industrie minérale

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOMEIII – NUMÉRO 6



HENRI TRESCA (Archives de l'Académie des Sciences)

Numéro spécial du 15 novembre 1975

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

PERSONNES MORALES

Bassin d'Essais des Carènes, 6, boulevard Victor, 75015 Paris.

Bibliotheek, Weg-en Waterbouw der T.H. — Stevinweg 1 — Delft (Hollande).

Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., 26, rue Boyer, 75020 Paris. The British Library, Holborn Division — 25 Southampton Buildings, London WC2A

1AW (England).

Cedocar, Bibliothèque Centrale, 2. av. de la Porte-d'Issy, 75015 Paris.

Centre d'Essais et de Recherches, Technique des Tabacs, 4, rue André-Deseaux, 45400 Fleury-Aubrais.

Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75013 Paris.

Centre d'Etudes du Bouchet, 91710 Vert-le-Petit.

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, Service d'études sur la séparation des isotropes de l'uranium, B.P. n° 2, 91190 Gif-sur-Yvette.

Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75008 Paris.

Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, Laboratoire de Verneuil-en-Halatte, B.P. n° 27, 60103 Creil.

Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75015 Paris.

Centre de Mathématiques et Calcul de l'I.N.S.A., 20, avenue Albert-Einstein, 69100 Villeurbanne.

Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67000 Strasbourg.

Centre de Recherches Routières, Fokkerdreef 21, 1960 Sterrebeek (Belgique). Centre National d'Enseignement Technique, Laboratoire de Recherches, M. Lemaitre, 61, avenue du Président-Wilson, 94230 Cachan.

Centre Scientifique et Technique du Bâtiment, 4, avenue du Recteur-Poincaré, 75782 Paris Cédex 16.

Centre Technique du Cuir, 181, avenue Jean-Jaurès, 69006 Lyon.

Centre Technique des Industries Mécaniques, B.P. nº 67, 60300 Senlis.

Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses, Cédex n° 175, 38100 Grenoble Gare.

Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, avenue Hoche, 75008 Paris.

Ciments Lafarge, Mane Faurie, ing. Direction Recherches, 28, rue Emile-Menier, 75782 Paris Cédex 16.

Compagnie Française de Raffinage, Centre de recherches — Documentation, B.P. n° 27, 76700 Harfleur.

Compagnie Pechiney, 23, rue Balzac, B.P. nº 787-08, 75008 Paris.

Compagnie Saint-Gobain, Direction des recherches — Laboratoire scientifique, 52, boulevard de la Villette, 75019 Paris.

Département Génie Civil et Urbanisme (I.N.S.A.), 20, avenue Albert-Einstein, 69100 Villeurbanne.

Direction de la Recherche des Fédérations Nationales du Bâtiment et des Travaux Publics, 12, rue Brancion, 75737 Paris Cédex 15.

Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de mécanique des sols, Grande Voie des Vignes, 92290 Chatenay-Malabry.

Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique, 2, rue Charles-Camichel, 31000 Toulouse.

Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, 151, boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris.

Ecole Nationale Supérieure des Mines, Département de métallurgie, 158 bis, cours Fauriel, 42100 Saint-Etienne.

Ecole Polytechnique, Bibliothèque — CP 501 Snowdon — Montréal 248 (Canada). Electricité de France, Chatou, Service IMA — Unité de documentation, 6, quai Watier, 78400 Chatou.

Electricité de France, Service géologique et géotechnique, 3, rue de Messine, 75008 Paris.

Ernuth, Direction des études et recherches E.D.F., Centre des Renardières, 77000 Ecuelles.

ESSO-Standard S.A.F., Centre de recherches, 76130 Mont-Saint-Aignan.

Ethylène-Plastique, Centre de recherches, B.P. nº 1, 62670 Mazingarbe.

Filial Biblioteki, Akademü Nank SSSR — Baltijskaja ul. 14 — Moskva A-219 (U.R.S.S.).

Institut Français du Pétrole, 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92500 Rueil-Malmaison. Institut de l'Information Scientifique de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., Baltijskaja ulitasa 44 — Moscou D. 219 (U.R.S.S.).

Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Charles-Camichel, 31000 Toulouse. Institut de Mécanique Théorique et Appliquée. Faculté des sciences de Paris, Tour 66, 9, quai Saint-Bernard, 75005 Paris.

(suite page 3 couverture)

CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

Tome III - Numéro 6

15 novembre 1975

R.A. SCHUTZ

EBB3WEDCH

l'ypolitica des variables internes et reprezent teriop de certains fiuldes viacodissitaues

B. COMOLET

Edité par la Revue de l'Industrie Minérale 19, rue du Grand-Moulin — 42000 Saint-Etienne

sommaire

J.D. WEBER

Henri T	resca								•	•								23	7

R. MAZET

Rel	lations	entre	l'hétéroplasticité et la notion	
de	charge	limite		239

B. HALPHEN et Q.S. NGUYEN

Sur	les	lois	d'évo.	ution	des	paramètres	
d'écr	ouiss	age .					247

M. SOTTON

R.A. SCHUTZ

La	fatigue	des	matériaux	polymériques : appli-	
cat	ion aux	text	iles		261

J.D. WEBER

Hypothèse des variables internes et représentation de certains fluides viscoélastiques.... 267

R. COMOLET

Mécanique	de	la	circulation	sanguine	274
-----------	----	----	-------------	----------	-----

INDUSTRIE MINERALE

Henri Tresca

par J.D. WEBER, Faculté des Sciences de Metz

Le nom de Henri Tresca (1814-1885) est bien connu des rhéologues. Les catalogues de la Bibliothèque nationale contiennent la référence d'une soixantaine d'écrits dont il est l'auteur : mémoires scientifiques, cours de mécanique ou de géométrie descriptive, rapports d'expériences, textes de discours, procès-verbaux d'essais. Ses travaux se rapportent à la résistance des matériaux, à l'écoulement des corps solides, aux machines motrices, à l'équivalent mécanique de la chaleur, au mètre étalon. C'est au Conservatoire des Arts et Métiers, où il enseigne la mécanique appliquée à partir de 1854, qu'il effectue la plupart de ses recherches expérimentales.

Il professe également, à partir de 1865, à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures ; il entre à l'Académie des Sciences en 1872.

Son Mémoire sur l'écoulement des corps solides présenté à l'Académie en 1864 a été publié sous une forme plus détaillé en 1872, dans le Recueil des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, tome XX, p. 75-187. Il nous a semblé intéressant de reproduire ici les premiers paragraphes du texte de 1872, qui résument assez bien son contenu :

« La question de l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions a reçu une précieuse consécration par le prix que l'Académie m'a fait l'honneur de m'accorder, et, pour justifier davantage cette distinction, j'ai dû considérer comme un devoir de lui faire connaître les divers sujets qu'il m'a été permis d'envisager, plus récemment, dans le même ordre d'idées.

» Quelques-uns des faits constatés à la suite de mon premier mémoire sont déjà connus en partie, et j'ai pensé que l'Académie me permettrait de les grouper, avec les faits nouveaux, dans un exposé sommaire, de manière à faire mieux comprendre la portée des premières recherches et l'importance des applications qu'elles permettent d'embrasser aujourd'hui. C'est donc moins un mémoire méthodique et mathé-

Recever Monsieur es cher collique, l'assurance Detous mes sentiments. Le Gineral d'untillerie Directeur du Conservatoire Impérial des Arts Métices Jour le Directeur, 1'Ingénieur Jour Directeur, E. bresco.

Au bas d'une lettre administrative datée du 6 août 1854, la signaturc de Henri Tresca, sous-directeur du Conservatoire impérial des Arts et Métiers. Le directeur était le fameux général Arthur Morin matique que j'ai l'honneur de lui présenter, qu'un aperçu général et raisonné des différents phénomènes qui semblent se rattacher à la même question.

» Dans le mémoire précédent, nous n'avions eu en vue que les preuves de l'assimilation à établir entre les solides et les liquides dans le cas où un bloc de forme cylindrique donne naissance à un jet cylindrique d'un diamètre moindre et dont l'axe est le même que celui du bloc. Nous ajouterons même aujourd'hui que ce cas particulier de l'écoulement des corps solides n'avait été étudié que pour des blocs cylindriques de hauteur restreinte par rapport à leurs dimensions en diamètre, et par conséquent pour des jets de longueurs également limitées.

» Nous avons acquis depuis lors des données précises sur les questions suivantes :

- Ecoulement indéfini d'un bloc cylindrique par un orifice circulaire concentrique ;
- Ecoulement d'un bloc cylindrique par un orifice polygonal concentrique;
- Ecoulement d'un bloc cylindrique par un orifice circulaire excentré ;
- Ecoulement d'un bloc cylindrique par plusieurs orifices ;
- Ecoulement d'un bloc prismatique par un orifice latéral ;
- Ecoulement latéral d'un bloc cylindrique par un orifice circulaire ou carré.

Nous avons pu, en outre, nous rendre compte, au moyen de ces études préliminaires, des mouvements moléculaires déterminés dans un grand nombre d'opérations industrielles, parmi lesquelles nous citerons dès à présent les applications au laminage, à la forge, au poinçonnage et au rabotage. »

Ce mémoire contient 52 figures qui donnent une excellente description de l'écoulement de la matière à l'intérieur même du bloc soumis à de grandes déformations, grâce au procédé suivant : le bloc est initialement constitué par un empilement de plaques planes de plomb ; après avoir été déformé (par poinçonnage ou extrusion par exemple) il est découpé à la scie, les lignes de séparation entre les différentes plaques étant ainsi rendues visibles ; ces lignes sont reproduites, avec beaucoup de minutie, sur les figures du mémoire.

Le Mémoire sur le poinçonnage des métaux et la déformation des corps solides est paru, lui aussi, en 1872, dans le tome XX des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Il a 222 pages, et contient 82 figures dont la plupart donnent une visualisation de l'écoulement de la matière.

La qualité de ces expériences leur confère, encora actuellement, un grand intérêt.

On trouve également, dans ce mémoire, plusieurs calculs de pressions limites ; ceux-ci reposent bien entendu sur ce que nous appelons aujourd'hui le critère de Tresca, selon lequel la différence des contraintes principales extrêmes atteint une valeur caractéristique au moment où l'écoulement du matériau commence à se produire.

Ce n'est d'ailleurs par exactement sous cette forme que Tresca énonce la condition d'écoulement, mais sous une forme un peu plus précise, puisqu'elle contient implicitement le principe du travail maximal. Voici en quels termes Tresca s'exprime à ce sujet à la page 162 :

EXPRESSION DU TRAVAIL NECCESSAIRE POUR ALLONGER OU RACCOURCIR UN PARALLELIPIPEDE

» D'une manière générale, x, y, et z étant les trois côtés d'un parallélipipède rectangle ; δx , δy , δz , les variations respectives de ces longueurs, dans une déformation de ce parallélipipède, par compression ou par extension, le travail total de déformation sera, lorsque l'on pourra admettre que chacune des files de molécules est engagée dans le système de telle façon qu'elle se comporte comme si elle était isolée,

$$t = K (xy\delta z + yz\delta x + zx\delta y).$$

» Si les deux variations δx et δy sont de même signe, δz sera de signe contraire, et la condition de la constance du volume sera exprimée par

$$xy\delta z = yz\delta x + zx\delta y$$

ce qui donne immédiatement

$$t = K (xy\delta z + yz\delta x + xy\delta z - yz\delta x) = 2 Kxy\delta z$$
,

ou en faisant xy = ω , et $\delta z = \delta$ t = 2 K $\omega\delta$.

» Le travail total dépensé pour produire la déformation est exprimé par le double de l'un des travaux de déformation transversale, ce qui permet de dire d'une manière plus générale que, dans tous les cas, ce travail total de déformation est mesuré par le double du travail de déformation, estimé dans la seule direction pour laquelle le changement de dimension est de signe contraire aux deux autres. »

Nous évoquerons enfin la personnalité de Henri Tresca en citant les paroles que prononçait en 1885 le président de la Société des ingénieurs civils en lui rendant hommage :

« Il semblait de fer et d'acier, comme les machines qu'il aimait. Il bravait tout. Il n'a pas vieilli... »

Relations entre l'hétéroplasticité et la notion de charge limite

par R. MAZET, correspondant de l'Académie des Sciences, professeur à l'Université de Paris-Sud (Orsay)

RESUME

Après quelques rappels concernant le matériau hétéroplastique (macroscopiquement homogène, microscopiquement hétérogène), on étudie la résistance d'une structure hétéroplastique lamellaire [dont la déformation dépend d'un paramètre dominant ζ (P|t)] soumis à une charge croissant à partir de zéro. La déformation plastique est localisée en une ou plusieurs « charnières paraboliques » dont on suit l'évolution au fur et à mesure que la charge croit. Une application est faite au cas d'une poutre métallique encastrée à ses extrémités et supportant une charge uniforme.

I

Nous avons appelé matériau « hétéroplastique » un matériau composé de micro-éléments ayant, en traction simple, des limites élastiques différentes dans la direction de la sollicitation [1]. Un micro-élément (d'indice i) est « homoplastique », c'est-à-dire qu'il est éventuellement composé d'éléments plus petits ayant tous la même limite élastique ε_{Mi} . A l'échelle macroscopique, le matériau apparaît comme homogène et isotrope.

Considérons une éprouvette d'un tel matériau et faisons-lui subir un essai de traction classique à vitesse de déformation ε constante. Quand la déformation ε franchit la valeur ε_{MI} , la contrainte σ_i que supporte un microélément d'indice i change d'expression (figure 1):

Pour $\varepsilon < \varepsilon_{M_1}$: $\sigma_i = E \varepsilon$ (loi de Hooke) (1)

Pour $\varepsilon > \varepsilon_{Mi}$: $\sigma_i = E(\tau \varepsilon_i^p)^{\frac{1}{n}}$ (loi de Norton)

E (module d'Young), τ et *n* sont des constantes spécifiques du matériau et $\varepsilon_1^p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$ désigne la déformation plastique qui passe instantanément de la valeur zéro à la valeur ε_{M1} (dans un matériau métallique, cette plastification « instantanée » peut être interprétée comme correspondant au décrochement d'une file de dislocations).

SUMMARY

Following some basic notions concerning the heteroplastic materials (homogeneous at the macroscopic scale, heterogeneous at the microscopic scale) the strength of an heteroplastic lamellar structure [whose deformation depends on a predominating parameter ζ (Plt) is studied. This structure is subjected to a load increasing gradually from zero. The plastic deformation is localized in one or several « parabolic hinges » whose development is followed up in proportion as the load is rising. An application is performed to the case of a metallic doubly clamp-ended beam which supports an uniform load.

Appelons *taux de plastification* le rapport, dans un élément de volume, du nombre de micro-éléments plastifiés ($\varepsilon_{M1} < \varepsilon$) au nombre total de micro-éléments Ce taux, qui dépend a priori de ε et de $\dot{\varepsilon}$, sera noté θ ($\varepsilon \mid \dot{\varepsilon}$). Nous le considérons comme spécifique du matériau, du traitement qu'il a subi avant l'essai et de la température. On établit facilement la formule suivante où k = $\frac{\sigma}{E}$, σ étant la contrainte macrosco-

pique, et
$$\lambda = (\tau \epsilon)^{\frac{1}{n}}$$
:

$$k(\varepsilon | \dot{\varepsilon}) = (1 - \theta) \varepsilon + \int_{0}^{\varepsilon} \eta \left\{ \frac{\varepsilon - u}{\lambda} \right\} \theta(u | \dot{\varepsilon}) du$$
 (2)

15 novembre 1975

^{1.} Conférence faite devant le Groupe français de Rhéologie le 15 novembre 1973.

240

 η (x) est une fonction numérique tabulable dans (0, $+\infty$) et définie par

$$\eta(x) = 1 - [Z(x)]^{n}, x[Z] = \int_{0}^{Z} \frac{dz}{1 - z^{n}}, \ 0 \le Z \le 1$$

Elle joue le rôle d'une « mémoire » du matériau (figure 2).

Connaissant k ($\varepsilon \mid \dot{\varepsilon}$) pour une série de valeurs de $\dot{\varepsilon}$ ainsi que les constantes τ et n, on en déduit, en résolvant (2), le taux de plastification θ ($\varepsilon \mid \dot{\varepsilon}$). On constate que θ est bien, comme il doit l'être, une fonction monotone de ε croissant de 0 à 1 (figure 3)

Si l'on pose, pour $\epsilon \ge \mathsf{Inf}\left(\epsilon_{Mi}\right) = \epsilon_G$ (limite élastique vraie) :

$$\theta = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}},$$

F est approximativement linéaire en $\varepsilon \left[\mathbf{F} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{G}}{\Delta(\dot{\varepsilon})} \right]$

INDUSTRIE MINERALE

quand ε varie dans un intervalle (ε_G , ε_H) d'étendue comparable à ε_G [1]³.

On constate encore que θ dépend peu de $\dot{\varepsilon}$ alors que σ en dépend beaucoup dès que $\dot{\varepsilon}$ est petit. Comme on se propose ici d'étudier des problèmes d'équilibre, on a besoin de θ ($\varepsilon \mid o$) = θ_n (ε). On l'obtient par extrapolation en considérant $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \theta$ $\dot{\varepsilon}$ comme une fonction régulière de θ quand $\dot{\varepsilon}$ tend vers zéro, ε étant fixé.

Faisons tendre é vers zéro dans (2). Il vient :

 $k(\varepsilon \mid 0) =_{*} [1 - \theta_{o}(\varepsilon)] \varepsilon, \qquad (3)$

d'où l'on déduit la courbe σ ($\varepsilon \mid 0$) (figure 5).

En résumé, l'idée de base consiste à attribuer en statique une résistance nulle aux micro-éléments plastifiés, la plastification résultant d'une distribution statistique des limites élastiques dans chaque élément de volume de la structure. Cette distribution est spécifique du matériau et se détermine à partir d'essais de traction à vitesse de déformation constante.

^{2.} La caractéristique Δ ($\dot{\epsilon}$) est liée à la dispersion des $\epsilon_{\rm Mi}$. Plus elle est voisine de zéro, plus les $\epsilon_{\rm Mi}$ sont groupés autour de leur valeur moyenne et plus la courbe $\sigma \cdot \epsilon$ se rapproche de la courbe du monocristal du métal ou de l'alliage étudié (figure 4).

Si, dans une éprouvette de traction supportant une charge P, σ dépasse σ_{M} , l'équilibre n'est plus possible : il y a ruine. Pour $\sigma = \sigma_{M}$. l'équilibre est instable. Une très légère impulsion provoque l'évolution vers le fluage établi sous la contrainte σ_{M} ; la vitesse de ruine tend vers la valeur^a:

$$\dot{\epsilon}_{M} = rac{1}{\tau} \left(rac{\sigma_{M}}{E}
ight)^{n}$$

D'après ce qui a été dit plus haut, θ_o (ε) peut se mettre approximativement, dans l'intervalle (ε_G , ε_H), sous la forme

$$\theta_{o}(\varepsilon) \approx 1 - e^{-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_{G})^{2}}{2 \Delta_{o} 2}}$$
 (4)

 Δ_{\circ} étant une constante spécifique. Cette approximation suffit, en général, dans les problèmes d'équilibre de barres dont nous allons parler maintenant.

Ш

Les considérations qui précédent se généralisent aux structures dont la déformation, sous les sollicitations qu'elles subissent, se définit, en première approximation, à partir du déplacement d'une variété privilégiée de points Q⁴, spécialement lorsque ce déplacement dépend d'une seule fonction ζ (Q. t), comme cela se présente pour les barres et systèmes de barres travaillant en extension-compression, flexion plane ou torsion simple [2].

Considérons, à titre d'exemple, une poutre métallique travaillant en flexion plane. La fonction déterminante ζ (x, t) est la flêche de la fibre moyenne au droit du point Q d'abscisse x de cette fibre. Pour écrire les équations d'équilibre par la méthode de Lagrange, nous devons calculer le travail virtuel des forces intérieures et extérieures à la poutre pour une déformation virtuelle quelconque due à la flexion. Si L_a est une partie de la poutre qui reste élastique, le travail virtuel dans L_a est

$$\delta \mathcal{C}_{L^{e}} = - EI \int_{L^{e}} \frac{\partial^{2} \zeta}{\partial x^{2}} \delta \left(\frac{\partial^{2} \zeta}{\partial x^{2}} \right) dx$$

El étant le module de flexion.

Si la limite élastique est dépassée en certains points, nous admettrons que la déformation plastique est *localisée* au voisinage de la ou des sections les plus exposées x_i [2]. Ce voisinage constituera une charnière élasto-plastique occupant un petit tronçon p_iL de la poutre, L étant la longueur totale de celle-ci. D'une façon précise, nous considérerons p_i comme assez petit pour que les termes en p_i^m, m \ge 2, puissent être négligés dans les calculs, ainsi que les termes en p_i^m p_j^{m'}, m + m' \ge 2; la déformée moyenne de la charnière sera alors assimilable à un arc de parabole, d'où le nom de charnière parabolique.

Supposons que la charge P dépende d'un seul paramètre que nous ferons croître à partir de zéro. Si la poutre restait partout élastique, la flêche ζ aurait. à l'équilibre, une expression de la forme

$$\zeta^{e}\left(x\right) = \ \mathsf{Lf}\left(\frac{x}{\mathsf{L}}\right) \ \mathsf{q}_{1} \ \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \mathsf{L},$$

q1 étant un paramètre croissant en même temps que P (paramètre élastique).

Si la poutre entre dans le domaine plastique au voisinage d'une ou plusieurs sections x_2 , x_3 , ..., nous représenterons ζ par

$$\begin{split} \zeta(\mathbf{x}) &= \zeta^{e}(\mathbf{x}) + \sum_{i} \zeta^{p}_{i}(\mathbf{x}) \\ &= L \left[f(\mathbf{u}) q_{i} + \sum_{i} g_{i}(\mathbf{u}) p_{i} \frac{d^{2} f(\mathbf{u}_{i})}{d u^{2}} (q_{i} - q_{i}) \right] \end{split}$$

avec :

$$u = \frac{x}{L}, \ u_i = \frac{x_i}{L}, \ i = 2, 3, ...$$

g_i (u) est défini de la façon suivante :

pour
$$|u - u_i| \le p_i$$
: $g_i(u) = \frac{1}{2p_i} (u - u_i)^2 + Au + B$

(A, B : constantes respectant des conditions d'appui éventuelles en x_i ou provisoirement indéterminées) ; hors de cet intervalle : Lg_i (u) est la déformée élastique de la poutre sans charge (P = o), conservant ses appuis et se raccordant pour $| u - u_i | = p_i$ avec la partie précédente pour A et B convenablement choisis.

 q_i est le paramètre de charnière en x_i . A l'approximation indiquée, il définit à lui seul la déformation de la charnière (il est proportionnel à la courbure de la parabole en x_i).

Dans ces conditions, le travail virtuel des forces intérieures à la chanière x_i (forces élastiques et élasto-plastiques) pour une poutre de section rectangulaire (*figure* 6) a pour expression :

15 novembre 1975

^{3.} On peut constater sur la relation (2) que k tend vers λ quand ϵ tend vers $+\infty$. λ E représente donc la contrainte de fluage établi à la vitesse $\dot{\epsilon}$. Comme λ (0) = 0, il peut y avoir fluage établi sous une contrainte aussi faible que l'on veut. Si cette possibilité paraît douteuse, il est loisible de l'écarter en admettant que le décrochement laisse subsister un certain frottement résiduel de telle sorte que λ (0) = $\gamma \leqslant lnf$ ($\epsilon_{\rm Mi}$). Comme cette hypothèse ne modifie que très peu les résultats finaux nous conserverons λ (0) = 0, ce qui va, de plus, dans le sens de la sécurité.

^{4.} De tels systèmes sont appelés *semi-rigides, lamellaires* OU *CUrvilignes.*

$$\delta \mathcal{C}_{piL} = -3 \frac{EI}{L^{3}} \left[\frac{\partial}{\partial} u^{2} \frac{\langle \mathbf{x}_{i} \rangle}{\partial \mathbf{q}^{i}} \right]^{2} \int_{0}^{*1} \mathbf{k}^{*} \left\{ \mu \mathbf{q}_{i} \right\} \mu \, \mathrm{d} \, \mu \, \mathrm{p}_{i} \, \delta \, \mathrm{q}_{i}$$
avec I = $\frac{bh^{3}}{12}$,
$$\mathbf{k}^{*} \left\{ \mu \mathbf{q}_{i} \right\} = \left[1 - \theta_{o} \left\{ \frac{h}{2 L^{3}} \middle| \frac{\partial}{\partial} u^{2} \frac{\langle \mathbf{x}_{i} \rangle}{\partial u^{2} \partial \mathbf{q}_{i}} \right| \mu \mathbf{q}_{i} \left\langle \frac{1}{2} \right| \mu \mathbf{q}_{i} \right] \left\{ \mu \mathbf{q}_{i} \left\langle \frac{\partial}{\partial} u^{2} \right\rangle \right\}$$

Nous pouvons alors calculer le travail virtuel de toutes les forces agissant sur la poutre et en déduire les conditions d'équilibre sous la charge P. Nous devons y adjoindre les conditions aux frontières exprimant que, pour $|u - u_i| = p_i$, le ou les points les plus exposés de la section, considérée comme appartenant au tronçon élastique, atteignent la limite élastique, soit, en posant $\frac{L}{h} \epsilon_G = T$:

$$\frac{1}{L} \left| \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right| = 2 T \quad \text{pour} \quad |u - u_i| = p_i$$
 (6)

Prenons l'exemple d'une poutre AB de longueur L encastrée à ses deux extrémités et supportant une charge uniforme P (*figure* 7). Désignons par p₂L une charnière éventuelle aux extrémités A et B et par

 $2 p_{s}L$ une charnière éventuelle au milieu O, les paramètres de charnière étant respectivement q_2 et q_3 $(q_2 = q_3 = q_1 \text{ si la poutre ne flue nulle part).$

En fonction de q₁, q₂, q₃, l'équation de la déformée moyenne s'écrit si f (o) = $\frac{1}{16}$:

(7)

$$\frac{\zeta(u)}{L} = \begin{cases} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{4}p_3\right)q_1 + \frac{1}{2}p_2q_2 + \frac{1}{4}(p_3 - 2u^5)q_3 & \text{pour } 0 \le u \le p_3 \\ \left[\left(\frac{1}{4} - u^2\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4} - u^2\right)p_2 - \left(\frac{1}{2} - u\right)^2p_3\right]q_1 + 2\left(\frac{1}{4} - u^2\right)p_1q_2 \\ + \left(\frac{1}{2} - u\right)^2p_3q_3 & \text{pour } p_3 \le u \le \frac{1}{2} - p_2 \\ \left(\frac{1}{2} - u\right)^2q_2 & \text{pour } \frac{1}{2} - p_2 \le u \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le travail virtuel pour δq_1 , δq_2 , δq_3 des forces intérieures à la poutre a, tous calculs faits, l'expression suivante :

$$\begin{split} \delta \mathcal{C}_{L} &= \ \delta \mathcal{C}_{Le} + 2 \ \delta \mathcal{C}_{p2L} + 2 \ \delta \mathcal{C}_{p3L} \\ &= \ - \frac{\mathsf{E} \ \mathsf{I}}{\mathsf{L}} \left[\left(\frac{4}{5} \ - \ 8 \ \mathsf{p}_2 - \ 8 \ \mathsf{p}_3 \right) \ \mathsf{q}_1 \delta \mathsf{q}_1 + 8 \ \mathsf{p}_2 \mathsf{q}_2 \ \mathsf{J} \ (\mathsf{q}_2) \ \delta \mathsf{q}_2 + 2 \ \mathsf{p}_3 \mathsf{q}_3 \ \mathsf{J} \ \left(\frac{\mathsf{q}_3}{2} \right) \ \delta \mathsf{q}_3 \right] \end{split}$$

où l'on a posé, en se référant à l'expression (5) de k* { μq_i } et à l'expression approchée (4) de $\theta_o(\varepsilon)$:

$$J(X) = 3 \int_{0}^{1} e^{-\frac{[F^{(\mu X)}]^{2}}{2}} \mu^{2} d\mu$$

avec

$$\begin{split} \mathsf{F}^*\left(\mu\mathsf{X}\right) &= \ \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \mu\mathsf{X} \leqslant \mathsf{T} \\ \frac{\mu\mathsf{X} - \mathsf{T}}{\alpha} & \text{pour} \ \mathsf{T} \leqslant \mu\mathsf{X} \leqslant \mathsf{T} \ \frac{\varepsilon_{\mathrm{H}}}{\varepsilon_{\mathrm{G}}} \\ \mathsf{T} &= \ \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{h}} \ \varepsilon_{\mathrm{G}} \ \text{(rappel)}, \quad \alpha &= \ \frac{\mathsf{L}}{\mathsf{h}} \ \Delta_{\mathrm{o}}. \end{split}$$

Le travail virtuel des forces extérieures (charge P) est, d'autre part :

$$\delta \mathcal{C} (P) = PL \left[\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{3} p_2 - \frac{1}{12} p_3 \right) \delta q_1 + \frac{1}{3} p_2 \delta q_2 + \frac{1}{12} p_3 \delta q_2 \right]$$

INDUSTRIE MINERALE

D'où les équations d'équilibre :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{PL^2}{24 \text{ El}} \left(1 + \frac{15}{2} p_3 \right) \\ q_2 J \quad (q_2) &= \frac{PL^2}{24 \text{ El}} \qquad \text{si } p_2 > 0 \quad (q_2 = q_1 \text{ si } p_2 = 0) \\ q_3 J \left(\frac{q_3}{2} \right) &= \frac{PL^2}{24 \text{ El}} \qquad \text{si } p_3 > 0 \quad (q_3 = q_1 \text{ si } p_3 = 0) \end{aligned}$$

auxquelles on doit ajouter les conditions aux frontières :

$$\begin{cases} |(1 - 4 p_2 - p_3) q_1 - 2 p_2 q_2 + p_3 q_3| = T \text{ si } p_2 > 0 \ (\ll T \text{ si } p_3 = 0) \\ |(1 - 4 p_2 + 2 p_3) q_1 + 4 p_2 q_2 - 2 p_3 q_3| = 2 T \text{ si } p_3 > 0 \ (\ll 2 T \text{ si } p_3 = 0) \end{cases}$$

 $\label{eq:Posons} \text{Posons}: \ \frac{PL^2}{EI} = \ N \ \text{et introduisons l'inconnue auxiliaire } s = 2 \ p_2 q_2 - p_3 q_3.$

Le système complet d'équations et de relations d'ordre s'écrit finalement :

$$\begin{array}{l} q_{1}= \ \frac{N}{24} \ \left(1+ \ \frac{15}{2} \ p_{3}\right) \\ q_{2} J \ \left(q_{2}\right) = \frac{N}{24}, \ p_{2} > 0, \ q_{2} > q_{1} \\ q_{3} J \left(\frac{q_{3}}{2}\right) = \frac{N}{24}, \ p_{3} > 0, \ q_{3} > q_{1} \\ | \left(1-4 \ p_{3} - p_{3}\right) q_{1} - s \ | = T, \ p_{2} > 0 \\ | \left(1-4 \ p_{2} + 2 \ p_{3}\right) q_{1} + 2 \ s \ | = 2 \ T, \ p_{5} > 0 \ ou \ p_{3} = 0, \ | \left(1-4 \ p_{2}\right) q_{1} + 2 \ s \ | \le 2 \ T \\ s = 2 \ p_{2} q_{2} - p_{3} \ q_{3} \end{array}$$

soit : six équations pour six inconnues $q_1, \; q_2, \; q_3 \; \; p_2, \; p_3, \; s.$

La flêche au milieu de la poutre est ensuite donnée par

$$\frac{\zeta(o)}{L} = \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{4}p_3\right) q_1 + \frac{1}{2}p_2q_2 + \frac{1}{4}p_3q_3$$

Pour résoudre, on fait croître N à partir de zéro en prenant dans une première phase (*phase élastique*) $p_2 = p_5 = o$. Il vient :

$$q_1 = q_2 = q_3 = \frac{N}{24}$$
, $s = o$, $\frac{\zeta(o)}{L} = \frac{N}{384}$

Cette phase dure jusqu'à ce que

$$N = 24 T = N_1$$
, $q_1 = q_2 = q_3 = T$

Comme c'est la condition $|(1 - p_3) q_1 - s| \le T$ qui cesse la première d'être satisfaite, on prendra dans une deuxième phase (phase mixte avec charnières en A et B) $p_2 \neq o$, $p_3 = o$. D'où le système d'équations et de relations d'ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1} = \frac{N}{24} \\ q_{2}J(q_{2}) = \frac{N}{24}, \ p_{2} > 0, \ q_{2} > q_{1} \\ (1 - 4 \ p_{2}) \ q_{1} - s = T \\ (\text{les barres sont levées par continuité}) \\ |(1 - 4 \ p_{2}) \ q_{1} + 2 \ s| \leqslant 2 \ T \\ s = 2 \ p_{2}q_{2} \end{array} \right.$$

soit : quatre équations pour quatre inconnues $q_1 \ q_2, \ p_2. \ s.$

En résolvant pour des valeurs de q₂ croissant à partir de T, on constate que N, égal à 24 q₂ J (q₂), passe par un maximum N₂ pour une certaine valeur de q₂ (*figure* 8); la phase ne peut se poursuivre audelà.

15 novembre 1975

(8)

III EXEMPLE NUMERIQUE

Soit : $T = 0,40, \alpha = 0,15$.

On trouve, tous calculs faits :

$$\begin{split} \mathsf{N}_1 &= \ 9,60 & \to \ q_1 = \ 0,40, \ \frac{\zeta\left(o\right)}{\mathsf{L}} = \ 0,025. \\ \mathsf{N}_2 &= \ 11,7 \quad \to \ q_1 = \ 0,49, \\ \mathsf{q}_2 &= \ 0,55, \ \mathsf{p}_2 = \ 0,03, \ \mathsf{s} = \ 0,033, \frac{\zeta\left(o\right)}{\mathsf{L}} = \ 0,031. \end{split}$$

Pour cette dernière charge limite, la condition

 $(1 - 4 p_2) q_1 + 2 s < 2 T$

est remplie, ce qui veut dire que la poutre ne flue pas encore en son milieu O. La condition de validité $T \leq q_2 \leq T \frac{\epsilon_{\rm H}}{\epsilon_{\rm G}}$ [formule (7)] est également vérifiée si $\frac{\epsilon_{\rm H}}{\epsilon_{\rm G}}$ est supérieur à 1,4.

Pour $N=N_{\rm 2},$ l'équilibre est instable. Qu'arrive-t-il ensuite ?

Notons qu'il existe, pour cette valeur de la charge, un autre état possible : l'évolution progressive des charnières vers un *fluage établi* à une certaine vitesse q₂ atteinte en principe pour q₂ = $+\infty$, mais pratiquement réalisée pour une valeur non excessive de la déformation plastique. C'est le seul état possible si N dépasse N₂ tant que la poutre ne flue pas également en son milieu O.

Mettons en équations l'état limite. Les équations sont les mêmes qu'en statique (pas de forces d'inertie) sous réserve de remplacer l'expression statique de k* { μ q_i}

$$1 - \theta_{o} \left\{ \begin{array}{c} \frac{h}{2 L^{2}} \\ \end{array} \middle| \begin{array}{c} \frac{\partial^{3} \zeta(\mathbf{x}_{i})}{\partial u^{2} \partial q_{i}} \\ \end{array} \right| \mu q_{i} \left\} \right\}$$

par son expression asymptotique déduite de (2)

$$(\tau_i^* \mu \dot{q}_i)^{\hat{n}}$$

INDUSTRIE MINERALE

 ${\tau_i}^*$ étant une constante dépendant du matériau et de la géométrie de la charnière (5).

Il s'en suit que $\int_0^{1} k^* \{ u q_i \} \mu d \mu$ doit être remplacé par

$$\int_{0}^{1} \left(\tau_{i}^{*} \mu \dot{q}_{i}\right)^{\frac{1}{n}} \mu d \mu = \frac{n}{2n+1} \left(\tau^{*} \dot{q}_{i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Le système (9) devient alors :

$$\begin{split} q_1 &= \frac{N}{24} \\ \frac{n}{2n+1} \left(\tau_2^* \dot{q}_2\right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{N}{72} \\ (1-4p_2) q_1 - s &= T \\ (car il y a fluage par hypothèse) \\ | (1-4p_2) q_1 + 2s \leqslant 2T \\ (condition de non-fluage en O) \\ s &= 2p_2 q_2 (q_2 \text{ est supposé infini}). \end{split}$$

Reprenons les données de l'exemple numérique :

 $T = 0,40, N = N_2 = 11,7.$

On trouve, en laissant de côté la deuxième équation qui fournirait \dot{q}_2 :

$$p_2 = 0, q_1 = 0.49, s = 0.09$$

Les conditions $\dot{q}_2 > 0$, $|(1 - 4p_2)q_1 + 2s| \le 2T$ sont satisfaites, ce qui montre qu'il n'y a pas fluage en O au cours de l'évolution complète de la poutre qui voit les encastrements en A et B céder progressivement sous la charge constante 11,7 $\frac{EI}{L^2}$. Dans l'état limite, la poutre est élastique sur toute sa longueur et *en équilibre* [ζ (u) est constant, $\frac{\zeta(o)}{L} = 0,031$]; tout se passe comme si, simplement appuyée en A et B, elle y subissait des couples résistants résiduels dont les moment (opposés) auraient pour module

$$EI \left| \frac{\partial^{2} \zeta}{\partial u^{2}} \left(\frac{1}{2} \right) \right| = \frac{EI}{L} \left| 2 (q_{1} - s) \right|$$
$$= \frac{EI}{L} \cdot 2T = 0.80 \frac{EI}{L} (6)$$

La poutre est donc « fail safe » pour la valeur $N_{2} \frac{E I}{L}$ de la charge qui provoque la défaillance des encastrements.

5. Des expressions approchées de τ_1^* dans notre exemple (poutre de section rectangulaire de hauteur h et de longueur L) sont $\tau_2^* \approx \tau \left(\frac{2L}{3h}\right)^{n-1}$ pour les charnières A et B et $\tau_3^* \approx \tau \left(\frac{4L}{h}\right)^{n-1}$ pour la chanière 0.

6. Noter l'analogie avec les « rotules » de la théorie des charges limites où les moments opposés auraient pour module : $3 T \frac{El}{L} = 1.20 \frac{El}{L}$. Pour $N>N_2$, l'état asymptotique s'étudie comme ci-dessus au moyen du système (10) tant que la relation $\mid q_1+2 \; s \mid \leqslant 2 \; T$ reste satisfaite. Elle cesse de l'être pour $N=N_3$ tel que

$$N_3 = 12.8 \rightarrow q_1 = 0.53, p_2 = 0, s = 0.13,$$

 $\frac{\zeta(0)}{L} = \frac{q_1}{16} = 0.033.$

Au-delà de N₃, on doit mettre en équations dans l'hypothèse $p_3 \ge o$ en supposant d'abord que l'état élastoplastique en O n'évolue pas [voir plus haut le système (8) où $q_2 J(q_2)$ est à remplacer par $\frac{3n}{2n+1}(\tau_2^*\dot{q}_2)^{\frac{1}{n}}$. l'équation qui contient ce terme et qui détermine \dot{q}_2 pouvant d'ailleurs être laissée de côté].

Le système à considérer est le suivant où

$$q_{2} = +\infty, p_{2} = o:$$

$$2 p_{2}q_{2} - p_{3}q_{3} = s$$

$$q_{1} = \frac{N}{24} \left(1 + \frac{15}{2} p_{3}\right)$$

$$q_{3} J \left(\frac{q_{3}}{2}\right) = \frac{N}{24}$$

$$|(1 - p_{3}) q_{1} - s| = T$$

$$|(1 + 2 p_{3}) q_{1} + 2 s| = 2 T, p_{3} > 0$$
(11)

On en tire :

$$\frac{15}{2}$$
 p₃ = $\frac{32 \text{ T}}{\text{N}}$ - 1

qui montre que p_3 ne peut être positif si N est supérieur à 32 T = 12,8. L'hypothèse est donc à rejeter.

Il reste à faire l'hypothèse que l'état de la poutre en O évolue vers un fluage établi de vitesse \dot{q}_3 entraînant la ruine de la structure. L'état asymptotique vérifie dans ce cas le système (où $q_2 = q_3 = +\infty$. $p_2 = p_3 = o$):

$$2 p_{2}q_{2} - p_{3}q_{3} = s$$

$$q_{1} = \frac{N}{24} \left(1 + \frac{15}{2}p_{3}\right)$$

$$\frac{n}{2n+1} (\tau_{3}^{*} \dot{q}_{3})^{\frac{1}{n}} = \frac{N}{72}$$

$$|(1 - p_{3}) q_{1} - s| = T$$

$$|(1 + 2 p_{3}) q_{1} + 2 s| = 2 T$$
(12)

On en tire :

 $q_1 = 0,53, N = 12,8, s = 0,13, \frac{\zeta(0)}{L}$ indéterminée.

Il s'en suit que la charge qui correspond à $N_3 = 12,8$ provoque soit un fluage établi en A et B, soit la ruine totale ; le premier de ces deux états est par suite instable.

Les valeurs de P supérieures à 12,8 $\frac{E I}{L^2}$ doivent *a fortiori* provoquer la ruine de la poutre ; l'étude de ce dernier cas, plus complexe, sort du cadre de notre sujet.

La méthode classique des charges limites donnerait, pour l'apparition des rotules plastiques en A et B (fluage établi des encastrements):

 $N_{2}=$ 14,4 avec $\frac{\zeta\left(o\right)}{L}=$ 0,029 (au lieu de 11,7 et 0,031), et pour le dépassement de la limite élastique en O :

$$N_3 = 16$$

avec ruine totale pour

$$N_4 = 19,2$$
 (au lieu de 12,8)

IV. — CONCLUSION

La présente méthode, fondée sur une connaissance approfondie du matériau, est plus précise et plus sécurisante que la méthode classique qui surestime nettement les charges limites.

Elle est susceptible d'entraîner en pratique un allégement des constructions métalliques en réduisant considérablement les coefficients de sécurité dont les résultats du calcul plastique doivent être affectés et qui peuvent être pris du même ordre que dans un calcul élastique.

BIBLIOGRAPHIE

- R. MAZET. Symposium IUTAM Göteborg, 1970 Vienne/New-York, Springer, 1971, pp. 170-186.
- [2] R. MAZET. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques, Vol. XXI, n° 5, 1973, pp. 243-254.

Sur les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage

par B. HALPHEN et Q.S. NGUYEN, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique — Ecole des Mines de Paris

RESUME

L'hypothèse thermodynamique de dissipativité normale nous permet d'établir les lois d'évolution de la déformation plastique et des paramètres d'écrouissage pour une classe de matériaux dits standards généralisés. Nous montrons que cette classe contient tous les modèles rhéologiques formés de ressorts, patins et amortisseurs.

I. INTRODUCTION

Un des problèmes fondamentaux dans la théorie de l'élastoplasticité ou de l'élastoviscoplasticité est le choix des paramètres caractérisant l'écrouissage et la détermination de leurs lois d'évolution. Certes certaines études physiques et expérimentales (Teodosiu C. [8], Zarka J. [9], Zaoui A. [10], Bui H.D. [1]) ont permis de comprendre les mécanismes de l'écrouissage ; mais elles fournissent des modèles encore trop complexes pour l'ingénieur. L'objet de notre étude est de montrer comment l'hypothèse thermodynamique de dissipativité normale permet de mettre en évidence des lois simples d'écrouissage Nous définirons ainsi une classe de matériaux élastoplastiques et viscoplastiques que nous appelons standards généralisés. Nous montrerons que les lois d'évolution de l'écrouissage utilisées habituellement pour les calculs d'ingénieurs rentrent dans le cadre de la théorie des matériaux standards généralisés.

II. THERMODYNAMIQUE DU MATERIAU ELASTOPLASTIQUE

Considérons un matériau élastoplastique ou élastoviscoplastique en transformation infiniment petite. La vitesse de déformation totale $\dot{\epsilon}$ est la somme de la vitesse de déformation élastique $\dot{\epsilon}^{e}$ et de la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}^{p}$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{p}$$
 (1)

* Conférence prononcée le 15 novembre 1973 devant le Groupe français de Rhéologie.

ABSTRACT

The thermodynamic assumption of normal dissipativity enables us to establish rate equations of the plastic deformation and of work-hardening parameters for the class of generalized standard materials. It is shown that this class includes all rheological models.

L'état thermodynamique d'un élément de matière est défini par les variables d'état suivantes :

ε° tenseur de déformation élastique de l'élément

 $\alpha = \{ \alpha_k \mid k = 1, n \}$ famille de paramètres internes à valeurs scalaires ou tensorielles, définissant l'état d'écrouissage du matériau; pour un monocristal métallique par exemple, les α_k sont des grandeurs liées à la répartition des dislocations,

T température absolue.

Si ϕ désigne l'énergie libre spécifique du matériau, on peut écrire :

$$\phi = \phi \left(\varepsilon^{\rm e}, \, \alpha, \, \mathsf{T} \right) \tag{2}$$

Soit S l'entropie spécifique et ρ la masse volumique du matériau. Le second principe de la thermodynamique peut être écrit sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\frac{\sigma \dot{\varepsilon}}{\rho} - (\phi + S \dot{T}) - \frac{q}{\rho T} \text{ grad } T \ge 0$$
 (3)

où q est le vecteur flux de chaleur.

Développons ϕ en fonction des vitesses des variables d'état et utilisons la décomposition (1) de la vitesse de déformation ; l'inégalité (3) devient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\rho} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon^{\epsilon}} \end{pmatrix} \dot{\varepsilon}^{\epsilon} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} + S \right) \dot{T}$$

$$+ \frac{\sigma}{\rho} \dot{\varepsilon}^{p} - \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_{k}} \dot{\alpha}_{k} - \frac{q}{\rho T} \operatorname{grad} T \ge 0$$

$$(4)$$

Comme on peut donner à ê, T des valeurs arbitraires sans changer les valeurs des variables d'état, ni celles des autres vitesses qui interviennent dans l'inégalité (4), on déduit de cette dernière inégalité (4) les relations suivantes :

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial z^{e}} \qquad \mathbf{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}} \qquad (5)$$

Le second principe de la thermodynamique s'exprime alors sous la forme :

$$\sigma \dot{\varepsilon}^{p} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_{k}} \dot{\alpha}_{k} - \frac{q}{T}$$
. grad $T \ge 0$ (6)

Soit D la dissipation intrinsèque volumique définie par :

$$\mathsf{D} = \sigma \, \dot{\varepsilon}^{\rho} - \rho \, \frac{\partial \phi}{\partial \alpha_k} \, \dot{\alpha}_k \tag{7}$$

Si on suppose que les dissipations intrinsèque et thermique sont découplées l'inégalité (6) conduit aux deux inégalités suivantes :

$$\mathsf{D} = \sigma \dot{\varepsilon}^{p} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_{k}} \dot{a}_{k} \ge \mathsf{O}$$
(8)

et

$$- q \cdot grad T \ge O$$

(9)

III. HYPOTHESE DE DISSIPATIVITE NORMALE

D'une manière générale, la dissipation intrinsèque volumique D peut être écrite sous la forme suivante :

$$D = A_i \dot{a}_i$$
, (i == 1, N) (10)

où les \dot{a}_i sont des composantes de vitesses et les A_i des composantes de forces généralisées. Identifions les A_i et les \dot{a}_i aux composantes de deux vecteurs A et à de $R^{\mathbb{N}}$, la dissipation D s'écrit alors sous la forme d'un produit scalaire :

$$\mathsf{D} = \mathsf{A} \cdot \dot{\mathsf{a}} \tag{11}$$

Mettant sous forme mathématique rigoureuse un principe de normalité introduit par Ziegler H., Moreau J.J. énonce l'hypothèse suivante, dite hypothèse de dissipativité normale :

Il existe un potentiel φ (A) convexe et semicontinu inférieurement tel que la vitesse à associée à la force généralisée A soit un sous-gradient de φ au point A :

$$\dot{a} \in \partial \varphi (A)$$
 (12)

Nous rappelons que le sous-différentiel $\partial \varphi$ (A) qui est l'ensemble des sous-gradients de φ au point A, permet de généraliser la notion de gradient aux fonctions non différentiables [5].

Si φ est différentiable, à est simplement le gradient de φ au point A :

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{A}} \tag{13}$$

Nous allons maintenant déduire de cette hypothèse la définition d'une classe de matériaux élastoplastiques.

IV. LES MATERIAUX STANDARDS GENERALISES

Considérons un matériau élastoplastique et posons :

$$\mathcal{A} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \tag{14}$$

La dissipation intrinsèque volumique de ce matériau s'écrit alors :

$$\mathsf{D} = \sigma \,\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \,\mathcal{A} \,\dot{\alpha} \tag{15}$$

 \mathcal{A} est ainsi la force associée à la vitesse $-\dot{\alpha}$ dans la dissipation intrinsèque volumique, tandis que σ est la force associée à la vitesse de déformation plastique $\dot{\varepsilon}^{\varrho}$.

Définition : Nous appelons matériau standard généralisé un matériau élastoplastique ou élastoviscoplastique à paramètres internes pour lequel il existe une famille de paramètres internes α telle que, si \mathcal{A} est la force associée à α par la relation (14) l'hypothèse de dissipativité normale soit vérifiée pour la force $A = (\sigma, \mathcal{A})$ et la vitesse $\dot{a} = (\tilde{\epsilon}^v, -\dot{\alpha}).$

Pour un tel matériau il existe donc un potentiel φ (σ , \mathcal{A}) tel que :

$$(\dot{\varepsilon}^{p}, -\dot{\alpha}) \in \partial \varphi (\sigma, \mathcal{A})$$
 (16)

1. Cas de la plasticité classique, non visqueuse

Pour un matériau élastique parfaitement plastique classique, la théorie du potentiel plastique indique que le potentiel φ est la fonction indicatrice d'un domaine convexe de l'espace des contraintes. (Voir Moreau J.J. [5], Germain P. [2]). L'extension naturelle que nous faisons est alors de définir le matériau élastoplastique écrouissable standard généralisé comme le matériau pour lequel le potentiel φ est la fonction indicatrice Ψ_c d'un domaine convexe C de l'espace des forces (σ , \mathcal{A}):

$$\varphi (\sigma, \mathcal{A}) = \Psi_{e} (\sigma, \mathcal{A}) = \begin{cases} 0 \text{ si } (\sigma, \mathcal{A}) \in C \\ + \infty \text{ si } (\sigma, \mathcal{A}) \notin C \end{cases}$$
(17)

Le vecteur $(\dot{\epsilon}^{\varphi}, -\dot{\alpha})$ est alors nul si (σ, \mathcal{A}) est à l'intérieur de C; il est normal à la frontière de C si (σ, \mathcal{A}) est sur cette frontière.

Si le domaine C est l'intersection de m domaines convexes définis par F^k (σ , \mathcal{A}) \leq O, k = 1, m, où les surfaces $F^k = O$ sont régulières, on a :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{p} = \lambda^{k} \frac{\partial F^{k}}{\partial \sigma} & \lambda^{k} \ge 0 \text{ si } F^{k} = 0 \\ -\dot{\alpha} = \lambda^{k} \frac{\partial F^{k}}{\partial A} & \lambda^{k} = 0 \text{ si } F^{k} < 0 \end{cases}$$
(18)

INDUSTRIE MINERALE

Ces dernières relations constituent une généralisation de la théorie du potentiel plastique multiple de W.T. Koiter et J. Mandel. Elles donnent, en plus de la théorie classique, la loi d'évolution des paramètres d'écrouissage.

2. Cas de la viscoplasticité

On obtient la généralisation de la théorie du potentiel viscoplastique de Rice en considérant le cas où le potentiel φ est une fonction convexe différentiable Ω (σ , \mathcal{A}). Les lois d'évolution de la déformation plastique et des paramètres d'écrouissage s'écrivent alors :

$$\dot{\epsilon}^{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}$$

$$- \dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}$$
(19)

3. Cas de la viscoplasticité avec déformations plastiques instantanées

Si le potentiel φ est la somme d'une fonction convexe différentiable Ω (σ , \mathcal{A}) et de la fonction indicatrice Ψ_{e} (σ , \mathcal{A}) d'un domaine convexe C, le matériau considéré est viscoplastique avec déformations plastiques instantanées. Si on considère le cas du potentiel plastique multiple, on obtient les lois d'évolution suivantes :

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \lambda^{k} \frac{\partial F^{k}}{\partial \sigma} - \dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial A} + \lambda^{k} \frac{\partial F^{k}}{\partial A}$$
(20)

Ainsi, l'application de l'hypothèse de dissipativité normale nous a permis de définir une classe de matériaux dits standards généralisés pour lesquels nous avons obtenu non seulement les lois d'évolution de la déformation plastique données par la théorie du potentiel plastique ou viscoplastique, mais également les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage sous une forme analogue.

V. LES MATERIAUX DE LA CLASSE e

Nous allons maintenant considérer une classe \mathcal{C} particulière de matériaux standards généralisés, particulièrement intéressante pour les applications pratiques, puisqu'elle contient, comme nous le verrons plus loin, la plupart des modèles usuels de matériaux écrouissables. Cette classe a été définie et étudiée par Nguyen Q.S. à partir de considérations purement mécaniques [6].

Les matériaux de la classe $\mathscr C$ sont ceux pour lesquels la force $\mathscr A$ est une fonction linéaire des paramètres α :

$$\mathcal{A} = \mathbf{Z}_{\mathbf{x}}$$
(21)

Z étant une matrice constante, régulière, symétrique. Pour un matériau viscoplastique à déformations plastiques instantanées, avec potentiel plastique multiple, on peut alors exprimer les potentiels F^k , Ω en fonction de (σ , α) au lieu de (σ , \mathcal{A}) :

$$\begin{cases} \Omega (\sigma, \mathcal{A}) \equiv \omega (\sigma, \alpha) \\ \mathsf{F}^{\mathsf{k}} (\sigma, \mathcal{A}) \equiv \mathsf{f}^{\mathsf{k}} (\sigma, \alpha) \end{cases}$$
(22)

 \mathcal{A} étant liées à α par une transformation linéaire, la propriété de convexité des potentiels est conservée : ω et f^k sont des fonctions convexes de (σ , α).

Pour un matériau de la classe \mathcal{C} , les lois d'évolution (20) deviennent :

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} + \lambda^{k} \frac{\partial f^{k}}{\partial \sigma} \lambda^{k} \ge 0 \text{ si } f^{k} = 0$$
$$- Z \dot{\alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \lambda^{k} \frac{\partial f^{k}}{\partial \alpha} \lambda^{k} = 0 \text{ si } f^{k} < 0$$
(23)

Nous allons maintenant donner deux exemples de modèles rhéologiques de la classe \mathcal{C} .

VI. EXEMPLES

1. Exemple élastoplastique

Considérons le modèle élastoplastique de la figure 1 composé de deux ressorts de constantes K_{4} , K_{2} et d'un patin de seuil constant s. ϵ^{e} est l'allongement du premier ressort tandis que α , allongement du deuxième ressort, mesure la déformation plastique et définit l'état d'écrouissage. L'énergie libre du modèle est la somme des énergies élastiques emmagasinées par les ressorts :

$$\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon^{e} \mathsf{K}_{1} \varepsilon^{e} + \frac{1}{2} \alpha \mathsf{K}_{2} \alpha$$
 (24)

On en déduit :

$$\mathcal{A} = \mathsf{K}_2 \, \alpha \tag{25}$$

 \mathcal{A} est fonction linéaire de α .

Le critère de plasticité s'écrit :

$$f(\sigma, \alpha) \equiv \sigma - K_2 \alpha - s \leq 0$$
 (26)

Comme $\dot{\varepsilon}^{p} = \dot{\alpha}$, on voit que :

$$\dot{\epsilon}^{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \lambda$$
 (27)

$$-K_{2}\dot{\alpha} = -K_{2}\lambda = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$
(28)

15 novembre 1975

Les relations (25), (27), (28) comparées aux relations (21), (23) montrent que le modèle étudié appartient à la classe \mathcal{C} . Or ce modèle n'est autre que le modèle d'écrouissage cinématique de Prager unidimensionnel. On peut montrer de la même façon que le modèle de Prager tridimensionnel appartient à la classe \mathcal{C} .

2. Exemple élastoviscoplastique

Considérons le modèle élastoviscoplastique représenté à la figure 2.

$$\eta_1 \dot{\varepsilon}^p = \langle \sigma - \mathsf{K}_2 \alpha - \mathsf{s} \rangle \tag{29}$$

où < x> désigne la partie positive de x

et: $\dot{\alpha} + \frac{K_2 \alpha}{m_2} = \dot{\epsilon}^p$

Soit :

$$\dot{lpha}=rac{1}{\eta_1}<\sigma-{
m K_2}lpha-{
m s}>-rac{{
m K_2}}{\eta_2}$$
 a (30)

L'énergie libre de ce modèle est l'énergie emmagasinée dans les ressorts :

$$\Phi = \frac{1}{2} \varepsilon^{e} K_{1} \varepsilon^{e} + \frac{1}{2} \alpha K_{2} \alpha$$
(31)

On en déduit que la force associée à a est :

$$\mathcal{A} = \mathsf{K}_{\mathrm{s}^{\mathrm{d}}} \tag{32}$$

Les équations d'évolution (29), (30) peuvent être écrites sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}^{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}$$

$$- K_{0} \dot{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}$$
(33)

où le potentiel Ω est donné par :

$$\Omega = \frac{1}{2\eta_1} < \sigma - K_2 \alpha - s >^2 + \frac{1}{2\eta_2} K_2^2 \alpha^2 \qquad (34)$$

Les relations (32) et (33) montrent que le modèle viscoplastique envisagé appartient à la classe \mathcal{C} .

VII. CONCLUSION

L'hypothèse thermodynamique de dissipativité normale nous a permis de généraliser la théorie du potentiel plastique ou viscoplastique en définissant une classe de matériaux dits standards généralisés pour lesquels les lois d'évolution des paramètres d'écrouissage ont une forme particulièrement simple. Il est important de noter qu'il est possible d'étendre à ces matériaux écrouissables les théorèmes généraux de la théorie du matériau parfaitement plastique (voir Nguyen Q.S. [6], [7], Halphen B. et Nguyen Q.S. [3], Moreau J.J.[5]), d'autant plus que la plupart des modèles utilisés par les ingénieurs font partie de cette classe de matériaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H.D. BUI. Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écrouissage et relation de comportement élastoplastique des métaux cubiques. Thèse, Paris (1969).
- [2] P. GERMAIN. Cours de Mécanique des Milieux Continus, tome 1. Masson et Cie, Paris (1973).
- [3] B. HALPHEN et O.S. NGUYEN. Sur les matériaux standards généralisés. J. de Mécanique, 14, 1 (1975).
- [4] J. MANDEL. Plasticité classique et Viscoplasticité. Cours du C.I.S.M., Udine (1971) — Springer Verlag (1972).
- [5] J.J. MOREAU. On unilateral constraints, friction and Plasticity. « Lectures Notes », C.I.M.E., Bressanone (1973).
- [6] O.S. NGUYEN. Evolution de la contrainte et de l'écrouissage pour certains matériaux à écrouissage positif. Séminaire « Plasticité et Viscoplasticité » Ecole Polytechnique (1972), Ediscience, Mc Graw Hill (1974).
- [7] O.S. NGUYEN. Contribution à la théorie macroscopique de l'élastoplasticité avec écrouissage. Thèse, Paris (1973).
- [8] C. TEODOSIU. Elastic-viscoplastic behaviour of single crystals, Summer School on Thermoplasticity, Jablonna (1973).
- [9] J. ZARKA. Sur la viscoplasticité des métaux. Thèse, Paris (1968).
- [10] A. ZAOUI. Etude sur l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique des métaux polycristallins (système C.F.C.), Thèse Paris (1970).

Evolution des structures des textiles par fatigues thermiques et mécaniques *

par M. SOTTON, Laboratoire de l'Institut textile de France, Boulogne-sur-Seine, 35, rue des Abondances

RESUME

Les idées générales sur la structure des matériaux fibreux sont brièvement évoquées. Plusieurs exemples sont rappelés pour illustrer les rôles respectifs joués par les parties cristallines et amorphes, et, également les zones à ordre intermédiaire (mésomorphe), lors des sollicitations mécaniques des fibres.

Les principales méthodes d'investigation de la structure fibreuse sont rapidement décrites : diffractométrie X aux grands et petits angles, microscopie électronique (techniques histochimiques permettant de révéler la structure fibrillaire et la structure poreuse ouverte des fibres).

Quelques résultats illustrent les modifications structurales induites dans l'architecture fibrillaire sous l'effet des fatigues thermo-mécaniques (étirage, craquage, chocs thermiques sec et humide), chimique (solvant) et mécanique (cycle d'extension).

I. GENERALITES CONCERNANT LES RELATIONS STRUCTURE-PROPRIETES DES MATERIAUX FIBREUX

La compréhension des propriétés des matériaux fibreux passe par l'accumulation et l'interprétation de données de structures moléculaire et surtout supramoléculaire, plutôt que par la connaissance de quelques paramètres de fabrication.

Les structures moléculaires secondaires ainsi que le comportement mécanique qui en résulte sont en définitive déterminées par la constitution chimique en chaîne. Cependant, la seule considération de la structure chimique s'avère souvent insuffisante et il paraît peu probable que la connaissance exclusive de la constitution chimique de la chaîne d'un polymère puisse suffir à déterminer théoriquement toutes les propriétés réalisables. Les nombreuses études qui ont été faites dans le sens des relations structure-propriétés ont abouti à la proposition de modèles de structure qui peuvent rendre compte du comportement mécanique des matériaux fibreux et qui décrivent justement la manière dont les chaînes et segments de chaînes macro-moléculaires, non plus considérés comme des entités, se distribuent spa-

SUMMARY

Some general ideas about fibrous structure are briefly discribed. Several examples are recalled to take account for specific behaviour of cristalline and amorphous parts and also « mesomorphe » ones, when stress and strain are applyed on fibrous material.

Main means of fibrous structure investigation are briefly recalled : X-Ray diffraction at wide and small angles, electronic microscopy (histochemical devices allowing staining of the fibrillar and porous structures).

Many results illustrate the structural modifications which occur during thermo-mechanical fatigue (drawing, draft-cutting, dry or wet heat treatments) chemical one (solvant treatments) or mechanical one (many thousands cycles of low stretching).

tialement et s'organisent entre elles pour constituer des unités structurales plus importantes (fibrilles, macrofibrilles), à l'intérieur desquelles il est possible de différencier des zones d'ordre (cristalline) et de désordre (amorphe, mésomorphe). M. Schutz, dans son exposé, a parlé des rôles respectifs joués par ces différentes zones lors d'un essai de traction, et, il a montré que le comportement élastique des matériaux fibreux était déterminé pour l'essentiel par les propriétés de certaines régions amorphes (rôle particulier des interfaces). Le comportement plastique des fibres dépendrait, en plus, et pour une large part, des propriétés des domaines cristallins.

Pour illustrer ce dernier point et souligner la nécessité de posséder des données sur l'organisation supramoléculaire, afin de formuler des interprétations correctes sur les propriétés des fibres, nous citerons un exemple emprunté aux travaux de Bonart [1] et relatif à des fibres de polyéthylène et polybutylène téréphtalate PET et PBT. Ces deux substances présentent une étroite parenté et le PBT cristallise aussi bien, sinon mieux, que le PET : les points de fusion et de transition des deux polymères sont voisins. Pourtant, la limite de fluage du PBT est deux fois plus faible que celle du PET. La constitution chimique des chaînes ne permet pas d'expliquer ce phénomène qui devient évident si l'on considère les résultats des examens cristallographiques. La figure 1 représente la configuration des chaînes dans

251

^{*} Réunion du 7 mars 1974 du Groupe français de Rhéologie à Paris.

les régions cristallines : sous l'effet des interactions moléculaires, les groupes diols et téréphtaliques se disposent en couches alternées, perpendiculaires à l'axe de chaîne. Il existe un remplissage spatial insuffisant dans la couche des résidus diols, dans la mesure où ceux-ci ne subissent pas de torsion, qui aurait pour effet d'augmenter leur rayon. Le PBT cristallise avec des séquences CH2 tordues, alors que les séquences CH2 courtes du PET cristallisent dans la forme étirée. Il en résulte une différence très importante dans la stabilité mécanique des domaines cristallins de ces deux polymères. Des sollicitations mécaniques longitudinales vont produire dans le PBT une rotation des séquences CH₂ et leur allongement, d'où fluage du matériau, consécutif à une destruction du réseau cristallin. Dans le PET l'écartement des angles de valence dans les segments cristallins. reste faible pour des sollicitations équivalentes.

Pourtant, les propriétés des zones cristallines des fibres ne sont pas prédominantes, bien que l'on ait admis longtemps que le degré de cristallinité et l'orientation cristalline étaient les paramètres décisifs qui permettaient de corréler propriétés mécaniques et structure supramoléculaire. En effet, des modifications de propriétés des zones amorphes peuvent souvent avoir plus d'influence sur le comportement mécanique d'une fibre que des variations de cristallinité. Certains travaux réalisés par Sprague et Noether [2] sur des fibres d'acétate de cellulose montrent, effectivement, que l'orientation et le taux de cristallinité de ces fibres augmentent avec le taux d'étirage, pour rester ensuite constant pour des taux d'étirage supérieurs à 5. Pourtant des modifications appréciables de propriétés mécaniques se produisent encore dans les fibres d'acétate étirées au-delà de ce taux et qui peuvent être attribuées à des réarrangements structuraux importants au niveau des zones amorphes (alignement et parallélisation des chaînes avec création des zones intermédiaires mésomorphes).

Un échantillon fibreux qui contiendrait une certaine quantité de ces zones mésomorphes, s'avérerait donc moins mou qu'un échantillon plus cristallisé, mais possédant des parties amorphes relaxées. Dans le *tableau* I, nous avons regroupé les paramètres d'orientation cristalline et de cristallinité, ainsi que les modules d'élasticité d'un fil PET étiré selon deux procédés technologiques différents. L'échantillon E, bien que peu cristallisé, s'avère moins mou que l'échantillon A qui doit présenter des régions amorphes à chaînes moléculaires relaxées. L'échantillon A est d'ailleurs le seul à donner un diagramme net de diffraction des RX aux petits angles, caractéristique d'une alternance longitudinale entre zones amorphes relaxées et cristallines.

On peut donc dire que, si le comportement mécanique d'une fibre est l'effet résultant des propriétés des domaines amorphes et cristallins, la manière dont se fera cette composition de propriétés, dépendra avant tout de la distribution spatiale des zones cristallines et amorphes et surtout de la nature des interphases.

Sur la figure 2 sont regroupés trois modèles de structure colloïdale. Le premier modèle correspond

Fig. 2. - Modèles de structure

		Treasure .			Petits angles		
Echantillon	Taux étirage	Module	Indice cristallinité	Facteur orientation	Longue période (Å)	Intensité (unité arbitraire)	
Fibres polyester E	× 3,99	1 050 g/tex	19 %	0,971	\simeq 169	très	
Fibres polyester A	× 3,77	900 g/tex	27 %	0,975	130	62	

TABLEAU I

INDUSTRIE MINERALE

à une structure de fibre étirée avec une architecture fibrillaire et les interfaces latéraux auxquels faisait allusion M. Schutz pour expliquer l'élasticité de cohésion des matériaux fibreux. Les deux autres modèles illustrent l'apparition d'un macroréseau, puis des couches cristallines, telles qu'elles peuvent se produire dans une fibre sous l'effet de traitements thermiques. La structure peut encore évoluer avec formation de véritables ponts cristallins entre les couches. Cette structure en couches reste pourtant du type mosaïque [1], c'est-à-dire que sous l'effet de contraintes longitudinales ou transversales, ou encore sous l'effet de forces de gonflement, elle peut se subdiviser en une structure fibrillaire.

On peut donc constater, au cours d'un recuit, un phénomène qui a une importance particulière et qui peut avoir plus de conséquences qu'une évolution de l'orientation ou de la cristallinité et qui correspond à la ségrégation spatiale des segments de chaîne amorphe et cristallin. Si la ségrégation structurale est complète entre zones de défauts et zones ordonnées, on arrivera à une séparation franche entre zones cristallines et amorphes, ce qui ne paraît pas favorable à une transmission homogène des tensions au niveau moléculaire. Si le degré de ségrégation est moins important, il peut persister des ordonnancements mésomorphes favorables pour les propriétés macroscopiques.

Enfin, il faut signaler que ces réarrangements spatiaux, qui se produisent lors d'un recuit, vont faire évoluer de manière importante les vides, ainsi que la distribution de la porosité associée à la structure colloïdale des fibres.

M. Schutz, de son côté, a démontré qu'une fatigue mécanique pouvait également provoquer : formation d'une porosité, migration de vides et, finalement, une redistribution spatiale des pores, très voisines de celles initiées lors d'un recuit.

II. METHODE D'EXAMEN DES MATERIAUX FIBREUX EN MICROSCOPIE ELECTRONIQUE ET DIFFRACTION DES RX

Seules seront décrites les méthodes d'examen, les plus simples, qui permettent d'étudier, en routine, les problèmes de structure sur fibres.

II.1. Diffraction des RX

Les techniques de diffraction des RX aux grands angles, permettent d'appréhender assez aisément les paramètres de cristallinité et d'orientation cristalline sur fibres. L'étude de la cristallinité nécessite, au préalable, la réalisation d'un échantillon dans lequel toute orientation préférentielle a disparu. Pour ce faire, des « poudres » de fibres sont préparées à l'aide d'un microtome spécial, capable de débiter des tronçons de fibres de 60 à 80 μ de longueur qui sont ensuite tamisés et pastillés sous pression, à l'intérieur du porte-échantillon, de manière à constituer une plaquette dans laquelle les particules de fibres présentent une orientation quelconque.

Pour la détermination d'indice de cristallinité, nous avons adapté, en routine, une méthode relative qui consiste à comparer le spectre RX d'un échantillon inconnu à ceux de deux standards : l'un 100 % cristallin, l'autre 100 % amorphe [3-4]. Les diagrammes RX sont obtenus selon une méthode d'examen goniométrique en pas à pas (tous les 0, 1 degré en 2θ). Après correction et normalisation, les intensités sont mesurées à chaque pas, de manière à définir, l'écart X entre l'inconnu et l'amorphe par rapport à l'écart Y entre l'amorphe et le cristallin. Sur l'intervalle angulaire étudié, on obtient ainsi une centaine de couples de valeurs X — Y qui sont traités par corrélation pour le calcul d'un indice de cristallinité :

$$I.C. = \frac{\Sigma XY - 1/n \Sigma X \Sigma Y}{\Sigma X^2 - 1/n (\Sigma X)^2}$$

Cette méthode peut être généralisée et appliquée au cas de fibres possédant deux phases cristallines [5]. C'est le cas des fibres cellulosiques ayant subi un traitement industriel tel que le mercerisage ou tout autre traitement alcalin, et qui renferment alors des quantités variables de Cellulose I et de Cellulose II. Il convient alors pour conduire les calculs d'indice de cristallinité, de disposer, en plus des valeurs du standard amorphe, de valeurs d'intensités des deux standards 100 % cristallin Cell. I et Cell, II. Pour l'étude d'un échantillon inconnu, il suffit ensuite de mesurer, à chaque angle la diffraction, l'écart entre inconnu et amorphe, et ceux entre standard Cell. I et amorphe et standard Cell. II et amorphe (cf. figure 3). Ces mesures étant effectuées N fois dans l'intervalle angulaire étudié, une analyse linéaire bivariante permet de calculer les taux f1 et f2 des 2 phases cristallines en présence.

Ces méthodes de détermination d'indices de cristallinité ne sont pas « absolues », et, si elles permettent en étude de routine, de comparer et de classer des échantillons, elles ne sont pas assez élaborées pour rendre compte des paramètres de distorsion des régions ordonnées. L'étude fine des profils de raie, quand elle est possible, compte tenu de la mauvaise résolution pic-bruit de fonds dans les phénomènes de diffraction sur fibres, peut donner une idée à la fois sur le désordre de la structure cristalline et sur la taille des cristallites. Mais dans toutes les études sur les élargissements des profils de raies, il est toujours difficile de faire la part entre ces deux paramètres.

Une méthode théorique a pourtant été proposée pour le calcul des cristallinités absolues dans les polymères, en tenant compte d'un paramètre de désordre, et qui, vu le développement des générateurs de RX de puissance qui permettent de limiter les durées d'examen, ainsi que celui des moyens de calculs, devrait pouvoir être adaptée en routine au problème des fibres. Cette méthode, proposée par Ruland W., consiste à corriger les mesures de cristallinités par un facteur K qui est fonction d'un paramètre d'imperfection D [6].

Fig. 3. - Méthode de calcul des indices de cristallinité dans le cas de fibres renfermant deux phases cristallines

$$X_{e} = \frac{\int_{0}^{\infty} s^{2} lc_{(s)} ds}{\int_{0}^{\infty} s^{2} l_{(s)} ds} K (s, \vec{f}, D)$$
$$D = e^{-kt^{2}}$$

s : vecteur du réseau réciproque.

- Is, lo(s) : Intensité cohérente et Intensité « cristalline » diffusées au même point de l'espace réciproque.
- f: facteur de diffusion.

Les atomes peuvent s'écarter de leur position idéale, dans les segments de chaîne cristalline, soit pour des raisons de vibrations thermiques, soit par des distorsions ou imperfections de réseau du 1^{er} ou du 2ème ordre, on peut écrire que :

$$k = k_{T} + k_{D}$$

Ruland a pu montrer [6] que dans les films de polypropylène le désordre était uniquement d'origine thermique ($k = k_T$) et qu'il existait donc dans ces échantillons un système à deux phases : cristallin, amorphe, avec des régions cristallines relativement

INDUSTRIE MINERALE

bien ordonnées et sans zones de transition entre régions cristalline et amorphe. Par contre, des films Nylon 6 et 7 possèdent des zones cristallines et des zones de transition fortement perturbées.

Les études de texture aux grands et petits angles de diffraction nécessitent la préparation d'un échantillon où les éléments fibreux présentent une orientation identique : position en faisceau ou en nappes à spires jointives. Les échantillons ainsi préparés sont alors disposés sous le faisceau X de manière à satisfaire les conditions de Bragg pour les plans perpendiculaires ou parallèles à l'axe des fibres. L'étude de la distribution azimutale de l'intensité le long des interférences diatropiques (méridiennes) permet de calculer immédiatement un facteur d'orientation des cristallites. Ces interférences étant généralement faibles, il est préférable d'étudier deux interférences paratropiques (équatoriales) correspondant à des plans sensiblement perpendiculaires entre eux.

La majorité des matériaux fibreux donnent lieu à des phénomènes de diffraction des RX aux petits angles qui rendent compte de l'existence d'une superstructure et qui permettent, plus ou moins qualitati-

Fig. 4. — Evolution du diagramme X aux petits angles des fibres de Polyamide 66 sous l'effet des traitements thermiques. Augmentation de la période longue, de l'intensité des interférences et diminution de leur extension latérale

vement, de saisir l'importance de la ségrégation structurale entre zones amorphes et cristallines et de calculer la longue période qui correspond à ces alternances longitudinales. L'intensité de ces interférences est fonction, notamment, de l'écart de densité électronique entre parties cristallines et amorphes et elle varie de manière importante après des traitements thermiques ou thermomécaniques. Il en va de même de l'extension latérale de ces interférences qui peut rendre compte de l'étendue et des ondulations des couches cristallines [7].

Cette évolution caractéristique du diagramme aux petits angles est illustrée sur la figure 4 où sont regroupés des clichés X correspondants à des fibres de Polyamide 66 traitées, à l'état lâche, à diverses températures. L'élévation de la température du traitement s'accompagne d'un accroissement régulier de l'indice de cristallinité (mesures effectuées aux grands angles de diffraction) d'une augmentation de la longue période, de l'intensité des interférences et d'une diminution très nette de leur extension latérale. Cette évolution peut être caractéristique de l'apparition de la structure en couches ou lamelles avec même apparition de ponts cristallins (240 °C).

II.2. Microscopie électronique

Un certain nombre de méthodes, dites de coloration directe, permettent la mise en évidence, en microscopie électronique, de la structure des matériaux fibreux. Elles consistent à fixer, de manière topo-chimique, des atomes lourds (Ag, Au, Og) sur certains sites réactifs des chaînes macromoléculaires. Certaines techniques, dites de colorations négatives, permettent en outre, de révéler les éléments morphologiques (fibrilles, macrofibrilles), non plus par coloration de ceux-ci, mais par fixation des métaux lourds sur une phase, non fibreuse, préalablement incluse dans la structure. Les méthodes mises au point à l'Institut textile de France consistent à inclure dans les fibres des substances osmiophiles (polyisoprène, anhydre maléique) et ensuite à la colorer par le tetroxyde d'osmium [8-9].

La mise en évidence de la porosité des matériaux fibreux nécessite également un traitement intermédiaire afin d'insérer, dans les zones poreuses, et sans déformation de structure, un corps indicateur ou susceptible d'être révélé ultérieurement lors de la diffusion des « colorants ». La méthode que nous avons développée dans ce but à l'I.T.F. consiste à précipiter in situ du sulfure d'argent par traitements successifs à H₂S et A₂NO₃ [10]. Cette méthode de coloration a l'avantage de ne produire aucun gonflement, donc aucune déformation de la structure. De ce fait aussi, elle ne permet qu'une révélation limitée de la porosité et la mise en évidence de ce que nous avons appelé les « voies de cheminement préférentielles ». Généralement les examens des sections transver-

24

sales de fibres ainsi révélées, montrent que ces voies préférentielles sont radiales, issues de microlobes ou accidents de surface et sont souvent associées à un fin réseau périphérique de microvides.

24

Les résultats obtenus par cette méthode s'avèrent être en bon accord avec ceux obtenus par d'autres méthodes porosimétriques classiques : sur la *figure* 5 nous avons regroupé, pour trois types de fibres de polyacrylonitrile, les micrographies électroniques des coupes transversales réalisées après insertion d'Ag₂S et les résultats des études de sorption de vapeur d'eau réalisées par M. Chabert du C.R.T.M. On peut constater que l'amplitude de l'hystérèse entre les isothermes d'absorption et de désorption, croit à mesure que le nombre de microvide augmente et que les « grosses failles » disparaissent. Les pores les plus fins sont évidemment ceux qui jouent un rôle prépondérant dans tous les processus de sorption,

INDUSTRIE MINERALE

III. QUELQUES EXEMPLES DE MODIFICATIONS STRUCTURALES DANS DES FIBRES AYANT SUBI DES TRAITEMENTS THERMIQUES OU THERMO-MECANIQUES

24

Au cours des divers stades technologiques de transformation, les fibres subissent un certain nombre d'opérations thermo-mécaniques, souvent sévères, qui provoquent des modifications structurales importantes.

Lors de l'étirage des fibres il se forme des épaulements avec des déformations de cisaillement et tout un réseau de lignes d'écoulement. Ce processus conduit, dans une fibre, à la formation d'un manteau périphérique d'orientation bi-axiale [1]. La méthode d'insertion d'Ag₂S permet, semble-t-il, la mise en évidence de ce manteau périphérique dans les fibres étirées. Sur la *figure* 6, nous avons regroupé des

Fig. 6. — Micrographies électroniques de fibres PET, réalisées sur des coupes de fibres préalablement traitées H₂S et AgNO₃. Révélation d'un manteau périphérique en feuillets concentriques dans les fibres étirées. La porosité périphérique des fibres non étirées (FNE) présente une orientation quelconque.

Ic : indice de cristallinité déterminée par diffraction X

RD : rapport dichroïque mesuré en spectrographie IR et caractéristique de l'orientation des macromolécules par rapport à l'axe de fibre (augmente avec l'étirage).

micrographies électroniques de coupes transversales de fibres polyester. L'insertion d'Ag₂S dans la couronne périphérique d'une fibre étirée (cliché du centre) permet de souligner une structure en feuillets plus ou moins concentriques. Une fibre non-étirée (FNE) montre dans sa périphérie une structure plutôt désordonnée, qui ferait penser à des branches de « sphérulites amorphes ». Un étirage de x 4 provoque pour cet échantillon, augmentation de cristallinité et ségrégation transversale en feuillets, du manteau périphérique. Une fibre ayant subi une préorientation en filature (FSE) présente dans sa périphérie une structure en feuillets, potentielle, qui se précise après un étirage de x 2.

Le craquage est une opération technologique qui permet d'obtenir des fibres discontinues à partir d'un câble constitué de plusieurs milliers de brins et qui met en jeu des traitements thermomécaniques sévères. Les filaments continus, extraits d'un câble acrylique, renferment une porosité périphérique à orientation plutôt radiale (figure 7 a). Après craquage, par étirage à chaud, la fibre est portée à un état métastable et présente de fortes fissurations radiales, associées à une porosité plus fine et périphérique (*figure* 7 b). Les contraintes accumulées dans le polymère et que l'on peut supposer localisées préférentiellement à l'endroit des pseudofissures, seront en partie relaxées par un traitement de vaporisage, qui provoquera retrait des fibres et effacement des fissures radiales (*figure* 7 c).

Le craquage s'accompagne d'une augmentation nette de cristallinité et d'un affinement du profil de raie, significatifs d'une amélioration de l'ordre de tassement des macromolécules dans les zones ordonnées, et qui est détruit, en partie, lors du traitement de vaporisage subséquent. A ces états de structure correspondent des courbes « charge-allongement » fortement différenciées. Les fibres craquées (FC), à haut degré d'ordre et fortes fissurations, présentent, par rapport aux brins initiaux (F), un comportement moins mou, mais un travail de rupture beaucoup plus faible. 258

Fig. 7. - Evolution de la porosité dans les fibres acryliques après craquage et fixage

Les fibres relaxées par vaporisage (FCF), dans iesquelles la porosité a été « effacée », récupèrent une certaine capacité de travail par rapport aux fibres craquées. Par contre, malgré leur faible degré d'ordre, elles présentent une élasticité de cohésion (zone hookéenne) identique à celles des fibres mieux ordonnées (FC), ce qui peut mettre en relief ce que nous disions plus haut sur l'importance des zones mésomorphes (interphases) (*figure* 8).

Nous avons été conduits, au Laboratoire de l'I.T.F., à faire un certain nombre d'examens sur des fibres acryliques commerciales auxquelles nous avons fait subir une fatigue thermique par traitement à haute température, soit en présence de vapeur d'eau, soit en présence d'azote, afin d'obtenir, en fin de cycles, des échantillons très différents susceptibles de se caractériser par des comportements extrêmes en teinture. Nous avons pu vérifier tout d'abord qu'avec les fibres acryliques, il était difficile de faire évoluer de manière importante la quantité de matière

Fig. 8. — Courbes charge-allongement des fibres acryliques après craquage et vaporisage (courbes moyennes de 50 essais sur fibres unitaires) $\beta_0: 1/2$ largeur à mi-hauteur du profil de raie la plus marquée dans le diagramme X de ces échantillons.

INDUSTRIE MINERALE

ordonnée sous l'effet de traitements thermiques, même sévères. Par contre, on peut observer une évolution caractéristique des profils d'interférence. Les traitements thermiques effectués en phase sèche provoquent un affinement des profils de raie, et, comme il est toujours difficile de faire la part entre les effets dûs à la taille des cristallites et ceux dûs aux distorsions, on peut en déduire toutefois que ces traitements thermiques à sec améliorent l'ordre initial de tassement des macromolécules de PAN. Après traitements hydrothermiques, nous observons, au contraire, un élargissement systématique des profils de raie, mais pourtant en deux stades bien distincts :

- jusqu'à 140 °C, l'élargissement pourrait être caractéristique d'un certain désordre structural (différence avec l'évolution notée lors des traitements à sec).
- au-delà de 140 °C, les diagrammes X sont fortement modifiés avec apparition d'un dédoublement de l'interférence la plus intense (figure 9) et d'une nouvelle interférence équatoriale au niveau du halo amorphe.

Le dédoublement de l'interférence la plus intense du spectre X serait caractéristique de l'apparition d'une phase orthorhombique à base centrée, constituée de chaînes syndiotactiques gauches [11]. Cette phase serait différente de la phase initiale, supposée également orthorhombique, simplement par le fait d'une distribution spatiale des groupements CN légèrement différente. L'apparition d'une interférence équatoriale, au niveau du halo amorphe, serait, elle, caractéristique d'une nouvelle phase tétragonale. constituée de chaînes étirées, en zig-zag, isotactiques.

Ces réarrangements de structure, qui impliquent des redistributions spatiales importantes des macromolécules, ne peuvent se produire que lors des traitements hydrothermiques, à partir d'une certaine température, lorsque les molécules d'eau peuvent envahir les zones ordonnées et relâcher les forces de cohésion intra et inter moléculaires, favorisant ainsi la rotation et le dépliement des segments moléculaires et les apportunités de cristallisation.

Fig. 9. — Profils de raie de diagramme X de fibres PAN, déterminées expérimentalement par balayage goniométrique en pas à pas. Dédoublement du profil après traitement hydrothermique à des températures supérieures à 140° C. Affinement du profil après traitement thermique sous azote.

Les examens effectués sur ces fibres en microscopie électronique, après insertion d'Ag2S, confirment également le fait d'une évolution morphologique très différente selon la nature des traitements thermiques. Sur la *figure* 10 on peut constater que les traitements à sec modifient fortement la distribution spatiale des zones poreuses initiales avec augmentation des zones poreuses à la périphérie, cellesci prenant une allure concentrique au cœur des fibres, témoignant ainsi de l'existence d'une structure particulièrement ordonnée et compacte.

Les traitements hydrothermiques font évoluer la porosité de manière très différente jusqu'à 140 °C, la porosité initiale disparaît progressivement ; seules persistent des voies radiales relativement épaisses. Au-dessus de 140 °C la porosité initiale est complètement effacée au profit d'une microporosité périphérique qui témoigne du profond réarrangement structural ayant pu se produire sous les effets conjugués de la température et de l'eau. On doit noter ici que des modifications structurales identiques ont pu être obtenues sur des fibres de PAN après des traitements chimiques, à des températures beaucoup plus basses (100 °C), dans des mélanges solvant-cosolvant (perchloréthylène-DMSO) [12].

Nous avons également pu vérifier qu'une fatigue mécanique pouvait provoquer des modifications de structure voisines de celles constatées après traitements thermiques [13].

L'exemple suivant concerne des fibres de PAN ayant subi des cycles d'extention répétées à une fréguence de 20 à 25 cycles/mn. Les examens effectués

Fig. 10. — Coupes transversales de fibres acryliques, examinées en microscopie électronique après insertion d'Agos. Modification de porosité des fibres initiales, très différente, suivant la nature des traitements thermiques.

15 novembre 1975

TABLEAU II

Nombre d'extensions	Indice d'ordre
0 — (témoin)	0,66
12 000	0,72
47 000	0,76

en microscopie et en diffraction des RX sur ces fibres, ont révélé que la fatigue provoque, comme le démontrait M. Schutz, une redistribution spatiale des zones poreuses et une augmentation du degré d'ordre, d'autant plus prononcée que la durée d'application des contraintes est plus longue. (cf. *tableau* II).

a = fibre initiale

a = fibre « fatiguée »

Fig. 11. — Exemple de redistribution des zones poreuses à l'intérieur d'une fibre acrylique soumise à une fatigue mécanique (10 000 extensions).

INDUSTRIE MINERALE

Sur la *figure* 11 nous avons regroupé les micrographies électroniques de sections transversales des tibres initiales et fatiguées. On peut remarquer la manière dont les parties poreuses ont migré pour se rassembler en pseudo-fissures qui peuvent être considérées comme les zones du polymère où s'accumulent les contraintes.

Il est intéressant de noter que ce type de fatigue mécanique est d'un niveau de sévérité faible et il est fort possible que des contraintes bien supérieures puissent s'accumuler dans les fibres au moment de la filature ou du tissage : opérations technologiques au cours desquelles des tensions importantes sont mises en jeu, souvent mal contrôlées et pouvant fréquemment subir de grandes variations.

BIBLIOGRAPHIE

- R. BONART, A. SCHULTZE, F. GEBHARDT. Struktur und Zigenschaften von verstreken Polymeren (fasern).
 Die Angew Makrom. chemie 22, 1-206, 1972, 41-86.
- [2] B. SHELDON SPRAGUE, HERMAN D. NOETHER
- The relationship of fine structure to mechanical properties of stretched. Saponified Acetate Fibers.

Textile Research Jornal Vol. 31, nº 10, oct. 1961 — pp. 858-865.

- [3] J.H. WAKELIN, H.S. VIRGIN, E. CRYSTAL Devlopment and comparison of two X. ray. methods for determining the crystallinity of cotton cellulose. J. Apply Phys. 30, 1959, 1654-1662.
- W.O. STATTON An X. Ray crystallinity index method with application to polyethylene terephtalate.
 - J. Apply Polymer Sci. 7 1963 pp. 803-815.
- [5] N.B. PATIL, NE DWELTZ, RADHAKRISHNANT Text. Res. J. 32, 6, 1962, pp. 460-471.
- [6] ALEXANDER L.E.
 X. Ray. Diffraction methods in Polymer-Science Wiley 1969 — pp. 138-149.
- [7] W.O. STATTON Small angle X. Ray. studies of polymers in newer methods of polymer characterization New-York Interscience 1964 — 231-278.
- [8] R. HAGEGE, P. KASSENBECK, D. MEIMOUN, A. PARISOT Text. Res. J. — Vol. 39, 11, 1969, pp. 1015-1022.
- [9] B. CATOIRE, G. GASTALDI, R. HAGEGE Etude morphologique et physico-chimique des chlorofibres. Mise en évidence de structure composite par inclusion de composés insaturés. Bull. ITF — vol. 3 — n° 11 — 1974.
- [10] M. SOTTON Développement d'une technique de révélation des structures poreuses : application aux hauts polymères fibreux. Compte-rendu 270 B — 1970 — pp. 1261-1264.
- [11] R. STEFANI, M. CHEVRETON, M. GARNIER, C. EYRAUD Les structures cristallines du PAN. Compte-rendu 251 — 1960 — 2174.
- [12] M. SOTTON, J. JACQUEMART, R. MONROCO
- Bulletin ITF. V.2 n° 8 1973 pp. 247-261.
- [13] R. SCHULTZ, M. SOTTON, H. SUGIER Modification de structure des fibres acryliques par fatigue mécanique.
 Compte-rendu Acad. Sci. Paris 276 (C) — 19 novembre 1973 — pp. 999-1001.

La fatigue des matériaux polymériques : application aux textiles

par R.A. SCHUTZ, Ecole supérieure de Chimie de Mulhouse, Ecole supérieure des Industries textiles de Mulhouse, Centre de Recherches textiles de Mulhouse

RESUME

La fatigue des matériaux polymériques est considérée comme un processus évolutif. L'analyse des causes possibles montre que la texture et l'évolution de cette texture, durant l'application de sollicitations répétées sont à l'origine des 3 mécanismes fondamentaux — coexistants ou non — du processus de fatigue. Les expériences citées confirment l'évolution de la texture prévue, c'est-à-dire la transformation de nombreux « petits trous » en « trous plus volumineux » mais moins nombreux. Les 3 mécanismes suivent 3 types de lois de Weibull différents. Une méthode d'analyse pratique est décrite.

1. INTRODUCTION

Parmi les matériaux polymériques, les textiles constituent des cas particuliers, caractérisés par une très forte anisotropie dûe à l'orientation longitudinale privilégiée de macromolécules de type essentiellement linéaire.

Ces matériaux, par rapport aux autres produits macromoléculaires solides de synthèse, tels que les « plastiques » se distinguent également par leur structure morphologique, c'est-à-dire par l'organisation architecturale tertiaire (associations de macromolécules en unités morphologiques plus ou moins « connectées »).

De plus, la présentation sous forme de fibres fines (de l'ordre d'une dizaine de micromètres de diamètre) et relativement longues (quelques centimètres pour les « fibres », quelques kilomètres pour les filaments continus) de section jamais cylindrique, mais de forme géométrique très complexe et variable sur la longueur, oblige à l'approche statistique.

Enfin l'utilisation pratique ne concerne pas la fibre individuelle, isolée, mais au moins un assemblage de nombreuses fibres sous forme de fils (nom générique pour les filés de fibres et pour les fils de filaments continus, assemblés et maintenus par « torsion »).

SUMMARY

The fatigue behaviour of polymeric materials is considered as an evolutive process. The analysis of the possible origins shows that the texture and the evolution of the texture during duration of repeated stresses are responsible for the 3 coexisting fundamental mechanisms of the fatigue process. The mentionned experiments confirm the predicted evolution of texture, that is the transformation of numerous « little holes » in more rare but « larger holes ». The 3 mechanisms follow 3 kinds of Weibull's laws. An analyse technique of them is described.

Compte-tenu de ces prémisses, l'étude des comportements rhéologiques des matériaux textiles revêt des caractères propres et nécessitent la mise en œuvre de méthodes et des techniques particulières.

Néanmoins pour la « consommation » pratique, il est utile de pouvoir caractériser les comportements à l'usage aussi bien « au porter » qu'aux sollicitations de l'emploi industriel.

Dans cet ordre d'idée, l'étude de la « tenue à la fatigue » revient à une étude de la « fiabilité » de ces matériaux.

C'est pourquoi nous considérons la « fatigue » en tant que processus évolutif depuis son origine jusqu'à son aboutissement ; classiquement en résistance des matériaux la fatigue n'est considérée que par sa manifestation catastrophique, c'est-à-dire par la rupture qui selon la définition du G.F. Rhéologie est la séparation d'un corps en parties disjointes, voire la diminution du degré de connexion que je qualifierais de « catastrophique ».

L'apparition de la rupture se fait au bout d'un temps t : « durée de vie », assimilable à une « fiabilité ».

Selon les concepts classiques en résistance des matériaux, la fatigue est donc l'aboutissement d'un phénomène de dégradation plus ou moins généralisée et se manifestant localement donc en un point particulièrement « fragile », particulièrement faible du matériau où se concentrent les contraintes.

Bien que distribués de manière plus ou moins aléatoire au sein du matériau, tant au point de vue

^{*} Réunion du 7 mars 1974 du Groupe français de Rhéologie à Paris.

262

importance ou taille, que du point de vue géographique, ces points faibles ont ceci de remarquable que l'apparition de la rupture en essai de fatigue statique, quel que soit le matériau considéré, semble suivre des lois simples selon les observations de l'institut Joffé (Léningrad) [1] : en fatigue statique pour différentes charges σ_i appliquées, les durées de vie ti correspondantes, se distribuent selon une fonction linéaire entre σ_i et log t_i pour une température d'épreuve donnée : pour différentes températures on obtient un faisceau de droites de pentes d'autant plus fortes que la température est plus élevée (faisceau qui semble converger vers un point correspondant à une durée de vie de l'ordre de 10⁻¹³ s), ce qui constitue un solide argument en faveur de l'hypothèse sur l'origine thermique des ruptures par fatigue.

Les lois de relation entre durées de vie et charges viennent aussi à l'appui de deux idées de base :

- l'apparition de la rupture est en relation avec une taille critique d'un « point faible » compte tenu de la concentration de contrainte,
- l'apparition de la rupture du matériau est liée à la solidité d'interactions disons « primaires » (de covalence) et « secondaires » Van der Waals, Liaisons H...

On peut alors se demander si la taille critique d'un point faible existe dès l'origine, de manière « congénitale » pour ainsi dire, ou si elle résulte d'une évolution ; dans ce dernier cas, comment cette évolution peut elle se faire ?

Pour répondre à ces questions, il nous faut rappeler rapidement les données de structures et de textures des matières textiles.

2. TEXTURE ET STRUCTURE DES TEXTILES

En utilisant les techniques de visualisation mises au point notamment par l'Institut textile de France [2, 3] en microscopie électronique on peut mettre en évidence l'existence de pores, failles, cavités et fissures « craquelés » (c'est-à-dire parcourus par des microfibrilles) ou non.

Par ailleurs, dans certains cas on peut mettre aussi en évidence une structure microcellulaire (la laine par exemple) ou microfibrillaire plus (la laine, le coton) ou moins (fibres cellulosiques artificielles) nettes : la structure microfibrillaire est liée à l'existence de domaines dits « cristallins » (ils se comportent comme des cristaux incorporés dans la masse dite « amorphe », notamment aux rayons X) et au caractère macromoléculaire linéaire.

Ces domaines cristallins ou « cristallites » ou encore « micelles », correspondent à un rapprochement optimal de tronçons de chaînes macromoléculaires, maintenu par des interactions de type « Hydrogène » ou de type forces de Van der Waals en général. La cohésion y est de ce fait relativement forte. Il arrive que des parties de molécules sortent de ce qui constitue la micro — (voire « proto ») — fibrille pour donner une liaison, covalente, avec la « matrice », « le ciment », que constituent les domaines amorphes. Nous appellerons cette liaison : un pontage solide discret à l'interface (entre un domaine fortement organisé et le domaine amorphe) voire un point d'ancrage solide.

Le domaine « amorphe » est constitué de macromolécules plus ou moins orientées dans le sens privilégié de la longueur de fibre.

Notons qu'en général on peut distinguer sur toutes les fibres une « peau » à structure différenciée par rapport au « cœur », à la masse des fibres.

Au niveau de l' « épiderme » de cette peau sur une assez faible épaisseur eu égard au diamètre de la fibre, l'orientation radiale est privilégiée.

Quel que soit le niveau d'investigation : à l'échelle des éléments morphologiques tels que les microfibrilles et leur voisinage, ou à l'échelle des macromolécules, l'hétérogénéité de l'organisation, de l'ordonnancement des différentes régions se traduit par des domaines à forte densité (les micelles) et par des domaines à faible densité, c'est-à-dire avec des « trous » entre la matière. Le désordre peut être exprimé par le nombre de petits « trous ».

3. EFFET D'UNE CHARGE SUR LA STRUCTURE DE FIBRES

Que se passe-t-il quand on soumet une fibre à une charge? La courbe charge-allongement commence par une partie d'allure hookéenne à module relativement élevé, puis quand la charge augmente on atteint le domaine viscoélastique qui se termine avec une augmentation du module : zone de rigidification. Classiquement on considère que la partie hookéenne correspond à une élasticité de cohésion et que la composante élastique du domaine viscoélastique correspond à une élasticité entropique caoutchoutique (voir par exemple : Stuart, Die Physik der Polymeren. 1956). Selon ces concepts les déformations des parties cristallines seraient à l'origine du comportement hookéen et les déformations des parties amorphes seraient à l'origine du comportement viscoélastique.

Toutefois, ce point de vue résiste mal à l'analyse rationnelle : il n'est pas logique que les domaines à forte cohésion et haut module se déformeraient *d'abord*, c'est-à-dire plus aisément que les domaines à faible cohésion, de bas module. Nous avons pu vérifier, du moins dans le cas de la laine que [4] d'une part, même pour une extension de 30 %, les domaines cristallins ne varient pas leur cliché de diffraction des rayons X (Schutz, Blin, 1971) et que d'autre part, en milieu de solvants, la laine présente des modules initiaux significativement différents, bien que les domaines cristallins ne soient pas atteints et nullement modifiés par l'action des solvants : les domaines cristallins se comportent comme des charges inertes ; par contre le comportement hookéen

e = petits trous

X = grands trous

Fig. 1. — La structure intime des matériaux textiles peut se schématiser en un ensemble de parties à forte cohésion se comportant comme une charge quasi inerte avec des points d'ancrage soit fixes (liaisons « covalentes ») soit plus ou moins labiles (liaisons « secondaires » : interactions Van der Waals, Hydrogène...) et de parties à faible cohésion comportant des « trous » dans un système macromolóculaire orienté. Par étirage, les « trous » sont redistribués dans l'espace de la fibre : de plus gros « trous » sont formés aux dépens de petits trous initiaux.

pourrait être régi par ce qui se passe au niveau des interfaces : tant que les déformations restent faibles, les forces de rappel des liaisons secondaires (interactions H et forces de Van der Waals) assurent la réservibilité élastique immédiate.

Lorsqu'on dépasse le domaine hookéen, la rupture des liaisons secondaires permet le glissement relatif des éléments morphologiques, en entraînant une orientation meilleure dans les domaines amorphes. Ceci se traduit par une modification de la distribution des « trous ». En fait tout se passe comme si le nombre des « petits trous » diminuait au profit du nombre de « grands trous », formés par condensation de « petits trous » (figure 1).

Si l'on abandonne alors sans tension la fibre, celleci présente le phénomène d'élasticité différée plus ou moins complète : c'est un phénomène entropique par mouvements microbrowniens (et éventuellement macrobrowniens) et le retour s'explique par les points d'ancrage aux interfaces.

En milieu rupteur (eau chaude, par exemple) de liaison secondaire, ou déjà simplement en chauffant, le mouvement retour peut-être accéléré et/ou amplifié.

Si du fait de l'application (simple ou répétée) d'une charge, il se forme des « trous » de plus en plus grands, on peut s'attendre à ce que l'un ou l'autre atteigne une taille critique, ce qui entraîne la rupture.

Selon Griffith (1920-1921) l'initiation d'une rupture se fait au niveau d'une cavité, d'un « très grand trou » pour laquelle la concentration de contraintes aux commissures de la cavité, fissure ou faille, est telle que la contrainte-seuil σ_s est dépassée. [5]

(N.B.: $\sigma_s = (2 \text{ ES}/a \pi)^{1/2}$ où, E = module d'élasticité du matériau, S = énergie superficielle, a = demi-grand axe de la cavité supposée elliptique).

Griffith pensait que ce sont essentiellement les défauts superficiels qui sont à l'origine des ruptures.

Selon Smith (1970), l'initiation des ruptures consisterait en la formation de cavités ou en « l'activation de cavités ou de fissures préexistantes ». [6]

Cette activation pourrait, selon nos hypothèses, être simplement la formation de « plus grands trous ».

Selon Murray et Hull (1969) la formation de cavités « vraies » peut se faire par rupture des microfibrilles (voire macromolécules) avec formation de radicaux libres dans les « craquelures ». [7]

Vérification de ces hypothèses

Ainsi, si les microcavités ou les fissures n'existaient pas avant fatigue, l'effet de la répétition des sollicitations se traduit entre autres par la création de microcavités, de fissures, ou tout simplement par l'accroissement de celles-ci.

Nous avons ainsi pu vérifier en appliquant la technique [8] de Stone et Scallan (1967) d'exclusion de soluté (*figure* 2), que dans le cas de viscose fatiguée par extensions répétées, le nombre de pores (la porosité globale) de « diamètre » inférieur à 0,8 nm avait significativement diminué après fatigue, tandis que le nombre de pores (la porosité globale) de « diamètre » inférieur à 27 nm avait significativement augmenté après fatigue, en confirmation de notre hypothèse. [9]

Ceci a été également vérifié par microscopie électronique sur fibres de polyacrylonitrile (Schutz, Sotton, Sugier 1973). [10]

Conséquences

En faisant le bilan de ce qui précède nous avons plusieurs possibilités :

- la préexistence de fissures superficielles,
- la préexistence ou la formation de cavités au sein de la fibre,
- la rupture des fibrilles et molécules de liaison dans les craquelures et libération de cavités « actives ».

Fig. 2. — Une solution de sucres de faibles rayons de gyration peut pénétrer (solvant et soluté) dans les pores. Dans le cas d'une solution de dextranes à forts rayons de gyration, seul le soivant (l'eau) peut pénétrer dans les pores de plus faibles diamètres que le rayon de gyration des dextranes : il s'en suit une modification de concentration.

263

Le développement « en catastrophe » ne se fera pas à priori selon la même cinétique dans chacun de ces cas. En effet,

- la préexistence d'une fissure est favorable à un développement rapide en fracture si la contrainte appliquée dépasse la contrainte-seuil, étant donnée l'orientation particulière favorable de la fissure par rapport à la contrainte,
- la formation de cavités peut se faire n'importe où dans la masse, et leur développement dépend entre autres de la position de la faille ou de la cavité,
- lorsque l'énergie à dissiper par frottement intérieur est suffisante pour rompre plusieurs liaisons dans les craquelures, la fracture devient alors d'autant plus aisée que ces ruptures sont plus nombreuses.

Si l'on considère la fatigue sous l'aspect statistique d'observations de ruptures,

- dans le premier cas, les fractures s'observent rapidement et deviennent d'autant moins probables que le nombre de sollicitations répétées est plus grand,
- dans le deuxième cas, les fractures peuvent s'observer à n'importe quel moment : elles sont probablement distribuées selon une loi de hasard d'évènements rares, donc probablement de manière exponentielle,
- dans le troisième cas, les fractures ne s'observent qu'à partir d'un certain délai plus ou moins important après quoi leurs apparitions s'accélèrent avec le temps.

On a donc affaire à trois cinétiques différentes.

En réalité, si l'on considère un ensemble textile (collection de fibres, de fils, grandes surfaces de tissu, etc.) les 3 mécanismes peuvent coexister : ainsi par exemple une partie des fibres peut présenter un défaut superficiel plus ou moins important et se comporter suivant la première cinétique (premier mécanisme); pour d'autres, la « casse » ne se manifestera que selon le second mécanisme, et pour certaines d'entre elles que selon le troisième.

Pour la recherche d'une expression générale nous définirons une fonction h(t) =« taux instantané de défaillance » (à l'instant t il y aura f (t) / R (t) « défaillants » pour R (t) survivants).

Cette fonction h (t) pouvant être à priori quelconque, est assimilable à une fonction de densité de probabilité de défaillance.

En fait l'analyse de l'origine des ruptures par fatigue, on peut envisager trois mécanismes avec 3 fonctions h (t) différentes :

Si l'on a affaire à des fissures déjà importantes initialement, l'exercice de la sollicitation peut de suite conduire à une concentration de contraintes supérieure au seuil critique : la fissure initie une fracture rapidement catastrophique (premier mécanisme possible). Si la fatigue a engendré progressivement et au hasard de la structure un regroupement de « petits trous » en une cavité suffisamment importante pour obtenir une concentration de contraintes critique, et, par suite, une croissance allant jusqu'à rencontre d'une fissure, alors sera aussi initiée une fracture catastrophique (deuxième mécanisme possible).

Enfin si la fatigue prolongée provoque la formation de nombreuses cavités ou fissures (regroupement de « petits trous », rupture des macromolécules des craquelures) leur multiplication correspond à un affaiblissement généralisé, pour lequel il est fort probable que deux cavités (ou vacuoles craquelées) se rejoignent au cours de leur croissance en atteignant ainsi brutalement la taille critique pour initier la fracture catastrophique (troisième mécanisme possible).

En fonction du niveau de sévérité de la fatigue chacun des trois mécanismes se manifestera plus ou moins rapidement (*figure* 3).

On peut ainsi étudier en fonction du temps t l'évolution du « taux instantané de défaillance » : h (t) (proportion de « défaillants » par rapport aux « survi-

Fig. 3. — La tenue à la fatigue peut être étudiée statistiquement. En représentant la proportion de « survivants » R (t) en fonction du temps t, selon le type de mécanisme et selon le niveau de sévérité, on aura affaire à des allures R_i (t) différentes. Globalement, par combinaison des 3 mecanismes on aura affaire à des allures de Rg (t) très différentes selon le niveau de sévérité de l'épreuve.

vants » à l'instant t, soit h(t) = dF(t) / (1 - F(t)); avec F(t) proportion cumulée de défaillants au temps t.

Selon le premier mécanisme, h_1 (t) deviendrait d'autant plus faible que la durée t de la sollicitation est plus grande. Selon le deuxième, h_2 (t) devrait être indépendante de t. Selon le troisième, h_3 (t) devrait croître fortement avec t, après un temps t_3 , nécessaire pour obtenir la quantité critique de cavités.

La forme généralisée de la loi de Weibull semble particulièrement convenir au cas de la fatigue des textiles. En désignant par R (t) = 1 - F (t), la proportion de « survivants » au bout du temps t, on aura pour le premier mécanisme :

$$R_1(t) = exp - [(t - t_1) / a]^{b_1}$$

où a correspond à la durée d'un cycle, t_1 le temps à partir duquel le premier mécanisme peut se manifester par une rupture (en général t_1 est pratiquement nul), b_1 un paramètre compris entre 0 et 1, pour que le taux instantané de défaillance h_1 (t) soit décroissant avec le temps. Pour le second mécanisme R_2 (t) = exp - $[(t - t_2) / a]^{b_2}$ ou t_2 , est le temps à partir duquel le second mécanisme peut se manifester ; t_2 peut être nul, et b_2 est égal à 1 pour que h_2 (t) soit constant ; pour le troisième mécanisme, R_3 (t) = exp - $[(t - t_3) / a]^{b_3}$ où t_3 n'est généralement pas nul et b_3 supérieur à 1 pour que h_3 (t) croisse avec le temps t_3 .

En représentant Ln Ln [R (t)]⁻¹ en fonction de Ln (t – t_i) pour chacun des mécanismes on doit obtenir une droite de pente inférieure à 1 pour le premier mécanisme, de pente égale à 1 pour le deuxième mécanisme, de pente supérieure à 1 pour le troisième, si chacun de ces mécanismes peut être saisi individuellement. Comme en pratique, t₁ = 0 = t₂, la durée de la manifestation du premier mécanisme est limitée, et le troisième mécanisme ne se manifestera qu'après un temps t₃, on doit s'attendre pour cette représentation à un graphe à trois pentes successives :

- > 1, car $h_{\scriptscriptstyle 1,2}=h_{\scriptscriptstyle 1}+h_{\scriptscriptstyle 2}$ (les mécanismes 1 et 2 concomitants) ;
- = 1 (seul le deuxième mécanisme joue);
- < 1 (troisième mécanisme seul ou avec le deuxième).

Expérimentalement, si le nombre d'éprouvettes est suffisant, on retrouve systématiquement les trois tronçons de droite selon les prévisions de la théorie. En fait, les résultats donnés par différents auteurs concernant la fatigue de textiles, confirment notre théorie. Il est à remarquer que jusqu'à présent, les représentations en coordonnées selon Weibull, de la tenue à la fatigue trouvées dans les publications « textiles » sont lissées selon une droite « moyenne », dite de Weibull, sans tenir compte des trois tronçons pourtant facilement discernables si le nombre de résultats est suffisant (*figure* 4).

Fig. 4. — Représentation selon Weibull de Ln Ln $[R(t)]^{-1}$ en fonction de Ln (t). La droite de Weibull couramment représentée est obtenue par lissage et de ce fait perd tout son intérêt.

Par contre, la représentation correcte (sur la base de mesures en nombre suffisant) permet systématiquement de discerner les 3 mécanismes : le premier et le second concomitants donnant une portion de droite de pente supérieure à 1, et second seul, donnant une portion de droite de pente segale à 1, et le troisième seul ou combiné au second, donnant une pente supérieure à 1.

BIBLIOGRAPHIE

- SLUZKER A. Idee der exakten Wissenschaften 7 421-429 (1970).
- [2] SOTTON M. C.R. Acad. Sci. Paris 270 (B) 1261-1264 (20 mai 1970).
- [3] HAGEGE R., KASSENBECK P., MEIMOUN D., PARISOT A. Text. Res. J. 11 1015-1022 (1969).
- [4] SCHUTZ R.A., BLIN J.R. J, Appl. Polym. Symp. 18 1131-1141 (1971).
- [5] GRIFFITH A. Phil. Trans. Roy. Soc. (Londres) 221 A 163-170 (1920-1921).
- [6] SMITH T.L. Pure and Appl. Chem. 23 235-253 (1970).
- [7] MURRAY J., HULL D. Polymer 10 451-465 (1969).
- [8] STONE J.E., SCALLAN A.M. Tappi 50 (10) 496-501 (1967).
- [9] SCHUTZ R.A. Thèse Dr es sciences phys. n° AO 7 154 Université Paris VI, 16 juin 1972.
- [10] SCHUTZ R.A., SOTTON M., SUGIER H. C.R. Acad. Sci. Paris 276 (C) 999-1001 (19 mars 1973).

Hypothèse des variables internes et représentation de certains fluides viscoélastiques^{*}

par J.D. WEBER, Faculté des Sciences de Metz

RESUME

La représentation d'un comportement rhéologique par la donnée du potentiel thermodynamique Φ d'un élément matèriel en fonction de la déformation et de variables internes permet, par la forme des équations différentielles régissant l'évolution de ces variables internes, d'exprimer les conditions imposées par les principes de la thermodynamique, le principe d'Onsager et le principe d'objectivité. Ce formalisme est utilisé ici pour décrire un milieu ayant une élasticité instantanée isotrope. Les composantes p_{ij} de l'unique variable interne tensorielle symétrique (liée à la transformation par laquelle on passe de la configuration initiale à la configuration neutre ou relâchée), obéissent aux équations $\hat{p}_{ij} = -c p_{ih} p_{jk} \frac{\partial}{\partial} \frac{\Phi}{p_{hk}}$. Suivant le choix de la fonction à valeurs positives c (qui dépend des invariants

de la fonction à valeurs positives c (qui dépend des invariants des contraintes), on décrit ainsi des fluides viscoélastiques linéaires ou non-linéaires, ou des solides viscoplastiques.

INTRODUCTION

Un certain nombre de travaux récents (réf. [1] à [7]) ont montré l'intérêt d'une description du comportement rhéologique des milieux déformables, reposant sur l'hypothèse des variables internes (variables que l'on appelle encore paramètres cachés, ou variables d'écrouissage, ou paramètres spécifiques) : on admet dans ces théories que l'état de l'élément dépend de sa déformation, de sa température, et d'un certain nombre de variables dont l'évolution au cours du temps est supposée connue ou régie par un système d'équations différentielles. Reprenant le formalisme que nous avons exposé dans [9], nous désignons par Φ le potentiel thermodynamique de l'élément matériel (élément dont le volume est égal à l'unité dans la configuration initiale) ; Φ est par hypothèse une fonction d'une part du tenseur $\overline{\gamma}$, gradient de la transformation par laquelle on passe de la configuration initiale à la configuration actuelle, et d'autre part d'un certain nombre de variables internes p₁ p₂ ... p_N qui définissent l'état de l'élément.

Pour simplifier, nous n'envisageons ici que des évolutions isothermes.

SUMMARY

The representation of the rheological behavior of a material element by its thermodynamic potential Φ , given as a function of the deformation and of a number of internal state variables, allows to express, by the differential equations governing the time-dependance of these internal state variables, the conditions deriving from the principles of thermodynamics, the principle of Onsager and the principle of objectivity. This formalism is used here to describe a medium with isotropic instantaneous elasticity. The components p_{ij} of the unique symmetric tensorial internal state variable (related to the transformation from the initial state to the neutral or unloaded state) obey the equations $p_{ij} = -c p_{ih} p_{jk} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{hk}}$. According to the choice of the positivo duration of unbiab depende on the stress invariants.

tive-valued function c (which depends on the stress invariants), linear or non-linear viscoelastic fluids, as well as viscoplastic solids are described.

Les coordonnées x_i et a_i sont relatives à un même repère orthonormé fixe ; le tenseur $\overline{\overline{\gamma}}$ a pour composantes $\gamma_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$ dans ce repère.

L'évolution des variables internes au cours du temps τ , lors d'une transformation $\overline{\gamma}(\tau)$ quelconque de l'élément matériel, est supposée déterminée par le système d'équations différentielles

$$\frac{d p_{u}}{d \tau} = \dot{p}_{u} = -\sum_{v=1}^{N} c_{uv} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{v}}$$
(1)

dans lequel la matrice c_{uv} , symétrique et définiepositive, est elle-même fonction de $p_1 p_2 \dots p_N$ et $\overline{\gamma}$. Les relations classiques (1) entre les « flux » \dot{p}_u et les « forces » $\frac{\partial}{\partial} \frac{\Phi}{p_v}$ peuvent être justifiées sommairement comme suit : dans tout essai de relaxation (essai dans lequel $\overline{\gamma}$ est maintenu constant à partir d'un certain instant), les variables internes doivent évoluer de façon telle que le potentiel Φ tende vers un minimum ; les conditions $\dot{p}_u = 0$ (absence d'évolution des variables internes) et $\frac{\partial}{\partial} \frac{\Phi}{p_v} = 0$ (le potentiel est stationnaire) doivent donc se produire simultanément.

^{*} Conférence au Groupe français de Rhéologie, le 20 juin 1974.

Le milieu matériellement simple ainsi représenté est doué d'élasticité instantanée, puisque d'après (1) une discontinuité de $\overline{\gamma}$ provoque une discontinuité des p_u mais non des p_u.

Les composantes $T_{\rm ij}$ du tenseur des contraintes de Boussinesq [3] sont donc données par la même formule qu'en élasticité

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ij}}$$
(2)

Le tenseur T (non symétrique) est encore appelé premier tenseur de Piola-Kirchhoff [8], ou tenseur des contraintes nominales. Il est relié au tenseur des contraintes d'Euler \overline{t} (symétrique) par la formule

$$t_{ij} = (\det \overline{\gamma})^{-1} T_{ik} \gamma_{jk}$$
(3)

On vérifie que, conformément au deuxième principe de la thermodynamique, le travail fourni à l'élément matériel dans tout cycle fermé décrit entre les instants τ_1 et τ_2 est positif, puisque

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} T_{ij} d\gamma_{ij} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (d\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial p_u} dp_u)$$
$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} c_{uv} \frac{\partial \Phi}{\partial p_u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p_v} d\tau \ge 0$$

Dans la théorie de la viscoélasticité linéaire, la matrice c_{uv} est indépendante de $p_1, p_2 \dots p_N$ et γ_{ij} (tandis que Φ en est une fonction quadratique); lorsque cette matrice est supposée symétrique (principe d'Onsager), il devient possible de démontrer des propriétés remarquables des fonctions de fluage et de relaxation, qui s'expriment dans les cas unidimensionnels par l'alternance des signes des dérivées successives de ces fonctions par rapport au temps [3]. Par extension, nous admettrons que c_{uv} est symétrique même dans les états éloignés de l'équilibre interne.

Notons enfin que le principe d'objectivité [3], [8] s'exprime par l'invariance de Φ et c_{uv} dans les rotations de l'élément matériel : les variables internes demeurent inchangées dans une telle rotation, tandis que $\overline{\gamma}$ est remplacé par $\overline{r} \ \overline{\gamma}$ (\overline{r} : tenseur orthogonal à déterminant positif); en d'autres termes, Φ est une fonction du tenseur de Cauchy à droite $\overline{\gamma}^* \overline{\gamma}$.

Nous nous proposons de donner, dans le cadre du formalisme (1) (2), un exemple d'équation rhéologique susceptible de décrire des comportements de solides élastiques viscoplastiques et de fluides visco-élastiques : ce seront nos équations (9) et (11), dans lesquelles s'introduisent deux coefficients d'élasticité λ et μ , et une fonction c des invariants du tenseur des contraintes.

Nous introduisons pour cela un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui sont les suivantes :

- L'élasticité instantanée du milieu déformable est isotrope, et elle demeure telle quelles que soient les déformations subies par l'élément matériel; on désigne par λ et μ les coefficients de Lamé de cette élasticité.

- Les variables p₁ p₂ ... p_N sont déterminées dès que l'on connaît la configuration du corps dans son état relâché, c'est-à-dire dans l'état où il se trouve après suppression brusque des contraintes; ces variables sont donc les composantes d'une unique variable interne tensorielle symétrique p.
- Le volume de l'élément matériel dans toute configuration relâchée est toujours le même, en d'autres termes les déformations permanentes s'effectuent sans changement de volume.
- Le potentiel Φ est égal au travail qu'il faut fournir à l'élément matériel pour le faire passer de la configuration relâchée à la configuration actuelle dans une transformation infiniment rapide; il s'exprime donc à l'aide des invariants d'un tenseur de déformation \overline{e} associé à cette transformation.
- Le milieu ne présente pas d'écrouissage, ce qui signifie que ses propriétés mécaniques sont indépendantes des déformations permanentes qu'il peut avoir subies.
- Le comportement du milieu dans un écoulement à volume constant et à vitesses de déformation constantes au cours du temps, est décrit au moyen d'une fonction c des invariants du tenseur des contraintes t (ou, ce qui revient au même, au moyen d'une fonction des invariants du tenseur e).

Le comportement est celui d'un solide lorsque l'ensemble des états de contrainte pour lesquels c = 0 (domaine d'élasticité) n'est ni vide ni réduit aux seuls états de contrainte isotropes; sinon, nous aurons affaire à un fluide viscoélastique.

Bien entendu, l'introduction de plusieurs variables internes, proposée notamment par P. Perzyna [7] et par J. Mandel [5], permet de décrire des comportements plus généraux ; cette extension est nécessaire si l'on veut rendre compte de l'écrouissage du matériau.

JUSTIFICATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT PROPOSEE PAR L'ETUDE D'UNE TRANSFORMATION PARTICULIERE DE L'ELEMENT MATERIEL

Considérons tout d'abord un élément matériel élastique, isotrope et sans contraintes dans la configuration initiale, et ayant un volume égal à l'unité dans cette configuration ; supposons que la transformation x (a) qu'on lui fait subir se réduise à une affinité symétrique dont les axes sont ceux du repère fixe ox₁ x₂ x₃, de sorte que la matrice du tenseur $\overline{\gamma}$ soit diagonale, de termes diagonaux $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$.

Il est commode d'adopter l'expression suivante du potentiel Φ en fonction de $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$, expression dans laquelle apparaissent les dilatations logarithmiques suivant les axes :

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} \left(\log \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \right)^2 + \mu \left(\left(\log \gamma_1 \right)^2 + \left(\log \gamma_2 \right)^2 + \left(\log \gamma_3 \right)^2 \right) \right)$$
(4)

Une telle expression de Φ se confond avec la forme usuelle lorsque la déformation est infiniment petite, c'est-à-dire lorsque $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont voisins de l'unité; mais nous admettrons ici qu'elle s'applique même pour de grandes déformations, dans lesquelles $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ont des valeurs positives arbitraires.

Si l'on désigne par $t_1 t_2 t_3$ les valeurs principales du tenseur des contraintes d'Euler t, et si l'on envisage la déformation infiniment petite d'un élément ayant par exemple la forme d'un cube dans la configuration de référence, le travail fourni à l'élément a pour expression

$$d \Phi = t_1 \gamma_2 \gamma_3 d\gamma_1 + t_2 \gamma_3 \gamma_1 d\gamma_2 + t_3 \gamma_1 \gamma_2 d\gamma_3$$

d'où l'on déduit

Ainsi, dans toute déformation à volume constant, c'est-à-dire telle que $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 1$, le tenseur des contraintes est un déviateur puisque dans ce cas $t_1 + t_2 + t_3 = 2 \mu \log \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 0$.

C'est en fait pour cette raison que nous avons adopté l'expression (4) du potentiel Φ .

Nous venons d'examiner le comportement d'un élément matériel élastique dépourvu de contraintes dans la configuration initiale : en d'autres termes, la configuration initiale se confondait avec une configuration relâchée.

Considérons maintenant un élément élastique qui soit le siège de contraintes non nulles dans la configuration initiale, ces contraintes ayant pour directions principales ox₁ x₂ x₃. Il existe alors une transformation par laquelle on pourrait passer de la configuration relâchée à la configuration initiale, et nous admettons que cette transformation est une affinité symétrique d'axes ox₁ x₂ x₃; nous désignons ses valeurs principales (qui sont toutes les trois positives) par $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$.

Il est en outre commode de supposer que $p_1 p_2 p_3 = 1$, c'est-à-dire que le volume de l'élément matériel considéré est égal à l'unité, aussi bien dans la configuration initiale que dans la configuration relâchée.

Dans ce cas la transformation par laquelle on passe de la configuration relâchée à la configuration actuelle est une affinité symétrique d'axes ox₁ x₂ x₃, de valeurs principales $\gamma_1 \sqrt{p_1}$, $\gamma_2 \sqrt{p_2}$, $\gamma_3 \sqrt{p_3}$; on pourrait donc adopter pour Φ l'expression (4) dans laquelle $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ seraient remplacés par $\gamma_1 \sqrt{p_1}$, $\gamma_2 \sqrt{p_2}$, $\gamma_3 \sqrt{p_3}$. Mais pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, nous préférons lui substituer l'expression

$$\Phi = \frac{\pi}{2} (\theta - \alpha)^2 + \mu e^2$$
avec
$$\theta = \log \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

$$e^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$
(6)
$$e_1 = \frac{1}{2} \log (\gamma_1 p_1 \gamma_1) \qquad e_2 = \frac{1}{2} \log (\gamma_2 p_2 \gamma_2)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} \log (\gamma_3 p_3 \gamma_3)$$

$$\alpha = \frac{\mu}{3 \lambda} \log p_1 p_2 p_3$$

Les quantités $e_1 e_2 e_3$ sont les dilatations logarithmiques suivant $ox_1 x_2 x_3$, dans la transformation qu'fait passer de la configuration relâchée à la configuration actuelle ; ce sont les valeurs principales d'un tenseur symétrique \overline{e} de directions principales $ox_1 x_2 x_3$.

Les contraintes principales d'Euler $t_1 t_2 t_3$ seront données par des formules analogues à (5), soit

où $e_1 e_2 e_3$ et θ sont définis par (6).

Dans l'expression (6) de Φ , on a $\alpha = 0$ puisque $p_1 p_2 p_3 = 1$; ce terme interviendra par contre lors du calcul des dérivées partielles de Φ par rapport à $p_1 p_2 p_3$, calcul que nous aurons à effectuer au paragraphe suivant.

Imaginons maintenant que la déformation précédente soit appliquée à un élément matériel viscoélastique ou élastique viscoplastique : la transformation x (a) est encore une affinité symétrique dont les axes $ox_1 x_2 x_3$ sont fixes, mais cette transformation dépend maintenant du temps

On conçoit qu'il existe, à tout instant, un état relâché qui peut être caractérisé par les trois nombres positifs $p_1 p_2 p_3$ liés par la relation $p_1 p_2 p_3 = 1$; l'hypothèse des variables internes, sous sa forme la plus simple, consiste à supposer que ces variables ne dépendent que de l'état relâché et se confondent donc avec $p_1 p_2 p_3$.

Le comportement de l'élément viscoélastique envisagé sera défini par la loi d'évolution de $p_1 p_2 p_3$; nous déterminons cette loi par les équations différentielles

$$\dot{p}_{1} = -c p_{1}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{1}}$$

$$\dot{p}_{2} = -c p_{2}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{2}}$$

$$\dot{p}_{3} = -c p_{3}^{2} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{2}}$$
(8)

Le potentiel Φ est la fonction de $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 p_1 p_2 p_3$ définie par (6) tandis que c représente une fonction numérique positive des invariants de $\overline{\overline{e}}$ (ou de $\overline{\overline{t}}$). 270

Ce sont les raisons suivantes qui nous conduisent à adopter les équations d'évolution (8).

1. Ces équations sont de la forme (1).

2. Lorsque les valeurs initiales de $p_1 p_2 p_3$ vérifient la relation $p_1 p_2 p_3 = 1$, alors ces variables vérifient cette relation à tout instant ultérieur; on a en effet

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = \frac{\mu}{p_3} \left(-\frac{1}{3} \log \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \frac{1}{2} \log \gamma_1 p_1 \gamma_1 \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = \frac{\mu}{p_2} \left(-\frac{1}{3} \log \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \frac{1}{2} \log \gamma_2 p_2 \gamma_2 \right) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_3} = \frac{\mu}{p_3} \left(-\frac{1}{3} \log \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \frac{1}{2} \log \gamma_3 p_3 \gamma_3 \right)$$

d'où l'on déduit, compte tenu de (8)

$$\frac{\dot{p}_1}{p_1} + \frac{\dot{p}_2}{p_2} + \frac{\dot{p}_3}{p_3} = 0$$

ce qui montre bien que le produit $p_1\,p_2\,p_3$ demeure constant.

3. Le comportement défini par (6) (7) (8) se confond avec celui d'un milieu purement visqueux dans le cas particulier où, à partir d'un certain instant τ , l'affinité d'axes ox₁ x₂ x₃ que subit l'élément matériel devient une transformation à volume constant et à vitesses de déformation $\hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2 \hat{\epsilon}_3$ constantes (transformation dite « à histoire de déformation constante », suivant la terminologie de Truesdell et Noll [8]) : après un régime transitoire, il s'établit un régime permanent dans lequel les contraintes principales t₁ t₂ t₃ demeurent constantes et ne dépendent donc que de $\hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2 \hat{\epsilon}_3$.

Les dilatations logarithmiques $e_1 e_2 e_3$ de la transformation qui fait passer de la configuration relâchée à la configuration actuelle sont alors elles aussi des constantes ; elles sont liées aux contraintes principales $t_1 t_2 t_3$ par les formules (7).

On a donc $\gamma_1^{\hat{e}} p_1 = \text{cte}$, d'où $2 \dot{\gamma}_1 \gamma_1 p_1 + \gamma_1^{\hat{e}} \dot{p}_1 = 0$; puisque $\dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1}$, il en résulte que $2 \dot{\epsilon}_1 + \frac{\dot{p}_1}{p_1} = 0$.

Compte tenu de (6) (7) (8), les contraintes principales $t_1 t_2 t_3$ s'expriment finalement en fonction des vitesses de déformation $\hat{\epsilon}_1 \hat{\epsilon}_2 \hat{\epsilon}_3$ au moyen des formules

$$(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) t_i = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \theta + \frac{4}{c} \dot{\epsilon}_i.$$

En particulier

a) Lorsque c est une constante, ce comportement s'identifie à celui du fluide newtonien de viscosité $\eta = \frac{2}{c}$.

b) Lorsque c est une fonction décroissante de $e_1 + e_2 + e_3$ (ou, ce qui revient au même, une fonction décroissante de $t_1 + t_2 + t_3$), le comportement s'identifie à celui d'un fluide purement visqueux dont la viscosité est une fonction croissante de la pression.

INDUSTRIE MINERALE

c) Lorsque $\theta = 0$, le tenseur des contraintes est un déviateur et l'on a

$$\frac{\mathsf{t}_1}{\dot{\varepsilon}_1} = \frac{\mathsf{t}_2}{\dot{\varepsilon}_2} = \frac{\mathsf{t}_3}{\dot{\varepsilon}_3} = \frac{\mathsf{4}}{\mathsf{c}}$$

En supposant que c est une fonction de la norme de $\overline{\overline{e}}$ (ou de celle de $\overline{\overline{t}}$, ou encore de celle du déviateur des contraintes \overline{s}), on peut d'écrire des comportements qui en traction simple sont représentés par l'équation, fréquemment utilisée en raison de sa simplicité, $\sigma = \kappa \epsilon^n$.

d) D'une façon générale, le comportement (6) (7) (8) est celui d'un fluide lorsque la fonction c est strictement positive pour tout \overline{e} (ou pour tout \overline{t}), sauf éventuellement lorsque \overline{e} (ou \overline{t}) est sphérique.

Lorsqu'il s'agit d'une solide, le domaine d'élasticité (pour lequel c = 0) peut par exemple être défini par le critère de Mises, de Tresca, ou par celui de la courbe intrinsèque.

Lorsqu'on suppose en outre que dès que l'on s'écarte de ce domaine la fonction c augmente très rapidement, le comportement se rapproche de celui d'un solide élastique parfaitement plastique.

CAS D'UNE TRANSFORMATION QUELCONQUE DE L'ELEMENT MATERIEL

Les démonstrations précédentes, qui étaient très simples lorsque la transformation était une affinité symétrique d'axes fixes, doivent être reprises lorsque la transformation est quelconque.

On désigne par \overline{p} la variable interne tensorielle, et par $p_{ij} = p_{ji}$ ses composantes.

On pose

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} (\theta - \alpha)^{2} + \mu e^{2}$$

$$\theta = \log \det \overline{\overline{\gamma}} \quad e^{2} = e_{ij} e_{ij} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\mu}{3\lambda} \log \det \overline{\overline{p}}$$

Le tenseur \overline{e} de composantes e_{ij} est égal à $\frac{1}{2}$ log \overline{f} , avec

 $\bar{\bar{f}}=\bar{\bar{\gamma}}\;\bar{\bar{p}}\;\bar{\bar{\gamma}}^*$

 $f_{ij}=\gamma_{ih}\;p_{hk}\;\gamma_{jk}$

soit

L'écriture
$$\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \log \overline{\overline{f}}$$
 que nous venons d'utiliser

est équivalente à \overline{f} = exp. (2 \overline{e}). On démontre alors, à partir des formules (2) (3) et de l'expression (9) du potentiel, que les composantes du tenseur des contraintes d'Euler \overline{t} sont

$$(\det \bar{\gamma}) t_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2 \mu e_{ij}$$
(10)

Nous nous donnons enfin les équations d'évolution des variables internes sous la forme

$$\dot{p}_{ij} = -c p_{ih} p_{jk} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{hk}}$$
(11)

Les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{hk}}$ sont calculées à partir de (9), en regardant les 9 composantes p_{hk} comme des variables indépendantes ; on peut alors vérifier que lorsque le tenseur \overline{p} est symétrique, on a $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{hk}} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_{kh}}$.

Il convient d'autre part de faire remarquer que f est le tenseur de Cauchy à gauche, dans la transformation qui fait passer de la configuration relâchée à la configuration initiale.

L'hypothèse d'isotropie de la configuration relâchée permet en effet d'exprimer Φ à l'aide du tenseur de Cauchy à gauche ; nous aurions pu l'exprimer également à l'aide du tenseur de Cauchy à droite, mais l'emploi du tenseur à gauche à l'avantage de conduire à la formule (10).

Le cas où la configuration relâchée est anisotrope a été étudié par J. Mandel ; dans ce cas, seul le tenseur de Cauchy à droite peut être utilisé [5].

Les théorèmes suivants nous montreront qu'en généralisant sous la forme (9) et (11) les équations (6) et (8), nous obtenons bien des équations rhéologiques de milieux déformables conformes aux principes.

Théorème 1

Quelle que soit la fonction $\overline{\gamma}$ (t), la solution \overline{p} (t) du système (9), (11) vérifie la condition dét $\overline{p} = 1$ à tout instant si cette condition est vérifiée à l'instant initial.

Nous nous proposons de démontrer que, lorsque dét $\overline{\bar{p}}$ = 1, on a

$$\frac{d}{dt}\log d\acute{t} \ \bar{p} = 0$$

Désignons par $\overline{\overline{q}}$ (de composantes q_{ij}) le tenseur inverse de $\overline{\overline{p}}.$ Nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \log \det \bar{\bar{p}} = \dot{p}_{ij} \frac{\partial \log \det p}{\partial p_{ij}}$$
$$= \dot{p}_{ij} (\mathrm{d\acute{e}t}, \bar{\bar{p}})^{-1} \frac{\partial \det \bar{\bar{p}}}{\partial p_{ij}} = \dot{p}_{ij} q_{ji}$$

et compte tenu de (11), nous en déduisons

$$\frac{d}{dt} \log \det \overline{\overline{p}} = -c p_{ih} p_{jk} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{hk}} q$$
$$= -c p_{ih} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{hi}}$$

D'autre part, la dérivation de (8) nous donne, puisque $\alpha = 0$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}} = -\frac{\mu}{18} \frac{\theta}{3} q_{ji} + \mu \frac{\partial e^2}{\partial p_{ij}}$$
(12)

 $\overline{f} = \overline{\gamma} \overline{p} \overline{\gamma}^*$

Or

$$\frac{\partial e^2}{\partial p_{ij}} = \frac{\partial e^2}{\partial f_{rs}} \frac{\partial f_{rs}}{\partial p_{ij}}$$

et puisque

$$\frac{\partial f_{\rm rs}}{\partial p_{\rm ij}} = \gamma_{\rm ri} \gamma_{\rm si}$$

Nous allons maintenant démontrer la formule suivante, dans laquelle nous désignons par $\overline{\overline{g}}$ (de composantes g_{ij}) le tenseur inverse de $\overline{\overline{f}}$:

$$\frac{\partial \ e^2}{\partial \ f_{\rm rs}} = \ e_{\rm ru} \ g_{\rm us}$$

Une généralisation aux tenseurs symétriques du développement

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

nous donne pour $\overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \log \overline{\overline{f}}$

$$2 e_{pq} = f_{pq} - \delta_{pq} - \frac{1}{2} (f_{pu} - \delta_{pu}) (f_{uq} - \delta_{uq}) + \dots$$

$$2 e_{pq} \frac{\partial}{\partial} \frac{e_{pq}}{f_{rs}} = e_{rs} - \frac{1}{2} e_{rq} (f_{sq} - \delta_{sq}) - \frac{1}{2} e_{ps} (f_{p1} - \delta_{pr}) + \dots$$

Si l'on pose $\overline{f} = \overline{1} + \overline{\varphi}$, on voit apparaître au second membre de l'égalité précédente les composantes du tenseur \overline{e} ($\overline{1} - \overline{\varphi} + \overline{\varphi}^{e} - \overline{\varphi}^{a} + ...$) qui est bien égal au tenseur \overline{e} . \overline{g} avec $\overline{g} = \overline{f}^{-1}$.

De là

$$\frac{\partial \ e^2}{\partial \ p_{ij}} \ = \ p_{ij} \frac{\partial \ e^2}{\partial \ f_{rs}} \ \frac{\partial \ f_{rs}}{\partial \ p_{ij}} \ = \ e_{ru} \ g_{us} \ \gamma_{ri} \ \gamma_{sj}$$

Nous obtenons ainsi, compte tenu de (12)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}} = - \frac{\mu \theta}{3} q_{ji} + \mu e_{ra} g_{us} \gamma_{ri} \gamma_{sj}$$
(13)

 $p_{ij} q_{ji} = \delta_{ii} = 3$

Venons-en au calcul de p., $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}}$.

On a tout d'abord

Ensuite

$$e_{ru} g_{us} \gamma_{ri} \gamma_{sj} p_{ij} = e_{ru} g_{us} f_{rs} = e_{rr}$$

Si l'on se reporte à (9) et si l'on désigne par $f_1 f_2 f_3$ les valeurs principales de \overline{f} , on a

15 novembre 1975

$$e_{rr} = \frac{1}{2} (\log f_1 + \log f_2 + \log f_3) = \frac{1}{2} \log \det \overline{\overline{f}}$$
$$= \theta + \frac{1}{2} \log \det \overline{\overline{p}}.$$

Finalement, nous constatons que lorsque dét $\overline{p} = 1$, nous avons $p_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}} = 0$ soit $\frac{d}{dt} \log d\acute{t} \ \overline{p} = 0$; ceci démontre le théorème 1.

Théorème 2

avec

Un comportement rhéologique isotherme défini par (9) et (11) est conforme au deuxième principe de la thermodynamique et au principe d'Onsager.

En effet, l'équation (11) peut s'écrire sous une forme analogue à (1)

 $\dot{p}_{ij} = -c_{ijhk} \frac{\partial \Phi}{\partial p_{hk}}$ $c_{ijhk} = c p_{ih} p_{jk} \qquad (14)$

Nous savons que la condition imposée par le 2ème principe est satisfaite lorsque la matrice c_{uv} de la formule (1) est définie-positive (ou semi-définie positive).

Or on peut démontrer, par exemple en diagonalisant la matrice définie-positive p_{ij} , que quelle que soit la matrice symétrique S_{ij} , on a

$$p_{ih} p_{jk} S_{ij} S_{ik} \ge 0$$

D'autre part, les exigences du principe d'Onsager sont satisfaites lorsque la matrice c_{uv} de la formule (1) est symétrique ; or la formule (14) montre que l'on a effectivement

$$C_{ijhk} = C_{hki}$$

Théorème 3

Un comportement rhéologique isotherme défini par (9) et (11) est conforme au principe d'objectivité.

On vérifie en effet que quel que soit la tenseur orthogonal \overline{r} , on a d'après (9)

$$\Phi(\bar{\gamma}, \bar{p}) = \Phi(\bar{r} \bar{\gamma}, \bar{p})$$

En outre, compte tenu de (14),

$$C_{ijhk}$$
 $(\overline{\gamma}, \overline{p}) = C_{ijhk}$ $(\overline{r} \overline{\gamma}, \overline{p})$

car les invariants du tenseur \overline{e} ne changent par lorsque $\overline{\gamma}$ est remplacé par \overline{r} $\overline{\gamma}$.

Théorème 4

Lorsque la fonction c est strictement positive (sauf éventuellement pour e sphérique), le comportement rhéologique défini par le système (9) (11) est celui d'un fluide.

INDUSTRIE MINERALE

Nous voulons démontrer que le tenseur des contraintes d'Euler \overline{t} est sphérique et ne dépend que de θ , dès que les conditions $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ij}} = 0$ sont vérifiées, c'est-à-dire dès que le milieu déformable a atteint un état d'équilibre interne.

Nous allons pour cela nous reporter à l'expression (13) de $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{ii}}$; nous avons donc par hypothèse

$$-\frac{1}{3} \theta q_{ji} + e_{ru} g_{us} \gamma_{ri} \gamma_{sj} = 0$$

Multiplions cette égalité par pin pkh ; il vient

$$-\frac{1}{3} \theta \,\delta_{jn} \,\gamma_{kh} + \gamma_{si} \,g_{su} \,e_{ur} \,\gamma_{ri} \,p_{ik} \,\gamma_{kh} = 0$$

$$\frac{1}{3} \theta \gamma_{kj} + \gamma_{sj} g_{su} e_{ur} f_{rk} = 0$$

Les tenseurs symétriques \overline{e} , \overline{f} , \overline{g} , qui ont mêmes directions principales, ont des produits commutatifs. On obtient donc

$$\frac{1}{3} \theta \gamma_{kj} + \gamma_{kj} e_{us} g_{ru} f_{rk} = 0$$

soit

$$-\frac{1}{3} \theta \gamma_{kj} + \gamma_{sj} e_{us} \delta_{uk} =$$

ou encore

$$-\frac{1}{3} \theta \, \delta_{ks} \, \gamma_{sj} + e_{ks} \, \gamma_{sj} = 0$$

eij

d'où l'on déduit

$$=\frac{1}{2}\theta\delta_{0}$$

0

Le tenseur $\overline{\overline{e}}$ est donc bien sphérique, et il en est de même du tenseur $\overline{\overline{t}}$ dont les composantes sont données par (10).

GENERALISATION DES EQUATIONS DE COMPORTEMENT (9), (11)

Nous pouvons généraliser (9), (11) en supposant que le potentiel est la somme de plusieurs expressions de la forme (9), et dépend ainsi de $\overline{\overline{\gamma}}$ et de plusieurs variables tensorielles $\overline{\overline{p}}$, $\overline{\overline{p}}'$...

On peut par exemple poser

$$\Phi = \frac{\lambda}{2} \left(\theta - \alpha\right)^2 + \mu \, \mathrm{e}^2 + \frac{\lambda'}{2} \left(\theta - \alpha'\right) + \mu' \, \mathrm{e}'^2 + \dots$$

L'introduction de plusieurs variables internes tensorielles peut d'ailleurs être justifiée intuitivement par la considération d'états relâchés à des instants successifs Δt , $2 \Delta t$, $3 \Delta t$... Il est ainsi possible de représenter une famille très étendue de comportements de milieux déformables conformes à l'hypothèse des variables internes et aux principes fondamentaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.D. COLEMAN, M.E. GURTIN. Thermodynamics with internal state variables, J. Chem. Phys. 47, p. 597, 1967.
- [2] J. KRATOCHVIL, O.W. DILLON. Thermodynamics of elastic-plastic materials as a theory with internal state variables, J. Appl. Phys. 40, p. 3207, 1969.

- [3] J. MANDEL. Mécanique des milieux continus, tome II, annexes XIV et XXI, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [4] J. MANDEL. Plasticité classique et viscoplasticité. Cours au C.I.S.M. Udine, édité par Springer.
- [5] J. MANDEL. Relations de comportement des milieux élastiques-plastiques et élastiques-viscoplastiques. Symposium on the Foundations of Plasticity, Varsovie 1972.
- [6] J. MANDEL. Plasticité classique et viscoplasticité. Mémorial de l'Artillerie Française, 1^{er} fascicule 1973.
- [7] P. PERZYNA. Thermodynamics of rheological materials with internal changes. Journal de Mécanique, vol. 10, n° 3, p. 391, septembre 1971.
- [8] C. TRUESDELL, W. NOLL. -- The non-linear field theories of Mechanics. Handbuch der Physik, vol. III 3, p. 41, 47. Springer 1965.
- [9] J.D. WEBER. Sur les propriétés d'une classe de corps viscoélastiques non-linéaires à paramètres cachés. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 267, série A, p. 565, 14 octobre 1968.

16 C. Marting on himsely minimum and a frame in the state of the second seco

ere dana 'a comunicazzon dan dirimentenen liter a l da

OPERATION DE LA MECANIQUE CIRCELAPORE

Surmal A Avantos in physiologie (A avanime Close boome, (A monomo cha decuara tont d'électer avec eux actor a company and ce avanualier (Menor). (E close Menorement que ce avalence pèse bier des (exponents e avait que ce avalence pèse bier des (exponents e avait que ce avalence pèse bier des (exque eux expetience of avantation qui fine eux système devoitébeire apartation en offet de qui cu als "avait concérnes

la domaina do nombre de Reynolda des éculta-

Mécanique de la circulation sanguine

par R. COMOLET, professeur à l'Université de Paris-VI (Orsay)

RESUME

Par comparaison avec les ensembles hydrauliques considérés habituellement en mécanique des fluides, le système circulatoire sanguin présente des caractéristiques originales concernant la nature des écoulements et les propriétés rhéologiques du fluide, la géométrie des formes et les propriétés mécaniques des parois des conduits.

Ces différents aspects sont examinés, ils mettent en évidence la nécessité de considérer simultanément le comportement du sang et celui des parois vasculaires. Il serait hasardeux de généraliser à l'étude de la circulation sanguine les résultats classiques établis pour des écoulements permanents, newtonicns en conduites quasi-rigides.

La Biomécanique est l'une des plus anciennes sciences interdisciplinaires. Elle a pour objectif d'appliquer les résultats et les méthodes de la Mécanique aux problèmes posés par la Biologie et de découvrir, dans la complexité biologique de nouveaux champs d'investigation pour la Mécanique.

TABLEAU 1

LES DOMAINES DE LA BIOMECANIQUE

1. MECANIQUE DES SOLIDES :

Mouvement des membres, des articulations, de la mastication, etc.

Mécanique de l'oreille, mécanique de la préhension biologique.

2. MECANIQUE DE FLUIDES :

Mouvement du sang, de la lymphe, de l'urine, mouvement des globules,

Mouvement des gaz respiratoires, lubrification des articulations,

Mouvements peristaltiques.

- MATERIAUX BIOLOGIQUES : Propriétés physiques et mécaniques de ces matériaux. Biocompatibilité des matériaux de substitution.
- 4. STRUCTURE ET ECONOMIE DES ORGANES ET DES SYSTEMES SPECIALISES :

Respiration, circulation, digestion, excrétion — Aspects mécaniques de leurs fonctions — Malformation — Modèles analogiques.

- 5. PERFORMANCES DU CORPS HUMAIN : Cinématique et mécanique de la marche, du saut, de la course, de la natation.
- PROTHESE ET ORTHESE : Appareils de substitution et appareils d'assistance (interne ou externe).

SUMMARY

Comparatively with the hydraulical whole systems which are considered in fluid mechanics, the blood system presents original characteristics concerning the patterns of flows and the properties of fluid, the geometry of shapes and the mechanical properties of tube walls. These different aspects are examined, they évidence the necessity of considering simultaneously the law of behaviour of blood and walls. It would be hazardous to generalize to the study of blood circulation the results established with flows permanent, newtonien and quasi-rigid tubes.

Dans cette confrontation, l'étude du mouvement du sang, ou hémodynamique, est l'un des aspects de la biomécanique où la recherche s'est le plus développée. Jusqu'au 15° siècle on n'avait pas encore reconnu l'autonomie du système circulatoire puisque, au niveau du cœur, une certaine confusion existait entre le mouvement du sang et celui des gaz respiratoires. Par la suite les noms d'hommes célèbres. ne se comptent plus, qui se sont penchés sur ce problème pour fournir le schéma qui nous est maintenant familier, tels sont : Léonard de Vinci, William Harvey, Daniel Bernoulli, Thomas Young, Jean Poiseuille, Hermann von Helmholtz, Adolf Fick, Horace Lamb, etc. Il s'agissait de penseurs, de physiciens, de mathématiciens, de physiologistes, de médecins, qui nous donnent ainsi un exemple à suivre car c'est dans l'effort conjugué de chercheurs de formation et d'origines différentes qu'on peut avancer dans la connaissance des phénomènes liés à la vie.

ORIGINALITE DE LA MECANIQUE CIRCULATOIRE

Quand il aborde la physiologie du système circulatoire, le mécanicien découvre tout d'abord avec surprise un ensemble bien singulier (*figure* 1). Il reconnaît humblement que ce système pose bien des problèmes nouveaux et propose des solutions que l'imagination n'avait pas encore envisagées. L'originalité du système circulatoire apparaît en effet de quintuple façons et concerne :

 le domaine du nombre de Reynolds des écoulements;

- Disposition des voies parallèles par lesquelles la circulation passe Fig. 1. — Disposition des ve de l'aorte à la veine cave. D'après A.C. Burton

- la géométrie en long, en forme de réseau maillé, extrêmement diversifié :
- l'élasticité des parois et la variabilité de la section droite des conduits ;

- le caractère pulsatoire de certains écoulements, et parfois leur sensibilité au milieu extérieur ;

les propriétés rhéologiques du fluide transporté.

NOMBRE DE REYNOLDS

Le nombre de Reynolds caractérise le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité mises en jeu. Les premières, proportionnelles à l'accélération du fluide, contiennent deux termes : l'un est lié à l'accélération convective, l'autre est lié à l'accélération locale. Quand l'écoulement est permanent, seul le premier subsiste et le nombre de Reynolds $\mathcal R$ correspondant est représenté par une combinaison classique de la forme U2R dont la valeur numérique permet de présager la nature de l'écoulement, laminaire ou turbulent. Quand l'écoulement n'est pas permanent, pulsatoire en l'occurence, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on peut constituer un autre nombre de Reynolds appelé nombre de Stokes de la forme $\frac{H^2}{vT}$ (ou $\frac{R^2 \omega}{v}$), dont la valeur numérique permet d'apprécier les différences qui séparent ce modèle d'écoulement du précédent.

Bien qu'en régime non permanent on ne sache pas bien définir les conditions d'apparition de la turbulence, on admet que les écoulements sanguins sont généralement laminaires (R varie de quelques milliers à quelques millièmes).

Les grandes valeurs de \mathcal{R} s'observent dans les vaisseaux les plus gros, artères ou veines, mais ils sont trop courts pour qu'on puisse obtenir un écoulement établi (indépendant de l'abscisse). Quand

est petit, le débit est en phase avec le gradient

de pression et le profil des vitesses est parabolique.

Quand $\frac{R^2 \omega}{\omega}$ est assez grand (supérieur à 100 par

exemple), la réponse de l'écoulement à un gradient de pression périodique sinusoïdal conduit à un profil de vitesse presque plat, sauf dans une région pariétale de couche limite; presque tout le gradient de pression est absorbé par les forces d'inertie, et très peu par les forces de viscosité, de sorte que le débit est en retard de phase de presque 90° sur le gradient de pression.

Par exemple, dans le cas de l'aorte $\frac{R^2 \omega}{v}$ est compris entre 170 et 300.

Aux plus petites valeurs de \mathcal{R} , c'est-à-dire dans les très petits vaisseaux, des forces de viscosité l'emportent sur les forces d'inertie et des conséquences importantes s'en déduisent :

- il n'y a plus de forces centrifuges et les écoulements secondaires disparaissent.
- il n'y a plus de longueur d'entrée de sorte que l'écoulement atteint rapidement une structure d'écoulement établi.
- il n'y a plus de décollement.

GEOMETRIE EN LONG

Cette géométrie concerne les facteurs classiques : longueur et section des conduits, courbure et conicité des conduits, état de surface des parois intérieures, présence d'accidents géométriques (valvules, dépôts...). Dans sa partie extra-cardiaque l'originalité du système circulatoire réside dans le modèle de ramifications divergentes (une vingtaine de générations) puis convergentes (une vingtaine de générations) reliées par un maillage très serré de capillaires (tableau II). Le long de ce système on observe :

 — une décroissance puis une recroissance régulière du diamètre des vaisseaux et de la vitesse débitante (et aussi du nombre de Reynolds \mathcal{R}), mais une variation en sens inverse, à peu près régulière, de la contrainte de cisaillement pariétale To.

15 novembre 1975

Vaisseau	N° de la génération	Nombre de vaisseaux	Diamètre mm	Longueur mm	Module d'Young 10 ⁶ dynes/cm ²	Résistance par unité de longueur
Artère principale Artères pulmonaires Artérioles	1 2 21 23	1 2 226 144 377 487 300	13 9,7 0,12 0.01	23 15 0,38 0.81	0,65 0,65 5,82	0,5 2,5 290 3 960
Veinules	25 42	262 144 2	0,13 5,6	0,45 16	3,29 0,73	215 7,2

Artères	et	artérioles 114	cm ³
Capillain	es		cm ³
Veines	et	veinules 186	cm ³

Soit au total 450 cm³ auquel il faut ajouter 150 cm³ dans le complexe alvéolaire

 une décroissance régulière de la pression sanguine moyenne (*figure* 2).

On peut ajouter que la diminution, ou l'augmentation de la section d'un conduit s'accompagne en gros d'une variation proportionnelle de la longueur du conduit. Une description statistique convenable de cette géométrie permettrait, en écoulement newtonien permanent, de faire une évaluation raisonnable de certaines propriétés globales du système circulatoire ou de celles de certains organes (résistance périphérique). Malheureusement l'écoulement n'est pas newtonien dans les petits vaisseaux.

ELASTICITE DES PAROIS

Les capillaires sont pratiquement rigides dimensionnellement, — peu importe que cette rigidité provienne des propriétés mécaniques propres des tissus constituant leur paroi ou de celle des tissus dans

INDUSTRIE MINERALE

lesquels ils sont insérés (figure 3), — mais les autres vaisseaux ne sont pas de section constante dans le temps.

Cette variabilité de la section permet des régulations de trois sortes :

- une régulation des pressions et débits par les grosses artères,
- une régulation de la distribution du sang dans les différents territoires, par les artérioles (vaisseaux résistifs et sphincters),
- un rôle capacitif par les veines et veinules, qui servent ainsi de réservoir d'accumulation sanguin.

Cette distensibilité des parois des vaisseaux est liée à leur constitution où l'on distingue quatre assises de propriétés mécaniques différentes, dont l'importance dépend du rôle régulateur qu'ils doivent jouer (*figure* 4) :

Fig. 3. — Petits vaisseaux sanguins dans une paroi mésentrique de 60 μ d'épaisseur. — Variation du diamètre intérieur avec la pression pour 4 types de vaisseaux différents. (D'après Fung).

TABLEAU 2 Caractéristiques générales des vaisseaux du système circulatoire pulmonaire

Fig. 4. — Diversité de taille, d'épaisseur de paroi et de mélange des quatre tissus de base dans la paroi des différents vaisseaux sanguins.

- une couche de cellules pavimenteuses endothéliales offrant une paroi lisse à l'écoulement sanguin.
- une couche de fibres d'élastine, dont l'élasticité est remarquable,
- un réseau de fibres de collagène, dont le module d'élasticité est des centaines de fois supérieur à celui de l'élastine. Ces fibres n'exercent d'action qu'à partir d'un certain degré de déformation des parois du vaisseau (figure 5),
- des fibres musculaires lisses, pouvant produire une tension active, par contraction, sous contrôle physiologique.

L'association des fibres d'élastine et de collagène joue le rôle principal pour maintenir en équilibre la paroi du vaisseau contre la pression transmurale et lui donne une élasticité non linéaire, douée d'hystérésis.

On conçoit que cette distensibilité des parois vasculaires joue un rôle considérable dans la mécanique circulatoire et en particulier dans son énergétique : toute paroi mobile absorbe ou restitue de l'énergie au fluide qui la baigne. Il y a là une propriété générale, reconnue depuis longtemps par le physiologiste qui conditionne les performances du cœur et la perfusion régulière des petits vaisseaux (effet Windkessel), mais qui n'a pas beaucoup attiré l'attention des hydrauliciens et aérauliciens. A ce point de vue il apparaît bien qu'on ne puisse séparer l'étude de l'écoulement du sang de celle des propriétés rhéologiques des tissus biologiques constituant les parois vasculaires.

Fig. 5. — Diagramme tension-longueur de l'artère iliaque externe humaine. 1 — Tissus à l'état frais 2 — Tissus sans fibre d'élastine

3 - Tissus sans fibre de collagène.

Les courbes résultent de moyennes faites sur 9 artères provenant de sujets âgés de 20 à 50 ans. (D'après Roach et Burton)

CARACTERE PULSATOIRE DE CERTAINS ECOULEMENTS

On sait qu'à la sortie du cœur le sang est animé d'un mouvement pulsé. La dynamique des écoulements pulsés dans des conduites peu déformables a été étudiée depuis longtemps (coup de bélier), mais il faut reconnaître à ceux qui se produisent dans les artères quelques caractères propres.

C'est le problème de biomécanique qui a peut-être fait l'objet du plus grand nombre d'études, notamment théoriques. On le ramène à celui d'une onde sinusoïdale se propageant par exemple :

- dans un fluide incompressible, homogène, visqueux, newtonien,
- contenu dans un tube cylindrique dont la paroi est isotrope et de viscoélasticité linéaire,
- en mouvement laminaire,
- en supposant négligeables les termes quadratiques des équations.

Mais de telles approximations ne sont pas toujours compatibles avec la réalité observée, et on doit utiliser les équations complètes, non linéaires, pour tenir compte du fait que les déformations mises en jeu ne sont pas nécessairement petites, comme l'exige la linéarisation des équations.

15 novembre 1975

Ainsi l'aorte est siège d'une pulsation de débit qui dure à peu près 40 % du temps du cycle cardiaque et est suivie de repos. Dans une décomposition en série de Fourier, un tel signal périodique comprend des harmoniques dont les premiers ont une amplitude de l'ordre de la valeur moyenne du signal. On conçoit qu'une simple addition linéaire des effets produits (pression, déformation ...) ne puisse constituer qu'une grossière approximation. Il faut aussi noter que la célérité des ondes est assez proche de celle du flux (5 à 10 m/s pour les ondes, 0,8 à 1 m/s au maximum pour le flux), ce qui constitue une situation extrêmement différente de celle qu'on a l'habitude de prendre en considération dans les problèmes industriels. Bien que relativement courts, les conduits sanguins sont le siège de phénomènes de réflexions importants reflétant les propriétés mécaniques du fluide, des parois (élasticité) et de l'ensemble du réseau (impédance périphérique). Des questions importantes se posent également et qui concernent les effets des écoulements pulsés sur les singularités : ondes, embranchements, variations de section (sténoses, anévrismes) et accidents divers (dépôts pariétaux). L'importance des tourbillons, décollements, sillages, zones mortes, celle des contraintes de cisaillement qui apparaissent dans ces singularités n'ont pas été beaucoup étudiées, et jouent peut être un rôle fondamental dans certaines formes pathologiques (dépôts de plaques athéromateuses).

En général les pulsations régulières, accordées sur la fréquence cardiaque, disparaissent dans les petits vaisseaux, cependant on relève des variations de pression notables dans les capillaires glomérulaires rénaux, sans qu'on puisse affirmer qu'elles jouent un rôle ou non dans la filtration du sang. Enfin si les principales recherches ont porté sur le comportement des artères en régime pulsé, on trouve peu de travaux sur celui des veines, dont la section peut cependant varier beaucoup (collapse) et qui sont le siège de débits variables et, pour certaines, de notables variations de pression (veine jugulaire).

PROPRIETES RHEOLOGIQUES DU SANG

Le sang est une suspension d'éléments cellulaires dans une solution aqueuse d'électrolytes et de protéines divers (albumine, globulines, fibrinogène...). Par centrifugation le sang se sépare en deux fractions d'à peu près le même volume, le plasma et les cellules. Ces dernières sont principalement constituées de globules rouges appelés encore érythrocytes ou hématies (normalement il y en a 5 10⁶ par mm³ de sang), de globules blancs ou leucocytes (5 10³ à 8 10³ par mm³) et de plaquettes (2,5 à 3 10⁵ par mm⁵), ces dernières étant de taille beaucoup plus petite que les précédentes.

Le plasma est constitué à 90 % par de l'eau.

Laissé à l'air libre le sang se coagule : il se forme un caillot d'où s'exprime un liquide jaune, le sérum, qui a une composition voisine de celle du plasma, mais ne contient plus de fibrinogène.

Fig. 6. — Variation de la viscosité apparente du sang en fonction de l'hématocrite et du diamètre des capillaires. (D'après Haynes).

COMPORTEMENT MONOPHASIQUE

Considéré comme une suspension de particules dans un liquide newtonien, on doit s'attendre à voir la viscosité du sang varier avec la proportion de cellules présentes : hématocrite (*figure* 6), et on a proposé de généraliser la formule d'Einstein :

$$\mu = \mu_0 (1 + 2.5 \text{ C})$$

qui donne la viscosité d'un fluide restant newtonien, contenant en suspension et en faible concentration C des particules solides sphériques.

Fig. 7. — Variation de la viscosité apparente du sang avec le taux de cisaillement, pour différents hématocrites. Domaine de la circulation sanguine = $30 < \varepsilon < 800$. (D'après Wolls et Merril).

Fig. 8. — Variation de la viscosité apparente du sang en fonction du diamètre du tube [hématocrite 40, température 38° C]. (D'après Haynes).

Introduit dans un viscosimètre de Poiseuille on peut toujours mesurer une viscosité apparente telle que :

$$\mu_{a} = \frac{\pi}{128} \frac{D^{4}}{L} \frac{\Delta p}{q_{v}} = \frac{\Delta p}{32} \frac{D}{L} \frac{D}{U}$$

mais un certain nombre de précautions doivent être prises pour obtenir des résultats cohérents.

Si le diamètre du viscosimètre est assez gros, le sang se comporte en effet comme un liquide newtonien dont la viscosité croît avec l'hématocrite H, mais la valeur de μ_a dépend des conditions opératoires et certains caractères non newtoniens apparaissent :

Fig. 10. - Comportement rhéologique du sang (schématique)

— quand le taux de cisaillement $\delta \varepsilon = \frac{du}{dy}$ devient trop faible (*figure* 7).

μ_a ≯ Siε ⊾

 quand le diamètre du tube devient inférieur à 1 mm (figure 8)

 quand le temps augmente (comportement thixotropique) (*figure* 9).

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, la contrainte de cisaillement τ_o ne tend pas vers zéro, comme ce serait le cas pour un fluide newtonien, mais vers une valeur finie τ_c de l'ordre de $0,05^{dyne}/cm^2$ (Cokelet). Ainsi le sang se comporte comme un milieu doué d'un seuil de plasticité (figure 10).

Pour $\epsilon < 10~s^{-1}$ et H < 0,4, la contrainte de cisaillement est bien représentée par la loi de Casson,

$$(\tau)^{\frac{1}{2}} = (\tau_{c})^{\frac{1}{2}} + b \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

établie pour les encres d'imprimerie.

On conçoit donc qu'une seule mesure de viscosité ne suffise pas à définir les propriétés mécaniques du sang.

Des conclusions analogues se déduisent des mesures faites avec les autres types de viscosimètre : viscosimètre de Couette, appareil cône-plaque (*figure* 11).

15 novembre 1975

280

Fig. 11. — Représentation schématique des variations de la viscosité apparente du sang total en fenction du taux de ciraillement g en haut (viscosimètre rotatif) cu du rapport $\frac{U}{D}$ en bas (viscosimètre capillaire). Aux valeurs élevées de g cu de $\frac{U}{D}$ comparables à celles qui existent dans les gros vaisseaux, la viscosité est à pou près constante (comportement) newtonien). Aux valeurs faibles de g cu de $\frac{U}{D}$, comme en certains endroits de la microcirculation, la viscosité croit progressivement. Aux valeurs de $\frac{U}{D} < 10$ l'agrégation des hématies intervient et modifie la viscosité du sang (courbes en tirets). La forme et la position exactes des courbes sent déterminées en grande partie par l'hématocrite.

Ces résultais font abstraction de la nature hétérogène du sang et ne sont valables, par conséquent, que pour des vaisseaux de diarètre D supérieurs à 0.5 - 1 mm.

COMPORTEMENT POLYPHASIQUE

Puisqu'il s'agit d'une suspension, on conçoit que la rhéologie du sang dépende des propriétés mécaniques des particules, c'est-à-dire pratiquement de celle des globules rouges (*figure* 12). Celles-ci se présentent dans l'état normal, sous la forme de disques biconcaves de diamètre d = de 7 à 8 μ m, constitués par une fine membrane emprisonnant un liquide visqueux riche en hémoglobine.

Entraînés dans le mouvement sanguin ces globules :

- sont susceptibles de former des empilements plus ou moins importants, appelés rouleaux,
- n'apparaissent pas distribués d'une manière uniforme dans les conduits de diamètre inférieur à 1 mm,

INDUSTRIE MINERALE

 sont doués d'une flexibilité remarquable ce qui leur permet de s'introduire sans rupture dans des vaisseaux de diamètre aussi faible que 2,5 μm.

Les rouleaux se formeraient lorsque les contraintes de cisaillement τ sont trop faibles, ce qui expliquerait en partie le comportement singulier du sang dans ces conditions.

Par ailleurs il est étonnant que l'individualité des cellules apparaisse déjà dans des conduits de diamètre 100 fois plus grand qu'elles mêmes. C'est l'effet Fahraeus-Lindqvist. On a donné de ce phénomène deux explications complémentaires :

En premier lieu on observe que l'hématocrite du fluide circulant dans le tube est plus petit que celui qui existe dans le réservoir d'alimentation (effet Fahraeus) : la différence est d'autant plus grande que le tube est plus fin.

En second lieu on observe une migration des globules vers le centre du tube (migration axiale), de sorte que l'écoulement se présente sous la forme d'un noyau central riche en cellules entouré par une couche plasmatique pauvre en cellules, en même temps la distribution des vitesses dans une section droite revêt la forme d'une parabole aplatie au centre. On pense que cette disposition facilite l'écoulement du milieu.

La migration des particules dans un écoulement laminaire a été étudiée par plusieurs auteurs, les modèles théoriques concernant des particules rigides de formes diverses, mais sous faible concentration. Par suite des effets hydrodynamiques s'exerçant sur ces particules, on peut prévoir une migration soit vers l'axe (migration axiale) soit vers le rayon 0,63 R (migration tubulaire) et une orientation statistique privilégiée quand elles sont anisodiamétriques.

Toutefois cette migration doit être fortement influencée :

- par la déformabilité des particules
- par les phénomènes d'intéraction dans le cas de fortes concentrations
- par l'agrégation des particules (formation de rouleaux).

Une conséquence de cette séparation des phaces, se traduit par la différence d'hématocrite qu'on observe, in vivo et in vitro, dans les deux branches d'un embranchement : c'est l'écrémage du plasma. Ce phénomène est principalement gouverné par la couche périphérique plasmatique, il augmente à mesure que $\frac{D}{d}$ diminue.

Quand il s'agit de vaisseaux de diamètre comparable à celui des hématies, on conçoit aisément que se manifeste le caractère proprement polyphasique du sang.

D'après Sutera cette situation se présente dès que $D < 30 \ \mu m$. On a alors à considérer un écoulement de fluide newtonien, le plasma, à l'intérieur duquel se trouvent des corps libres, déformables, d'une

Fig. 12. — Quelques problèmes posés par la microcirculation sanguine

forme qui dépend des conditions d'écoulement. Quand D est inférieur à 8 μ m, le globule rouge pourrait obturer complètement la section du vaisseau, mais il se déforme selon une géométrie qui dépend des efforts tangentiels et normaux qu'exerce le plasma qui s'écoule autour de lui. Dans les capillaires, la progression des hématies semble devoir se faire de préférence par groupes de globules plutôt que par globules isolés, laissant entre eux un certain espace de plasma pur, siège de mouvements internes notables (écoulement par bols). Moyennant une distance convenable entre les globules, ou les amas globulaires, on conçoit qu'une telle disposition favorise les transferts de masse et de chaleur avec la paroi endothéliale.

Pour développer une théorie on peut admettre que les globules pénètrent isolément dans les capillaires et étudier leur déformation si on connait les caractéristiques mécaniques de la membrane et du liquide du globule.

En comparant la résistance hydraulique d'un écoulement dans un long cylindre contenant un seul globule avec celui d'un écoulement en contenant un nombre n, Fung a montré que l'intéraction entre globules conduisait à une diminution de la résistance hydraulique totale. On a une équation de forme :

$$\Delta \mathbf{p} = \frac{32 \,\mu_{\mathrm{a}} \,\mathrm{U}}{\mathrm{D}} \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D}} \left(1 - \mathrm{B} + \mathrm{n} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}} \,\mathrm{f} \right)$$

281

V est la vitesse des globules, U la vitesse moyenne du plasma, B est un coefficient d'intéraction et f un coefficient qui traduit le frottement entre les globules et la paroi du vaisseau.

Les valeurs de V, B et f ont été étudiées en fonction des conditions de l'écoulement.

CONCLUSIONS

Dans ce rapide tour d'horizon nous n'avons pas considéré les problèmes de transferts à travers les parois vasculaires, et nous savons qu'il est fondamental au niveau des capillaires. De même nous avons supposé que les vaisseaux étaient tous du type tubulaire, ce qui n'est pas toujours le cas buisque dans les poumons, par exemple, le réseau capillaire est mieux décrit par une structure en forme de feuillet contenant des obstacles dispersés. Nous avons discuté des écoulements capillaires comme s'il s'agissait toujours d'un système passif. En réalité, et comme nous l'avons dit, le lit capillaire contient un mécanisme complexe de contrôle du flux sanguin local au niveau des artéroles, grâce aux muscles lisses de la paroi et aux sphincters situés à l'entrée des capillaires.

Les propriétés mécaniques de ces muscles vasculaires sont inconnues. Rappelons qu'à l'état de repos, 25 % seulement des capillaires sont parcourus par le sang, et que le débit moyen cardiaque peut varier de 1 à 10 selon l'activité musculaire.

Pour développer toute théorie, le scientifique a l'habitude de simplifier le problème. En biomécanique les simplifications sont parfois téméraires ou hasardeuses, mais cette étape est certainement nécessaire pour une compréhension progressive des phénomènes biologiques.

Il y a certes là une difficulté qui paralyse parfois le dialogue entre mécanicien et médecin mais quand il s'établit il est source d'enrichissement pour l'un et pour l'autre : pour le premier c'est la découverte progressive de tout un domaine d'études insoupconné, pour le second c'est la possibilité d'exercer son art avec une plus grande certitude.

15 novembre 1975

TABLE DES AUTEURS DU TOME III

BARRIOULET (M.) et LEGRAND (C.). — Influences respec- tives de la pâte et des granulats sur la mesure des caractéristiques rhéologiques du béton frais vibré	225
BAUDELET (B.). — La superplasticité	160
CHEZEAUX (M.). — Sur deux cas particuliers d'écoule- ments viscosimétriques	21
CHIORINO (M.A.). — L'évaluation des effets du compor- tement à long terme du béton dans les structures en béton armé	230
COMOLET (R.). — Mécanique de la circulation sanguine	274
COSTA (P.). — (p. 91) v. réf. MARTIN	91
DEMOMENT (G.), PERONNEAU (P.), DUPERDU (R.) et HINGLAIS (J.). — Modèle du système cardio-vasculaire. Etude sur calculateur analogique de l'autorégulation mécanique et de la fonction ventriculaire gauche	177
DUMONT (C.) et MORLIER (P.). — Simulation électronique de modèles viscoplastiques	62
DUPERDU (R.). — (p. 177) v. réf. DEMOMENT	177
FANTOZZI (G.), PEREZ (J.) et GOBIN (P.F.). — Bases phy- siques de la viscoplasticité	38
FAUCHART (J.) et HUEBER (J.). — Contribution à l'analyse viscoélastique des tunnels forés : exemple du tunnel sous la Manche	189
FAUCHART, KAVYRCHINE et NUNG. — Essais sur la redistribution des efforts dans les structures hyper- statiques en béton précontraint sous l'effet du fluage du béton	211
GOBIN (P.F.). — (p. 38) v. réf. FANTOZZI	38
HALPHEN (B.) et NGUYEN (Q.S.). — Sur les lois d'évo- lution des paramètres d'écrouissage	247
HINGLAIS (J.). — (p. 177) v. réf. DEMOMENT	177
HUEBER (J.). — (p. 189) v. réf. FAUCHART	189
HUET (C.). — Viscoélasticité non linéaire et calcul symbo- lique	150
HUET (C.). — Méthode de détermination de l'énergie spé- cifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux.	100
Premiere partie : Bases theoriques	128
Deuxieme partie : Consequences pratiques et experi- mentation	164
KAVYRCHINE. — (p. 211) v. réf. FAUCHART	211
LACOUR-GAYET (P.). — (p. 91) v. réf. MARTIN	91
LANGEVIN (P.). — Notes concernant l'écoulement des colloïdes	7
LARCAN (A.), STOLTZ (J.F.) et VIGNERON (C.). — Pro- priétés rhéologiques du globule rouge humain	10
LEGRAND (C.). — Détermination des caractéristiques rhéo- logiques des corps viscoplastiques à thixotropie par- tielle ; application aux mortiers frais	82

LEGRAND (C.). — (p. 225) v. réf. BARRIOULET	225
MANDEL (J.). — Définition des fluides selon W. Noll	3
MANDEL (J.). — Exposé introductif au colloque sur la viscoplasticité	33
MANDEL (J.). — Les trois fonctions viscosimétriques d'un fluide incompressible	35
MANDEL (J) — Essai de définition de quelques compor- tements rhéologiques	145
MARTIN (J.L.), LACOUR-GAYET (P.) et COSTA (P.). — Déformation plastique du carbure de tantale jusqu'à 2 200° C, résumé	91
MAZET (R.). — Les domaines d'application de la visco- plasticité	71
MAZET (R.). — Relations entre l'hétéroplasticité et la notion de charge limite	239
MORLIER (P.). — (p. 62) v. réf. DUMONT	62
NGUYEN (Q.S.). — (p. 247) v. réf. HALPHEN	247
NUNG. — (p. 211) v. réf. FAUCHART	211
PAISANT (J.C.). — Aspect rhéologique du gonflement d'une membrane en caoutchouc. Mesure des configu- rations de forme	111
PEREZ (J.). — (p. 38) v. réf. FANTOZZI	38
PERONNEAU (P.) (p. 177) v. réf. DEMOMENT	177
SCHUTZ (R.A.). — La fatigue des matériaux polyméri- ques : application aux textiles	261
STOLTZ (J.F.). — (p. 10) v. réf. LARCAN	10
SOTTON (M.). — Evolution des structures des textiles par fatigues thermiques et mécaniques	251
TATRAUX-PARO (J.M.). — Théories du frottement d'adhé- sion viscoélastique par des processus de rupture d'agré- gats moléculaires	123
VIGNERON (C.). — (p. 10) v. réf. LARCAN	10
WEBER (J.D.). — Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse	99
WEBER (J.D.). — Henri Tresca	237
WEBER (J.D.). — Hypothèse des variables internes et représentation de certains fluides viscoélastiques	267
WIPPLER (C.). — Le formage à froid des matières plas- tiques	73
ZAOUI (A.). — Sur l'accommodation viscoplastique inter- granulaire dans les polycristaux métalliques	92
ZAOUI (A.). — Etude de quelques phénomènes viscoplas- tiques transitoires de polycristaux métalliques en trac- tion simple (modèle statistique et confrontation avec l'expérience)	104
ZARKA (J.). — Modèle phénoménologique unidimension- nel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations	53

© 1975 Revue de l'Industrie Minérale

Edition C.E.D.I.M., 19, rue du Grand-Moulin, 42029 St Etienne Cédex

Le Directeur de publication : B. FAVRE BULLE

Imp. LE HENAFF, Z.I. de La Chauvetière, 42002 Saint-Etienne Cédex