dyn/cm}^2$ Seuil 810 dyn/cm^2

On voit clairement ce qui, dans le rhéogramme représente l'effet de la rigidité au cisaillement : la pente de la première partie du rhéogramme, et ce qui représente le couple limite de résistance au cisaillement (seuil) : abscisse égale au produit $C_D G \theta_1$ du point d'intersection de l'axe des x avec le prolongement de la deuxième partie (rectiligne) du rhéogramme.

3. Modèle complet avec thixotropie

On peut maintenant considérer que nous avons tous les éléments pour mener à bien des calculs de simulation du comportement d'une dispersion pseudo-plastique à comportement thixotrope sur le rhéomètre Ferranti.

Dans la cinquantaine d'essais qui ont ainsi été réalisés et qui nous ont permis de mieux cerner l'expérience, nous avons pu tirer un certain nombre de conclusions simples mais importantes qui seront discutées plus loin. C'est l'un des apports les plus intéressants de cette méthode de travail, un autre étant évidemment une meilleure connaissance rhéologique du modèle étudié.

Parmi les expériences de simulation les plus intéressantes par leurs résultats et leur apport dans

le domaine de la rhéologie nous avons retenu deux exemples avec quelques variantes qui présentent d'ailleurs de grandes similitudes.

Pour réaliser ces calculs nous avons supposé qu'il y avait dans la tension de cisaillement mesurée expérimentalement :

- une part τ_V représentant les phénomènes visqueux et de ce fait liée au gradient de vitesse D dans le fluide,
- une part τ_R représentant les phénomènes de rigidité et de ce fait liée à la déformation angulaire du fluide θ .

a) Phénomène visqueux

Dans la première expérience on a supposé que ces phénomènes ne dépendaient que du gradient de vitesse. Ce choix conduit à considérer que ces phénomènes ne participent pas à la thixotropie. C'est un choix évidemment arbitraire. On peut même considérer qu'il est peu vraisemblable. Néanmoins il conduit à une très bonne simulation.

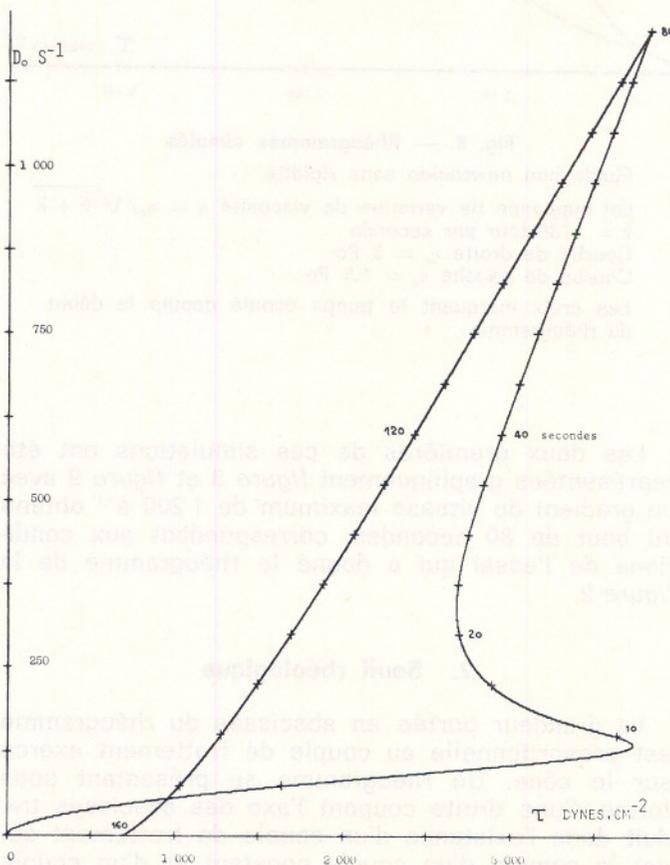


Fig. 11. — Rhéogramme simulé pour les conditions de la figure 2. Fluide ayant une viscosité non linéaire et une rigidité lentement détruite au cours du cisaillement, responsable de la thixotropie. La simulation a été faite à partir de la formule 1.3 du texte.

Influence de l'environnement sur la propagation de la fissuration en fatigue*

par Bernard BOUCHET, Laboratoire de Mécanique et Physique des Matériaux, E.R.A. du C.N.R.S., n° 123, E.N.S.M.A., rue Guillaume-VII, 86034 Poitiers Cedex

RESUME

Des essais de fatigue ont été effectués sur les monocristaux d'Al-Cu à 4 %, des gros cristaux de fer et des polycristaux de cuivre et de zircaloy sous différentes atmosphères : air, vide, hydrogène sulfuré, mercure, azote liquide et air liquide. Les mesures d'étendue de la zone plastique par micrographie, microdureté, recristallisation montrent que la zone plastique sous vide est deux fois plus grande que sous air.

L'ensemble des résultats, les analyses X sur les cassures, les essais à basse température suggèrent une action de l'adsorption lors de l'ouverture de la fissure.

SUMMARY

Fatigue studies were carried out on single crystals of Al-Cu 4 %, big crystals of iron and polycrystals of copper and zircaloy in different environments : air, vacuum, H₂S, mercury, liquid nitrogen and liquid air.

The measurements of plastic zone by micrography, microhardness, recrystallisation show vacuum plastic zone is two time wider than air plastic zone. All results, the X analysis on fractures, studies in low temperature suggest the action of adsorption during the opening crack.

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années l'action de l'atmosphère ambiante sur le comportement en fatigue des métaux a fait l'objet de nombreuses études [1]. A taux de sollicitation égal, en contrainte ou en déformation, les nombres de cycles à rupture sous vide ou sous gaz neutre sont beaucoup plus élevés qu'à l'air libre, et le taux d'humidité des atmosphères utilisées a un effet déterminant ; les modes de fissuration et les faciès caractéristiques obtenus dépendent à la fois du stade de propagation, de la nature du métal, de son état structural, et de l'environnement ; en particulier le faciès de stries ductiles observées généralement après fatigue à l'air libre n'existent plus dans le cas des ruptures sous vide ou sous gaz neutre. En ce qui concerne les vitesses de propagation des fissures, l'effet de l'environnement interviendrait surtout sur le début de la propagation. Cependant les discontinuités observées sur les courbes donnant la vitesse de propagation en fonction du facteur d'intensité de contrainte seraient sensibles à l'environnement

pour les ΔK élevés et non pour les ΔK faibles. Ce facteur ΔK issu de la mécanique des ruptures peut être considéré comme une mesure globale des effets cumulés de la charge appliquée et de la géométrie de la pièce sur l'intensité des contraintes effectives au voisinage d'une fissure.

Il permet notamment de relier théoriquement la vitesse de propagation à l'étendue de la zone plastique en bout de fissure.

L'effet de la fréquence, dans le cas d'un essai à l'air libre serait lié à l'action de l'environnement sur la vitesse de création de surfaces nouvelles, c'est-à-dire sur la vitesse de propagation.

Différents points restent cependant à élucider, notamment :

- le mécanisme de l'agressivité : oxydation de la surface de rupture au cours de la propagation, diffusion de l'hydrogène en avant du bout de fissure ou adsorption.

- la raison des faciès de « clivage » ou de « pseudo-clivage » observés en début de propagation sous air humide dans des métaux peu aptes au clivage sous d'autres modes de sollicitation [2].

* Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 11 mars 1976.

— le mode de formation des « stries ductiles », également caractéristiques de la propagation en milieu gazeux humide pour des vitesses de propagation $da/dN \approx 0,02$ à $2 \mu\text{m}/\text{cycle}$.

— l'influence de l'environnement sur la dimension et la structure de la zone plastique en bout de fissure.

II. CONDITIONS EXPERIMENTALES

a) Dispositif d'essai de fatigue sous vide

Il a paru nécessaire de réaliser un dispositif permettant d'effectuer des essais sous différentes pressions partielles d'air ou de gaz secs ou humides, depuis la pression atmosphérique jusqu'à 10^{-6} Torr. On a utilisé à cet effet une machine de fatigue Flato-Schenck de capacité 6 daN.m., fonctionnant en flexion alternée ou ondulée à amplitude de déformation maximum cyclique imposée, et à une fréquence de 50 Hz. Le vide de 10^{-6} Torr a été obtenu au moyen de deux chambres annulaires intermédiaires situées au niveau des mors oscillants, isolées de l'extérieur et de l'enceinte principale par des joints à lobes, et reliées à un groupe à vide. Un spectrographe de masse a été monté afin de connaître avec précision les teneurs en vapeur d'eau, oxygène et hydrogène des différentes atmosphères utilisées. Des sorties électriques permettent l'utilisation de jauges de fissuration collées sur l'éprouvette.

b) Choix des éprouvettes

Le métal étudié a été principalement un alliage aluminium-cuivre à 3,9 % de cuivre, 20 ppm de fer et 6 ppm de Si, livré sous formes de tôles d'épaisseur 3 à 8 mm. Les éprouvettes ont subi après usinage les traitements thermiques suivants :

Structure A (phase θ'' précipitée) : mise en solution à 520 °C pendant 14 h — trempe à l'eau à la température ambiante — revenu 30 h à 160 °C.

Structure B (zones Guinier Preston) : mise en solution à 520 °C pendant 14 h, trempe à l'eau à la température ambiante, revenu 100 h à 100 °C.

Les caractéristiques mécaniques correspondantes sont :

TABLEAU I

	daN/mm ²		A % réparti
	σ_E	σ_R	
Structure A	20	30	7 %
Structure B	17	30	17 %

En dehors des essais effectués sur monocristaux ou bicristaux obtenus par écrouissage critique de l'ordre de 4 %, le diamètre moyen des grains des échantillons était toujours de l'ordre de 1,5 mm.

Les observations microfractographiques ont été faites sur un microscope électronique à balayage et sur un microscope électronique à transmission par la méthode de replique à double empreinte avec ombrage au chrome.

III. ETUDE DES MECANISMES DE PROPAGATION EN FONCTION DU MILIEU AMBIANT

1. Essais sur AU₄

a) Nombre de cycles à ruptures

Le tableau II donne les résultats obtenus sur des éprouvettes de même orientations à l'air et sous vide.

TABLEAU II
Durées de vies

	Air	Vide	Structure
I	75 700	319 000	GP
II	73 500	321 000	GP
III	65 900	338 000	GP
IV	38 000		GP
	22 000		θ''
V	28 500	285 000	θ''

Ces résultats complètent ceux déjà connus pour les polycristaux (2) : ils montrent :

— l'influence de l'air non desséché sur le nombre de cycles à rupture,

— la faible action de l'orientation cristallographique mais pour des orientations correspondants à des plans en zone d'axe $|100|$ (monocristaux I, II, III).

— l'influence de l'état structural pour une orientation identique (monocristal IV).

b) Propagation

Les figures 1 et 2 donnent un exemple des vues latérales de la propagation des fissures sur des monocristaux, à l'air, et sous vide. On notera en particulier (et compte tenu des échelles différentes) les propagations cristallographiques considérablement plus étendues à l'air que sous vide, la densité beaucoup plus forte de glissement sous vide et l'évolution de cette densité caractérisant celle de la zone plastique en bout de fissure au cours de la propagation. L'étendue de cette zone et l'intensité de l'écrouissage correspondant ont été aussi appréciées par mesures de microduretés (filiations normales à la cassure (figure 3) et par recristallisation [3].

c) Essais sous différents milieux ambiants

Outre les essais sous air et sous vide, des essais de fatigue ont été effectués sous différents milieux en vue de préciser le mécanisme d'agressivité : hydrogène sulfuré, mercure, jet d'azote liquide, jet d'air liquide. Les essais sous hydrogène sulfuré ont conduit à des résultats très comparables à ceux obtenus sous air humide. N_R (nombre de cycle à rupture) = 54 000 cycles pour $\sigma_{max} = 9,5 \text{ daN/mm}^2$, au lieu de 10^5 à l'air libre et $6 \cdot 10^5$ sous vide. Les propagations latérales et les faciès microtractographiques sont très analogues à ceux obtenus sous air humide,

à savoir « clivage » ou « pseudo clivage » prépondérant, accompagnés de stries « ductiles » lorsque $da/dN > 0,2 \mu/\text{cycle}$. Les essais sous atmosphère de vapeur de mercure ont mis en évidence la différence

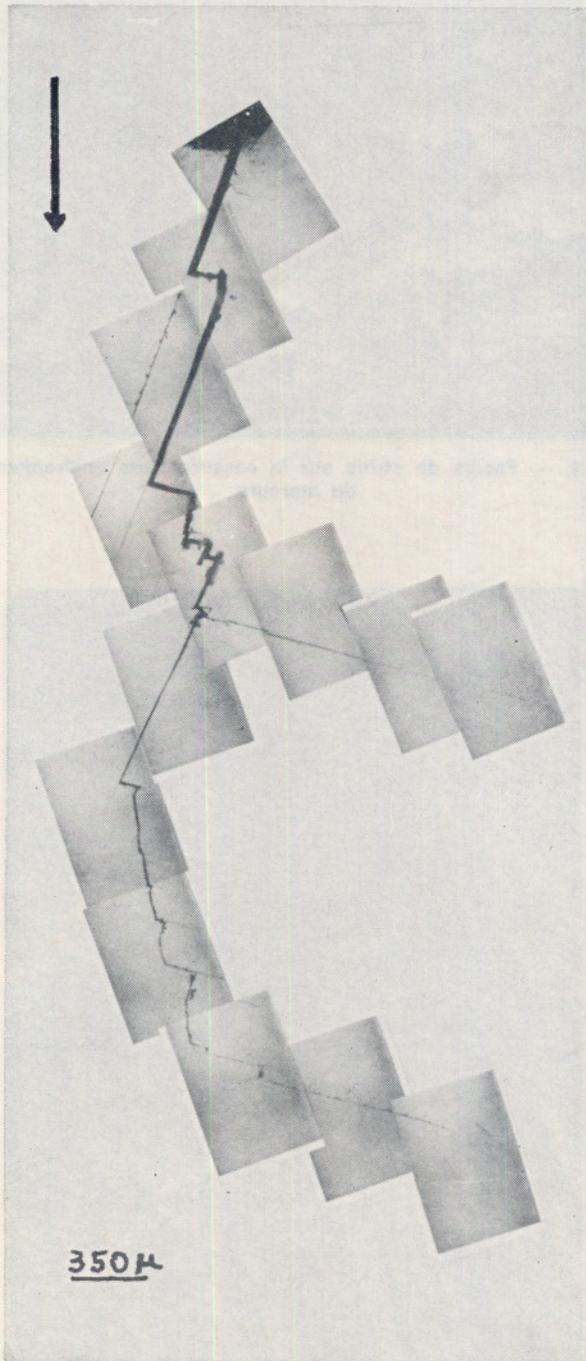


Fig. 1. — Fissure sur éprouvette monocristalline de structure B sous air
 $\sigma = 8 \text{ daN/mm}^2$; $N_R = 190\ 000$ cycles

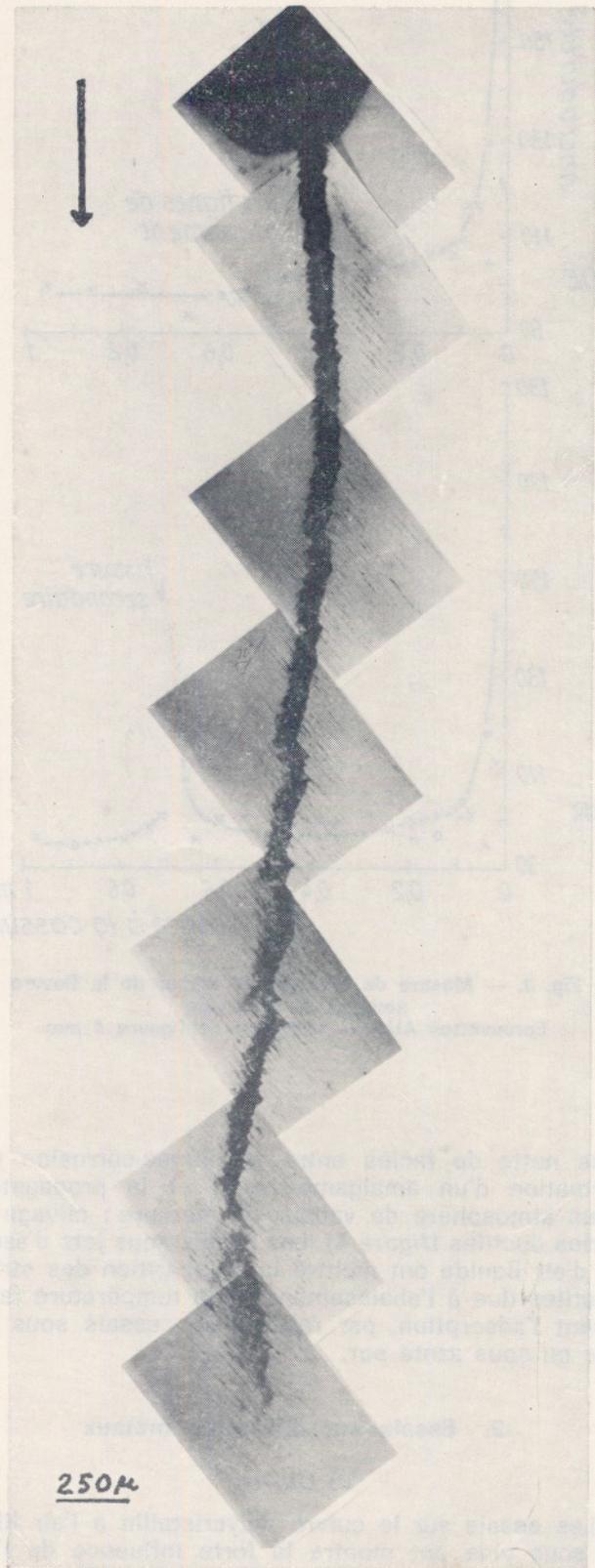


Fig. 2. — Fissure sur éprouvette monocristalline de structure B sous vide
 $\sigma = 8 \text{ daN/mm}^2$; $N_R = 707\ 000$ cycles

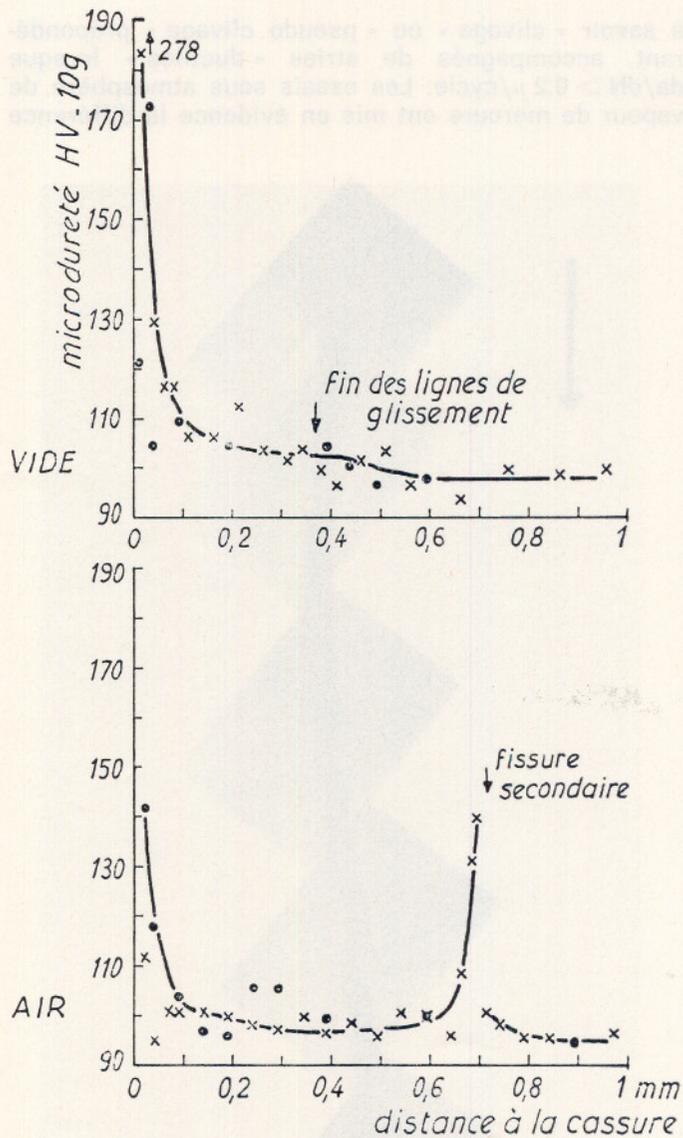


Fig. 3. — Mesure de microdureté autour de la fissure sous air et sous vide
Eprovettes AU 4 — Longueur de fissure 4 mm

très nette de faciès entre la fatigue-corrosion par formation d'un amalgame Hg-Al et la propagation sous atmosphère de vapeur de mercure : clivage et stries ductiles (figure 4). Les essais sous jets d'azote et d'air liquide ont montré la réapparition des stries ductiles due à l'abaissement de la température favorisant l'adsorption, par rapport aux essais sous air sec ou sous azote pur.

2. Essais sur différents métaux

a) Cuivre

Les essais sur le cuivre polycristallin à l'air libre et sous vide ont montré la forte influence de l'air ambiant sur le nombre de cycles à rupture :

$N_R = 1,4 \cdot 10^5$ à l'air, et $8,6 \cdot 10^5$ sous vide pour $\sigma_{max} = 7 \text{ daN/mm}^2$. Les faciès de rupture sont égale-



Fig. 4. — Faciès de stries sur la cassure sous environnement de mercure



Fig. 5. — Faciès de stries sur le cuivre cassé sous air

ment affectés ; la différence entre les aspects microfractographiques après rupture à l'air libre et sous vide est cependant moins nette que dans le cas de l'AU₄, les faciès de clivage et les stries ductiles étant moins bien définies sur le cuivre (figures 5 et 6).

b) Fer α

Les essais effectués sur des gros cristaux de fer relativement pur ont révélé une influence moins importante de l'air ambiant que sur l'AU₄, sur les durées de vie — cf. tableau III.

TABLEAU III

Nombre de cycles à rupture (gros cristaux de fer α)

	Air	Vide
$\sigma = 12 \text{ daN/mm}^2$	$9,68 \cdot 10^5$	$2,22 \cdot 10^6$
$\sigma = 15 \text{ daN/mm}^2$	$9,7 \cdot 10^4$	$3,91 \cdot 10^5$
$\sigma = 15 \text{ daN/mm}^2$	$6 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^5$

L'examen des fissures latérales confirme les constatations faites sur l'AU₄ : la zone perturbée autour de la fissure est plus importante sous vide (figures 7 et 8). La différence sur les faciès est moins grande,

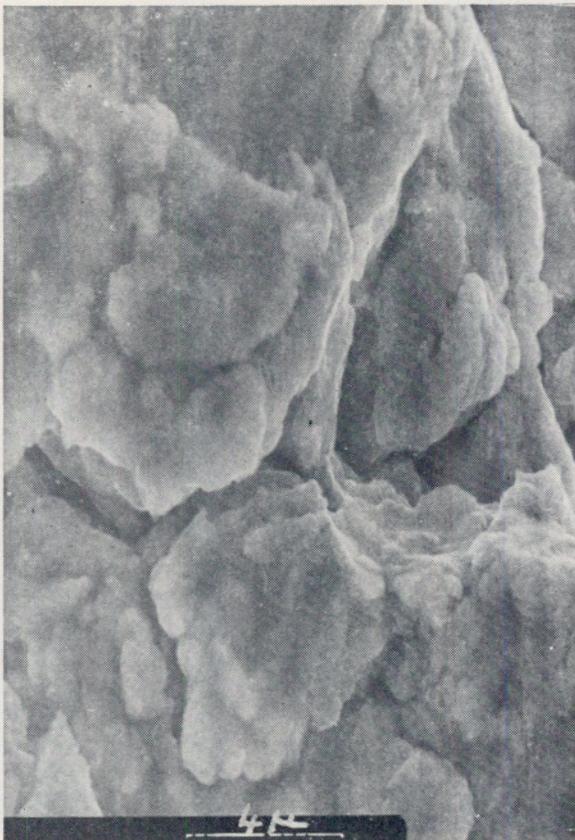


Fig. 6. — Faciès sur le cuivre cassé sous vide

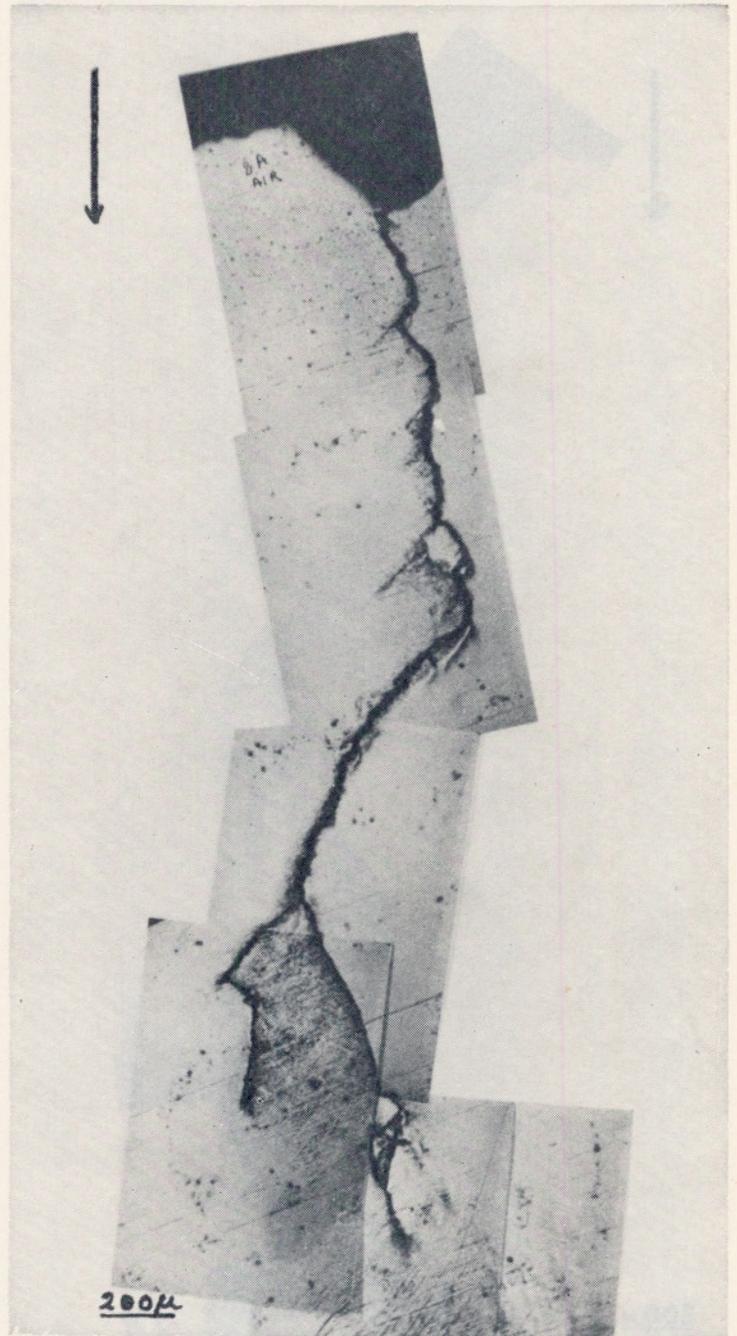


Fig. 7. — Fissure latérale sur une éprouvette de fer cassé sous air

bien que comme pour le cuivre et l'alliage AU₄, les faciès soient toujours plus « cristallographiques » dans le cas des ruptures sous air. Par ailleurs contrairement au cas de l'alliage AU₄, on observe certaines plages de stries ductiles même en l'absence d'humidité. Les mesures de microdureté et les attaques micrographiques montrent très nettement l'étendue plus importante de la zone plastique en bout de fissure dans le cas des ruptures sous vide, et la formation dans le cas du fer α d'une structure en cellule de polygonisation [3].



Fig. 8. — Fissure latérale sur une éprouvette de fer cassé sous vide

c) Zircaloy

Des essais ont été effectués sur ce métal en raison de la grande affinité entre l'azote et ce métal. Les essais ont montré l'absence de stries ductiles dans le cas des ruptures sous azote sec. Par contre les stries réapparaissent, de façon cependant moins bien définie qu'à l'air libre, sous jet d'azote liquide.

IV. ANALYSE ET INTERPRETATION

Les résultats obtenus sur les monocristaux d'alliage AU₁ (figures 1 et 2) mettent clairement en évidence la nature « cristallographique » de la fissuration, déjà présentée sur les polycristaux, *en début de propagation* [2]. Dans tous les cas, qu'il s'agisse d'essais à l'air ou sous vide, la propagation s'effectue suivant des plans du type $\{111\}$ et parfois $\{112\}$.

Les observations faites au microscope optique, sur répliques en transmission, ou au M.E.B. concordent dans le sens d'un endommagement par « glissement » avec des rattrapages successifs lorsque la fissure s'écarte trop de la zone de sollicitation maximum. Il est de plus très caractéristique que les propagations sans rattrapage soient beaucoup plus étendues en atmosphère « agressive » qu'en atmosphère neutre. La déformation plastique globale (ou l'écrasement) nécessaire pour propager la fissure est donc beaucoup plus intense sous vide ou sous atmosphère neutre.

A l'échelle microscopique on peut affirmer que les faciès de clivage ou de pseudoclivage sont associés à une propagation cristallographique plane suivant des plans de glissement maximum. Les stries « ductiles » observées sur les surfaces de cassures sous atmosphère agressive se situent à une échelle beaucoup plus fine. Les observations au M.E.B. en utilisant notamment un dispositif de modulation montrent la dissymétrie des stries [3].

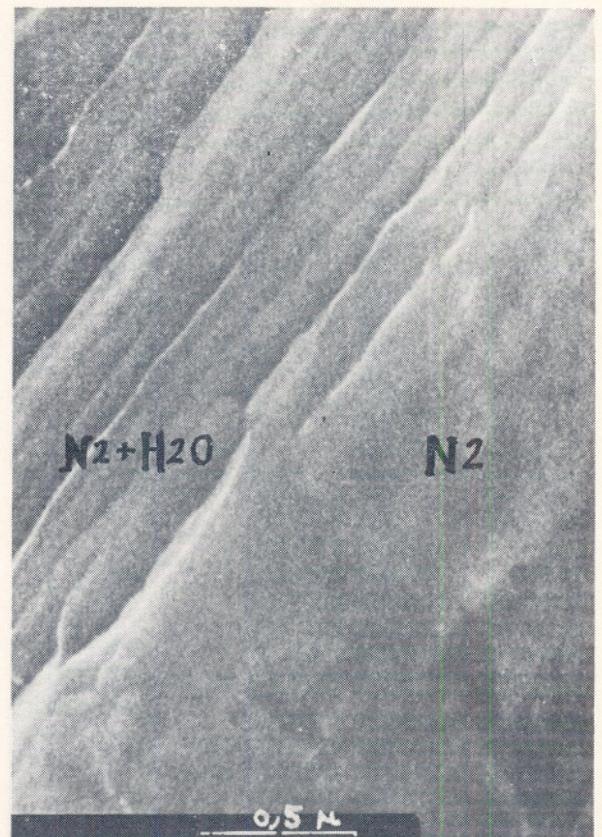


Fig. 9. — Passage azote sec — azote humide

La figure 9 illustre un passage atmosphère neutre, atmosphère agressive, et notamment la continuité du plan de fissuration. L'ensemble des résultats conduit à considérer un processus de formation des « stries ductiles », par glissement non réversible sur un plan privilégié, soit à l'ouverture, soit à la fermeture de la fissure selon le mécanisme de Laird [1]. Sous atmosphère neutre la réversibilité des glissements empêche le marquage et le microrelief cycle par cycle [3].

En ce qui concerne le processus d'agressivité, des analyses par spectrographie X ont révélé à l'endroit des traces noires caractéristiques des surfaces de cassure sous atmosphère humide, ou sous H_2S , et situé au niveau de décrochements importants, la présence d'oxyde (ou d'hydroxyde) dans un cas, de sulfure dans l'autre [3]. Compte tenu de l'absence de fragilisation de l'aluminium par l'hydrogène, l'hypothèse d'une adsorption de molécules d' H_2O (ou d' H_2S) empêchant les glissements réversibles lors de la fermeture, semble la plus probable. Les essais sur les divers métaux et sous azote et air liquides tendent à confirmer ce mécanisme d'adsorption, en accord par ailleurs avec l'influence de la pression.

CONCLUSION

Les résultats obtenus, dans le cas de l'alliage aluminium-cuivre 4 %, sur les durées de vie et les faciès permettent de tirer les conclusions suivantes :

- absence de l'effet de l'hydrogène,
- effet de l'hydrogène sulfuré,
- effet de la vapeur de mercure,
- effet plus faible de l'oxygène,
- effet de la vapeur d'eau à partir d'un seuil de pression de 6.10^{-2} Pa correspondant à l'apparition des stries ductiles,
- meilleure résistance à la fatigue de la structure G.P.

Si on examine à la fois l'évolution des vitesses de fissuration en fonction de l'environnement et des différents stades de propagation, la nature des faciès microfractographiques, la structure et l'étendue des zones plastiques latérales, il apparaît que :

- les facettes de propagation planes observées notamment en début de propagation sous air correspondent à des plans cristallographiques d'indice $|111|$ et $|112|$.
- les « stries ductiles » observées sur ces facettes mais surtout au-delà sont caractéristiques d'un effet d'agressivité du milieu ambiant mais non d'une accélération de la fissuration,

— l'effet d'agressivité se traduit par un écrouissage cyclique moindre nécessaire pour propager les fissures.

Compte tenu de l'ensemble des essais, nous proposons un mécanisme d'agressivité par adsorption moléculaire lors de la création de surface libre à l'ouverture de la fissure. Cette adsorption favorise un processus de fissuration initiale par glissement non réversible sur des plans cristallographiques définis et qui se traduit par des faciès de fracture très voisins du « clivage ».

L'existence ou non de stries ductiles selon que l'on est ou non sous atmosphère agressive s'explique par la contribution relative de l'écrouissage cyclique et de l'effet d'adsorption sur la non réversibilité des glissements.

La réduction de l'énergie de création de surface libre par adsorption apparaît donc comme la cause fondamentale de l'effet d'environnement étudié.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier Monsieur le Professeur de Fouquet qui a dirigé cette recherche et avec lequel il a eu de nombreuses et fructueuses discussions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. HARTMAN, *Int. J. Frac. mech.* 1 (1965), 167.
 F.J. BRADSHAW et C. WHEELER, *Applied Material Research* 5 (1966), 112.
 R.P. WEI, *Int. J. Frac. mech.* 4 (1968), 159.
 M.J. HORDON et M.A. WRIGHT, *Trans. met. soc. AIME*, 242 (1968), p. 2 011.
 F.J. BRADSHAW, *Scripta met.* 1 (1967), p. 41.
 M.R. ACHTER, *Scripta met.* 2 (1968), p. 525.
 C. LAIRD, *Fatigue Crack Propagation ASTM STP 415* (1966).
 D.A. MEYN, *Trans ASM* 61 (1968), p. 52.
 F.J. BRADSHAW et C. WHEELER, *Int. Journ. Frac. Mech.* 5 (1969), p. 255.
 P.P. WEI, *Eng. Fract. Mech.* 1 (1970) 633.
 F.A. Mc CLINTOCK, R.M.N. PELLOUX, *DI 82-0708 Report* (1968).
 H. ISHII, J. WEERTMAN, *Scripta met* 3 (1969) 229.
 J.A. FENNEY, J.C. Mc MILLAN, R.P. WEI, *Metal. Trans.* 1 (1970), p. 1 741.
- [2] B. BOUCHET, J. de FOUQUET, M. AGUILLON, *Acta Met.* 23 (1975), p. 1 325.
- [3] B. BOUCHET, Thèse de doctorat d'Etat, Poitiers, 1976.

Analyse mathématique des propriétés viscoélastiques passives de la paroi rectale

par B. PERSOZ, P. ARHAN*, Cl. FAVERDIN, G. DEVROEDE, C. DORNIC et D. PELLERIN

RESUME

Par le gonflement brusque d'un ballonnet intérieur, les propriétés viscoélastiques de l'ampoule rectale sont étudiées en relaxation chez une trentaine d'enfants normaux. Il est possible de rendre compte des résultats par un modèle comportant en parallèle un ressort, déjà tendu au repos, et deux éléments de Maxwell dont les temps de relaxation sont de l'ordre de 8 secondes et de 0,9 seconde. La résolution d'une courbe expérimentale de relaxation, en une fonction du temps, somme de trois termes (l'un constant, les deux autres exponentiels) peut se faire soit graphiquement, soit par la méthode des moindres carrés à l'aide d'un petit ordinateur.

SUMMARY

By inflating suddenly a latex balloon introduced in the rectum, the viscoelastic properties of the rectal ampulla were studied in term of relaxation in thirty normal children.

It is possible to symbolize the results by a rheological model which contains in parallel a spring, stretched before strain and two Maxwell's elements (relaxation times: 8 seconds and 0,9 sec.). Analysis of a relaxation curve in three elementary functions (1 asymptotic constant and two exponential functions) are either graphically done or by introducing the data in a calculator.

INTRODUCTION

Nous voudrions d'abord vous situer notre sujet de recherche dans son ensemble et vous préciser que nous ne vous présentons qu'une étude partielle d'un vaste domaine.

Cette étude de mécanique viscérale a été motivée par un problème chirurgical et médical: il s'agit de la continence fécale de l'enfant normal, atteint ou opéré de diverses malformations congénitales de l'appareil digestif terminal.

Cet appareil digestif terminal se présente comme un élément essentiel de la continence des matières fécales. Toute atteinte de ses éléments retentit donc, sur la continence, que ce soit dans le sens de la rétention ou de l'absence de contrôle.

Chez le sujet normal, l'appareil recto-anal est composé de l'ampoule rectale et du sphincter anal (figure 1). L'ampoule rectale apparaît comme un réservoir constitué d'une paroi musculaire faite de fibres externes à orientation longitudinale et de fibres circulaires internes. L'intérieur de la cavité est recouvert d'une muqueuse munie de replis. Ce réservoir est situé entre le côlon sigmoïde propulseur et la résistance du sphincter anal. Cette résistance apparaît variable suivant la valeur de la force de contraction des sphincters.

Le sphincter anal est composé de deux muscles: l'un interne, fait d'un muscle lisse circulaire qui est un épaississement des fibres circulaires de l'intestin susjacent, avec quelques fibres longitudinales extérieures et l'autre, externe, volontaire, fait des fibres musculaires dites « striées » à cause de leur structure microscopique particulière.

De nombreux auteurs ont montré que le muscle lisse et en particulier le muscle intestinal est doué

* Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 24 octobre 1974.

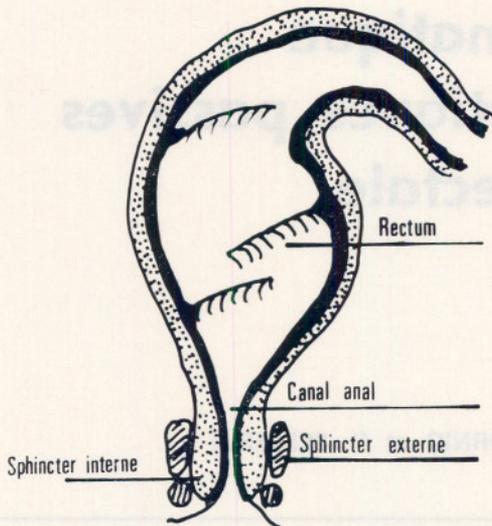


Fig. 1. — Appareil recto-anal

de propriétés viscoélastiques. Quand il subit un étirement il répond d'abord par une tension élevée qui diminue ensuite selon une fonction ou une somme de fonctions exponentielles du temps. Ces travaux ont été effectués pour la plupart *in vitro* [1] [2] [3] [4] et chez l'animal.

Notre étude porte sur l'enfant normal intact. Son principal objet est de proposer un modèle rhéologique des influences mécaniques que reçoit un ballonnet sphérique soudainement gonflé à des volumes variables dans l'ampoule rectale d'enfants normaux.

MATERIEL ET METHODES

Nous avons effectué cette étude chez 30 enfants considérés comme normaux. Ils étaient hospitalisés dans le département de chirurgie pédiatrique de l'hôpital des Enfants-Malades, et atteints ou opérés d'affections variées n'ayant aucun retentissement présumé sur la fonction du rectum et du sphincter anal. Ils sont examinés avant toute intervention ou, au moins, quatre jours après une intervention chirurgicale mineure. Leur âge moyen est de 79,1 mois (S.D. = 8,8). Avant chaque test, l'enfant est rassuré et, si l'âge le permet, informé sur le caractère totalement indolore de l'examen. Chez l'enfant jeune dont l'anxiété et l'agitation sont trop importantes, une sédation préalable à l'examen est pratiquée (mébubarbital = 6 mg/kg en suppositoire). Dans un travail préliminaire effectué chez 10 enfants, nous avons constaté que la sédation administrée pendant l'examen, tout en calmant l'enfant et en supprimant les artefacts du tracé dus à l'agitation, n'avait pas de retentissement apparent sur les valeurs obtenues au niveau du rectum et du canal anal.

Pour chaque épreuve, nous utilisons une sonde faite d'une tubulure souple de 8 mm de diamètre

extérieur, creusée de 4 canaux parallèles de 0,8 mm de diamètre (figure 2). Deux de ces canaux sont en relation avec un ballonnet fixé en bout de sonde et qui sert à distendre l'ampoule rectale. Le premier canal est utilisé pour injecter de l'air dans le ballonnet à l'aide d'une seringue. Le second canal est en communication avec un capteur différentiel de pression (PM6 Statham) afin de mesurer continuellement la pression à l'intérieur du ballonnet distendeur. Quatre centimètres au-dessous du ballonnet distendeur, deux autres ballonnets annulaires sont montés sur la sonde et séparés l'un de l'autre de 9 mm. Ils sont remplis d'eau et reliés chacun à un capteur de pression par l'intermédiaire des deux canaux restants de la tubulure. Des amplificateurs (1008 Statham) et un enregistreur graphique (SP 2000 Statham) à 4 pistes munies de plumes chauffantes complètent le montage.

L'investigation est pratiquée sur le sujet couché. La sonde est introduite lentement par le sphincter anal de telle sorte que les deux ballonnets sphinctériens soient, l'un à la partie supérieure, et l'autre à la partie inférieure du sphincter. Le ballonnet rectal est alors gonflé à des volumes de 10, 20, 30, 40, 50 ml injectés dans un ordre aléatoire, séparés les uns des autres par un intervalle de repos de 2 à 3 minutes et mesurés dans la seringue à la température et à la pression ambiantes. Il est en général impossible de gonfler le ballon à des volumes plus importants à cause de la douleur qui en résulterait. Le gonflement du ballonnet rectal est maintenu pendant une minute environ jusqu'à ce que sa pression intérieure se stabilise. Il est alors dégonflé. Après chaque investigation, la pression de gonflement du ballonnet rectal pour des volumes de 10, 20, 30, 40 et 50 ml est mesurée à l'air libre en fonction du

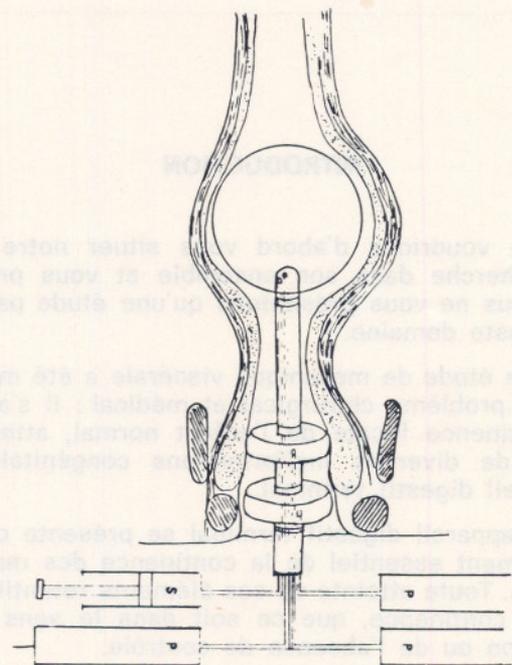


Fig. 2. — Sonde en place. P : capteur de pression
S : seringue relié au ballonnet distendeur sphérique

temps. Le papier de l'enregistreur graphique est déroulé dans les premières secondes de chaque distension à 25 mm/s pour avoir une précision satisfaisante de lecture. Lorsque la pression rectale diminue plus lentement, la vitesse de déroulement du papier est réduite à 2 mm/s. Avec une calculatrice (Hewlett-Packard 9820 A) les tracés sont numérisés à raison d'une numérisation tous les $1/20^\circ$ s pendant les 4 premières secondes et, ensuite, à raison d'une numérisation par seconde. Puis, pour chacun de ces temps, les valeurs de la pression obtenues par le gonflement du ballonnet distendeur à l'air libre sont retranchées des valeurs homologues, mesurées quand le ballonnet est intrarectal. Il en résulte la pression réelle due à l'ampoule rectale et à son environnement.

Des distensions successives de même volume, séparées par des intervalles de temps de 2 à 3 minutes, appliquées à 5 sujets, ont permis de constater une bonne reproductibilité des mesures. Le gonflement du ballonnet avec de l'air permet une distension rapide ($t = 1/10^\circ$ s pour un gonflement de 50 ml), mais le volume du ballonnet gonflé se trouve être légèrement inférieur au volume d'air mesuré initialement dans la seringue à cause des variations de pression et de température, bien que ces deux paramètres jouent en sens inverses. La correction correspondante est calculée par l'application de la loi de Gay-Lussac sur les gaz parfaits.

Nous avons vérifié chez 6 sujets pour lesquels des clichés de l'abdomen étaient par ailleurs nécessaires que, lors de leur gonflement, les ballonnets gardent une forme apparemment sphérique. Cela justifie le calcul ultérieur du rayon et de la circonférence d'un grand cercle du ballonnet distendeur à partir de son volume.

RESULTATS

Les courbes obtenues peuvent avoir selon les cas, l'allure indiquée figure 3 A ou celle de la figure 3 B. Dans la deuxième alternative, nous avons admis qu'un surcroît temporaire de pression était dû à une contraction « active » réactionnelle du rectum, consécutive à la distension. Cette contraction ne se produit qu'au-delà d'un certain seuil de volume assez variable selon les individus. Nous avons décidé de remettre à plus tard son étude, et de nous limiter, dans cette première phase, aux propriétés *passives* observées. C'est pourquoi les pics réactionnels ont été éliminés par lissage manuel.

Les expériences décrites peuvent être considérées comme des essais de relaxation, car, après le rapide gonflement, le volume du ballonnet distendeur reste approximativement constant. Il est donc naturel d'essayer de rendre compte de leurs résultats par une équation du type « Maxwell généralisée », comportant un terme constant : la valeur asymptotique

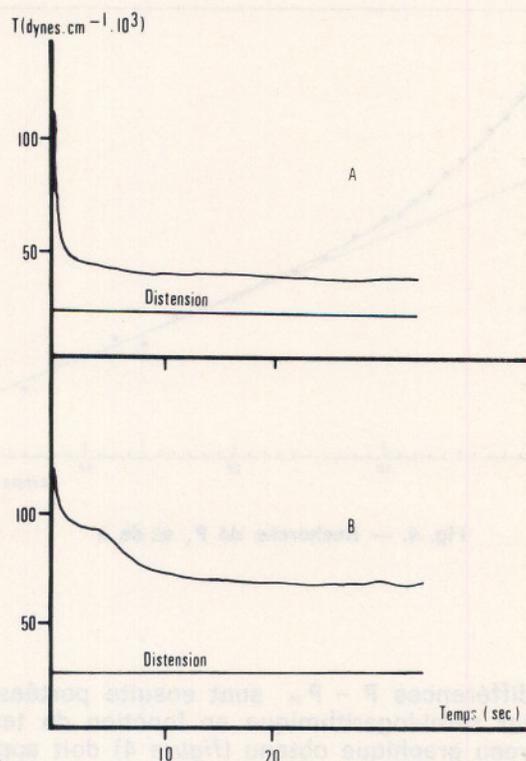


Fig. 3. — Courbe expérimentale : pression en fonction du temps
A sans pic réactionnel,
B avec pic réactionnel

que de la pression lorsqu'elle est stabilisée après un temps assez long et des termes exponentiels décroissants.

$$P = P_{\infty} + P_A e^{-at} + P_B e^{-bt} \quad (1)$$

P = pression

t = temps

P_{∞} P_A P_B = paramètres

a et b , constantes de temps.

Deux termes exponentiels suffisent et rendent bien compte des résultats expérimentaux.

METHODE DE DEPOUILLEMENT

L'équation (1) comporte 5 paramètres qu'il s'agit d'extraire de chaque courbe obtenue.

Dans un premier stade, nous avons pratiqué le dépouillement classique, manuel, dont le principe est rappelé ci-après :

La valeur de P_{∞} , c'est-à-dire l'ordonnée de l'asymptote horizontale est estimée sur la courbe.

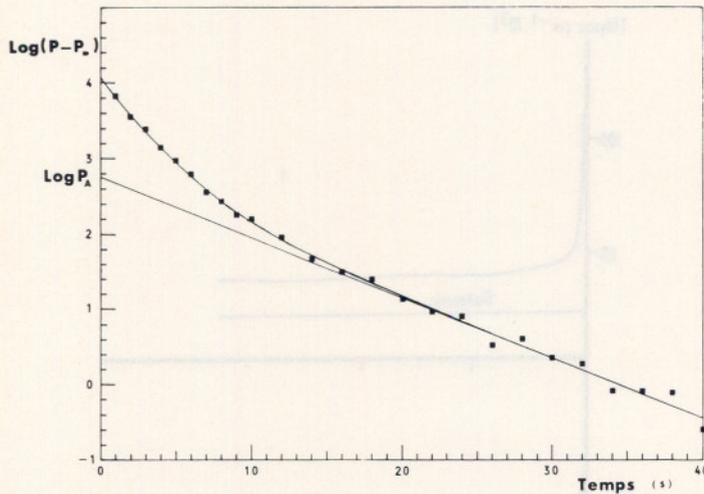


Fig. 4. — Recherche de P_A et de a

Les différences $P - P_\infty$ sont ensuite portées sur un papier semi-logarithmique en fonction du temps. Le nouveau graphique obtenu (figure 4) doit apparaître comme approximativement linéaire à partir d'un certain temps, celui à partir duquel le plus rapide des deux termes exponentiels, soit $P_B e^{-bt}$, devient négligeable par rapport à l'autre. S'il n'en est pas ainsi, si une certaine courbure subsiste vers la droite du graphique, il faut retoucher P_∞ (l'augmenter si la concavité est tournée vers le haut et inversement) et réitérer jusqu'à obtenir une droite convenable. Les deux coefficients de cette droite fournissent P_A et a .

La valeur de $P - P_\infty - P_A e^{-at}$ est ensuite portée en fonction du temps, toujours sur papier semi-logarithmique et la droite obtenue conduit aux deux paramètres restants : P_B et b .

Ces 5 paramètres étant connus, le calcul inverse permet de vérifier qu'ils rendent correctement compte des courbes expérimentales.

Ce dépouillement manuel étant long, nous avons, dans un deuxième stade, mis au point un programme de calcul basé sur la méthode des moindres carrés et dont le principe est exposé en annexe.

LES CONSTANTES DE TEMPS a ET b

Pour la population examinée, chacun de ces deux paramètres obéit assez bien à une distribution gaussienne logarithmique. Leurs moyennes géométriques et leurs écarts types sont les suivants :

$$\bar{a} = 0,127 \text{ s}^{-1} \left(\frac{1}{\bar{a}} = 7,9 \text{ s} \right)$$

$$\bar{b} = 1,16 \text{ s}^{-1} \left(\frac{1}{\bar{b}} = 0,86 \text{ s} \right)$$

$$\sigma_a = 0,38^{(1)}$$

$$\sigma_b = 0,43^{(1)}$$

Il apparaît une corrélation positive non significative entre ces constantes de temps et le volume de gonflement :

$$r = 0,33 \text{ pour } a \text{ et } r = 0,52 \text{ pour } b.$$

(r = coefficient de corrélation)

Les angles de corrélation sont respectivement de 71° et de 58° (2). Dans la suite, nous considérons donc a et b comme indépendants du volume.

Par contre la corrélation entre a et b est vraiment très faible : $r = 0,048$; $\text{arc cos } r = 87,2^\circ$.

LES PARAMETRES P_∞ , P_A , P_B

Les corrélations de ces paramètres entre eux sont relativement faibles. Par contre, avec le volume de gonflement, elles sont importantes :

$$r = -0,84 \text{ pour } P_\infty$$

$$r = 0,98 \text{ pour } P_A$$

$$r = 0,89 \text{ pour } P_B$$

Il est remarquable de constater que la corrélation entre la valeur asymptotique de la pression et le volume est négative. Plus le volume est grand, plus la pression finale est petite. Cela fait penser au ballon de caoutchouc gonflé avec une pression de plus en plus faible à mesure que son volume augmente. Il peut y avoir deux raisons à cela : l'amincissement de la paroi et la relation de Laplace entre le rayon d'une sphère, la pression interne et la tension superficielle.

L'épaisseur de la paroi rectale est mal connue et non homogène. Il est malaisé de la faire intervenir. Mais, il est facile de calculer la tension superficielle en négligeant l'apport de l'environnement viscéral :

$$T = \frac{PR}{2}$$

T = tension superficielle

P = pression interne

R = rayon

1. Dans une distribution logarithmique, l'écart type est défini par $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \text{Log}^2 a/\bar{a}}{n-1}}$. Il n'a donc pas de dimension. (n = nombre de mesures, \bar{a} : moyenne géométrique).

2. L'angle de corrélation est $\text{arc cos } r$. Il est de 90° pour l'indépendance totale.

Lorsqu'on considère les logarithmes de deux grandeurs x et y comme variables aléatoires, le coefficient de corrélation r est défini par

$$r = \frac{\sum \left(\text{Log} \frac{x}{\bar{x}} \cdot \text{Log} \frac{y}{\bar{y}} \right)}{\sqrt{\sum \text{Log}^2 \frac{x}{\bar{x}} \cdot \sum \text{Log}^2 \frac{y}{\bar{y}}}}$$

\bar{x} et \bar{y} sont les moyennes géométriques.

Cette transformation opérée sur les pressions P_∞ , P_A , P_B donne les tensions superficielles T_∞ , T_A , T_B .

En même temps, comme variable imposée, nous avons abandonné le volume au profit de la circonférence C d'un grand cercle de la sphère, ce qui figure mieux l'allongement d'un élément de matière découpé par la pensée dans la paroi.

Pour un sujet particulier, les variations de T_∞ , T_A , T_B avec la circonférence de gonflement sont trop dispersées pour qu'on en puisse tirer une loi simple. Par contre, pour l'ensemble de la population examinée, les corrélations de ces paramètres avec la circonférence sont assez bonnes pour que l'on puisse songer à une loi linéaire :

$$\begin{aligned} r &= 0,88 \text{ pour } T_\infty & (p < 0,05) \\ r &= 0,99 \text{ pour } T_A \text{ ou } T_B & (p < 0,02) \\ p &= \text{probabilité de l'indépendance des paramètres.} \end{aligned}$$

La figure 5 représente les variations des moyennes des tensions superficielles pour les 5 gonflements utilisés.

Les équations qui en résultent peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} (T \text{ en dynes/cm, } C \text{ en cm}) \\ \left. \begin{aligned} T_\infty &= 1\,300 C + 12\,000 \\ T_A &= 2\,600 C - 14\,000 \\ T_B &= 1\,500 C - 5\,800 \end{aligned} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

MODELISATION

La valeur de C qui annule T_A est 5,47 cm, tandis que celle qui annule T_B est 3,83 cm. Avec la disper-

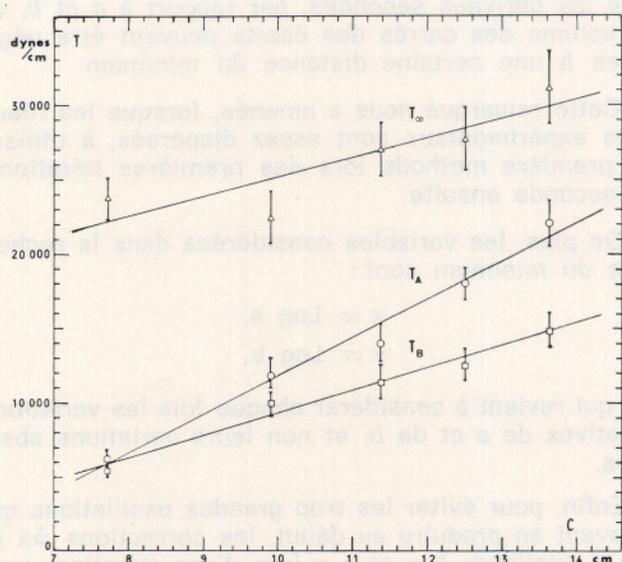


Fig. 5. — Variations des moyennes des tensions T_∞ , T_A , T_B avec la circonférence C du ballonnet distendeur. Les segments verticaux correspondent à une probabilité de 50 % sur la moyenne.

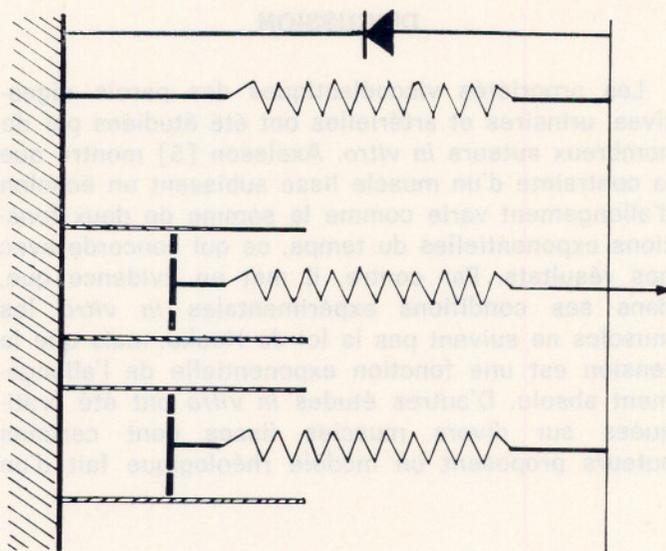


Fig. 6. — Modèle rhéologique représentant approximativement le comportement de la paroi de l'ampoule rectale

sion qui caractérise les mesures effectuées in vivo, il n'est pas déraisonnable de poser :

$$C_0 = \frac{5,47 + 3,83}{2} = 4,65 \text{ cm}$$

$$\Delta C = C - C_0$$

et d'écrire :

$$T_\infty = 1\,300 \Delta C + 18\,000$$

$$T_A = 2\,600 \Delta C$$

$$T_B = 1\,500 \Delta C$$

En somme ΔC serait l'allongement absolu de la circonférence compté depuis une circonférence initiale de 4,65 cm, soit un volume sphérique de 1,7 cm³, qui serait le volume de repos. Cependant, pour une déformation encore nulle, ($\Delta C = 0$), il existe déjà une tension superficielle de 18 000 dynes/cm (tonus de repos ?) que l'on peut symboliser dans un modèle de Maxwell généralisé par une butée empêchant C de descendre au-dessous du seuil C_0 malgré la tension du ressort célibataire (figure 6).

Moyennant ces approximations, la contrainte superficielle qui rend compte des présentes expériences de relaxation, a la forme suivante :

$$T = 18\,000 + \varepsilon (6\,100 + 12\,000 e^{-t/7,9} + 7\,000 e^{-t/0,86}) \quad (4)$$

T = tension superficielle (dynes/cm)

t = temps (s)

ε = allongement relatif $\frac{\Delta C}{C_0}$.

Les modules qui figurent dans cette expression sont des modules superficiels, exprimés en dynes/cm.

DISCUSSION

Les propriétés viscoélastiques des parois digestives, urinaires et artérielles ont été étudiées par de nombreux auteurs *in vitro*. Axelsson [5] montre que la contrainte d'un muscle lisse subissant un échelon d'allongement varie comme la somme de deux fonctions exponentielles du temps, ce qui concorde avec nos résultats. Par contre, il met en évidence que, dans ses conditions expérimentales *in vitro* les muscles ne suivent pas la loi de Hooke, mais que la tension est une fonction exponentielle de l'allongement absolu. D'autres études *in vitro* ont été pratiquées sur divers muscles lisses dont certains auteurs proposent un modèle rhéologique fait d'un

élément de Maxwell en parallèle avec un ressort de Hooke.

Susset et coll. [6] ont fait des études analogues dans la vessie *in vivo* et *in vitro*. Ils ont montré que la courbe de relaxation de la vessie apparaît comme une somme de trois exponentielles et d'un terme constant. Par comparaison de ces résultats avec les nôtres, la modélisation rhéologique de la vessie apparaît donc plus complexe que celle du rectum, non pas par l'introduction d'un terme à temps de relaxation plus court, ce qui aurait pu faire discuter la précision de nos mesures liée en particulier à la vitesse du déroulement du papier d'enregistrement dans les premières secondes de la relaxation, mais par l'existence d'un terme dont le temps de relaxation est plus long.

ANNEXE

Détermination par la méthode des moindres carrés des cinq paramètres de l'équation :

$$u = P + A e^{-at} + B e^{-bt} \quad (1)$$

Après divers tâtonnements nous nous sommes arrêtés au programme suivant de calcul, qui nous donne satisfaction (avec la calculatrice HP 9820 A munie d'un lecteur de cassette 9865 A) et qui pourrait d'ailleurs être étendu au cas de trois termes exponentiels. Il n'y aurait pas beaucoup de modifications à y apporter pour l'adapter au cas du fluage.

Comme plusieurs laboratoires ont à résoudre ce même problème, il nous a semblé utile d'indiquer la solution que nous avons choisie.

PRINCIPE

Différents types de lissage préalable ont été essayés, mais finalement abandonnés comme allongeant inutilement le calcul.

Les trois paramètres P, A, B interviennent linéairement dans l'équation et peuvent être calculés directement par la méthode des moindres carrés ordinaire, lorsque a et b sont connus. Par contre, ces deux derniers paramètres a et b ne peuvent être déterminés que par approximations successives à partir de valeurs arbitraires. Deux méthodes y sont conjointement employées.

1. C'est pour simplifier l'écriture que les notations du texte précédent ont été modifiées.

Si Δa et Δb sont les corrections à apporter aux paramètres a et b , la première méthode consiste à linéariser l'équation en Δa et Δb par un développement de Taylor limité aux termes du premier degré, tandis que la deuxième méthode, plus rapide, va jusqu'aux termes du deuxième degré en Δa et Δb .

Cette deuxième méthode, cependant, ne doit pas être appliquée au début des itérations, lorsque les valeurs de a et b sont encore éloignées du but à atteindre, car elle conduit souvent à des corrections aberrantes, en sens inverse même de celles qui seraient nécessaires. Cet inconvénient est dû au fait que les dérivées secondes, par rapport à a et b , de la somme des carrés des écarts peuvent être négatives à une certaine distance du minimum.

Cette remarque nous a amenés, lorsque les résultats expérimentaux sont assez dispersés, à utiliser la première méthode lors des premières itérations, la seconde ensuite.

De plus, les variables considérées dans la recherche du minimum sont :

$$x = \text{Log } a,$$

$$y = \text{Log } b,$$

ce qui revient à considérer chaque fois les variations relatives de a et de b , et non leurs variations absolues.

Enfin, pour éviter les trop grandes oscillations qui peuvent se produire au début, les corrections Δx et Δy à appliquer à x et à y lors d'une itération, sont « bridées », par une relation du type :

$$-0,6 \leq \Delta x \leq 0,6$$

$$-0,6 \leq \Delta y \leq 0,6.$$

Détermination de P, A, B

u_i et t_i étant un couple de valeurs expérimentales de poids p_i , on pose :

$$f_i = P + A e^{-at_i} + B e^{-bt_i} \quad (1)$$

Il s'agit de rendre minimale la somme :

$$S = \sum p_i (f_i - u_i)^2 \quad (2)$$

et d'obtenir simultanément :

$$\frac{\partial S}{\partial P} = 2 \sum p_i (f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial P} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2 \sum p_i (f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 2 \sum p_i (f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial B} = 0$$

d'où les trois équations :

$$\left. \begin{aligned} P \sum p_i + A \sum p_i e^{-at_i} + B \sum p_i e^{-bt_i} &= \sum p_i u_i \\ P \sum p_i e^{-at_i} + A \sum p_i e^{-2at_i} + B \sum p_i e^{-(a+b)t_i} &= \sum p_i u_i e^{-at_i} \\ P \sum p_i e^{-bt_i} + A \sum p_i e^{-(a+b)t_i} + B \sum p_i e^{-2bt_i} &= \sum p_i u_i e^{-bt_i} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

A chaque couple de valeurs de a et b correspond une seule valeur pour chacun des modules P , A , B , fonctions maintenant de a et b .

Première méthode pour calculer

$$\Delta x = \text{Log} \left(1 + \frac{\Delta a}{a} \right) \text{ et } \Delta y = \text{Log} \left(1 + \frac{\Delta b}{b} \right)$$

Le développement limité de (1) s'écrit :

$$\Delta f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \Delta y \quad (4)$$

avec

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = a \left(\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial A}{\partial a} e^{-at_i} + \frac{\partial B}{\partial a} e^{-bt_i} - A t_i e^{-at_i} \right)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = b \left(\frac{\partial P}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial b} e^{-at_i} + \frac{\partial B}{\partial b} e^{-bt_i} - B t_i e^{-bt_i} \right)$$

d'où, pour le minimum de S :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \Delta x} &= 2 \sum p_i (f_i + \Delta f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \Delta y} &= 2 \sum p_i (f_i + \Delta f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ces équations (5) s'écrivent aussi :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \sum p_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 + \Delta y \sum p_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} &= \sum p_i (u_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial x} \\ \Delta x \sum p_i \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} + \Delta y \sum p_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2 &= \sum p_i (u_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

D'où résultent les valeurs de Δx et de Δy cherchées.

Deuxième méthode pour calculer

Δx et Δy

Les équations employées peuvent être introduites de deux manières :

1. Dans un espace à trois dimensions, on considère la surface qui représente S en fonction de x et de y , et, au point où l'on se trouve, le parabolöide osculateur à cette surface :

$$z = Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx + Gy + H$$

Les dérivées premières et secondes sont les mêmes pour z et pour S , donc :

$$2C = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad D = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \quad 2E = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$F = \frac{\partial S}{\partial x} - 2Cx - Dy \quad G = \frac{\partial S}{\partial y} - Dx - 2Ey$$

Les coordonnées x_m , y_m du sommet de ce parabolöide (minimum de z) sont données par :

$$2Cx_m + Dy_m + F = 0$$

$$Dx_m + 2Ey_m + G = 0$$

Si l'on pose maintenant :

$$\Delta x = x_m - x,$$

$$\Delta y = y_m - y,$$

ces relations deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \Delta y \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= - \frac{\partial S}{\partial x} \\ \Delta x \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \Delta y \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} &= - \frac{\partial S}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Or, d'après (2) :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \sum p_i (f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial x},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 2 \sum p_i (f_i - u_i) \frac{\partial f_i}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2 \sum p_i \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 2 \sum p_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \right],$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 2 \sum p_i \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2 + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right].$$

De sorte que le système (7) devient :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \sum p_i \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \right] + \Delta y \sum p_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \right] &= \sum p_i (u_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial x} \\ \Delta x \sum p_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \right] + \Delta y \sum p_i \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2 + (f_i - u_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right] &= \sum p_i (u_i - f_i) \frac{\partial f_i}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

A comparer avec (6).

2. Le développement de f_i est limité aux termes quadratiques :

$$f_i + \Delta f_i = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2},$$

D'où =

$$\frac{\partial (f_i + \Delta f_i)}{\partial \Delta x} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \Delta y$$

$$\frac{\partial (f_i + \Delta f_i)}{\partial \Delta y} = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \Delta x + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \Delta y$$

et :

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta x} = 2 \sum p_i \left(f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \Delta y + \dots - u_i \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \Delta y \right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta y} = 2 \sum p_i \left(f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_i}{\partial y} \Delta y + \dots - u_i \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \Delta x + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \Delta y \right) = 0$$

Le système (8) résulte de ces relations lorsque les produits sont effectués et limités aux termes du premier degré en Δx et Δy . Il pourrait être envisagé de conserver les termes du second degré, mais les expressions à manier deviendraient très lourdes.

Choix des valeurs initiales de a et b

Il est possible, pour une série de mesures sur la même matière à la même température, d'introduire dans le programme, des valeurs initiales de a et b toujours les mêmes. Cependant, pour être plus général, il est préférable de déterminer approximativement la valeur de la plus petite constante de temps a (temps de relaxation le plus long) et de prendre arbitrairement $b = 10a$, car les rapports entre les temps de relaxation successifs sont généralement compris entre 5 et 15.

Une estimation P' de P est basée sur les 5 derniers points expérimentaux (numéros de 1 à n , dans le sens de l'écoulement du temps) :

$$\frac{u_{n-4} + u_{n-3} + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n}{5} = \bar{u}_n$$

$$P' =$$

$$\bar{u}_n - 0,6 \sqrt{u_{n-4}^2 + u_{n-3}^2 + u_{n-2}^2 + u_{n-1}^2 + u_n^2 - 5 \bar{u}_n^2}$$

Puis, on cherche les points expérimentaux pour lesquels on a approximativement :

$$u_i - P' = \frac{1}{8} (u_i - P') \quad u_j - P' = \frac{1}{3} (u_i - P').$$

Pour ces valeurs, en effet, le terme rapide $B e^{-bt}$ peut être négligé.

On calcule ensuite :

$$a_i = \frac{1}{t_i - t_j} \text{Log} \frac{u_j - P'}{u_i - P'}$$

$$a_{i+1} = \frac{1}{t_{i+1} - t_{j+1}} \text{Log} \frac{u_{j+1} - P'}{u_{i+1} - P'}$$

et

$$a = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

Tout cela étant programmé, ne nécessite qu'un temps négligeable.

PROGRAMME

TRONC COMMUN AUX DEUX METHODES

Après introduction des données expérimentales $t_i u_i$ dans la calculatrice et détermination des valeurs provisoires de a et de b selon le paragraphe précédent, il y a lieu d'effectuer les sommes suivantes et de les mettre en mémoire :

$$\begin{aligned}
 X &= \sum p_i \\
 m_0 &= \sum p_i u_i \\
 m_1 &= \sum p_i u_i^2 \\
 m_2 &= \sum p_i e^{-at_i} \\
 m_3 &= \sum p_i e^{-bt_i} \\
 m_4 &= \sum p_i e^{-2at_i} \\
 m_5 &= \sum p_i e^{-(a+b)t_i} \\
 m_6 &= \sum p_i e^{-2bt_i} \\
 m_7 &= \sum p_i u_i e^{-at_i} \\
 m_8 &= \sum p_i u_i e^{-bt_i} \\
 m_9 &= \sum p_i t_i e^{-at_i} \\
 m_{10} &= \sum p_i t_i e^{-bt_i} \\
 m_{11} &= \sum p_i t_i e^{-2at_i} \\
 m_{12} &= \sum p_i t_i e^{-(a+b)t_i} \\
 m_{13} &= \sum p_i t_i e^{-2bt_i} \\
 m_{14} &= \sum p_i t_i u_i e^{-at_i} \\
 m_{15} &= \sum p_i t_i u_i e^{-bt_i} \\
 m_{16} &= \sum p_i t_i^2 e^{-at_i} \\
 m_{17} &= \sum p_i t_i^2 e^{-bt_i} \\
 m_{18} &= \sum p_i t_i^2 e^{-2at_i} \\
 m_{19} &= \sum p_i t_i^2 e^{-(a+b)t_i} \\
 m_{20} &= \sum p_i t_i^2 e^{-2bt_i} \\
 m_{21} &= \sum p_i t_i^2 u_i e^{-at_i} \\
 m_{22} &= \sum p_i t_i^2 u_i e^{-bt_i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{27} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_3 \\ m_3 & m_5 & m_6 \\ m_9 & m_{11} & m_{12} \end{vmatrix} & m_{33} &= \begin{vmatrix} X & m_3 & m_0 \\ m_3 & m_6 & m_8 \\ m_9 & m_{12} & m_{14} \end{vmatrix} \\
 m_{28} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_{10} & m_{12} & m_{13} \end{vmatrix} & m_{34} &= \begin{vmatrix} X & m_0 & m_3 \\ m_2 & m_7 & m_5 \\ m_{10} & m_{15} & m_{13} \end{vmatrix} \\
 m_{29} &= \begin{vmatrix} m_0 & m_2 & m_3 \\ m_8 & m_5 & m_6 \\ m_{14} & m_{11} & m_{12} \end{vmatrix} & m_{35} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_3 \\ m_0 & m_7 & m_8 \\ m_{10} & m_{12} & m_{13} \end{vmatrix} \\
 m_{30} &= \begin{vmatrix} m_0 & m_7 & m_8 \\ m_3 & m_5 & m_6 \\ m_9 & m_{11} & m_{12} \end{vmatrix} & m_{36} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_0 \\ m_3 & m_5 & m_8 \\ m_9 & m_{11} & m_{14} \end{vmatrix} \\
 m_{31} &= \begin{vmatrix} m_0 & m_7 & m_8 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_{10} & m_{12} & m_{13} \end{vmatrix} & m_{37} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_3 \\ m_0 & m_7 & m_8 \\ m_9 & m_{11} & m_{12} \end{vmatrix} \\
 m_{32} &= \begin{vmatrix} m_0 & m_2 & m_3 \\ m_7 & m_4 & m_5 \\ m_{15} & m_{12} & m_{13} \end{vmatrix} & m_{38} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_0 \\ m_2 & m_4 & m_7 \\ m_{10} & m_{12} & m_{15} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Les trois premières sommations X, m₀, m₁ sont indépendantes de a et b et n'ont pas besoin d'être réitérées. Le bouclage se fait donc à partir de m₂.

Une précaution doit être prise dans le calcul de ces sommes. Pour les temps élevés, en effet, les termes exponentiels peuvent devenir inférieurs à 10⁻¹⁰⁰ et dépasser en petitesse la capacité de la machine. Il faut donc introduire une condition selon laquelle les termes trop petits doivent être négligés.

Ensuite les 16 déterminants suivants sont calculés :

$$\begin{aligned}
 m_{23} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & m_6 \end{vmatrix} & m_{25} &= \begin{vmatrix} X & m_0 & m_3 \\ m_2 & m_7 & m_5 \\ m_3 & m_8 & m_6 \end{vmatrix} \\
 m_{24} &= \begin{vmatrix} m_0 & m_2 & m_3 \\ m_7 & m_4 & m_5 \\ m_8 & m_5 & m_6 \end{vmatrix} & m_{26} &= \begin{vmatrix} X & m_2 & m_0 \\ m_2 & m_4 & m_7 \\ m_3 & m_5 & m_8 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Le calcul numérique peut être légèrement abrégé par le fait que ces déterminants renferment d'assez nombreux mineurs communs.

L'étape suivante consiste à calculer :

$$P = \frac{m_{24}}{m_{23}} \quad A = \frac{m_{25}}{m_{23}} \quad B = \frac{m_{26}}{m_{22}}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial a} &= \frac{m_{29} + m_{30} - 2 P m_{27}}{m_{23}} & \frac{\partial A}{\partial a} &= - \frac{m_{33} + 2 A m_{27}}{m_{23}} & \frac{\partial B}{\partial a} &= \frac{m_{36} + m_{37} - 2 B m_{27}}{m_{23}} \\
 \frac{\partial P}{\partial b} &= \frac{2 P m_{28} - m_{31} - m_{32}}{m_{23}} & \frac{\partial A}{\partial b} &= \frac{2 A m_{28} - m_{34} - m_{35}}{m_{23}} & \frac{\partial B}{\partial b} &= \frac{2 B m_{28} - m_{38}}{m_{23}}
 \end{aligned}$$

$$S = m_1 - P m_0 - A m_7 - B m_8$$

$$m_{39} = A (P m_9 + A m_{11} + B m_{12} - m_{14}) = - \frac{1}{2a} \frac{\partial S}{\partial x}$$

$$m_{40} = B (P m_{10} + A m_{12} + B m_{13} - m_{15}) = - \frac{1}{2b} \frac{\partial S}{\partial y}$$

Remarque : Le calcul de S n'est utile que pour mieux suivre le progrès des itérations. La somme m₁ ne sert qu'au calcul de S.

PREMIERE METHODE (pour les 2, 3, 4, ou 5 premières itérations, selon la dispersion des points expérimentaux) :

$$m_{41} = A \left(A m_{18} - \frac{\partial P}{\partial a} m_9 - \frac{\partial A}{\partial a} m_{11} - \frac{\partial B}{\partial a} m_{12} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a} m_{39}$$

$$m_{42} = B \left(A m_{19} - \frac{\partial P}{\partial a} m_{10} - \frac{\partial A}{\partial a} m_{12} - \frac{\partial B}{\partial a} m_{13} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial b} m_{39}$$

[ou
$$m_{42} = A \left(B m_{19} - \frac{\partial P}{\partial b} m_9 - \frac{\partial A}{\partial b} m_{11} - \frac{\partial B}{\partial b} m_{12} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial a} m_{40}]$$

$$m_{43} = B \left(B m_{20} - \frac{\partial P}{\partial b} m_{10} - \frac{\partial A}{\partial b} m_{12} - \frac{\partial B}{\partial b} m_{13} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial b} m_{40}$$

La résolution du système (6) devient :

$$\Delta x = \frac{m_{39} m_{43} - m_{40} m_{42}}{a (m_{41} m_{43} - m_{42}^2)}$$

$$\Delta y = \frac{m_{40} m_{41} - m_{39} m_{42}}{b (m_{41} m_{43} - m_{42}^2)}$$

Remarque : Si cette première méthode était employée seule, il serait inutile de calculer m_{21} et m_{22} .

DEUXIEME METHODE (pour les itérations suivantes)

$$m_{44} = A \left(P m_{16} + 2 A m_{18} + B m_{19} - m_{21} - \frac{\partial P}{\partial a} m_9 - \frac{\partial A}{\partial a} m_{11} - \frac{\partial B}{\partial a} m_{12} \right) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a} \right) m_{39} = \frac{1}{2 a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

$$m_{45} = A \left(B m_{19} - \frac{\partial P}{\partial b} m_9 - \frac{\partial A}{\partial b} m_{11} - \frac{\partial B}{\partial b} m_{12} \right) - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial b} m_{39} = \frac{1}{2 a b} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}$$

[ou :

$$m_{45} = B \left(A m_{19} - \frac{\partial P}{\partial a} m_{10} - \frac{\partial A}{\partial a} m_{12} - \frac{\partial B}{\partial a} m_{13} \right) - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial a} m_{40} = \frac{1}{2 a b} \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}]$$

$$m_{46} = B \left(P m_{17} + A m_{19} + 2 B m_{20} - m_{22} - \frac{\partial P}{\partial b} m_{10} - \frac{\partial A}{\partial b} m_{12} - \frac{\partial B}{\partial b} m_{13} \right) - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial b} \right) m_{40} = \frac{1}{2 b^2} \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

La résolution du système (8) aboutit à :

$$\Delta x = \frac{m_{39} m_{46} - m_{40} m_{45}}{a (m_{44} m_{46} - m_{45}^2)}$$

$$\Delta y = \frac{m_{40} m_{44} - m_{39} m_{45}}{b (m_{44} m_{46} - m_{45}^2)}$$

REFERENCES

- [1] J.T. APTER : Correlation of visco-elastic properties of large arteries with microscopic structure. I. Methods used and their justification. *Circulation Research*, Vol. 19, 1966, p. 104.
- [2] J.T. APTER, M. RABINOWITZ, D.H. CUMMINGS : Correlation of visco-elastic properties of large arteries with microscopic structure. II. Collagen, elastin and muscle determined chemically histologically and physiologically. *Circulation Research*, Vol. 19, 1966, p. 111.
- [3] J.T. APTER : Correlation of visco-elastic properties of large arteries with microscopic structure. III. Circumferential viscous and elastic constants measured in vitro. *Circulation Research*, Vol. 19, 1966, p. 113.
- [4] J.T. APTER : Correlation of visco-elastic properties of large arteries with microscopic structure. IV. Thermal responses of collagen, elastin, smooth muscle, and intact arteries. *Circulation Research*, Vol. 21, 1967, p. 901.
- [5] J. AXELSSON : Mechanical properties of smooth muscle and the relationship between mechanical and electrical activity. *Smooth muscle*, edited by Edith Bulbring. Edward Arnold editors, 1970, p. 288.
- [6] A. KONDO, J.G. SUSSET : Physical properties of the urinary detrusor muscle. *J. Biomech.* 6, 141, 1973.

SUITE DU TRONC COMMUN AUX DEUX METHODES

Le « bridage » auquel il a été fait allusion peut s'exprimer de la façon suivante, si c'est la limite 0,6 qui a été choisie :

Si $|\Delta x| > 0,6$, Δx est remplacé par $0,6 \frac{\Delta x}{|\Delta x|}$

Si $|\Delta y| > 0,6$, Δy est remplacé par $0,6 \frac{\Delta y}{|\Delta y|}$

Ensuite :

Nouvelle valeur de $a = (\text{ancienne valeur de } a) e^{\Delta x}$

Nouvelle valeur de $b = (\text{ancienne valeur de } b) e^{\Delta y}$

Bouclage à partir de m_2 .

La fin du calcul peut être décidée lorsque simultanément, $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ tombent au-dessous d'une certaine valeur à choisir selon la précision désirée.

Institut National de la Recherche Agronomique, Service documentation, Etoile de Choisy, 78000 Versailles.

Institut National des Sciences Appliquées, Département de génie civil, avenue de Rangueil, 31400 Toulouse.

Institut National des Sciences Appliquées, Bibliothèque 106, 20, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne.

Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 3, rue Fernand-Hainaut, 93400 Saint-Ouen.

Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 9, rue La Pérouse, 75016 Paris.

Institut Textile de France, 35, rue des Abondances, 92100 Boulogne.

Institut Universitaire de Technologie, Département de génie électrique, 1, chemin Desvallières, 92410 Ville-d'Avray.

Institut Universitaire de Technologie, Service Bibliothèque, rue Engel-Gros, 90016 Belfort.

Johns Hopkins University, Department of Mechanics — 120 Lahobe Hall — Maryland 21218 (U.S.A.).

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, boulevard Lefebvre, 75732 Paris Cédex 15.

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique théorique et appliquée (LEMTA), 2, rue de la Citadelle, B.P. n° 850, 54011 Nancy Cedex.

Laboratoire de Mécanique des Fluides, 2, rue Boussingault, 67000 Strasbourg.

Laboratoire de Mécanique et Physique des Matériaux, Faculté des sciences de Metz, Ile du Saulcy, 57000 Metz.

Laboratoire de Mécanique des Sols, Faculté des sciences, Domaine Universitaire, Cédex 83, 38000 Grenoble.

Laboratoire de M. Cupcic, C.S.U., route de Laval, 72000 Le Mans.

Laboratorio de Engenharia de Angola, Caixa postal 6500, Luanda (Angola).

Lamy J. et Cie (S.A.), 19, avenue Barthélémy-Thimonnier, 69000 Caluire.

Libreria Martinez Perez, Seccion Revistas, Ramba de Catalunya, 60 Barcelona-7 (Espagne).

Linda Hall Library, Serials Department — 5109 Charry Kansas-City, Mo 64110 (U.S.A.).

L'Oréal, 1, avenue Saint-Germain, 93600 Aulnay-sous-Bois.

M.A.I.R., 9 bis, avenue de Lattre-de-Tassigny, 92100 Boulogne.

Messageries du Livre, Service Importation, 27, rue de Seine, 75006 Paris.

Michelin et Cie, Bibliothèque technique, place des Carmes, 63000 Clermont-Ferrand.

Milton S. Eisenhower Library, Serials Department — Baltimore, Maryland 21218 (U.S.A.).

Naphtachimie Laboratoire, B.P. n° 2, 13117 Lavera.

National Lending Library for Science and Technology, Walton, Boston Spa, Yorkshire (England).

National Research Council Canada Institute for STI Library Kardex Section Ottawa, Ontario, Canada K1A - 052.

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, avenue de la Division-Leclerc, 92320 Châtillon-sous-Bagneux.

Orta Dogu Teknik Universitesi, Engeenering Fakultesi, Ankara (Turquie).

Régie Nationale des Usines Renault, Documentation générale, 10, avenue Emile-Zola, 92100 Boulogne.

Rhône Progil, 6, rue Piccini, 75016 Paris.

Rijksinstituut voor Grondmechanica, Hertogsstraat 89 — Bruxelles (Belgique).

Serials Record, Pattee Library — Pennsylvania State University, University Park, PA. 16802 (U.S.A.).

SHELL française, Centre de Recherches — Services Bitumes, 76530 Grand Couronne.

Société Chimique des Charbonnages, CDF Chimie, B.P. n° 1, 62670 Mazingarbe.

Société Commerciale Paulstra, Laboratoire central, route de Péringondas, 28200 Châteaudun.

Société Kléber-Colombes, 49, rue Jean-Jaurès, 95870 Bezons.

Société Rhodiaceta, Service Etudes physiques, 45, rue S. Michel-Berthet, 69009 Lyon.

Société Rhône-Poulenc, Direction Technique, 103, rue du Professeur-Roux, 69633 Vénissieux.

Société Thibaud-Gibbs, Laboratoire de recherches Unilever, 8, impasse de la Montjoie, 93210 La-Plaine-Saint-Denis.

Statens Väg-och Trafikinstitut (National Road and Traffic Research Int.) I and D Section, Fack, S-58101 Linköping (Sueden).

U.E.R., Sciences fondamentales et appliquées, Laboratoire de mécanique, 40, avenue du Recteur-Pineau, 86000 Poitiers.

Unilever Research Laboratory, The Frythe, Welwyn — Hertfordshire (England).

Ustav, Institut de mécanique théorique et appliquée, Vysehradská 49, Praha 2, Nové Mesto (Tchécoslovaquie).