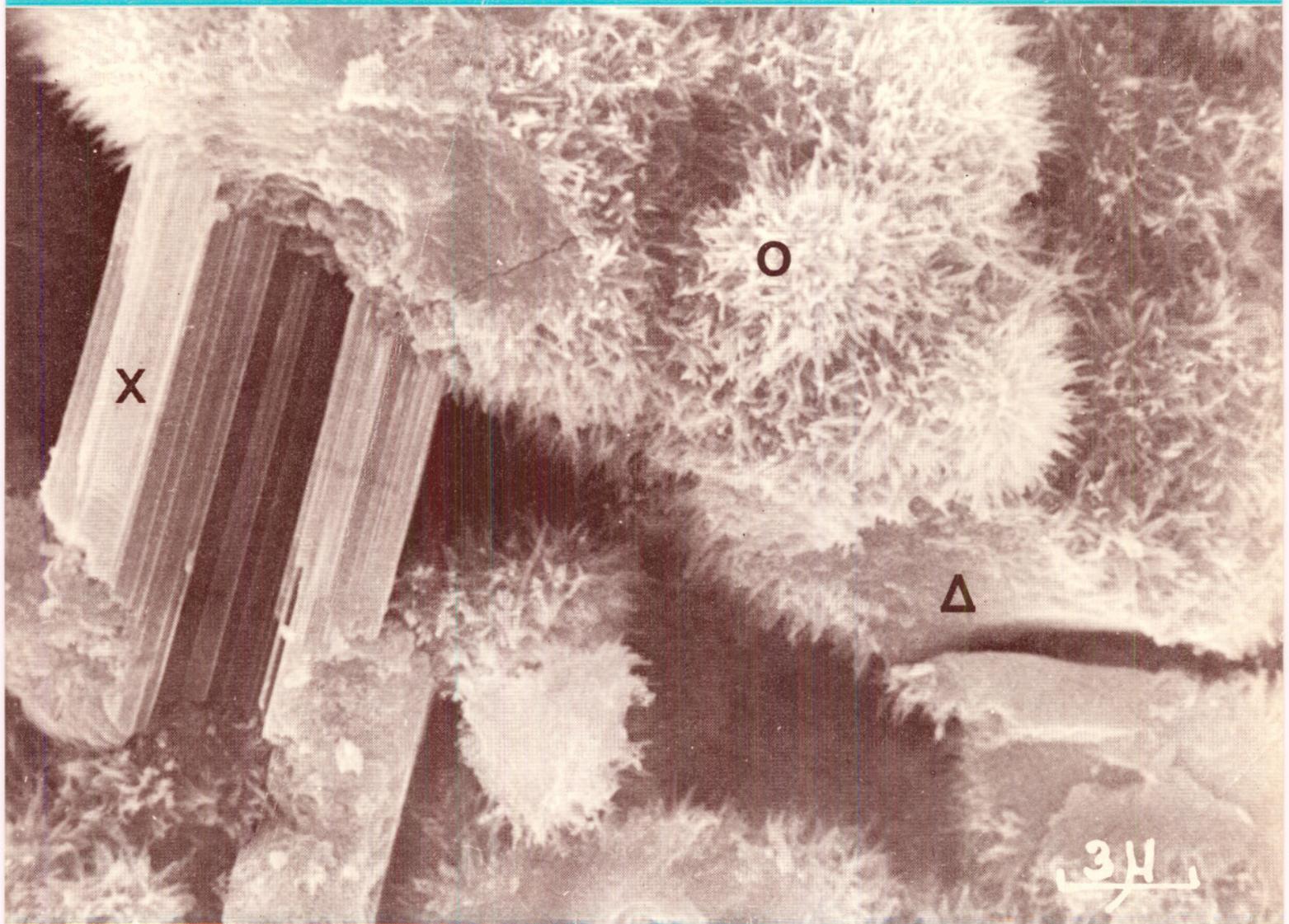


industrie minérale

CAHIERS
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME IV - NUMÉRO 2



Numéro spécial du 30 septembre 1976

GRUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

PERSONNES MORALES

- Bassin d'Essais des Carènes, 6, boulevard Victor, 75015 Paris.
- Bibliotheek, Weg-en Waterbouw der T.H. — Stevinweg 1 — Delft (Hollande).
- Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., 26, rue Boyer, 75020 Paris.
- The British Library, Holborn Division — 25 Southampton Buildings, London WC2A 1AW (England).
- Cedocar, Bibliothèque Centrale, 26, boulevard Victor, 75996 Paris Armées.
- Centre d'Essais et de Recherches, Technique des Tabacs, 4, rue André-Deseaux, 45400 Fleury-Aubrais.
- Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75013 Paris.
- Centre d'Etudes du Bouchet, 91710 Vert-le-Petit.
- Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Service de Chimie - Physique, B.P. n° 2, 91190 Gif-sur-Yvette.
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75008 Paris.
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, Laboratoire de Verneuil-en-Halatte, B.P. n° 27, 60103 Creil.
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie du Béton Manufacturé (CERIB), B.P. n° 42, 28230 Epernon.
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75015 Paris.
- Centre de Mathématiques et Calcul de l'I.N.S.A., 20, avenue Albert-Einstein, 69100 Villeurbanne.
- Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67000 Strasbourg.
- Centre de Recherches Routières, boulevard de la Woluwe, 42 - 1200 Bruxelles (Belgique).
- Centre National d'Enseignement Technique, Laboratoire de Recherches, M. Lemaitre, 61, avenue du Président-Wilson, 94230 Cachan.
- Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 4, avenue du Recteur-Poincaré, 75782 Paris Cédex 16.
- Centre Technique du Cuir, 181, avenue Jean-Jaurès, 69006 Lyon.
- Centre Technique des Industries Mécaniques, B.P. n° 67, 60300 Senlis.
- Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses, B.P. 175, Centre de Tri Grenoble Gare (38042).
- Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, avenue Hoche, 75008 Paris.
- Ciments Lafarge, M^{me} Faurie, ing. Direction Recherches, 28, rue Emile-Menier, 75782 Paris Cédex 16.
- Compagnie Française de Raffinage, Centre de recherches — Documentation, B.P. n° 27, 76700 Harfleur.
- Compagnie Saint-Gobain, Service Central de Recherches, 39, av. Lucien-Lefranc, 93304 Aubervilliers.
- Département Génie Civil et Urbanisme (I.N.S.A.), 20, avenue Albert-Einstein, 69100 Villeurbanne.
- Direction de la Recherche des Fédérations Nationales du Bâtiment et des Travaux Publics, 12, rue Brancion, 75737 Paris Cédex 15.
- Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de mécanique des sols, Grande Voie des Vignes, 92290 Chatenay-Malabry.
- Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique, 2, rue Charles-Camichel, 31000 Toulouse.
- Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, 151, boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris.
- Ecole Polytechnique, Bibliothèque — CP 6079 — Succursale « A », Montréal, Québec H 3 C 3 A 7 Canada.
- Electricité de France, Service géologique et géotechnique, 3, rue de Messine, 75008 Paris.
- ESSO-Standard S.A.F., Centre de recherches, 76130 Mont-Saint-Aignan.
- Filial Biblioteki, Akademü Nank SSSR — Baltijskaja ul. 14 — Moskva A-219 (U.R.S.S.).
- IMETAL (M.A. Fillon), 1, boulevard de Vaugirard, 75751 Paris Cedex 15.
- Institut Français du Pétrole, 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92500 Rueil-Malmaison.
- Institut de l'Information Scientifique de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., Baltijskaja ulitasa 14 — Moscou D. 219 (U.R.S.S.).
- Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Charles-Camichel, 31000 Toulouse.
- Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, Faculté des sciences de Paris, Tour 66, 9, quai Saint-Bernard, 75005 Paris.
- Institut Mécanique de Grenoble (M^{lle} Saulnier), B.P. n° 53, Centre de Tri, 38041 Grenoble Cedex.

(suite page 3 couverture)

CAHIERS
DU
GROUPE FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE

Tome IV — Numéro 2

30 septembre 1976

sommaire

M. JOLY

Poiseuille ou les paradoxes d'un destin..... 51

J. LANIER

Etude expérimentale des lois de comportement en grandes déformations à l'aide d'une presse tridimensionnelle 53

J.M. SERVAS et C. HUET

Relations entre fonctions fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire avec vieillissement 61

M. DIKMEN

Mécanique générale des corps biologiques solides 69

W. BISMUTH

Bruits de roulement sur un rail..... 75

Photographie de la couverture :

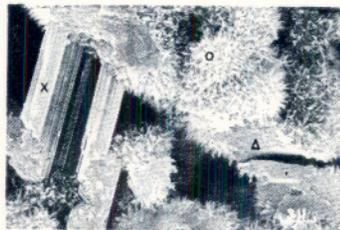
Microscope électronique à balayage.

Fractographie d'une pâte de silicate tricalcique après deux mois d'hydratation.

× : cristaux massifs d'hydroxyde de calcium Ca(OH)₂

O : fibres de silicate de calcium hydraté C-S-H

△ : grain fracturé de silicate tricalcique anhydre.



Département Microstructures C.E.R.I.L.H.

Poiseuille ou les paradoxes d'un destin

par Maurice JOLY, Laboratoire de Biophysique, Faculté de Médecine, 91, Bd de l'Hôpital, 75013 Paris

Jean-Léon-Marie Poiseuille (1799-1869) est, à juste titre, considéré comme le fondateur de la viscosimétrie. Mais un ensemble de faits et de circonstances rend le « cas Poiseuille » particulièrement remarquable.

Tout d'abord, en suivant le développement de son œuvre, on assiste à une transformation fondamentale, à une véritable mutation dans l'attitude d'un homme de science devant les faits. De médecin principalement préoccupé par la circulation pulmonaire et ses anomalies pathologiques, Poiseuille s'est métamorphosé brusquement en physicien expérimentateur d'une habileté et d'une rigueur vraiment exceptionnelles pour l'époque. A la lecture de ses mémoires, on est surpris du soin qu'il apporte à la définition précise des paramètres et surtout à leur séparation : on constate chez Poiseuille une sorte d'acharnement à faire varier systématiquement les conditions expérimentales.

Pour les amateurs de paradoxe, signalons que Poiseuille n'a jamais utilisé les « viscomètres » qu'il a construits pour « mesurer » des viscosités ! Ajoutons à cela que, par une ironie du sort, les observations *in vivo* de Poiseuille sur le mouvement des globules sanguins dans les vaisseaux, observations qui sont à l'origine de sa décision d'étudier méthodiquement l'écoulement des liquides dans des tubes de petit diamètre, ne peuvent pas être expliquées par les « lois » qu'il a établies, ces « lois de Poiseuille » qui ne sont suivies rigoureusement que par les liquides newtoniens. Et c'est ce désaccord qui est à l'origine d'une grande partie des développements ultérieurs de la rhéologie des liquides.

Rappelons les étapes marquantes de l'œuvre « rhéologique » de Poiseuille.

Dès 1835, lors de la séance de l'Académie des Sciences du 21 décembre, Poiseuille présente un mémoire où presque tous les caractères essentiels de l'écoulement du sang dans les vaisseaux sont déjà mis en évidence. Il écrit notamment : « Lorsque dans les vaisseaux capillaires des batraciens ou des mam-

mifères on examine le cours des globules sanguins, on les voit, et cela dans le même vaisseau, doués de vitesses très différentes, les uns offrent simultanément deux mouvements, l'un de rotation, l'autre de translation ; d'autres sont momentanément en repos... Si on étudie le cours du sang... on voit, en allant de l'axe du vaisseau vers les parois, la vitesse des globules être tout-à-fait différente ; au centre la vitesse est à son maximum ; elle diminue au fur et à mesure qu'on s'approche des parois ; tout près des parois, on distingue un espace très transparent qui n'est occupé ordinairement que par du sérum... Lorsque quelques globules... se trouvent lancés dans cette partie transparente des vaisseaux, les globules placés au milieu de son épaisseur ont un mouvement extrêmement lent, et ils cessent de se mouvoir quand ils sont presque en contact avec les parois du vaisseau ».

En décembre 1840 et janvier 1841, des mémoires de Poiseuille ayant pour titre « Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petit diamètre » sont lus à l'Académie des Sciences après examen par 4 commissaires : Arago, Savart, Savary et Piobert. La loi $Q = kP$ reliant le débit à la perte de charge y est établie dans le cas de l'eau distillée à 10 °C, pour P variant entre quelques millimètres de mercure et 8 atmosphères, avec des tubes de diamètre intérieur de 0,013 à 0,65 mm et de longueur de 2 à 800 mm. Ensuite, pour une perte de charge de $P = 775$ mm, la relation

$$Q = k' \frac{P}{L}$$

est établie avec des tubes de 0,085 mm de diamètre moyen (pour lesquels la différence de diamètre aux extrémités est inférieure à 0,001 mm) et de longueur L variant de 6 à 100 mm. Avec des tubes de diamètre moyen D compris entre 0,013 et 0,652 mm, et pour une durée d'écoulement de 500 s, il est montré que l'on a

$$Q = \frac{k'' PD^4}{L}$$

Enfin, pour des tubes de différents diamètres, k'' est exprimé au moyen d'un développement en série en fonction de la température entre 0 et 45 °C dans le cas de l'eau et des mélanges eau-alcool.

Dans toute cette étude, Poiseuille s'est attaché avec beaucoup de soin à décrire les appareils utilisés ainsi que toutes les précautions à prendre pour assurer la reproductibilité des résultats. Il a mis en évidence l'existence d'une limite inférieure du rapport L/D en deça de laquelle les lois proposées ne sont plus valables.

Arago, Babinet, Piobert et Regnault ont refait les expériences de Poiseuille en sa présence et confirmé dans leur rapport à l'Académie des Sciences du 26 décembre 1842 les lois qu'il avait énoncées. L'ensemble de leurs résultats fut publié en 1843 dans les Annales de Chimie et de Physique. Un détail qui maintenant fait sourire : les valeurs expérimentales (dimensions des tubes, débits, etc.) sont données avec 6 et même parfois 11 chiffres significatifs !

Poiseuille avait noté l'importance de la mouillabilité des tubes par les liquides en écoulement. C'est ainsi que dans un mémoire présenté à l'Académie le 9 janvier 1843, les commissaires étant Magendie, Chevreul et Regnault, il écrit : « ...dans l'écoulement des liquides à travers des tubes de très petits diamètres, le fluide se meut dans un canal dont les parois sont formées par le liquide même qui s'écoule, par suite de l'affinité des parois du tube pour les molécules fluides qui le parcourent ».

Il est à remarquer que dans les lois établies expérimentalement par Poiseuille, la viscosité du liquide n'apparaît pas explicitement. Cela tient au fait que Poiseuille, s'intéressant surtout à l'influence des divers médicaments et des eaux minérales sur la

circulation capillaire, n'a expérimenté qu'avec des solutions aqueuses diluées, donc de viscosités très proches de celle de l'eau. C'est ainsi que dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 21 juin 1847 (commissaires : Magendie, Poncelet, Regnault) il déclare : « Nous avons recherché si les propriétés physiques et chimiques des solutions jouaient, dans la vitesse variable d'écoulement qu'elles ont offerte, un rôle de premier ordre comme nous l'avions reconnu pour la pression, la longueur du tube et son diamètre, et la température. Nous avons considéré tour à tour la densité du liquide, sa capillarité, sa fluidité, la solubilité de la substance, sa déliquescence, son efflorescence, son affinité pour l'eau, la contraction qu'elle fait éprouver à l'eau au moment de sa dissolution, et nous avons constaté que toutes ces circonstances n'ont qu'une influence secondaire dans la vitesse de l'écoulement ». C'est pourquoi il ne semble pas que Poiseuille ait envisagé d'utiliser pour la mesure de la viscosité des liquides les appareils qu'il avait réalisés pour étudier l'écoulement dans les tubes fins. L'emploi courant des viscosimètres capillaires ne commence qu'avec Thorpe et Rodger en 1894.

Indiquons pour finir que l'activité de Poiseuille s'est manifestée dans bien d'autres domaines. En 1845, il a proposé un dispositif ingénieux pour assurer la ventilation des navires en vue de lutter contre la propagation des épidémies de peste. Entre 1855 et 1868, il s'est occupé du mécanisme de la respiration, de la recherche du glucose dans les tissus et de la glycogénie, du dosage et du rôle physiologique de l'urée, du mécanisme de la pression artérielle, etc.

Doit-on signaler pour conclure que Poiseuille, plusieurs fois candidat à l'Académie des Sciences, n'y fut pas élu ?

Etude expérimentale des lois de comportement en grandes déformations à l'aide d'une presse réellement tridimensionnelle

par J. LANIER, Institut de Mécanique de Grenoble

RESUME

Nous présentons dans cet article une description et les performances de la presse triaxiale réalisée à l'Institut de Mécanique de Grenoble, ainsi que les premiers résultats expérimentaux obtenus sur les matériaux pulvérulents (billes de verre). Nous avons étudié plus particulièrement le comportement en grandes déformations.

SUMMARY

A truly triaxial apparatus has been constructed at the Grenoble « Institut de Mécanique ». After the description of the machine, we present the first experimental results about granular material (glass marbles) on large deformations.

INTRODUCTION

Une presse triaxiale a été conçue et réalisée à l'Institut de Mécanique de Grenoble dans le but d'étudier le comportement des matériaux soumis à de grandes déformations. Nous présentons ici une description de la presse et les premiers résultats expérimentaux obtenus sur des matériaux pulvérulents (billes de verre).

I. DESCRIPTION DE LA PRESSE TRIAXIALE ET PERFORMANCES

a) Cinématique

L'échantillon est un parallélépipède rectangle maintenu par 6 plaques. Le mouvement de deux faces opposées est symétrique par rapport au centre qui reste fixe (schéma 1 de la figure 1). Pour réaliser cette cinématique chaque face doit posséder 3 degrés de liberté en translation qui sont réalisés par « l'empilement » de 3 plaques :

- 2 plaques montées sur des glissières orthogonales, et 2 vérins hydrauliques permettent la fermeture de la boîte (schéma n° 2 de la figure 1),
- un moteur électrique, synchronisé avec celui de la face opposée, assure l'avance ou le recul.

b) Caractéristiques

Les dimensions d'arêtes X_i peuvent varier entre 50 mm et 150 mm. La vitesse maximale des plaques est de $\pm 2,5$ mm/mn soit $\left| \frac{dX_i}{dt} \right| \leq 5$ mm/mn, réglable de façon continue.

La force maximale dans chaque direction est de 10 t. Les contraintes sont limitées actuellement à 100 bars et peuvent être appliquées sur toute la gamme de vitesse.

c) Mesures

- 3 capteurs à induction mesurent les dimensions d'arêtes à une précision du $1/100^{\circ}$ de millimètre.
- La mesure des contraintes normales se fait directement sur les faces de l'échantillon, grâce à 3 capteurs (à $\pm \frac{1}{100}$ bars) noyés dans les plaques.
- Une horloge permet la mesure du temps.

Les sept points de mesure (3 dimensions X_i , 3 contraintes σ_i , le temps t) sont scrutés simultanément (en $1 \mu s$) et enregistrés pour un dépouillement automatique à une fréquence choisie par l'opérateur (1/2 s à 380 s).

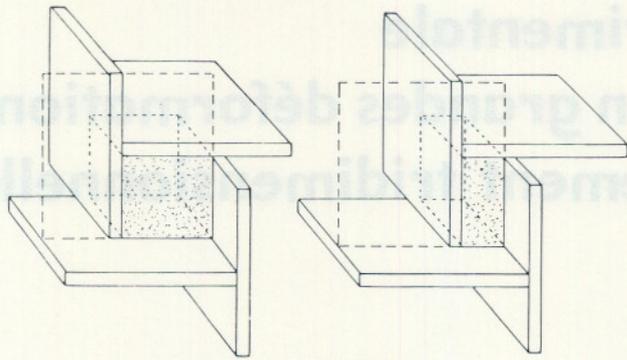


Schéma n°1

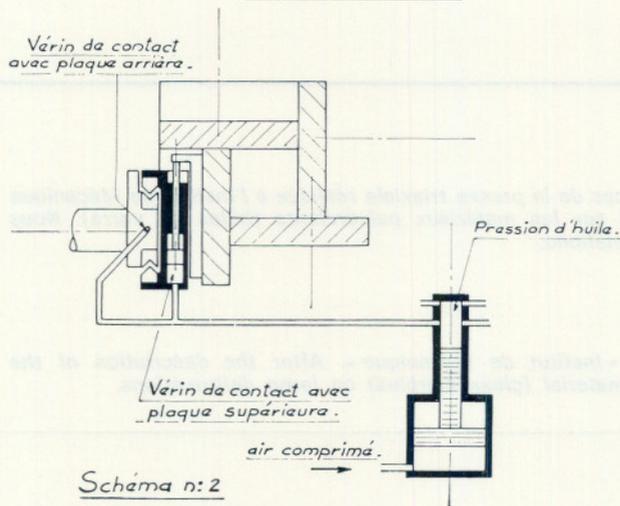


Fig. 1

d) Régulation

La régulation entièrement électronique permet d'imposer à chaque instant et indépendamment sur les 3 directions :

- la vitesse d'avancement des plaques $v_i(t)$,
- la dimension $X_i(t)$,
- la contrainte $\sigma_i(t)$,
- une relation entre les quantités mesurées (par exemple : $\sum_1^3 \sigma_i = C^{(e)}$).

II. HYPOTHESES

L'interprétation des mesures précédentes en mécanique des milieux continus nécessite essentiellement deux hypothèses :

Hypothèse 1 : L'état de déformation est homogène pour un échantillon homogène.

Notons que quelles que soient les conditions aux limites programmées c'est toujours la cinématique qui est, directement ou non, imposée par la régulation. Le seul problème est donc de réaliser au contact de l'échantillon avec les plaques un frottement le plus faible possible pour éviter un phénomène du genre « couche limite » qui rendrait l'essai difficile à interpréter. Les matériaux pulvérulents testés étaient enveloppés d'une capote en latex pur de 0,5 mm d'épaisseur, graissée (graisse aux silicones). Le coefficient de frottement est alors compris entre 0,5 et 2 %.

Nous avons réalisé un essai sur des billes de verre avec un vide de l'ordre de 50 cm de Hg à l'intérieur de la capote, ce qui a pour effet de « solidifier » l'échantillon sous la pression atmosphérique et donc de pouvoir l'observer en fin d'essai. L'état initial était un cube de $100 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$. L'état final (déformation irréversible) était un parallélépipède de $50 \times 140 \times 140 \text{ mm}^3$ environ.

Nous avons constaté que la capote présentait des *plis parallèles* réguliers et qu'en particulier les « arêtes » de la capote coïncidaient toujours avec les arêtes de l'échantillon.

On peut donc admettre que l'hypothèse 1 est vérifiée dans de bonnes conditions.

Conséquences de l'hypothèse 1

- Les directions principales des tenseurs de déformations et vitesse de déformation restent confondues à tout instant (ce sont les axes du parallélépipède).
- Les 3 valeurs principales de la déformation peuvent être calculées par

$$D_i(t) = \frac{X_i(t)}{X_i(0)}$$

- Les 3 valeurs principales de la vitesse de déformation sont :

$$d_i(t) = \frac{v_i(t)}{X_i(t)} \neq \frac{(\Delta X_i)_t^{t+\Delta t}}{\Delta t \cdot X_i(t)}$$

où $X_i(t)$ = distance entre deux plaques

$v_i(t)$ = deux fois la vitesse d'avancement d'une plaque

- L'état de contraintes est homogène.

Hypothèse 2 : Les directions principales des tenseurs de contraintes et de déformation coïncident dans toutes les conditions cinématiques imposées par la presse.

- Cette hypothèse permet d'interpréter les 3 mesures de contrainte comme les 3 contraintes principales d'un état homogène (compte tenu de l'hypothèse 1).
- Pour un matériau à loi de comportement isotrope cette hypothèse est automatiquement vérifiée [1]*.

* Les chiffres mis entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

III. REMARQUES SUR LES LOIS DE COMPORTEMENT

La loi de comportement d'un matériau dans un certain domaine (de température, de contrainte...) est une correspondance permettant de déterminer la contrainte à l'instant t en fonction de l'histoire de la déformation, c'est-à-dire des déformations subies par le matériau avant l'instant t .

Seule l'expérience et les principes d'objectivité peuvent servir de guide pour la formulation mathématique de la loi du matériau. Il est donc très important de pouvoir faire subir au matériau des histoires très variées pour déceler les paramètres importants.

Cette presse permet d'imposer une histoire des valeurs principales quelconques. La seule restriction est que les axes principaux restent fixes dans le temps : si l'on note F le gradient de la transformation, R la rotation et U la déformation pure correspondante telles que $F = R \cdot U$ la vitesse de déformation d et la vitesse de rotation ω s'expriment par :

$$d = \frac{1}{2} R (\dot{U} U^{-1} + U^{-1} \dot{U}) R^T ;$$

$$\omega = \dot{R} R^T + \frac{1}{2} R (\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U}) R^T$$

Pour toutes les cinématiques de la presse triaxiale :
 $R = 1$ et $\omega = 0$

D'autre part si l'hypothèse 2 est vérifiée σ , d et U ont mêmes directions principales, donc les matrices correspondantes sont commutables. Il en résulte que les deux lois hypoélastiques différentes :

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{Jaumann}} = 2 \lambda \sigma \cdot d \cdot \sigma + \mu (\sigma^2 d + d \sigma^2)$$

$$\text{et } \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{Jaumann}} = K (\sigma^2 d + d \sigma^2)$$

ne seront pas discernables par des essais sur la presse triaxiale si $K = \lambda + \mu$.

Cette restriction théorique n'est pas très importante en pratique. En effet la recherche d'une loi de comportement peut se décomposer en plusieurs étapes :

- l'expérience indique l'allure du comportement,
- une relation tensorielle la plus simple possible est proposée, susceptible de traduire les faits observés en fonction de paramètres ou de fonctions scalaires,
- l'expérience détermine les paramètres et les fonctions introduits précédemment,
- la loi ainsi déterminée doit être finalement testée sur des cinématiques différentes ou des problèmes aux limites plus complexes.

IV. TYPES D'ESSAIS REALISES

Notation : Les 3 axes de la presse sont notés X , Y (axes horizontaux) et Z (axe vertical) — on note alors :

$\sigma_x \sigma_y \sigma_z$: contraintes principales (> 0 en compression),

$d_x d_y d_z$: vitesses de déformations principales (> 0 en compression),

$v_x v_y v_z$: vitesses d'avance ou de recul des plaques.

La presse triaxiale permet de réaliser très simplement les essais suivants :

1° Chemin isotrope en contrainte ou en déformation.

2° Essai de « contrainte plane » : $\sigma_x = \text{Constante}$.

Sur les 2 autres faces nous pouvons imposer :

a) $\sigma_y = C^{te}$ et d_x imposé ≥ 0 .

Pour différentes valeurs de σ_y on obtient dans le plan (P) , $\sigma_x = C^{te}$, un réseau de droites parallèles, qui, par projection conique de sommet l'origine sur le plan (π) , se transforme en un faisceau de droites concourantes (figure 2).

Cas particulier : $\sigma_y = \sigma_x$: Essai « triaxial » de révolution.

b) d_y et d_z imposés :

Le chemin suivi dans l'espace des contraintes dépend de la loi du matériau.

Cas particulier : d_y ou d_z nul : Essai de déformation plane.

$d_y = d_z$: Essai triaxial de révolution en déformation.

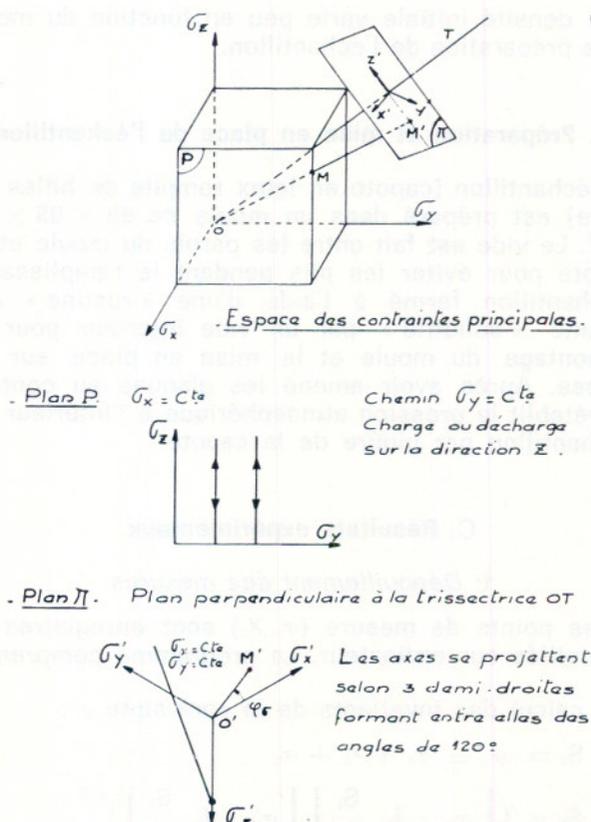


Fig. 2. — Représentation des chemins de contraintes

- 3° Cycles en contraintes ou déformation.
- 4° Des essais complexes nécessitant une régulation en fonction des mesures instantanées sont possibles mais n'ont pas encore été réalisés :
- $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = C^{te} \forall t$ pression moyenne constante.
- $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = C^{te}$; $\frac{\sigma_z}{\sigma_x} = C^{te} \forall t$ chemins radiaux en contraintes.

V. RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR LES BILLES DE VERRE

A. Choix du matériau

Pour utiliser au mieux les performances de l'appareil nous avons choisi un matériau très déformable (grandes déformations possibles) pouvant supporter des états de contraintes s'écartant de façon appréciable de l'état isotrope. Les matériaux pulvérulents possèdent ces propriétés. Nous avons donc choisi des billes de verre de 1 mm et 1/10° mm de diamètre qui sont souvent utilisées comme matériau analogique et qui présentent les avantages suivants :

- granulométrie bien définie,
- très bonne résistance de 0 à 50 bars ce qui permet de faire subir à l'échantillon une « histoire » importante sans modification de la granulométrie,
- la densité initiale varie peu en fonction du mode de préparation de l'échantillon.

B. Préparation et mise en place de l'échantillon

L'échantillon (capote en latex remplie de billes de verre) est préparé dans un moule de $95 \times 95 \times 95$ mm³. Le vide est fait entre les parois du moule et la capote pour éviter les plis pendant le remplissage. L'échantillon fermé à l'aide d'une « rustine » est ensuite « solidifié » par un vide intérieur pour le démontage du moule et la mise en place sur la presse. Après avoir amené les plaques au contact on rétablit la pression atmosphérique à l'intérieur de l'échantillon par piqûre de la capote.

C. Résultats expérimentaux

1° Dépouillement des mesures

Les points de mesure (σ_i, X_i) sont enregistrés et dépouillés sur ordinateur. Le programme comprend :

- calcul des invariants de la contrainte σ :

$$S_1 = \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\bar{S}_2 = \left(\left[\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{S_1}{3} \right] \cdot \left[\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{S_1}{3} \right] \right)^{1/2}$$

deuxième invariant du déviateur

$$\varphi_\sigma = \text{Arc tg} \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_x - \sigma_y) / (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) - 30^\circ$$

phase de la contrainte à partir de l'axe σ'_x

- calcul des invariants de la vitesse de déformation d :

$$E_1, \bar{E}_2, \varphi_d$$

- calcul de l'abscisse curviligne s du chemin suivi dans l'espace des déformations logarithmiques $\left(\text{Log} \frac{X_i}{X_{i0}} \right)$ définie par :

$$ds^2 = \left(\frac{dX_1}{X_1} \right)^2 + \left(\frac{dX_2}{X_2} \right)^2 + \left(\frac{dX_3}{X_3} \right)^2$$

Ce paramètre s joue le rôle d'un temps fictif et permet une représentation commode de l'évolution des matériaux [2],

- calcul de l'angle de frottement mobilisé (critère de Coulomb) :

$$\Phi = \text{Arc sin} \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}$$

- tracé de courbes :

- σ_i en fonction de s ou de X_i ,
- $(V - V_0)$ (variation de volume) en fonction de σ , X_i , S_1 ou \bar{S}_2/S_1 ,
- σ_i en fonction de σ_j pour $\sigma_k = \text{cte}$ ($i \neq j \neq k$),
- projection conique du chemin suivi dans l'espace des contraintes principales, à partir de l'origine $\sigma = 0$, sur le plan $S_1 = 1$,
- φ_σ et φ_d en fonction de s .

2° Essais triaxiaux de révolution

Ce sont les essais classiques en mécanique des sols pour déterminer l'angle de frottement d'un matériau pulvérulent.

a. Cycles en déformation (billes de 1 mm) (figure 3)

Trois cycles de charge et décharge ont été réalisés successivement sur le même échantillon : la dimension X varie entre 75 mm et 113 mm, la contrainte sur les 2 faces Y et Z étant réglée à une valeur constante : $\sigma_y = \sigma_z = 4$ bars.

On constate que les courbes présentent l'allure classique :

- pic de première charge ($\phi_{\text{pic}} = 29^\circ$) et diminution de la résistance jusqu'à un palier,
- les courbes de 2^e et 3^e charge sont voisines ($\phi_{\text{palier}} = 23^\circ$),
- les courbes de décharge se superposent et le palier en contrainte correspond à une valeur de l'angle de frottement de 26° environ. Il y a donc sta-

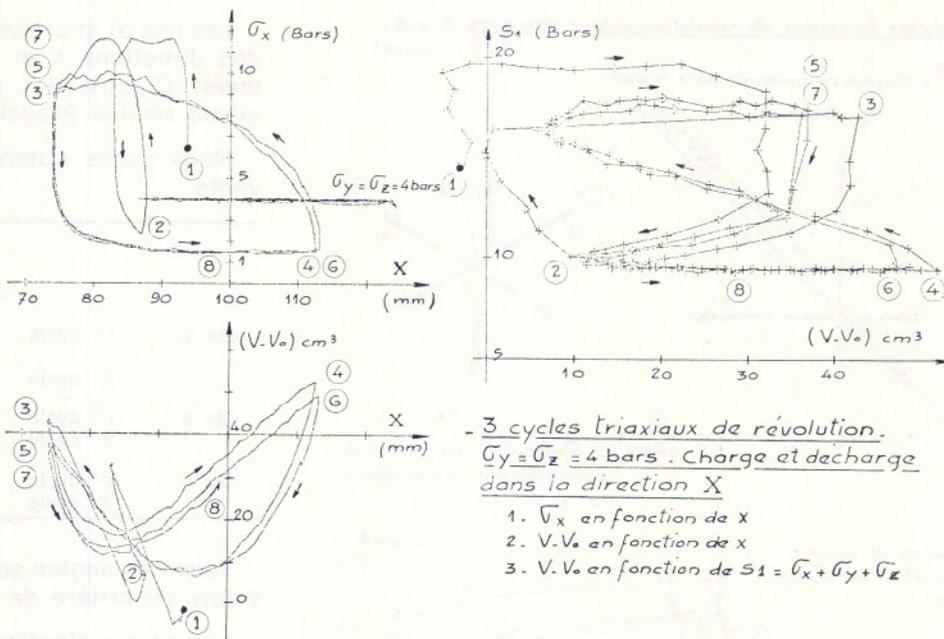
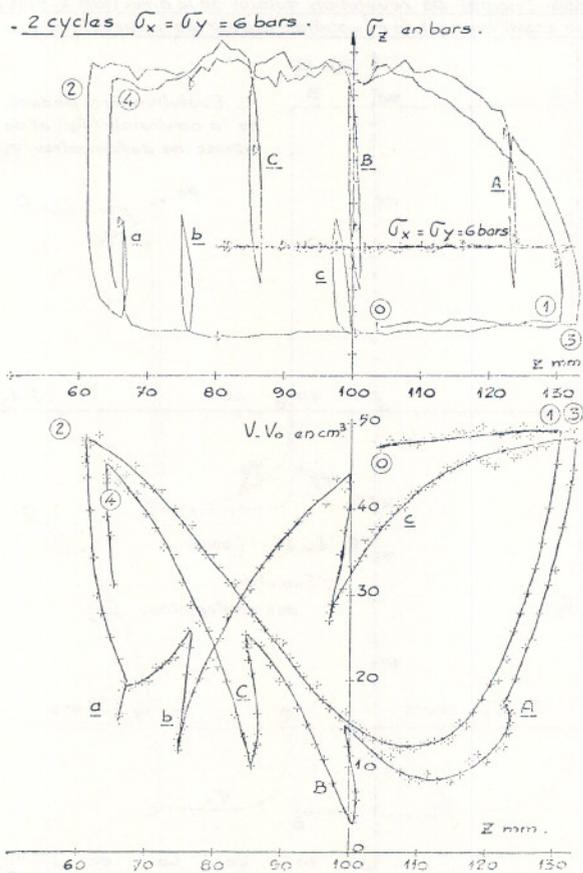


Fig. 3. — Billes de verre (1 mm) - (Ech. 3)

bilité des cycles dès le deuxième chargement comme le montrent également les variations de volume.

Des essais triaxiaux classiques, sur les mêmes billes de verre, ont été réalisés par Terriez [3] qui propose un angle de frottement en charge : $\phi_{\text{baller}} = 20^\circ$. La valeur que nous avons mesurée (23°) est plus forte. Ce fait est généralement expliqué par la différence de condition aux limites entre l'essai classique et le nôtre.



b. Cycles avec décharges ou charges partielles (billes de 1 mm) — (figure 4)

Après avoir fait un cycle de charge et décharge nous avons répété le même cycle en introduisant 3 charges partielles (a, b, c) et 3 décharges partielles (A, B, C). On observe de très légères « boucles d'hystérésis », la part la plus importante des déformations ayant lieu à partir du passage de l'état isotrope.

c. Cycles triaxiaux de révolution avec permutation du rôle des axes X, Y et Z (billes de 1/10^e mm) (figure 5)

Le chemin de contrainte imposé à cet échantillon est représenté figure 5. Sur la face Z la contrainte est régulée constante $\sigma_z = 7 \text{ bars}$ pendant tout l'essai. Sur les 2 autres faces X et Y nous avons successivement les régulations suivantes :

a) Les deux dimensions X₀ et Y₀ étant voisines initialement nous avons imposé 2 vitesses de plaques égales. Le rapport des vitesses de déformation était alors de 1,17. La cinématique est donc proche de l'état de révolution autour de l'axe Z (d_y légèrement supérieur à d_x). On constate qu'il en est de même pour l'état de contrainte ($\sigma_x \neq \sigma_y$) (figure 6).

Fig. 4. — Billes de verre (1 mm)

- Cycles triaxiaux de révolution autour des axes X, Y, Z -
($\bar{\sigma}_z = 7 \text{ bars}$)

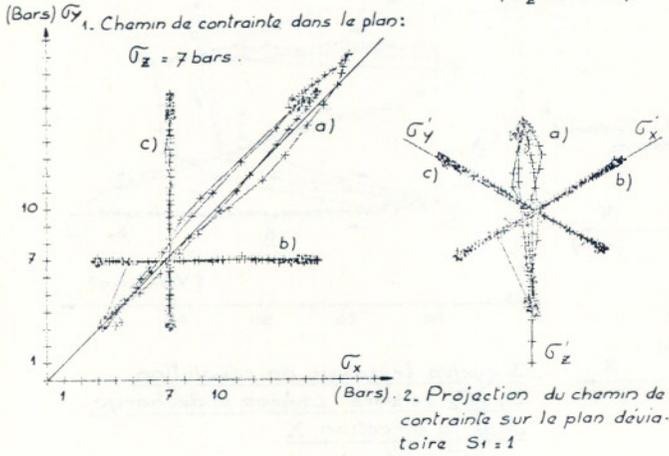


Fig. 5. — Billes de verre (1/10^e de millimètre)

- b) La contrainte sur la face Y est régulée constante : $\sigma_y = 7 \text{ bars}$ (égale à σ_z par conséquent). V_x est imposée.
- c) La contrainte sur la face X est régulée constante : $\sigma_x = 7 \text{ bars}$ (égale à σ_z). V_y est imposée.

- 2 cycles $\bar{\sigma}_z = 7 \text{ bars}$ $\frac{dy}{dx} = 1,17$. (cas a).

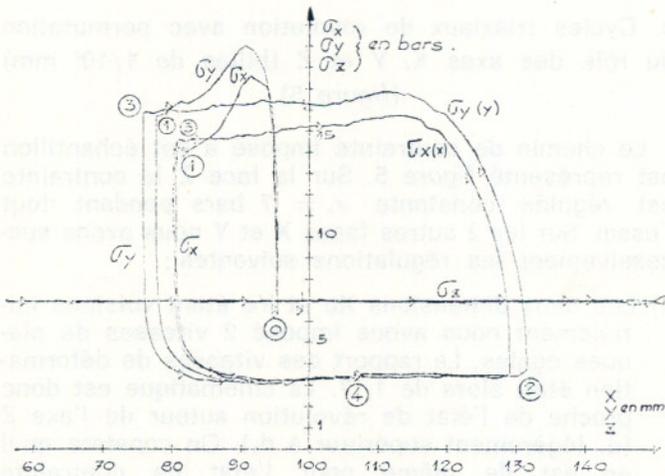


Fig. 6. — Billes de verre (1/10^e de millimètre)

Les cas b) et c) sont des essais de révolution autour des directions X et Y (simulation des essais classiques). D'autre part, pour les 3 cas a), b), et c) nous avons réalisé 2 cycles de charge et décharge.

Nous avons obtenu les angles de frottement suivants :

		φ		φ pic = 27°5 (1 ^{re} charge)
		charge	décharge	
cas a	1 ^{er} cycle	20°	22°5	
	2 ^e cycle	21°	23°	
cas b	1 ^{er} cycle	21°	24°	
	2 ^e cycle	21°5	23°5	
cas c	1 ^{er} cycle	22°	22°5	
	2 ^e cycle	22°	22°	

Tous ces angles sont comparables et prouvent l'isotropie du critère de plasticité.

Les essais classiques [3] donnent $\phi_{\text{charge}} = 17°5$.

La figure 7 illustre le comportement du matériau lors du changement de sollicitation (cas b — cas c) :

- De A à B : $\sigma_y = \sigma_z = 7 \text{ bars}$ et décharge sur X. Les phases des 2 tenseurs σ (contraintes) et d (vitesse de déformation) sont égales : $\varphi_d = \varphi_\sigma = 180°$ (état de révolution autour de X).

- Essai triaxial de révolution autour de la direction X suivi d'un essai triaxial de révolution autour de la direction Y -

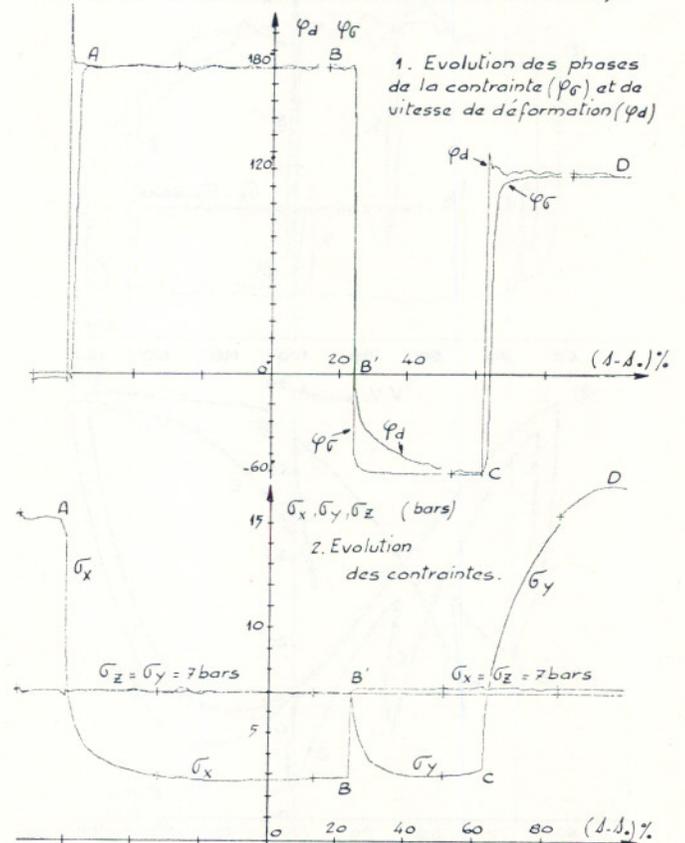
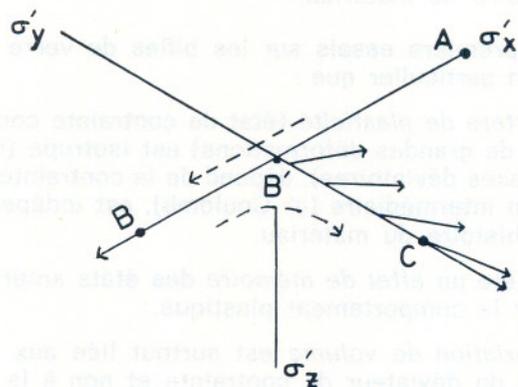


Fig. 7. — Billes de verre (1/10^e de millimètre)

• En B on impose $\sigma_x = \sigma_z = 7$ bars et décharge sur Y. On constate que la régulation en contrainte se fait instantanément (sans déformation appréciable) et que $\varphi_\sigma = -60^\circ$ (état de révolution autour de l'axe Y). Au contraire de B à C la phase de la vitesse φ_d évolue progressivement de 0° à -60° caractérisant un effet de mémoire du mode de déformation précédent. On peut schématiser ce comportement dans le plan déviatoire par l'évolution du vecteur vitesse :



Ce résultat est à rapprocher de ceux présentés par Lensky [4] pour illustrer les « principes d'isotropie » et « de retard » proposés par Illiushin.

3° Essai de déformation plane (billes de 1 mm) (figure 8)

Les conditions aux limites de l'essai présenté sont : $\sigma_x = 8$ bars $d_z = 0$ décharge sur Y

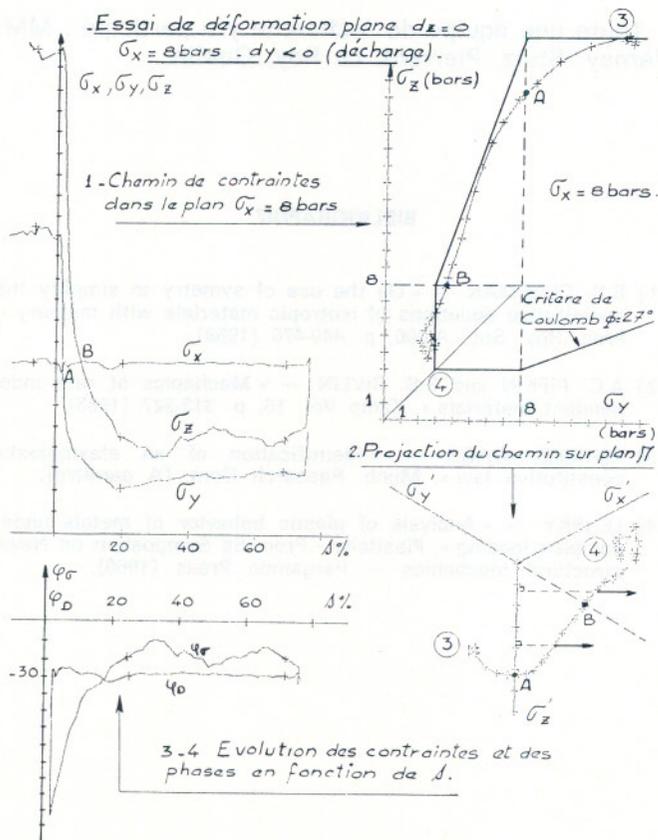


Fig. 8. — Billes de verre (1 mm)

L'état initial (point 3) est un état de plasticité parfaite (palier en contrainte) qui a été atteint par le chemin $\sigma_x = 8$ bars, $\sigma_y = 14$ bars charge sur Z ($\sigma_z = 23$ bars). La variation de volume au cours de l'essai reste très faible bien que S_1 varie de 45 à 15 bars et par conséquent $d_x \neq -d_y$. La phase de la vitesse de déformation reste donc pratiquement constante et égale à (-30°) (vecteur vitesse perpendiculaire à l'axe σ'_z dans le plan déviatoire).

Le chemin de contrainte reste très voisin de la surface limite comme le montre la figure 8 où l'on a représenté le chemin de contrainte par rapport au critère de Coulomb ($\phi = 27^\circ$).

Ce résultat montre que l'état plastique ne saurait être défini seulement par l'état de contrainte mais par une correspondance entre état de contrainte et vitesse de déformation, c'est-à-dire par la loi d'écoulement. Ici la vitesse de déformation (aux variations de volume près) était imposée par les conditions de l'essai. A cette vitesse de déformation correspondait un état de contrainte permettant l'écoulement (point 4) vers lequel nous avons évolué.

4° Essais où deux vitesses de plaques sont imposées constantes (billes de 1/10° mm) — (figure 9)

Les conditions imposées au cours de cet essai sont :

$$V_y = -1,2 V_z \quad V_z > 0 \text{ de } 1 \text{ à } 3; < 0 \text{ de } 3 \text{ à } 6$$

$$\sigma_x = 5 \text{ bars}$$

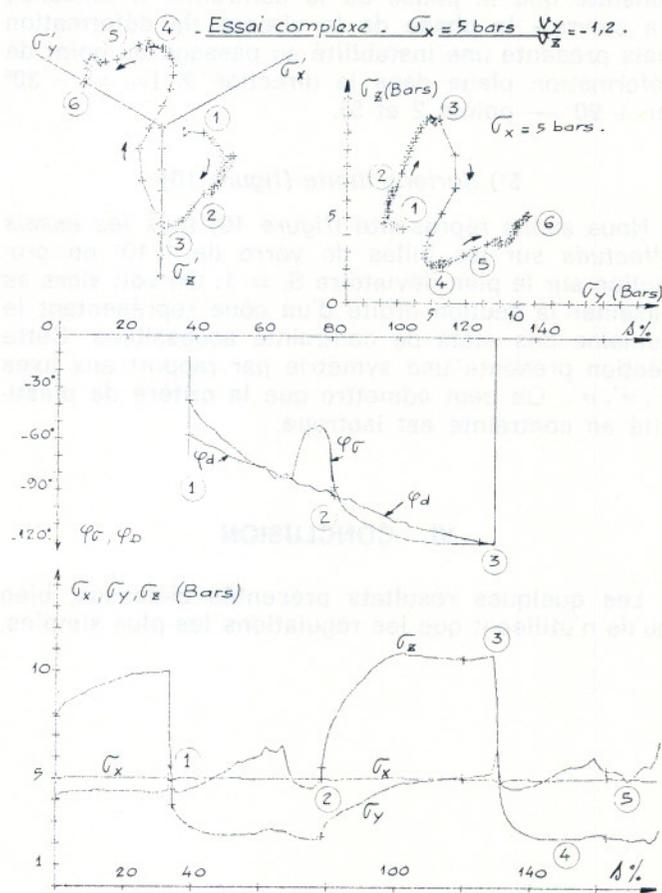


Fig. 9. — Billes de verre (1/10° de millimètre)

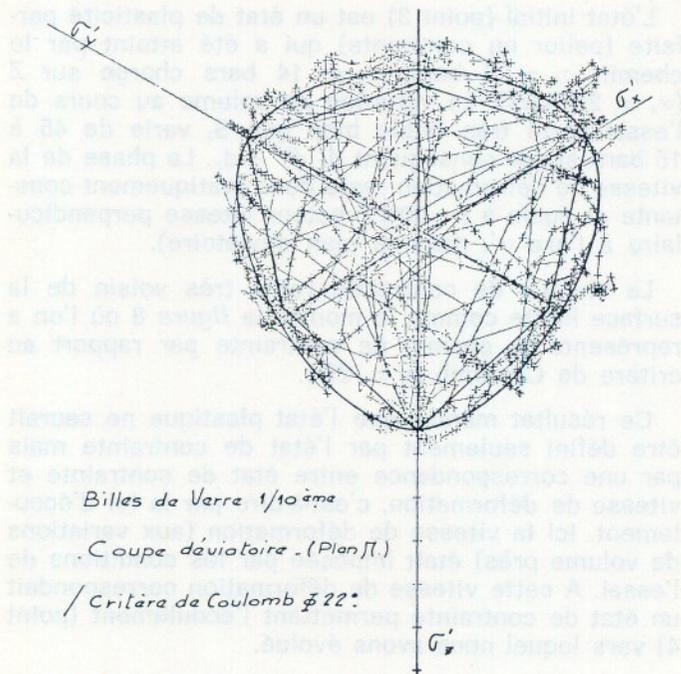


Fig. 10

Le rapport des vitesses de plaques est constant, par contre le rapport des vitesses de déformation $d_y/d_z = -1,2 Z/Y$ est variable. La phase de la vitesse de déformation varie donc de façon continue. On constate que la phase de la contrainte a tendance « à suivre » la phase de la vitesse de déformation mais présente une instabilité au passage du point de déformation plane dans la direction X ($\varphi_D = -30^\circ$ ou $+90^\circ$ — points 2 et 5).

5°) Surface limite (figure 10)

Nous avons représenté (figure 10) tous les essais effectués sur les billes de verre de $1/10^\circ$ en projection sur le plan déviatoire $S_1 = 1$. On voit alors se dessiner la section droite d'un cône représentant le domaine des états de contrainte accessibles. Cette section présente une symétrie par rapport aux axes $\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z$. On peut admettre que le critère de plasticité en contrainte est isotrope.

VI. CONCLUSION

Les quelques résultats présentés ci-dessus, bien qu'ils n'utilisent que les régulations les plus simples,

montrent tout l'intérêt de la presse triaxiale pour la détermination des lois de comportement des matériaux :

- mesure à chaque instant de toutes les variables mécaniques de l'échantillon,
- possibilité de faire des cycles,
- chemins de sollicitation variés soit en courbe de 1^{re} charge soit successivement pour « tester » la mémoire du matériau.

Nos premiers essais sur les billes de verre montrent en particulier que :

- le critère de plasticité (état de contrainte constant pour de grandes déformations) est isotrope (symétrie/axes déviatoires), dépend de la contrainte principale intermédiaire (\neq Coulomb), est indépendant de l'histoire du matériau.
- il existe un effet de mémoire des états antérieurs, avant le comportement plastique,
- la variation de volume est surtout liée aux variations du déviateur de contrainte et non à la pression isotrope.

Ces remarques qualitatives simples précisent donc les propriétés que doit présenter la loi de comportement et par là même doivent faciliter sa recherche.

La presse triaxiale a été réalisée dans le cadre d'un contrat ATP (Plasticité) du C.N.R.S. Elle avait fait l'objet d'un exposé oral au Groupe Français de Rhéologie le 7 mars 1974. Les résultats présentés ici sont postérieurs à cet exposé.

Toute une équipe de recherche y a participé : MM. Vernay, Stutz, Pierrard, Le Roy, Guélin.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.D. COLEMAN — « On the use of symmetry to simplify the constitutive equations of isotropic materials with memory », Proc. Roy. Soc. A 306, p. 449-476 (1968).
- [2] A.C. PIPKIN and R.S. RIVLIN — « Mechanics of rate independent materials », Zamp Vol. 16, p. 313-327 (1965).
- [3] TERRIEZ, WACK — « Identification of an elastoplastic constitutive law », Mech. Research Com. (A paraître).
- [4] LENSKY — « Analysis of plastic behavior of metals under complex loading », Plasticity - Proc. Sd Symposium on Naval structural mechanics — Pergamon Press (1960).

Relations entre fonctions fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire avec vieillissement*

par J.M. SERVAS et C. HUET, Centre Technique des Tuiles et Briques - Paris

RESUME

Nous montrons que les fonctions fluage et relaxation, intervenant dans un développement par intégrales multiples en viscoélasticité non linéaire avec vieillissement, sont liées par des équations de Volterra linéaires et du premier ordre. Nous explicitons les relations existant entre les fonctions d'ordre 1, 2 et 3 pour un milieu unidimensionnel vieillissant.

Les équations de Volterra obtenues pour les différents ordres ont toutes même noyau, et donc même noyau résolvant qui s'exprime simplement en fonction de la fonction relaxation d'ordre 1.

De plus, la fonction relaxation d'ordre 1 ne dépend que de la fonction fluage d'ordre 1, et ce par une équation qui est identique à celle obtenue en viscoélasticité linéaire. La résolution de cette équation de l'ordre 1 fournit alors la solution pour tous les ordres par simple quadrature. Ces résultats confirment donc dans le cas vieillissant ceux précédemment obtenus pour le cas non vieillissant.

SUMMARY

It is shown that creep and relaxation functions in the multiple integral development representation of aging non linear viscoelasticity are related by linear Volterra equations of the first order. These relations are written explicitly for the functions of order 1, 2 and 3, in the one-dimension case.

The kernel of the Volterra equations obtained is the same for every order. They have hence same resolvent kernel, derived simply from the relaxation function of order one.

Further, relaxation function of order one depends only on creep function of order one, by an equation identical to the one obtained in linear viscoelasticity. The resolution of this last equation give hence the solution for higher order by quadrature. Results previously obtained in non-aging non linear case are then fully extended to the case with ageing.

INTRODUCTION

En viscoélasticité linéaire, nous savons qu'il existe une relation entre les fonctions fluage et relaxation, relation facilement obtenue dans le cas non vieillissant en se servant par exemple de la transformée de Carson.

Le problème se pose donc tout naturellement, de savoir s'il existe, également en viscoélasticité non linéaire, des relations reliant les fonctions fluage et relaxation, quand on utilise pour la contrainte un développement de Fréchet-Green-Rivlin.

Lai et Findley étudièrent en [1]** le problème par une méthode d'approximation et seulement pour les diagonales des fonctions relaxation.

En France, le problème a été récemment entièrement résolu de deux manières différentes :

Molinari [2] étudia le cas unidimensionnel non vieillissant et écrivit ses équations sous une forme de relations fonctionnelles ;

Servas, Huet, Mandel [3] étudièrent le cas tridimensionnel et écrivirent les relations explicites pour le cas unidimensionnel non vieillissant.

Ce sont ces dernières relations que nous allons étendre ici au cas d'un milieu viscoélastique vieillissant.

1. RAPPELS SUR LE DEVELOPPEMENT DE FRECHET-GREEN-RIVLIN EN VISCOELASTICITE NON LINEAIRE

1.1. Cas d'un matériau non vieillissant

Dans le cas général, la contrainte de Kirchhoff $\Pi(t)$ s'écrit, en fonction de la déformation de Lagrange $\mathbf{E}(t)$ et pour un matériau non vieillissant :

$$\Pi(t) = \mathcal{F}[\mathbf{E}(t - \tau)] \quad (1)$$

$$0 < \tau < t$$

* Conférence prononcée devant le Group Français de Rhéologie, le 20 juin 1974.

** Les chiffres mis entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'article.

Le matériau étant isotrope, homogène, la fonctionnelle \mathcal{F} est une fonctionnelle isotrope. Celle-ci peut alors se mettre sous la forme d'un développement par intégrales multiples ayant la forme suivante :

$$\Pi(t) =$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{0^-}^t \dots \int_{0^-}^t \sum_{j=1}^{m(k)} [r_{kj}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots, t - \tau_k) \dot{\mathbf{E}}_1 \dots \dot{\mathbf{E}}_i \times \quad (2)$$

$$\times \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{i+1} \dots \dot{\mathbf{E}}_{i+q}) \dots \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{i+q+1} \dots \dot{\mathbf{E}}_k) d\tau_1 \dots d\tau_k]$$

où les $r_{ki}(t_1, \dots, t_k)$ sont des fonctions relaxation d'ordre k , dépendant de k variables, et où $\dot{\mathbf{E}}_j$ désigne $\dot{\mathbf{E}}(\tau_j)$.

L'indice i dans (1) peut varier de 0 à k ; les termes en $i = 0$ doivent être multipliés par le tenseur unité 1 et les traces doivent disparaître dans les termes pour lesquels $i = k$. L'indice q peut varier de 1 à $k - i$.

Lockett a décrit en [5] une méthode expérimentale d'obtention des fonctions relaxation r_{kj} , et a fait remarquer également, après Gradowczyk [11], qu'il peut être illusoire de vouloir prendre un développement tel que (2) au-delà de $n = 3$, étant donnée la précision expérimentale escomptée sur $\Pi(t)$ et $\mathbf{E}(t)$.

1.2. Cas d'un matériau vieillissant

Pour un milieu viscoélastique vieillissant, les fonctions relaxation d'ordre k , r_{kj} écrites en (2) sont remplacées par des fonctions $r_{kj}(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ dépendant de $k+1$ variables (au lieu de k dans le cas non vieillissant). L'équation (2) devient alors :

$$\Pi(t) = \sum_{k=1}^n \int_{0^-}^t \dots \int_{0^-}^t \sum_{j=1}^{m(k)} [r_{kj}(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \dot{\mathbf{E}}_1 \dots \dot{\mathbf{E}}_i \times \quad (2 \text{ bis})$$

$$\times \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{i+1} \dots \dot{\mathbf{E}}_{i+q}) \dots \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_{i+q+1} \dots \dot{\mathbf{E}}_k) d\tau_1 \dots d\tau_k]$$

C'est sur ce cas général que nous allons maintenant développer la méthode permettant d'obtenir les relations entre fonctions fluage et relaxation, méthode qui est la même que celle déjà utilisée en [3] pour le cas non vieillissant.

2. PRINCIPE DE LA METHODE

Ecrivons tout d'abord la formule duale de (2 bis) donnant la déformation de Lagrange en fonction de la contrainte de Kirchhoff dans le cas vieillissant.

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{\alpha=1}^n \int_{0^-}^t \dots \int_{0^-}^t \sum_{\beta=1}^{h(\alpha)} [f_{\alpha\beta}(t; \tau_1, \dots, \tau_\alpha) \dot{\Pi}_1 \dots \dot{\Pi}_j \times \quad (3)$$

$$\times \text{tr}(\dot{\Pi}_{j+1} \dots \dot{\Pi}_{j+q}) \text{tr}(\dot{\Pi}_{j+q+1} \dots \dot{\Pi}_\alpha)] d\tau_1 \dots d\tau_\alpha]$$

où les $f_{\alpha\beta}(t; \dots, t_\alpha)$ sont des fonctions fluage d'ordre α relatives au cas vieillissant.

Il s'agit maintenant de trouver les relations existant entre les $f_{\alpha\beta}$ et les r_{ki} .

Nous allons montrer que si l'on connaît les $f_{\alpha\beta}$ jusqu'à l'ordre j , alors on peut calculer les r_{ki} jusqu'à l'ordre j et réciproquement.

La méthode, mise au point avec l'aide de M. J. Mandel, qui aboutit le premier au résultat décisif, retrouvé ensuite puis complété par nous-mêmes (cf. [3]), consiste à prendre pour histoire de la sollicitation une fonction en escalier comportant j paliers (outre le repos initial) :

$$\mathbf{E}(t) = \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{E}_i Y(t - t_i) \quad (4)$$

où les \mathbf{E}_i sont des constantes indépendantes du temps et où $Y(t)$ est la fonction de Heaviside.

Calculons maintenant la réponse $\Pi(t)$ correspondant à cette déformation.

Nous constaterons tout d'abord qu'il n'intervient plus d'intégrales dans cette réponse puisque $\dot{\mathbf{E}}(t)$ est une somme de fonctions de Dirac.

$\Pi(t)$ est donc une fonction linéaire de $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_j$; $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_1 \text{tr} \mathbf{E}_2, \dots$. Le coefficient de \mathbf{E}_j est une fonction relaxation d'ordre 1; ceux de $\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2$ et de $\mathbf{E}_1 \text{tr} \mathbf{E}_2$ des fonctions d'ordre 2; celui de $\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_j$ une fonction relaxation d'ordre j .

Dérivons maintenant cette fonction $\Pi(t)$ par rapport au temps et reportons le résultat dans l'équation (3) que nous appellerons maintenant (3'). Nous obtenons ainsi une identité entre l'équation (4) et l'équation (3'), identité valable quels que soient les \mathbf{E}_i . Les coefficients des \mathbf{E}_i dans les équations (4) et (3') doivent donc être identifiés ce qui donne les relations cherchées. Les fonctions relaxation s'obtiennent ensuite de proche en proche à partir de ces relations. Nous déterminons tout d'abord les fonctions relaxation d'ordre 1 en identifiant les coefficients de \mathbf{E}_1 et de $\text{tr} \mathbf{E}_1$.

On remarquera facilement que nous obtenons un système d'équations intégrales de Volterra, linéaire, l'ordre des intégrales étant égal à 1.

Nous montrerons, en raisonnant sur le cas unidimensionnel (où le système se réduit à une équation), que les autres relations (relatives aux ordres supérieurs à 1) sont également des équations intégrales de Volterra, linéaires et d'ordre 1, propriété qui reste vraie dans le cas tridimensionnel.

3. SOLUTION EXPLICITE DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

3.1. Relations fonctionnelles entre les f_k et les r_j

Dans le cas unidimensionnel, l'équation (2 bis) s'écrit, pour un milieu viscoélastique vieillissant en allant jusqu'à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \Pi(t) = & \int_{0^-}^t r_1(t; \tau) \dot{E}(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t r_2(t; \tau_1, \tau_2) \dot{E}(\tau_1) \dot{E}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t r_3(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \dot{E}(\tau_1) \dot{E}(\tau_2) \dot{E}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (5)$$

De même, l'équation (3) devient :

$$\begin{aligned} E(t) = & \int_{0^-}^t f_1(t; \tau) \ddot{\Pi}(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t f_2(t; \tau_1, \tau_2) \ddot{\Pi}(\tau_1) \ddot{\Pi}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t f_3(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \ddot{\Pi}(\tau_1) \ddot{\Pi}(\tau_2) \ddot{\Pi}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Prenons pour histoire de la sollicitation

$$E(t) = \sum_{i=0}^2 E_i Y(t - t_i) \quad (7)$$

où $t_i < t_{i+1}$

Portons (7) dans (5). Nous trouvons alors la contrainte, relative à la déformation donnée par la relation (7).

Dérivons maintenant cette contrainte et portons l'expression ainsi obtenue dans l'équation (6). Nous obtenons alors une équation linéaire en $E_0, E_1, E_2, E_0 E_1, \dots, E_0 E_1 E_2$ que nous pouvons identifier avec l'équation (7).

Nous trouvons alors les relations suivantes

$$\int_{t_0^-}^t f_1(t; \tau) \dot{r}_1(\tau; t_0) d\tau = Y(t - t_0) \quad (8)$$

$$\int_{t_1^-}^t f_1(t; \tau) \dot{r}_2(\tau; t_0, t_1) d\tau = - \int_{t_1^-}^t \int_{t_0^-}^t f_2(t; \tau_1, \tau_2) \dot{r}_1(\tau_1; t_0) \dot{r}_1(\tau_2; t_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_2^-}^t f_1(t; \tau) \dot{r}_3(\tau; t_0, t_1, t_2) d\tau = & - \frac{2}{3} \int_0^t \int_0^t f_2(t; \tau_1, \tau_2) [\dot{r}_2(\tau_1; t_0, t_1) \dot{r}_1(\tau_2; t_2) + \\ & + \dot{r}_2(\tau_1; t_0, t_2) \dot{r}_1(\tau_2; t_1) + \dot{r}_2(\tau_1; t_1, t_2) \dot{r}_1(\tau_2; t_0)] d\tau_1 d\tau_2 + \\ & - \int_{t_2^-}^t \int_{t_1^-}^t \int_{t_0^-}^t f_3(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \dot{r}_1(\tau_1; t_0) \dot{r}_1(\tau_2; t_1) \dot{r}_1(\tau_3; t_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Les fonctions relaxation $r_1(t; t_0)$, $r_2(t; t_0, t_1)$ et $r_3(t; t_0, t_1, t_2)$ s'obtiennent ensuite en intégrant par parties les équations (8), (9) et (10).

L'équation de rang i est en effet ainsi ramenée à une équation de Volterra linéaire, de seconde espèce, non homogène, et d'ordre 1 par rapport à chacun des $r_i(t; t_0, \dots, t_{i-1})$, et dont le second membre contient, pour $i > 1$, les fonctions relaxation jusqu'à l'ordre $i - 1$. On sait qu'une telle équation de Volterra admet une solution unique.

Le calcul des r_i pourra donc se faire de proche en proche à partir du calcul de r_1 .

Les équations (9), (10) sont en effet de la forme :

$$\int_{t_{i-1}^-}^t f_1(t; \tau) \dot{r}_i(\tau; t_0, \dots, t_{i-1}) d\tau = - \Psi_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) \quad (11)$$

avec $i = 2$ ou 3 (il en serait d'ailleurs de même pour i supérieur à 3), et où Ψ_i contient les f_j jusqu'à l'ordre i , et les r_k jusqu'à l'ordre $i - 1$.

Après intégration par parties, on obtient, pour les équations (8) et (11) :

$$r_1(t; t_0) - \int_{t_0^+}^{t^-} \frac{1}{f_1(t; t)} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}(t; \tau) r_1(\tau; t_0) d\tau = \frac{Y(t - t_0)}{f_1(t; t)} \quad (12)$$

$$r_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}^+}^{t^-} \frac{1}{f_1(t; t)} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}(t; \tau) r_i(\tau; t_0, \dots, t_{i-1}) d\tau = - \frac{\Psi_i(t; t_0, \dots, t_{i-1})}{f_1(t; t)} \quad (13)$$

Il est remarquable de constater que la relation (12) entre r_1 et f_1 est justement celle de la viscoélasticité linéaire.

3.2. Allure et propriétés de la solution

Les équations (12) et (13) sont des équations de Volterra dont la forme canonique est :

$$x(t) - \lambda \int_a^t K(t; \tau) x(\tau) d\tau = g(t) \quad (14)$$

On remarque en outre que, sous la forme où nous les avons écrites, ces équations ont toutes même noyau et même paramètre λ , respectivement égaux à :

$$K(t, \tau) = \frac{1}{f_1(t; t)} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}(t; \tau) \quad (15)$$

$$\lambda = 1 \quad (16)$$

On sait (cf [7], [8]) que la solution d'une équation telle que (14) peut se mettre de façon unique sous la forme :

$$x(t) = g(t) + \lambda \int_a^t \Gamma(t, \tau; \lambda) g(\tau) d\tau \quad (17)$$

où $\Gamma(t, \tau; \lambda)$ est ce que l'on nomme le noyau résolvant de l'équation de Volterra (14).

On sait aussi que le noyau résolvant ne dépend que du noyau K auquel il est relié par une équation fonctionnelle, de la forme :

$$\Gamma(t, \tau; \lambda) - \lambda \int_{\tau}^t K(t, u) \Gamma(u, \tau; \lambda) du = K(t, \tau) \quad (18)$$

qui est elle-même une équation de Volterra linéaire de seconde espèce et non homogène. On note que (18) ne dépend pas de la limite inférieure a apparaissant dans l'équation (17).

Cette équation a une solution unique et suffit donc à déterminer Γ .

Γ peut d'ailleurs s'exprimer explicitement sous forme d'une série entière en λ :

$$\Gamma(t, \tau; \lambda) = K(t, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)} \quad (19)$$

où les $K^{(n)}$ sont les noyaux itérés, définis par la formule de récurrence :

$$K^{(n)}(t, \tau) = \int_{\tau}^t K(t, u) K^{(n-1)}(u, \tau) du \quad (i > 1) \quad (20)$$

avec

$$K^{(1)} = K(t, \tau) \quad (21)$$

En notant

$$\gamma(t, \tau) = \Gamma(t, \tau; 1) \quad (22)$$

l'équation (18) s'écrira, pour la valeur (15) du noyau :

$$\begin{aligned} \gamma(t, \tau) - \int_{\tau}^{t-} \frac{1}{f_1(t; t)} \frac{\partial f_1}{\partial u}(t; u) \gamma(u, \tau) du &= \quad (23) \\ &= \frac{1}{f_1(t; t)} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}(t; \tau) \end{aligned}$$

Une fois $\gamma(t, \tau)$ déterminé à partir de cette équation, on aura, pour $t > t_0$, et tenant compte de $r_1(t, t) = 1/f_1(t; t)$, obtenu en faisant $t_0 = t$ dans (12) :

$$r_1(t; t_0) = r_1(t; t) + \int_{t_0}^{t-} \gamma(t, u) r_1(u; u) du \quad (24)$$

et

$$\begin{aligned} r_1(t; t_0, \dots, t_{i-1}) &= -r_1(t; t) \Psi_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) + \quad (25) \\ &- \int_{t_0}^{t-} \gamma(t, u) r_1(u; u) \Psi_i(u; t_0, \dots, t_{i-1}) du \end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une équation de Volterra à résoudre, l'équation (23) en $\gamma(t, \tau)$. Une fois $\gamma(t, \tau)$ déterminé, on obtient les r_i de proche en proche à partir de r_1 par simple quadrature.

3.3. Calcul du noyau résolvant γ et expression finale de la solution

Si l'on reporte dans (12) la solution donnée par (17) avec $\gamma(t, t_0) = \Gamma(t, t_0; 1)$ on obtient, pour $t > t_0$,

$$r_1(t; t_0) \equiv r_1(t; t) + \int_{t_0}^{t-} \gamma(t, u) r_1(u; u) du \quad (26)$$

Si l'on soustrait membre à membre de (26) l'identité

$$r_1(t; t_0) = r_1(t; t) - \int_{t_0}^{t-} \frac{\partial r_1}{\partial u}(t; u) du \quad (27)$$

on obtient :

$$\int_{t_0}^{t-} [\gamma(t, u) r_1(u; u) + \frac{\partial r_1}{\partial u}(t; u)] du \equiv 0 \quad (28)$$

Ceci n'est possible pour tout t que si l'on a :

$$\gamma(t, u) r_1(u; u) \equiv - \frac{\partial r_1(t; u)}{\partial u} \quad (29)$$

Le noyau résolvant $\gamma(t, \tau)$ peut donc s'exprimer directement en fonction de $r_1(t, \tau)$ par :

$$\gamma(t, \tau) = - \frac{1}{r_1(\tau; \tau)} \frac{\partial r_1(t; \tau)}{\partial \tau} \quad (30)$$

ce qui montre que la solution de (23) est donnée par la solution de (12).

La fonction relaxation d'ordre i s'écrit donc finalement :

$$\begin{aligned} r_1(t; t_0, \dots, t_{i-1}) &= -r_1(t; t) \Psi_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) + \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t-} \frac{\partial r_1(t; u)}{\partial u} \Psi_i(u; t_0, \dots, t_{i-1}) du \quad (31) \end{aligned}$$

où $r_1(t; \tau)$ est la fonction relaxation d'ordre 1 solution de (12) et où les Ψ_1 sont donnés par (pour les ordres 2 et 3)

$$\Psi_2(t; t_0, t_1) = \int_{t_1^-}^t \int_{t_0^-}^{\tau} f_2(t; \tau_1, \tau_2) \dot{r}_1(\tau_1; t_0) \dot{r}_1(\tau_2; t_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(t; t_0, t_1, t_2) = & + \frac{2}{3} \int_{t_2^-}^t \int_{t_1^-}^{\tau} f_2(t; \tau_1, \tau_2) \dot{r}_2(\tau_1; t_0, t_1) \dot{r}_1(\tau_2; t_2) d\tau_1 d\tau_2 + \quad (33) \\ & + \frac{2}{3} \int_{t_1^-}^t \int_{t_2^-}^{\tau} f_2(t; \tau_1, \tau_2) \dot{r}_2(\tau_1; t_0, t_2) \dot{r}_1(\tau_2; t_1) d\tau_1 d\tau_2 + \frac{2}{3} \int_{t_0^-}^t \int_{t_2^-}^{\tau} f_2(t; \tau_1, \tau_2) \dot{r}_2(\tau_1; t_1, t_2) \dot{r}_1(\tau_2; t_0) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{t_2^-}^t \int_{t_1^-}^{\tau} \int_{t_0^-}^{\tau} f_3(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \dot{r}_1(\tau_1; t_0) \dot{r}_1(\tau_2; t_1) \dot{r}_1(\tau_3; t_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

On voit donc que, si par un léger abus de langage, on appelle noyau résolvant d'une équation intégral-différentielle de la forme [qui est celle prise par les équations (8), (9) et (10)] :

$$\int_{t_{i-1}}^t f_i(t; \tau) \dot{r}_i(\tau; t_0, \dots, t_{i-1}) d\tau = -\Psi_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) \quad (34)$$

la fonction $\beta(t, \tau)$ permettant d'écrire la solution $r_i(t; t_0, \dots, t_{i-1})$ sous la forme

$$r_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) = + \int_{t_{i-1}}^t \beta(t, u) \Psi_i(u; t_0, \dots, t_{i-1}) du + r_i(t, t) \Psi_i(t; t_0, \dots, t_{i-1}) \quad (35)$$

alors, ce noyau résolvant $\beta(t, \tau)$ est directement donné par

$$\beta(t, \tau) = \frac{\partial r_i(t; \tau)}{\partial \tau} \quad (36)$$

où r_i est la fonction relaxation d'ordre 1.

Bien entendu, on obtiendrait des résultats tout à fait analogues pour le problème dual du calcul des f_i connaissant les r_j ($j \geq i$).

4. COMPARAISON AU CAS NON VIEILLISSANT

Le cas non vieillissant n'étant qu'un cas particulier du cas vieillissant, les résultats ci-dessus s'appliquent également au cas non vieillissant, traité directement en [3] sur les équations duales exprimant les fonctions fluage en fonction des fonctions relaxation (et non l'inverse comme ici).

En effet, dans ce cas particulier, les fonctions fluage et relaxation à $n+1$ variables $f_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$ et $r_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$ s'écrivent $f_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)$ et $r_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n)$ qui ne sont plus qu'à n variables.

En donnant ces nouvelles valeurs aux fonctions fluage et relaxation dans les équations (8), (9) et (10), on obtient :

$$\int_{t_0^-}^t f_1(t - \tau) \dot{r}_1(\tau - t_0) d\tau = Y(t - t_0) \quad (37)$$

$$\int_{t_1^-}^t f_1(t - \tau) \dot{\psi}_2(\tau; t_0, t_1) d\tau = - \int_{t_1^-}^t \int_{t_0^-}^{\tau} f_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{r}_1(\tau_1 - t_0) \dot{r}_1(\tau_2 - t_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_2^-}^t f_1(t - \tau) \dot{\psi}_3(\tau; t_0, t_1, t_2) d\tau = & - \frac{2}{3} \int_{t_0^-}^t \int_{t_0^-}^{\tau} f_2(t - \tau_1, t - \tau_2) [\dot{\psi}_2(\tau_1; t_0, t_1) \dot{r}_1(\tau_2 - t_2) + \quad (39) \\ & + \dot{\psi}_2(\tau_1; t_0, t_2) \dot{r}_1(\tau_2 - t_1) + \dot{\psi}_2(\tau_1; t_1, t_2) \dot{r}_1(\tau_2 - t_0)] d\tau_1 d\tau_2 + \\ & - \int_{t_2^-}^t \int_{t_1^-}^{\tau} \int_{t_0^-}^{\tau} f_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \dot{r}_1(\tau_1 - t_0) \dot{r}_1(\tau_2 - t_1) \dot{r}_1(\tau_3 - t_2) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

où

$$\psi_2(\tau; t_0, t_1) = r_2(\tau - t_0, \tau - t_1) \quad (40)$$

$$\psi_3(\tau; t_0, t_1, t_2) = r_3(\tau - t_0, \tau - t_1, \tau - t_2) \quad (41)$$

Ces relations sont de la forme (12) — (13) avec $f_i(t; t_0) = f_i(t - t_0)$. De plus, en choisissant $t_0 = 0$ (ce qui est possible puisque le matériau est non vieillissant), on retrouve bien ici, pour le calcul des fonctions relaxation à partir des fonctions fluage, les équations duales de celles données en [3] pour le

calcul des fonctions fluage à partir des fonctions relaxation, soit (en éliminant l'argument nul t_0) :

$$\int_{0^-}^t f_1(t - \tau) \dot{r}_1(\tau) d\tau = Y(t) \quad (42)$$

$$\int_{t_{i-1}}^t f_1(t - \tau) \dot{\psi}_i(\tau; t_1, \dots, t_{i-1}) d\tau = -\Psi_i(t; t_1, \dots, t_{i-1}) \quad (43)$$

L'application directe du résultat (32) donne alors :

$$\psi_i(t; t_1, \dots, t_{i-1}) = + \int_{t_{i-1}}^{t-} \frac{\partial r_i(t-\tau)}{\partial \tau} \Psi_i(\tau; t_1, \dots, t_{i-1}) d\tau - r_i(0) \Psi_i(t; t_1, \dots, t_{i-1}) \quad (44)$$

Ce qui, compte tenu du caractère commutatif du produit de convolution, s'écrit encore :

$$\psi_i(t; t_1, \dots, t_{i-1}) = - \int_{0-}^{t-t_{i-1}} \dot{r}_i(\tau) \Psi_i(t-\tau; t_1, \dots, t_{i-1}) d\tau \quad (45)$$

qui tient compte de ce que Ψ_i est nulle pour $t-\tau < t_{i-1}$, et où $\psi_i \equiv r_i(t, t-t_1, \dots, t-t_{i-1})$.

Cette équation a bien même forme que l'équation (10) de [3] dont elle est la duale en relaxation (on a donné en [3] au sens du vocable « noyau résolvant » utilisé pour la duale de (43), la même extension que celle signalée plus haut).

La seule différence avec le cas vieillissant réside dans le fait que $r_i(t)$ se calcule aisément par l'emploi de la transformation de Carson, qui donne, à partir de (42), la relation bien connue entre les transformées $f_1^*(p)$ et $r_1^*(p)$ de $f_1(t)$ et $r_1(t)$:

$$f_1^*(p) r_1^*(p) = 1 \quad (46)$$

soit :

$$r_1^*(p) = \frac{1}{f_1^*(p)} \quad (47)$$

L'équation (45) s'écrit elle-même, après transformation de Carson

$$\psi_i^*(p; t_1, \dots, t_{i-1}) = - r_1^*(p) \Psi_i^*(p; t_1, \dots, t_{i-1}) \quad (48)$$

que l'on pouvait obtenir directement, en tenant compte de (47), de la transformée de Carson de l'équation (43) :

$$f_1^*(p) \psi_i(p; t_1, \dots, t_{i-1}) = - \Psi_i^*(p; t_1, \dots, t_{i-1}) \quad (49)$$

Bien entendu, l'utilisation pratique des relations (48) et (49) impose que l'on ait d'abord explicité en fonction du temps, dans chaque cas particulier, les fonctions $\Psi_i(t; t_1, \dots, t_{i-1})$ constituant au signe près les seconds membres des équations (38) et (39). En effet, dans la forme où ils apparaissent en (38) et (39), ces seconds membres ne se prêtent pas à une transformation directe sous forme des transformées des fonctions composantes.

Dans le calcul des intégrales intervenant dans les Ψ_i^* on pourra cependant s'aider de la méthode de la transformation \mathcal{H}_n présentée en [9], [10], et qui fait intervenir le produit d'une dissymétrisation par une transformation de Carson à plusieurs variables.

CONCLUSION

La méthode présentée ici résout complètement, et dans le cas le plus général (milieu tridimensionnel viscoélastique non linéaire vieillissant), le problème

de la détermination des fonctions relaxation à partir des fonctions fluage, et réciproquement, dans le cadre de la représentation des équations de comportement de la viscoélasticité non linéaire par le développement de Fréchet-Green-Rivlin par intégrales multiples.

Cette méthode aboutit à des solutions exactes, ne faisant intervenir aucune approximation.

Il est remarquable de constater que, partant d'un problème non linéaire, les relations intégrales obtenues sont des équations de Volterra linéaires, et comportant de ce fait une solution unique. Ceci tient sans doute au fait que, comme l'avait montré Volterra lui-même [8], l'équation (6) considérée comme une équation intégrale non linéaire en Π a elle-même une solution unique.

Ceci montre que, une fois connues ces relations dans la forme où nous les donnons ici, les difficultés à résoudre sont de même nature qu'en viscoélasticité linéaire, et peuvent se surmonter par les mêmes méthodes.

De plus, nous avons pu montrer qu'en fait, la taille du système d'équations linéaires de Volterra à résoudre est exactement la même que dans le cas de la viscoélasticité linéaire, et ne dépend que du nombre de dimensions du milieu (elle est égale à 1 pour le milieu unidimensionnel). En outre, ces équations, qui relient les fonctions fluage et relaxation d'ordre 1, sont exactement les mêmes que celles de la viscoélasticité linéaire, si bien que toutes les techniques et résultats obtenus dans le cas linéaire pourront être utilisés directement.

En effet, une fois résolue l'équation ou le système d'ordre 1, les solutions pour les ordres supérieurs s'écrivent directement de proche en proche sous forme de quadratures simples.

Les résultats que nous avons présentés ont donc un intérêt pratique considérable, en particulier du fait que les résultats expérimentaux sont le plus souvent obtenus en fluage, alors que beaucoup de problèmes ou de méthodes de calcul (méthodes aux déformations ou aux déplacements notamment) exigent la connaissance des fonctions relaxation.

Les calculs à effectuer pour l'application des formules obtenues nécessitent, comme dans le cas linéaire, les moyens du calcul automatique, et peuvent poser des problèmes numériques, qui bien qu'abondamment étudiés, restent délicats.

Par ailleurs, il ne faut pas se dissimuler que la validité des applications de la méthode à des résultats expérimentaux reste suspendue à la valeur des résultats tirés du développement initial, qui n'est pas sans poser des problèmes pratiques largement discutés dans la littérature.

On notera également que la limitation à un ordre fini donné du développement faisant intervenir les fonctions fluage (par exemple) n'implique pas en général que le développement obtenu en relaxation sera limité au même ordre. Ce point, qui avait déjà été signalé par ailleurs, est peut être mis en évidence ici de façon particulièrement simple. En effet, si l'on limite par exemple à 2 l'ordre du développement unidimensionnel en fluage (ce qui revient à prendre $f_i \equiv 0 \forall i > 3$), on constate que le terme Ψ_3 constituant au signe près le second membre de (10) ne s'annule pas, puisqu'il contient un terme d'ordre 2. La forme prise par la solution (32) montre alors clairement que la fonction relaxation d'ordre 3 n'est pas nulle, et il en est de même des termes d'ordre supérieur qui seraient fournis par la poursuite de la méthode d'identification ayant conduit aux équations (8) à (10).

Par contre, on constate fort heureusement que, pour $i \geq 2$, les Ψ_i ne contiennent pas de terme d'ordre 1, ce qui confirme le fait que, si le développement de fluage est limité à l'ordre 1 (hypothèse de linéarité), alors le développement de relaxation est également d'ordre 1.

Quoi qu'il en soit de ces limitations, inévitables dès qu'il s'agit de représenter la réalité expérimentale par une modélisation sur la base d'une expérimentation limitée, il apparaît que les résultats présentés ici sont de nature à permettre des progrès importants dans le domaine très difficile de la viscoélasticité non linéaire, notamment pour ce qui concerne les possibilités de traitement de problèmes pratiques, qui conduiront cependant nécessairement à des calculs restant assez lourds, en particulier au niveau de l'évaluation des intégrales intervenant dans les Ψ_i .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.S. LAI et W.N. FINDLEY — Prediction of uniaxial stress relaxation from creep of non linear behavior of viscoelastic material (Trans. Sc. Rheol., v. 12, n° 2, p. 243-258, 1968).
- [2] A. MOLINARI — Sur la relation entre fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire (C.R. Acad. Sc. Paris ; Tome 277 ; 1^{er} octobre 1973, série A).
- [3] J.M. SERVAS, C. HUET, J. MANDEL — Sur les relations entre fonctions fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire (C.R. Acad. Sc. Paris ; Tome 277 ; 19 novembre 1973, série A).
- [4] J.S. LAI et W.N. FINDLEY — A modified superposition principle applied to creep of non linear viscoelastic material under abrupt changes of state of combined stress (Trans. Soc. Rhéol. v. 11, n° 3, p. 361-380 ; 1967).
- [5] LOCKETT — Non linear viscoelastic Solids (Academic Press, London et New-York, 1972).
- [6] J. MANDEL — Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 241, 1955, p. 1910, série A).
- [7] E. GOURSAT — Cours d'analyse mathématique, Tome III (Gauthier-Villars, Paris, 1953).
- [8] V. VOLTERRA — Theory of functional and of integral and intégral-differential equations (Leçons de Madrid 1925. Dover Publications, New-York 1959).
- [9] C. HUET — Application à la viscoélasticité non linéaire du calcul symbolique à plusieurs variables (Comptes-Rendus du VI^e Congrès Int. de Rhéologie, Lyon 1972 ; Rhéologica Acta 12, 279-288, 1973).
- [10] C. HUET — Viscoélasticité non linéaire et calcul symbolique (Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, Tome III, n° 4 ; septembre 1974).
- [11] M.H. GRADOWCZYK — On the accuracy of the Green — Rivlin representation for viscoelastic materials (Int. J. Solids Structures, vol. 5, p. 873-877 ; 1969).

Mécanique générale des corps biologiques solides*

par M. DIKMEN, professeur à l'Université technique d'Istanbul

RESUME

Le corps biologique solide se sépare, sous beaucoup d'aspects, des corps solides inertes. Une mécanique des milieux continus pour ce type de corps doit nécessairement tenir compte de ces caractères particuliers. Un milieu continu consistant en une phase solide et une phase liquide formant ensemble un système thermodynamiquement ouvert fournit un modèle adéquat et général. La cinématique de ce milieu est étudiée en prenant la phase solide comme repère mobile et déformable. Les équations de bilan ainsi que l'inégalité d'entropie sont établies. Un axiome de structure complète le système habituel d'axiomes de la théorie constitutive.

ABSTRACT

The biological solids differ in several respects from the inert solids. A continuum mechanics of this type of bodies must necessarily take into account these features. A continuum consisting of a solid and a liquid phase forming together a thermodynamically open system furnishes an adequate and general model. The kinematics of this continuum is studied by taking the solid phase as a moving and deformable reference. The balance equations as well as the entropy inequality are established. An axiom of structure completes the usual set of axioms of the constitutive theory.

I. INTRODUCTION

La plupart des travaux de biomécanique négligent de prendre en considération la propriété essentielle des corps biologiques, celle d'appartenir à un organisme vivant. En effet, on se sert des lois de comportement établies pour des corps inertes, ou bien on cherche à établir des lois de comportement à partir des résultats expérimentaux. Mais, le plus souvent, ces résultats sont obtenus sur des échantillons détachés de l'organisme vivant et qui ne sont donc plus vivants. Ce qui est plus, avant d'expérimenter, on fait attendre ces échantillons dans des conditions bien définies, jusqu'à ce qu'ils atteignent un état dit « mécaniquement stabilisé » et qui peut correspondre à des propriétés mécaniques assez différentes de celles à l'état vivant.

Pour aborder une mécanique rationnelle générale des corps biologiques solides, il faut avant tout les caractériser sans ambiguïté. Nous commençons donc par poser la question suivante : quel est ou quels sont les caractéristiques qui servent à distinguer les corps vivants des corps inertes ? Il faut tout de suite pré-

ciser que cette question est essentiellement différente de : qu'est-ce que la vie ?

A la question que nous venons de poser, des réponses différentes peuvent être données à des niveaux différents :

1° C'est Cl. Bernard qui, le premier, a mis en évidence le « milieu intérieur ». Il écrivait [1]¹ que « chez les êtres vivants élevés, il y a au moins deux milieux à considérer : le *milieu extérieur* ou extra-organique et le *milieu intérieur* ou intra-organique ». Le milieu intérieur qui est constitué par le sang et la lymphe est un produit de l'organisme, contrôlé par celui-ci et qui maintient l'organisme entre des limites très étroites de conditions de température, de pression et de concentration en dépit des fluctuations dans le milieu extérieur.

2° On observe dans la chimie des êtres vivants une sélectivité de stéréo-asymétrie moléculaire. L. Pasteur [2] y voyait la « ligne de démarcation bien tranchée » entre la chimie de la « nature morte » et la chimie de la « nature vivante ». Cette sélectivité fait penser à des questions de probabilités asymétriques et de stabilité, questions qui paraissent être encore loin d'être résolues [3].

* Réunion du 10 juin 1976 du Groupe Français de Rhéologie à Paris.

1. Les chiffres mis entre crochets [] renvoient à la bibliographie en fin d'article, page 74.

3° La génétique donne une réponse beaucoup plus fondamentale, à savoir que [4] les êtres vivants possèdent les propriétés d'automorphisme, d'invariance et de téléonomie.

L'existence d'un milieu intérieur montre la nécessité de modéliser le corps biologique solide en général par un mélange d'au moins deux phases : une phase solide (S) et une phase liquide (L). De 2° et 3°, nous retiendrons la tendance et la capacité des êtres vivants de produire des structures : nous l'énonçons sous la forme d'un axiome.

Le corps biologique solide ainsi constitué d'une phase solide qui forme la structure solide proprement dite et d'une phase liquide qui forme le milieu intérieur, est la scène des processus métaboliques et échange de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur : il s'agit d'un système thermodynamiquement ouvert. Tandis que l'évolution d'un système physique isolé ne peut pas se dérouler dans le sens de l'ordre croissant, c'est tout à fait le contraire qui a lieu dans l'évolution des êtres vivants. C'est que les systèmes ouverts peuvent être maintenus à des états stationnaires loin de l'état d'équilibre thermodynamique. Ceci mène à l'étude de la stabilité de ce type d'états stationnaires [5] [6] ; mais, dans plusieurs cas, la thermodynamique irréversible linéaire peut suffire à l'étude des phénomènes physiologiques (voir par ex. [7]).

II. CINEMATIQUE

C'est à leur structure solide qu'on reconnaît les objets vivants. Toutes les descriptions et mesures doivent donc pouvoir être rapportées aux configurations de la structure solide. Nous admettrons, comme dans les théories des mélanges, que les deux phases peuvent être simultanément présentes à tout point de l'espace.

1/ COORDONNEES :

Les points d'une configuration déterminée de la phase solide, prise comme configuration de référence, seront marqués dans un système \mathbf{X} , tandis que les positions des points soit de S, soit de L seront déterminées dans un système de coordonnées quelconque (mais fixé dans l'espace) \mathbf{x} .

2/ MOUVEMENTS :

Le mouvement de S est exprimé par la relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

Quant au mouvement de L, il sera décrit par une relation de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}[\mathbf{X}(t), t] \quad (2)$$

qui contient la description du mouvement de L à l'intérieur de S. t désigne le temps.

En ce qui concerne S, le gradient des déformations $x^k_{,k}$ (ou \mathbf{F}) peut être calculé à partir de (1). Mais, tandis que dans le cas des corps inertes \mathbf{F} ne résulte que des mouvements rigides et des déformations au sens habituel, un troisième élément vient s'ajouter dans le cas présent : la croissance. En effet, les corps biologiques étant en échange de matière avec le milieu extérieur, la conservation de masse, exprimée par la relation

$$\rho = J^{-1} \rho_0 \quad (3)$$

ou ρ est la masse spécifique totale (de S et L) dans une configuration à l'instant t de S, ρ_0 la masse spécifique totale au point correspondant dans la configuration de référence, et $J \equiv |\mathbf{F}|$, n'est plus valable en général. Nous n'insistons pas ici sur ce fait, comme nous allons revenir sur le bilan des masses ; mais, nous retenons que \mathbf{F} contient en général la croissance aussi.

3/ VITESSES ET ACCELERATIONS :

Soit v la vitesse d'un point de L. On a

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} + x^i_{,j} \frac{dX^j}{dt} \quad (4)$$

ou

$$v = \mathbf{v} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{W} \quad (5)$$

où \mathbf{v} est la vitesse du point de S, occupant au même instant t la même position \mathbf{x} et \mathbf{W} est un vecteur vitesse rapporté à la configuration de référence définie ci-dessus.

Dans ce qui suit, il sera commode d'introduire le vecteur \mathbf{w} , différence des champs de vitesses de L et de S, de sorte que

$$v = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad (6)$$

avec

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{W} \quad (7)$$

L'accélération des points de L est donnée par

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + x^i_{,j} \frac{DW^j}{Dt} + 2v^i_{,k} x^k_{,j} W^j + v^i_{,k} v^k \quad (8)$$

où

$$\frac{DW^j}{Dt} \equiv \frac{\partial W^j}{\partial t} + W^j_{,k} W^k \quad (9)$$

La signification des deux premiers termes est évidente. Le troisième terme correspond à l'effet de Coriolis et le quatrième est un terme convectif.

III. LES LOIS GENERALES

On considère une configuration instantanée du corps. Tout se passe alors, comme si un volume matériel déterminé de L et un volume matériel déterminé de S occupaient à l'instant donné cette même région de l'espace, en échangeant énergie et matière.

1/ BILAN DES MASSES :

On a

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v}) = \tau \quad (10)$$

pour S et

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})] = -\tau \quad (11)$$

pour L.

τ désigne le taux d'échange matériel entre L et S. ρ_1 et ρ_2 sont les masses par unité de volume de L et de S (et sont différentes des masses spécifiques de chacun des constituants séparément). Leur somme

$$\rho \equiv \rho_1 + \rho_2 \quad (12)$$

est la masse spécifique du corps.

τ correspond, en général, à plusieurs réactions chimiques simultanées.

L'équation (11) peut être écrite sous une forme légèrement différente :

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{v}) = -\tau - \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{w}) \quad (13)$$

ou encore

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) - \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2 \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{w}) - \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\partial(\rho_2 \mathbf{w})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{w} \mathbf{w}) \right] - \mathbf{v} \cdot \operatorname{div}[\rho_2(\mathbf{v} \mathbf{w} + \mathbf{w} \mathbf{v})] \quad (18)$$

Ici,

$$\rho \mathbf{f} \equiv \rho_1 \mathbf{f}_1 + \rho_2 \mathbf{f}_2 \quad (19)$$

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \quad (20)$$

est défini comme le tenseur de contrainte totale et

$$\frac{d(\quad)}{dt} \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \operatorname{grad}(\quad) \cdot \mathbf{v}$$

En ajoutant terme à terme les deux côtés des équations (10) et (13), on obtient le bilan de la masse totale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{w}) \quad (14)$$

Le terme à droite représente l'apport convectif.

2/ BILAN DES QUANTITES DE MOUVEMENT :

En désignant par \mathbf{m} le taux d'échange de quantité de mouvement, on a :

$$\frac{\partial(\rho_1 \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{T}_1 = \mathbf{m} + \rho_1 \mathbf{f}_1 \quad (15)$$

pour S et

$$\frac{\partial[\rho_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})]}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})(\mathbf{v} + \mathbf{w})] - \operatorname{div} \mathbf{T}_2 = -\mathbf{m} + \rho_2 \mathbf{f}_2 \quad (16)$$

pour L.

\mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont les forces de masse qui agissent sur S et L. \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 sont les tenseurs des contraintes partielles, définis à partir des vecteurs de contraintes \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 par $\mathbf{t}_1 = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{t}_2 = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{n} désigne le vecteur unité normal à la surface.

Les équations (15) et (16) ensemble donnent

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{v} \mathbf{v}) - \mathbf{T}] = \rho \mathbf{f} - \left[\frac{\partial(\rho_2 \mathbf{w})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{w} \mathbf{w}) \right] - \mathbf{v} \operatorname{div}[\rho_2(\mathbf{v} \mathbf{w} + \mathbf{w} \mathbf{v})] \quad (17)$$

3/ BILAN DES MOMENTS CINÉTIQUES :

Si l'on admet, comme nous le ferons par souci de simplicité, que les corps biologiques, pris comme un tout, sont non-polaires, le bilan des moments cinétiques a pour conséquence la symétrie du tenseur T, les tenseurs \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 pouvant néanmoins ne pas être symétriques.

4/ BILAN D'ENERGIES :

On a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}_1 + \mathbf{q}_1 \right] = h + \rho_1 (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{v} + r_1) \quad (21)$$

pour S et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_2 \left[\varepsilon_2 + \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 \right] \right\} + \operatorname{div} \left\{ \rho_2 \left[\varepsilon_2 + \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 \right] (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{q}_2 \right\} = \left. \begin{aligned} &= -h + \rho_2 [\mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + r_2] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

pour L.

ε_1 et ε_2 sont les énergies internes spécifiques (par unité de masse), r_1 et r_2 les sources d'énergie dues aux effets extérieurs, et $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ les flux non-convectifs d'énergie. h désigne le taux d'échange d'énergie entre L et S. On définit l'énergie interne spécifique totale, la source totale et le flux total, par

$$\left. \begin{aligned} \rho \varepsilon &\equiv \rho_1 \varepsilon_1 + \rho_2 \varepsilon_2 \\ \rho r &\equiv \rho_1 r_1 + \rho_2 r_2 \\ \mathbf{q} &\equiv \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Les équations (21) et (22) ajoutées l'une à l'autre donnent, compte tenu de (18), (14), (15), (12) et (23),

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \varepsilon \operatorname{div} (\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div} (\rho \varepsilon \mathbf{w}) - \mathbf{T} : \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho r - \mathbf{T} : \operatorname{grad} \mathbf{w} + \\ + \{ \mathbf{v} \cdot [\mathbf{m} - \tau \mathbf{v}] + \frac{1}{2} \tau \mathbf{v}^2 \} - \{ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{m} - \tau (\mathbf{v} + \mathbf{w})] + \frac{1}{2} \tau (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 \} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Les termes entre accolades nécessitent une explication. En fait, ils se réduisent à

$$- \left[\mathbf{w} \cdot \mathbf{m} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^2) \tau \right]$$

dont le premier terme correspond à l'échange de quantité de mouvement et le deuxième à l'échange de matière. Néanmoins, la forme maintenue dans (24) fait ressortir les quantités $[\mathbf{m} - \tau \mathbf{v}]$ et $[\mathbf{m} - \tau (\mathbf{v} + \mathbf{w})]$ que l'on admet, dans les théories des mélanges, être objectives. En effet, \mathbf{m} comporte une partie qui provient des interactions mécaniques et est objective

et une partie qui est due à l'échange de matière et qui peut être conçue comme étant égale au taux d'échange τ multiplié par une vitesse moyenne. La différence entre cette deuxième partie et $\tau \mathbf{v}$ (ou $\tau (\mathbf{v} + \mathbf{w})$) est alors objective. La somme des termes entre accolades dans (24) peut aussi s'écrire :

$$- \left\{ \mathbf{w} \cdot [\mathbf{m} - \tau \mathbf{v}] + \frac{1}{2} \tau \mathbf{w}^2 \right\}.$$

Nous mettons, pour usage ultérieur, les équations (21) et (22) séparément sous une forme semblable à celle de (24) :

$$\rho_1 \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \varepsilon_1 \tau + \left\{ \mathbf{v} \cdot [\mathbf{m} - \tau \mathbf{v}] + \frac{1}{2} \tau \mathbf{v}^2 \right\} - \mathbf{T}_1 : \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{q}_1 = h + \rho_1 r_1 \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 \frac{d\varepsilon_2}{dt} - \varepsilon_2 \tau - \left\{ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{m} - \tau (\mathbf{v} + \mathbf{w})] + \frac{1}{2} \tau (\mathbf{v} + \mathbf{w})^2 \right\} - \mathbf{T}_2 : \operatorname{grad} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \\ + \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = -h + \rho_2 r_2 - \rho_2 \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

5/ INEGALITE D'ENTROPIE :

Ici, il ne s'agit plus d'écrire des inégalités pour S et L séparément, mais une seule inégalité pour les deux pris ensemble :

$$\left\{ \frac{\partial (\rho_1 \eta_1)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_1 \eta_1 \mathbf{v} + \Phi_1) - \rho_1 s_1 \right\} + \left\{ \frac{\partial (\rho_2 \eta_2)}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho_2 \eta_2 (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \Phi_2] - \rho_2 s_2 \right\} \geq 0 \quad (27)$$

où η_1 et η_2 sont les entropies par unités de masse, Φ_1 et Φ_2 les flux non-convectifs d'entropie, s_1 et s_2 les productions d'entropie dues aux effets extérieurs, dans S et L respectivement.

A l'aide des définitions

$$\left. \begin{aligned} \rho \eta &\equiv \rho_1 \eta_1 + \rho_2 \eta_2 \\ \Phi &\equiv \Phi_1 + \Phi_2 \\ \rho s &\equiv \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

des quantités totales correspondantes, (27) prend la forme

$$\rho \frac{d\eta}{dt} - \eta \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) + \operatorname{div} \Phi + \operatorname{div}(\rho_2 \eta_2 \mathbf{w}) - \rho s \geq 0 \quad (29)$$

Nous admettons la possibilité de températures différentes, θ_1 pour S et θ_2 pour L. Nous admettons aussi, comme dans les théories des mélanges, que les productions d'énergie et d'entropie dues aux effets extérieurs (tels que rayonnement) sont liées par les relations

$$s_1 = \frac{r_1}{\theta_1}, \quad s_2 = \frac{r_2}{\theta_2} \quad (30)$$

Il est commode de définir une nouvelle quantité

$$\Delta \equiv \frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \quad (31)$$

et d'écrire θ au lieu de θ_1 .

Compte tenu de (30) et (31) et du fait que $\theta > 0$, l'inégalité d'entropie (29) prend la forme

$$\theta \rho \frac{d\eta}{dt} - \theta \eta \operatorname{div}(\rho_2 \mathbf{w}) + \theta \operatorname{div}(\Phi + \rho_2 \eta_2 \mathbf{w}) - \rho r - \theta \Delta \rho_2 r \geq 0 \quad (32)$$

On peut alors éliminer r et r_2 , en ayant recours aux équations (24) et (26), pour obtenir

$$\left. \begin{aligned} -\rho \frac{d\bar{\Psi}}{dt} + \bar{\Psi} \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) - \rho \eta \frac{d\theta}{dt} + \theta \operatorname{div} \bar{\mathbf{k}} + \mathbf{T} : \operatorname{grad} \mathbf{v} - \\ - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \operatorname{grad} \theta + \mathbf{T}_2 : \operatorname{grad} \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \left[(\mathbf{m} - \tau \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \tau \mathbf{w} \right] + \theta \Delta \bar{h} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

où l'on a posé, par définition,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi} &\equiv \varepsilon - \eta \theta \\ \bar{\mathbf{k}} &\equiv \Phi - \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \rho_2 \eta_2 \mathbf{w} \\ \bar{h} &\equiv -h - \rho_2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon \tau + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \left\{ [\mathbf{m} - (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \tau] + \frac{1}{2} \tau (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \right\} + \\ &\quad + \mathbf{T}_2 : \operatorname{grad}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho_2 \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

L'équation (26) permet de conclure que \bar{h} est objectif si r est objectif, ce qui est en général admis. D'autres formes équivalentes peuvent évidemment être données à l'inégalité (33), selon l'usage qu'on en fera en obtenant les équations constitutives.

d'être simple : toute matière échangée dans l'un ou l'autre sens revêt immédiatement les mêmes propriétés matérielles, y compris celles de symétrie, que la phase à laquelle elle vient s'ajouter.

IV. AXIOME DE STRUCTURE

Outre les axiomes bien connus de la théorie constitutive des milieux continus inertes, la mécanique des corps vivants nécessite encore un axiome pour déterminer la structure de la matière échangée, après l'échange. Cet axiome peut être énoncé sous la forme suivante, qui bien que n'étant pas assez générale pour englober certains cas pathologiques, a l'avantage

V. CONCLUSION

La théorie générale présentée ci-dessus permet d'aborder d'une façon rationnelle la mécanique des corps biologiques solides. Evidemment, des simplifications peuvent être apportées dans des cas particuliers. Ainsi, la croissance étant un processus lent en général, il suffirait de choisir une configuration de référence dans un passé assez proche pour étudier la déformation au sens usuel. Dans d'autres cas, on pourrait éventuellement prendre $\Delta = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Cl. BERNARD — Introduction à la Médecine expérimentale. Paris, 1865.
- [2] L. PASTEUR — Recherches sur la dissymétrie moléculaire des produits organiques naturels. Paris, 1860.
- [3] W.M. ELSASSER — Dans « Theoretical Physics and Biology » (Editeur : M. Marois), North-Holland, Amsterdam/London, 1969., p. 61.
- [4] J. MONOD — Le Hasard et la Nécessité. Editions du Seuil, Paris, 1970.
- [5] P. GLANSDORFF et I. PRIGOGINE — Structure, Stabilité et Fluctuations. Masson, Paris, 1971.
- [6] I. PRIGOGINE — Dans « Theoretical Physics and Biology » (Editeur : M. Marois), North-Holland, Amsterdam/London, 1969, pp. 23-52.
- [7] M. DIKMEN — Counter-current Phenomena in the Renal Medulla. METU Journal of Pure and Applied Sciences (sous presse).

V. CONCLUSION

La théorie générale présentée ci-dessus permet d'expliquer, dans une large mesure, la mécanique des corps biologiques solides. En particulier, les formes complexes peuvent être expliquées dans des cas particuliers. Ainsi, la croissance d'un organisme peut être expliquée par la théorie de la croissance. La théorie présentée ci-dessus permet d'expliquer, dans une large mesure, la mécanique des corps biologiques solides. En particulier, les formes complexes peuvent être expliquées dans des cas particuliers. Ainsi, la croissance d'un organisme peut être expliquée par la théorie de la croissance.

IV. AXIOME DE STRUCTURE

Cette théorie permet de donner une explication aux formes complexes des corps biologiques solides. En particulier, les formes complexes peuvent être expliquées dans des cas particuliers. Ainsi, la croissance d'un organisme peut être expliquée par la théorie de la croissance.

Bruits de roulement sur un rail

par W. BISMUTH, Maître de recherche au C.N.R.S.

RESUME

On étudie les bruits de frottement d'une roue de métro roulant sur un rail. Pour cela, nous avons réalisé une maquette à l'échelle 1/2 et simulé le rail par une roue dont le bandage a le même profil qu'un vrai rail.

On retrouve par l'analyse spectrale des phénomènes connus (bruit de roulement), mais aussi dès qu'il y a glissement, un crissement particulier d'un niveau sonore très élevé (120 dB) aux environs de 12 200 Hz.

SUMMARY

We study the different friction noises heard while the wheel of the metropolitan tube railway is sliding on its rail.

To this aim, we have built a half scale model and simulated the rail by a wheel the bandage of which has the same profile as a real rail.

We find by means of the spectral analysis of known phenomena (rolling noises), but also as soon as sliding occurs, a very high sound level grating (120 dB) et about 12 200 Hz.

Nous avons publié récemment dans *Acustica* (1973, 28, 272-277) un article intitulé : « Domaine d'existence de bruits de frottement et vérifications expérimentales ». Cette étude porte sur plusieurs pneumatiques frottant sur une piste en acier. A la suite de cette publication, la R.A.T.P. nous a demandé

d'étudier les bruits de frottement d'une roue de métro roulant sur rail. Pour des raisons d'encombrement, il nous a fallu réaliser une maquette à l'échelle 1/2. Celle-ci a été placée dans une chambre sourde dont les caractéristiques étaient connues. Nous avons simulé le rail par une roue de 350 mm de diamètre dont le bandage a le même profil qu'un vrai rail et on a remplacé la roue de métro par une roue identique de 430 mm. La *figure 1* montre le dessin synoptique de la maquette. La roue de métro est entraînée par le rail circulaire lui-même entraîné par un moteur.

Dans le montage réel, la roue du métro appuie sur le rail avec une charge de 2 tonnes. Nous avons dû calculer cette charge pour le cas simulé. L'analyse des volumes de contact montre que pour le cas réel, le contact est du type cylindre/cylindre. Dans ce cas, la surface d'appui est du type elliptique :

$$Ax^2 + By^2 = cte$$

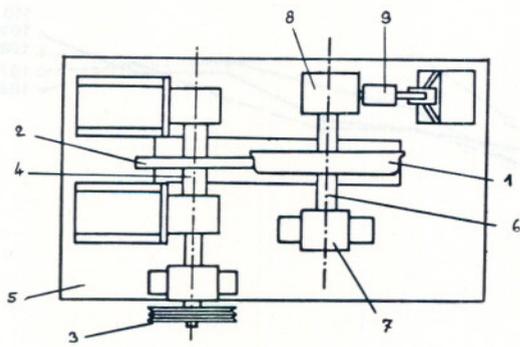
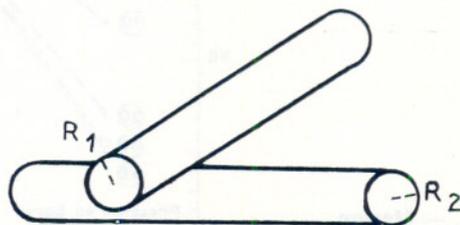


Fig. 1

1. Roue (diamètre 430 mm)
2. Roue remplaçant le rail (diamètre 350 mm)
3. Poulie
4. Arbre
5. Bâti en béton
6. Arbre
7. Palier articulé
8. Glissière
9. Vérin.



Contact cylindre-cylindre

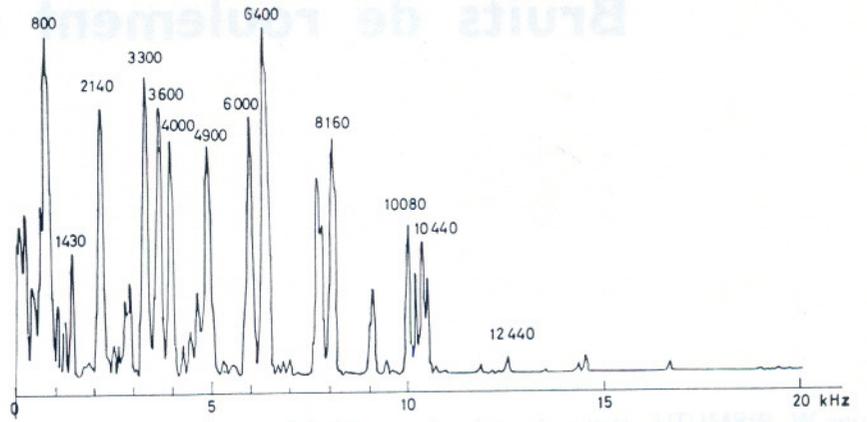


Fig. 2. — Roue Réponse au choc

Capture de transitoire. Retard + 1 (+ 0,025 s)
Résolution 40 Hz. Intégration 0,025 s.

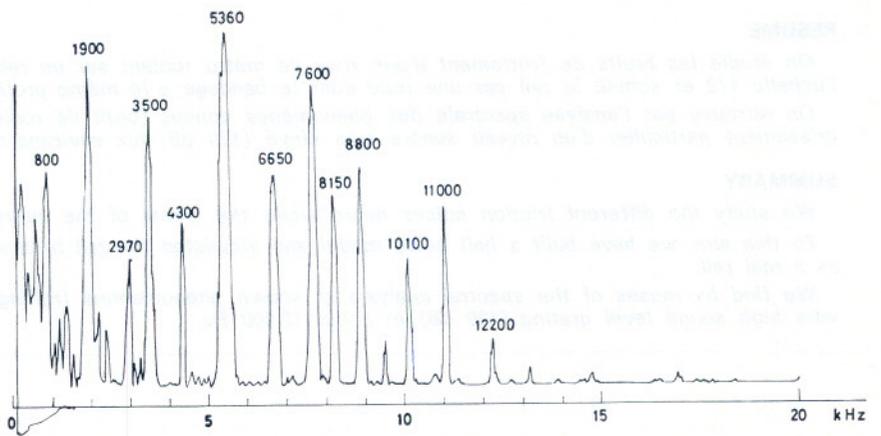


Fig. 3. — Rail Réponse au choc

Capture de transitoire. Retard + 1
Résolution 40 Hz. Intégration 0,025 s.

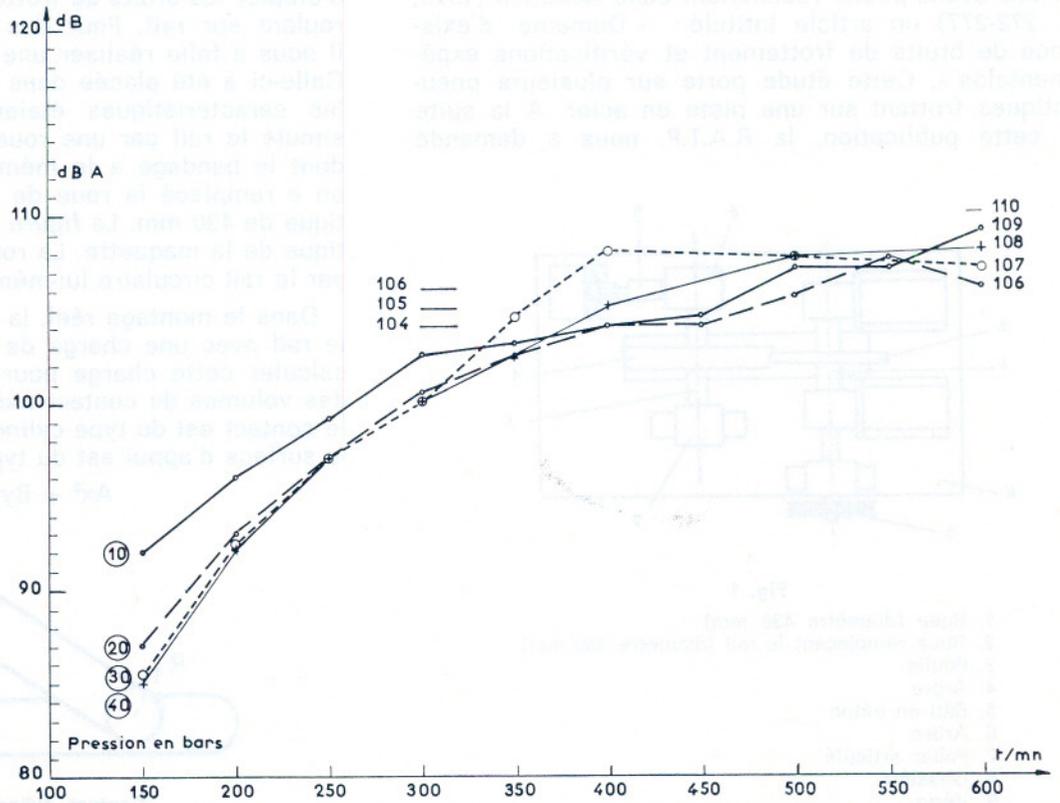


Fig. 4. — Mesure de bruit

et la contrainte maximum est alors :

$$\sigma_{\max} = \gamma \sqrt[3]{\frac{Q_1 E^2}{R_2^2}}$$

avec Q charge

E module d'élasticité

γ coefficient déterminé par graphique fonction de A/B.

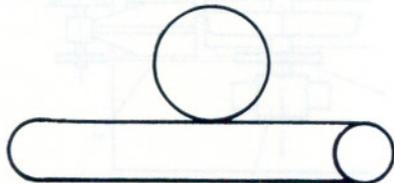
Les coefficients A et B de l'ellipse étant donnés par :

$$A = \frac{1}{2 R_2} \quad B = \frac{1}{2 R_1}$$

et dans ce cas :

$$\sigma_{\max} = 0,41 \sqrt[3]{\frac{Q_1 E^2}{0,185}}$$

Dans le cas simulé, le contact est du type sphère cylindre. En effet, pour la roue simulant le rail, le rayon de courbure transversal est égal au rayon de cette roue.



Contact sphère-cylindre

Les paramètres de l'ellipse, qui sera alors plus aplatie que dans le cas réel, seront donnés par :

$$A = \frac{1}{2 R_1} \quad B = \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2}$$

$$\text{et } \sigma_{\max} = 0,47 \sqrt[3]{\frac{Q_2 E^2}{0,0305}}$$

Si nous désirons avoir la même contrainte maximum que dans le cas réel, la charge Q_2 sur le modèle devra être tel que :

$$0,47 \sqrt[3]{\frac{Q_2 E^2}{0,0305}} = 0,41 \sqrt[3]{\frac{Q_1 E^2}{0,185}}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 0,11$$

En général, la charge Q_1 est de 2 tonnes et par conséquent celle de Q_2 sera de 220 kg*.

A l'aide d'une chaîne Brüel et Kjaer adéquate pour ce type d'expérience, nous avons fait plusieurs séries de mesures qui consistaient :

- à rechercher les périodes propres de la roue et du « rail-roue » en les soumettant à des chocs brefs et répétés. Les figures 2 et 3 montrent les résultats obtenus. La résonance de la roue est prépondérante en raison du faible amortissement en particulier pour la fréquence de 850 Hz ;

* Ces résultats ont été inspirés d'un article, extrait de la revue « Ingénieur et Technicien », écrit par Schonick.

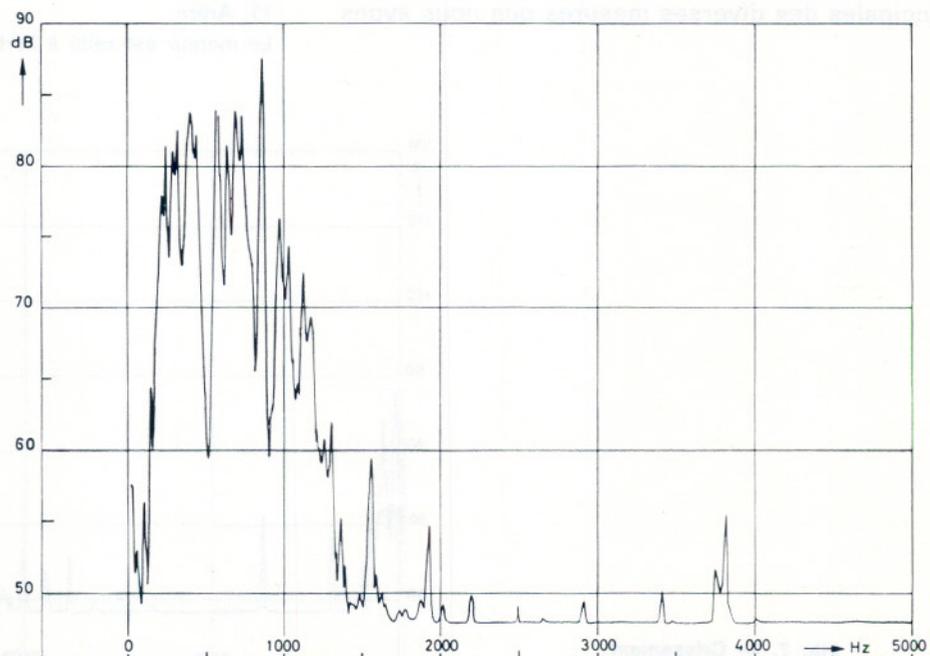


Fig. 5

Vitesse rail 250 tr/mn
Pression 20 bars (100 kg)
Résolution 10 Hz.

Fréquences principales

Réponse choc ROUE			850		2 260		4 050	
Réponse choc RAIL			830		1 840		3 480	
Bruits ROUE seule	200	485	585	850	1 100	1 670		
Bruits RAIL seul (200 tr/mn)	240	550			990	1 100	1 260	2 070
Bruit roulement avec contact 200 tr/mn 40 bars	300	550	850	1 000	1 100	1 500	1 900	3 700

— à mesurer les bruits émis au cours du roulement (sans glissement). La *figure 4* donne le niveau de bruit en fonction de la vitesse de rotation du « rail-roue » et de la pression. On remarque que le niveau de bruit mesuré en dBA augmente avec la vitesse. On retrouve la courbe $y = 30 \log \omega + cte$ donnée par ailleurs (niveau de bruit en dB en fonction de la vitesse pour un train). Le niveau sonore plus élevé aux faibles pressions pourrait être dû à une perte de contact provoqué par les aspérités du rail et donc à un martellement. Cet effet diminue avec la pression qui écrase alors les aspérités.

D'autre part, l'analyse spectrale de ces bruits montre qu'on retrouve à toutes les vitesses et à toutes les pressions les mêmes résonances, en particulier la résonance principale de la roue à 850 Hz. La *figure 5* montre un spectre typique de roulement. Il convient de comparer ces fréquences avec celles qui apparaissent dans les spectres de bruit des paliers (rail entraîné seul sans contact et roue entraînée seule). Le tableau ci-dessus rassemble les fréquences principales des diverses mesures que nous avons faites.

Les conclusions que l'on retient de ces résultats, à savoir que le bruit de roulement serait dû à un martellement des roues, sont évidemment connues, mais

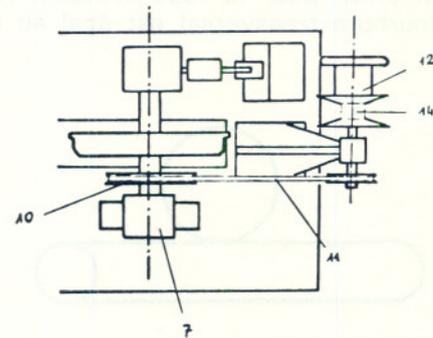


Fig. 6

- 10. Poulie (diamètre 28 mm)
- 11. Courroie
- 12. Variateur de vitesse
- 13. Arbre

Le moteur est relié à l'arbre (13) au moyen d'une courroie (14).

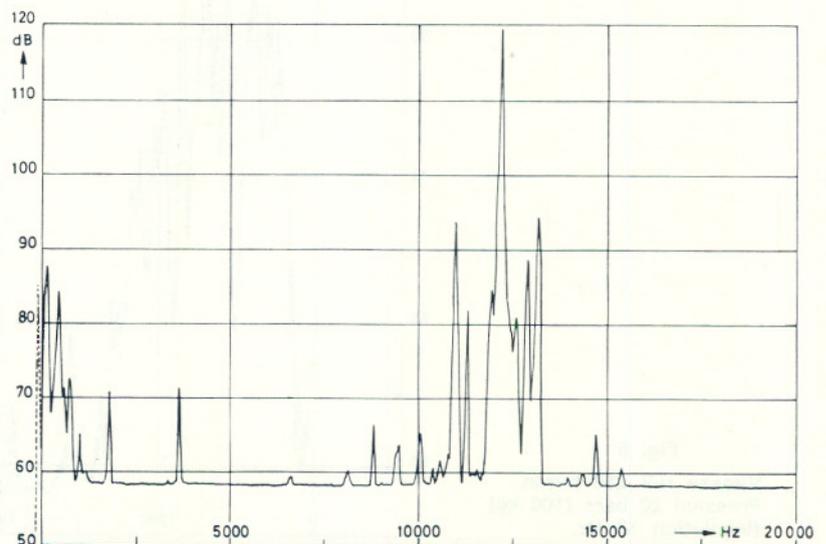


Fig. 7. — Crissement
Vitesse roue 320 tr/mn, vitesse rail 260 tr/mn

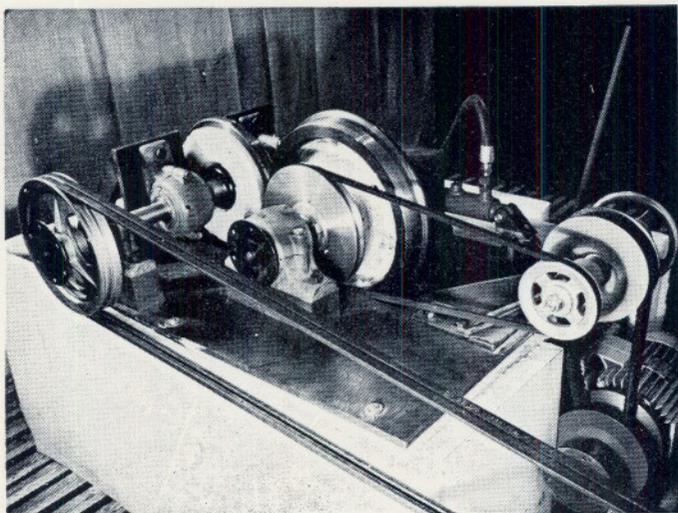


Fig. 8

ce montage nous a permis d'étudier le roulement avec glissement qui n'a pas été étudié jusqu'à présent.

Pour cette étude nous avons ajouté au montage précédent, un moteur auxiliaire (*figure 6*) qui entraîne la roue de métro. Soit ω_1 tr/mn la vitesse de la roue simulant le rail et ω_2 tr/mn la vitesse de la roue de métro. Le rapport des diamètres des deux roues étant 1,23, le glissement exprimé en % sera :

$$g = (1,23 \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1) 100$$

par suite si $\omega_2 = \frac{\omega_1}{1,23}$ il y a roulement sans glissement,

si $\omega_2 > \frac{\omega_1}{1,23}$ il y a glissement positif,

si $\omega_2 < \frac{\omega_1}{1,23}$ il y a glissement négatif (roue freinée).

Nous avons effectué des essais à différentes vitesses de la roue et du rail pour des pressions de contact faibles de 0 à 10 bars, soit une force de 0 à 250 kg. Il se produit, dès qu'il y a glissement, un phénomène de crissement d'un niveau sonore très élevé (120 dB en moyenne). L'analyse spectrale montre qu'il s'agit d'une raie étroite située aux environs de 12 200 Hz qui se superpose au spectre de bruit du roulement habituel. La *figure 7* montre bien ce phénomène de crissement. La forme du spectre est absolument indépendante des vitesses et de la pression, ce qui tendrait à prouver qu'il s'agit bien d'une résonance excitée par le frottement tangentiel au niveau du boudin de la roue.

La *figure 8* donne une image du montage utilisé. Ce phénomène de crissement décelé à partir de la maquette ouvre un large champ d'horizon pour l'étude des phénomènes réels des bruits de métro si gênants pour les usagers, ce qui permettra, nous l'espérons, d'y porter des solutions.