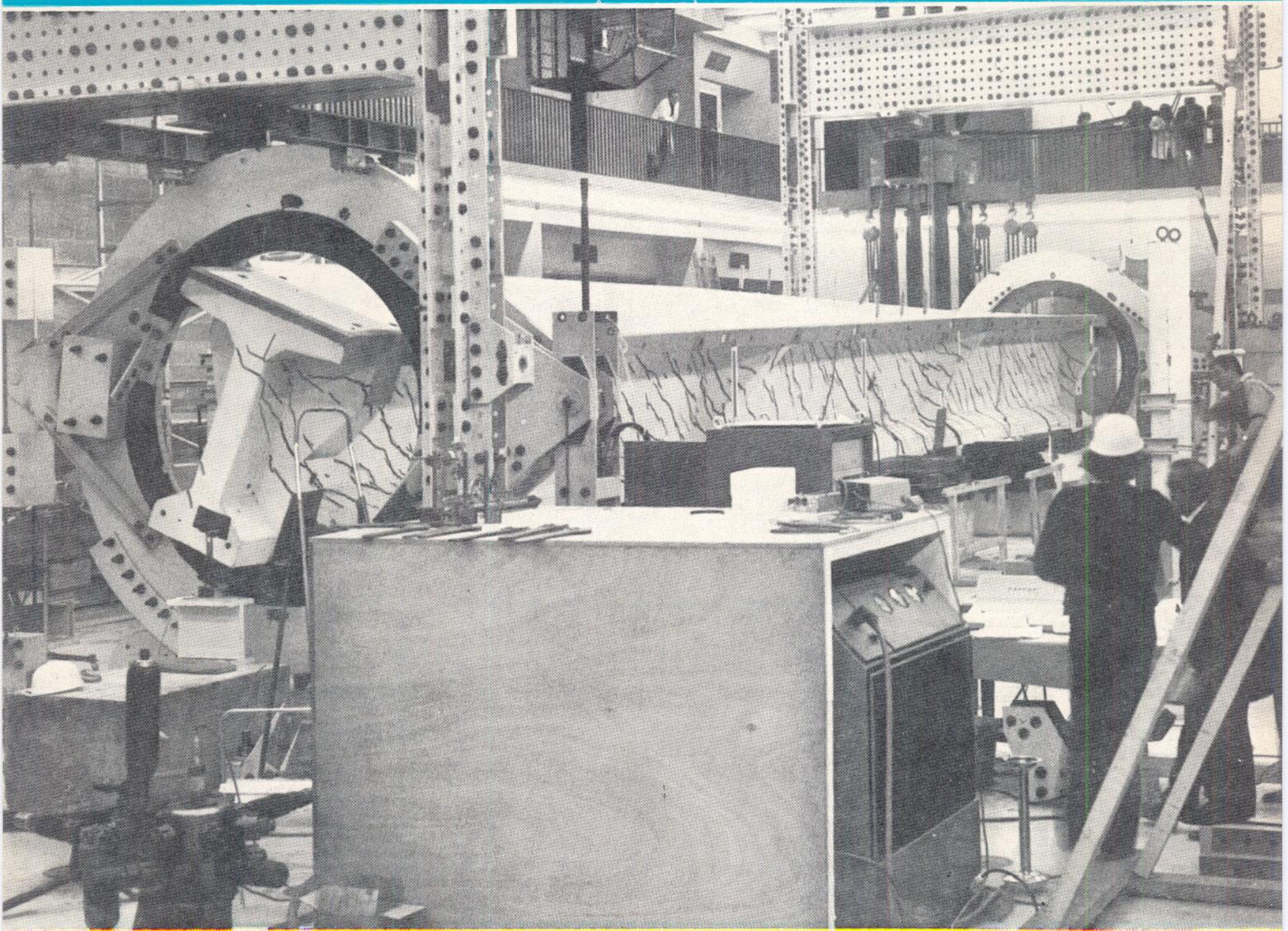


industrie minérale

CAHIERS
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME III - NUMÉRO 4



Numéro spécial du 15 septembre 1974

**COLLECTIVITES MEMBRES
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE**

- Aquitaine-Organico. Laboratoire d'Applications de Serquigny, 27 — Serquigny.
- Bassin d'Essais des Carènes, 6, bd Victor, 75 — Paris (15°).
- Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., quai Anatole France, 75 - Paris (7°).
- Bibliothèque de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines, 60, bd St-Michel, 75 - Paris (6°).
- CEDOCAR, Bibliothèque Centrale, 2, av. de la Porte d'Issy, 75 - Paris (15°).
- Centre d'Essais et de Recherches Techniques des Tabacs, B.P. n° 2, 45 — Fleury-les-Aubrais.
- Centre d'Etudes du Bouchet (Direction des Poudres), 91 - Vert-le-Petit.
- Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75 — Paris (13°).
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75 — Paris (8°).
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75 — Paris (15°).
- Centre de Mathématique et Calcul de l'I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Centre de Recherches, C.E.R.C.A., 26 — Romans-sur-Isère.
- Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Centre de Recherches Routières. Fokkerdreef 21, 1960 — Sterrebeek, Belgique.
- Centre Technique du Cuir, 181, av. Jean-Jaurès, 69 — Lyon (6°).
- Centre Technique des Industries Mécaniques, C.D.M., B.P. 67, 60 — Senlis.
- Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses GEDEX n° 175, 38 — Grenoble-Gare.
- Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, av. Hoche, 75 — Paris (8°).
- Chemistry and Physics Library, 303 Whitmore Laboratory, Pennsylvania State University, University Park, Penn. 16 802, USA.
- Compagnie Française de Raffinage, Centre de Recherches, B.P. n° 27, 76 — Harfleur.
- Compagnie Péchiney, 23, rue Balzac, 75 — Paris (8°).
- Compagnie de Raffinage Shell-Berre, Centre de Recherches, 76 — Grand Couronne.
- Compagnie de Saint-Gobain, Direction des Recherches, Laboratoires Scientifiques, 52, bd de la Villette, 75 — Paris (19°).
- Département Génie Civil et Urbanisme, I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Département Génie Civil, I.N.S.A., 20, Buttes-de-Coësmes, 35 — Rennes.
- Direction des Recherches et Moyens d'Essais, 5 bis, avenue de la Porte de Sèvres, 75 — Paris (15°).
- Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de Mécanique des Sols, 92 — Châtenay-Malabry.
- Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Bibliothèque, 151, bd de l'Hôpital, 75 — Paris (13°).
- Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne. Département de Métallurgie, 158 bis, cours Fauriel, 42 — Saint-Etienne.
- Ecole Polytechnique, Bibliothèque, C.P. 501, Snowdon, Montréal 248, Canada.
- Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Service Documentation, 6, quai Watier, 78 — Chatou.
- Electricité de France, Service Géologique et Géotechnique, 3, rue de Messine, 75 — Paris (8°).
- Electricité de France, SEPTEN, 17, av. de la Libération, 92 — Clamart.
- ESSO-Standard, S.A.F., Centre de Recherches de Mont-Saint-Aignan, 76 — Mont-Saint-Aignan.
- Faculté des Sciences. Laboratoire de Mécanique. Route de Chauvigny, 86 — Poitiers.
- Fédération des Fabricants de Peintures, Vernis et Encres d'Imprimerie, Laboratoire des Peintures et Vernis, rue H.-Dunant, 94 — Thiais.
- Filial Biblioteki, Akademii Nauk SSSR, Baltijskaja ul. 14 Moscou A-219, U.R.S.S.
- Institut Français du Pétrole, Dir. Doc. Inf. 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92 — Rueil-Malmaison.
- Institut Franco-Américain de Recherches de Saint-Louis, 12, rue de l'Industrie, 68 — Saint-Louis.
- Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Camichel, 31 — Toulouse.
- Institut de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Académie Tchèque-slovaque des Sciences, Vysehradská 49, Praha 2, Nové Mesto, Tchécoslovaquie.
- Institut National de la Recherche Agronomique, Etoile de Choisy, 78 — Versailles.

CAHIERS
DU
GROUPE FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE

Tome III — Numéro 4

15 septembre 1974

sommaire

J. MANDEL

Essai de définition de quelques comportements rhéologiques 145

C. HUET

Viscoélasticité non linéaire et calcul symbolique 150

B. BAUDELET

La superplasticité 160

C. HUET

Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux.

Deuxième partie : Conséquences pratiques et expérimentation 164

G. DEMOMENT, P. PERONNEAU,
R. DUPERDU, J. HINGLAIS

Modèle du système cardio-vasculaire. — Etude sur calculateur analogique de l'autorégulation mécanique et de la fonction ventriculaire gauche 177

Photographie de la couverture

Rupture en torsion d'une poutre de pont en béton précontraint d'un poids de 28 tonnes et de 18 mètres de longueur.

Essai réalisé au Centre d'essais des structures du C.E.B.T.P. à Saint-Rémy-les-Chevreuse.

INDUSTRIE MINERALE

Essai de définition de quelques comportements rhéologiques

par J. MANDEL

Directeur du Laboratoire de Mécanique des solides
de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes, Paris V*

RESUME

On propose de baser la classification des principaux comportements rhéologiques sur le caractère, évanescent ou non, de l'effet d'un échelon ou d'un créneau de déformation isochore. L'échelon établit la distinction entre fluide, semi-fluide (cas particulier : le cristal fluide) et solide. Le créneau établit la distinction entre viscoélasticité et plasticité. On fait observer que la classification peut différer suivant qu'on envisage l'effet sur toutes les propriétés physiques ou seulement l'effet sur la contrainte d'équilibre ; ce qui conduit à parler, par exemple, de fluide au sens strict ou au sens large.

ABSTRACT

It is proposed to base the classification of the principal rheological behaviours on the nature, fading or not, of the effect of a step-like or a tooth-like history of isochoric deformation. A step establishes the distinction between a fluid, a semi-fluid (e.g a fluid-crystal) and a solid. A tooth establishes the distinction between viscoelasticity and plasticity. It is worth noting that the classification may differ according as the effect on all physical properties or only that on the equilibrium stress is considered ; this leads to speak, for instance, of a fluid in the strict sense or in the broad sense.

AVANT-PROPOS

Après notre exposé au 6ème Congrès international de Rhéologie (Lyon, 1972), certaines retouches au texte édité dans *Rhéologica Acta* nous ont paru nécessaires. La principale est la suivante :

Les définitions proposées étaient basées sur le caractère évanescent ou non des effets d'un échelon ou d'un créneau de déformation. Par effet j'entendais l'effet sur la réponse fonctionnelle (au sens de Noll) à des déformations ultérieures, voire même l'effet sur toutes les propriétés physiques. D'un point de vue absolu ces définitions étaient les plus satisfaisantes, mais elles ne conduisent pas à des critères

pratiques. Il n'est guère possible de s'assurer que, longtemps après l'application d'un échelon, la réponse fonctionnelle à toutes les déformations possibles est redevenue la même qu'au départ, et encore moins de s'assurer que toutes les propriétés physiques sans exception sont redevenues les mêmes. Le rhéologue se contentera d'examiner l'effet d'un échelon de déformation sur la contrainte d'équilibre. Mais alors pour un même corps la classification pourra être différente. C'est ce qui justifie la nouvelle rédaction que nous présentons ici.

INTRODUCTION

Il est sans aucun doute extrêmement téméraire d'établir des classifications dans les sciences de la nature. Il est illusoire de chercher des définitions rigoureuses. Et le premier enseignement de la rhéologie est justement qu'il est difficile de distinguer fluide et solide, puisque toute matière flue.

Cependant pouvons-nous nous empêcher de nous demander quel sens précis il faut attacher à ces mots, si souvent employés en rhéologie : solide, fluide, viscoélastique, plastique, etc?... Répondre à ces questions est un besoin de l'esprit ; c'est aussi une condition du progrès de la science.

La réponse peut être recherchée à l'échelle de la micro-structure. Mais ce n'est pas la voie que nous suivrons ici, car on peut espérer atteindre une généralité plus grande par l'étude du comportement macroscopique. N'est-ce pas là ce qu'expriment les mots : comportement solide, comportement viscoélastique, etc. Sans chercher l'explication des phénomènes, nous essayons simplement de les classer d'après ce que nous observons de l'extérieur.

Pour ce qui concerne la distinction entre fluide et solide, W. Noll (1) a apporté en 1958 une contribution remarquable en se fondant sur les notions de réponse fonctionnelle (2) et de groupe d'isotropie. Dans une large mesure notre exposé fait appel aux idées de Noll. Cependant notre point de vue est légè-

(1) W. NOLL : A mathematical theory of the mechanical behaviour of Continuous media. Arch. Rat. Mech. Anal. 2, 1958/59, p. 197-226.

(2) Introduite par A.E. GREEN et R.S. RIVLIN. Arch. Rat. Mech. Anal. 1, 1957, p. 1-21.

rement différent. Au lieu d'invoquer le groupe d'isotropie, nous ferons appel à la notion d'effet évanescant à long terme (3), qui nous permettra d'établir notamment deux distinctions fondamentales : distinction entre fluide et solide, distinction entre viscoélasticité et plasticité.

Nous nous limiterons aux *matériaux simples* suivant la terminologie de W. Noll, ce qui signifie que le tenseur contrainte σ dépend du gradient γ de la transformation, mais ne dépend pas des dérivées spatiales de ce gradient. En outre nous supposons qu'il n'y a pas de liaison interne telle que l'incompressibilité (invariance du volume quel que soit σ).

A partir d'une configuration κ , dans laquelle le corps est en équilibre, on impose une transformation de gradient $\gamma(t)$, tenseur de composantes $\gamma_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j}$, X_i désignant les coordonnées dans la configuration κ et x_i les coordonnées dans la configuration à l'instant t . W. Noll envisage la *réponse fonctionnelle*, i.e. la fonctionnelle :

$$\sigma(t) = \mathcal{F}_\kappa[\gamma(\tau)] \quad -\infty < \tau \leq t$$

qui dépend de la configuration de référence κ . C'est la nature de cette dépendance entre la fonctionnelle et la configuration de référence qui est la base de sa classification.

Cette dépendance ne fait évidemment que traduire certaines propriétés spécifiques de \mathcal{F}_κ . Notre point de vue va être de nous baser sur les propriétés de la réponse à partir d'une configuration d'équilibre bien déterminée, *fixée* et *stable*. D'autant plus que le comportement peut dépendre de la configuration, de même qu'il dépend de la température. Un corps n'a pas un comportement unique. Il est nécessaire de préciser la configuration d'équilibre envisagée.

Nous envisagerons seulement deux types de fonctions $\gamma(\tau)$ que nous nommerons échelon et créneau :

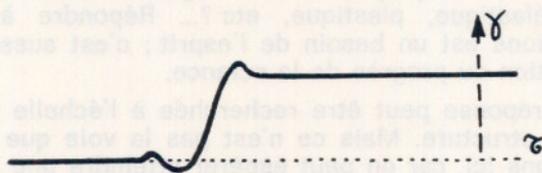


Fig. 1

a) *Echelon* (figure 1) : c'est le passage d'une valeur constante γ_0 à une valeur constante γ_1 en un temps fini, sans préciser le mode de passage. L'effet à long terme d'un échelon établira la distinction entre solide et fluide.

b) *Créneau* (figure 2) : C'est un échelon d'amplitude nulle ($\gamma_1 = \gamma_0$). L'effet à long terme d'un créneau de durée limitée établira la distinction entre viscoélastique et plastique.

(3) Elle ne coïncide pas avec la notion de mémoire telle qu'elle a été précisée par Coleman (l'effet des valeurs actuelles des variables est en dehors de la mémoire). Pour cette raison, nous éviterons le terme de « mémoire » qui risquerait de créer des confusions.

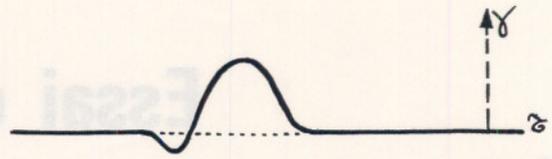


Fig. 2

FLUIDE, SOLIDE, SEMI-FLUIDE

Comportement fluide. Rappelons deux définitions usuelles, dont on peut montrer l'équivalence :

1. Un corps est un fluide s'il reste en équilibre seulement sous une pression isotrope.
2. Un corps est un fluide si la relaxation est totale lorsque le volume n'a pas varié, i.e. lorsque la transformation imposée est un échelon « isochore ».

Ces définitions simples suscitent diverses critiques. On sait par exemple qu'un métal flue même à la température ordinaire sous des contraintes très faibles. Existe-t-il un seuil pour le fluage ? Certains en doutent. De toute manière il est très difficile à préciser. Or l'absence de seuil conduirait à dire, suivant les définitions précédentes, que l'acier à la température ordinaire est un fluide.

W. Noll a donné une définition qui semble plus satisfaisante : un corps est un fluide si la réponse fonctionnelle n'est pas modifiée par un changement isochore quelconque de la configuration κ . De cette définition on déduit que i) le fluide est isotrope, ii) il n'existe dans son passé aucun état privilégié (4), iii) la contrainte actuelle $\sigma(t)$ ne dépend que de l'histoire des déformations relatives (i.e. rapportées à la configuration actuelle). Toutefois, et ce point semble être passé inaperçu, on ne retrouve la condition d'équilibre sous pression isotrope (ou de relaxation totale) que moyennant l'hypothèse suivante, implicitement admise : le fluide n'a aucun souvenir des transformations qui lui ont été imposées dans un passé très lointain. Cet énoncé implique notamment la relaxation totale des contraintes, mais il est plus fort, parce qu'il concerne toutes les propriétés physiques actuelles. En particulier la réponse fonctionnelle est indépendante d'un changement de configuration isochore effectué dans un passé infiniment lointain, ce qui redonne la définition de W. Noll. Nous pouvons donc adopter la définition suivante (plus complète que celle de Noll) :

Un corps a le comportement fluide dans une configuration κ , si toute transformation échelon isochore (5) à partir de κ (à température constante) a

(4) Idée déjà exprimée par J.G. OLDROYD — Proc. Roy. Soc. A 200, 1950 (note p. 535).

(5) Nous disons transformation, ce qui est plus général que déformation. Une rotation est une transformation isochore particulière : l'isotropie du fluide en équilibre en résulte.

un effet évanescent. Par effet, nous entendons ici l'influence sur toutes les propriétés physiques.

L'ensemble E_κ . Pour un corps quelconque nous définirons le comportement (fluide, solide, semi-fluide) dans une configuration κ , grâce à l'ensemble E_κ des transformations par échelon, à partir de κ , dont l'effet est évanescent (6). Toute configuration déduite de κ par une des transformations de E_κ jouit par hypothèse des mêmes propriétés que κ . Le comportement est donc le même pour toutes ces configurations.

Le comportement est fluide si l'ensemble E_κ est le groupe des transformations isochores, encore appelées transformations unimodulaires directes. Si le comportement est fluide dans une configuration, il l'est encore dans toutes les configurations de même densité (à la même température). On peut donc parler de fluide (à température et densité données) sans préciser la configuration. E_κ contient notamment le sous-groupe des rotations, ce qui entraîne l'isotropie du fluide en équilibre.

Comportement solide. Suivant la terminologie usuelle un corps est solide s'il existe pour le déviateur des contraintes un seuil en-deçà duquel les déformations restent limitées. Comme on l'a déjà dit, cette notion de seuil soulève des difficultés. W. Noll a proposé la définition suivante : un corps est un solide s'il existe des configurations, dites non distordues, telles que la réponse fonctionnelle soit modifiée par tout changement non orthogonal, i.e. par tout changement de forme, de la configuration de référence. Notre point de vue est à peine différent, mais nous considérons des changements de forme réellement effectués dans un passé lointain.

1. Cas d'une configuration d'équilibre sous contrainte isotrope. Il est possible que dans cette configuration le corps soit isotrope ou possède des directions de symétrie, i.e. conserve ses propriétés quand on lui impose, soit une rotation arbitraire, soit certaines rotations particulières. Par contre tout changement de forme modifie d'une manière permanente les propriétés d'un solide.

2. Cas d'une configuration d'équilibre sous une contrainte non isotrope. Il est possible qu'on puisse se ramener par une transformation élastique de gradient F à une configuration du type précédent, dans laquelle une rotation Ω ne modifie pas le comportement, puis rétablir la contrainte initiale par la transformation F^{-1} . La transformation $T = F^{-1} \Omega F$ ne modifie pas les propriétés du corps. Une telle transformation qui sera dite orthogonalisable par F (7) peut donc ne pas modifier les propriétés d'un solide. Ceci nous conduit à proposer la définition suivante :

Le comportement est solide dans la configuration κ (8) si l'ensemble E_κ ne contient, dans un voisinage

suffisamment proche de κ , que des transformations orthogonalisables par une même transformation F (qu'on peut supposer symétrique).

La restriction à un voisinage de κ a pour but d'éliminer la possibilité de transformations (non orthogonalisables) comportant une déformation plastique sans écrouissage.

La négation du comportement solide ne donne pas le comportement fluide, mais le :

Comportement semi-fluide. *Le comportement est dit semi-fluide dans une configuration κ si, dans n'importe quel voisinage de κ , l'ensemble E_κ contient des transformations non orthogonalisables. Exemples :*

1. Corps parfaitement plastique à la limite d'écoulement. La déformation plastique ne modifie pas dans ce cas les propriétés du corps, donc son comportement est alors semi-fluide. Il n'en est pas de même lorsqu'il y a écrouissage (9).

2. Cristal-fluide. Si le comportement est semi-fluide dans une configuration d'équilibre sous contrainte isotrope on a un cristal fluide (qui ne peut rester en équilibre que lorsque deux des contraintes principales sont égales) (10).

3. Divers corps théoriques définis par des équations différentielles posées a priori, par exemple les corps hygrostériques de W. Noll, corps définis par une relation entre σ , $\frac{D\sigma}{Dt}$ et \mathcal{D} , tenseur vitesse de déformation. Leur comportement est en général semi-fluide mais peut être fluide ou solide pour certaines expressions des coefficients de la relation.

Le fluide est évidemment un cas particulier de semi-fluide, plus précisément de cristal-fluide. En effet pour un cristal fluide l'ensemble E_κ est un sous-groupe du groupe unimodulaire direct. Si, dans une configuration κ , il y a isotropie (non seulement du tenseur σ , mais de toutes les propriétés), E_κ contient le groupe des rotations. Alors, d'après un théorème de W. Noll, l'ensemble E_κ est le groupe unimodulaire direct tout entier, donc on a un fluide.

Remarques. — Nous avons souligné que le type de comportement peut dépendre de la configuration κ (ou de la contrainte d'équilibre) et de la température. Nous ferons à ce sujet les remarques suivantes :

1. Le type de comportement est le même pour deux configurations déduites l'une de l'autre par rotation (11), ou par une des transformations de l'ensemble E_κ .

(9) Lorsque la résistance à la déformation augmente, on a le comportement solide, lorsqu'elle diminue la configuration κ est instable.

(10) Il s'agit des corps dits smectiques. Les autres corps mésomorphes (nématiques, cholestériques) ne sont pas des corps matériellement simples.

(11) Soit κ' déduite de κ par la rotation R ($X' = RX$). Si la transformation γ par rapport à κ est à effet évanescent, de même par rapport à κ' la transformation $\gamma' = R \gamma R^{-1}$.

(6) E_κ ne contient que des transformations isochores : un changement de densité a toujours des effets non évanescents.

(7) Les transformations orthogonalisables jouissent des mêmes propriétés que les transformations orthogonales en ce qui concerne leurs valeurs propres. Car les valeurs propres de T sont les mêmes que celles de Ω (soit 1, $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$, α réel).

(8) Nous ne considérons que des configurations d'équilibre stables.

2. Dans la plupart des cas il reste le même quelle que soit la configuration dans un « ouvert » de l'espace des configurations. On peut parler de fluide, de solide, de cristal-fluide, de semi-fluide hygro-stérique, sans préciser la configuration dans un certain domaine. Il n'en est pas de même pour le comportement parfaitement plastique.

3. Si, pour tout échelon non orthogonalisable, dans un voisinage de κ , la relaxation de la contrainte n'est pas totale, nous dirons que le comportement est solide *au sens strict*. Cette notion se rattache à la classification des comportements qu'on obtient en substituant, dans toutes les définitions à l'ensemble E_κ , l'ensemble $E'_\kappa \supset E_\kappa$ des transformations échelons pour lesquelles la relaxation des contraintes est totale (classification moins satisfaisante théoriquement, mais plus commode pour l'expérimentateur). La qualification du comportement (dans une même configuration) peut dépendre de la classification adoptée (12). La relation entre les deux classifications (par l'effet sur l'ensemble des propriétés physiques ou seulement sur la contrainte d'équilibre) est indiquée ci-dessous :

Toutes propriétés physiques (E_κ)	Solide	Semi-fluide	Fluide
Contrainte d'équilibre seulement (E'_κ)	Solide Strict	Semi-fluide	Fluide large

VISCOELASTICITE ET PLASTICITE

Ici nous utilisons la réponse de la contrainte σ à un créneau de γ , ou plus simplement à un créneau de déformation ε (car une même rotation appliquée puis retirée est sans effet sur σ). Nous considérons les transformations créneaux de ε (de durée limitée) dont l'effet est évanescent. En particulier la contrainte revient à sa valeur initiale au bout d'un temps infini ; nous dirons qu'il y a effacement total des contraintes (il s'agit en fait des variations des contraintes).

(12) L'exemple suivant nous a été indiqué par R.S. Rivlin. Soit un corps défini par une équation:

$$\sigma = \frac{a + b \text{tr } \underline{C}}{\alpha + \beta \text{tr } \underline{C}} \underline{D} - p(\rho, T) \underline{1}$$

où a, b, α, β sont des constantes, $\underline{C} = \underline{\gamma}^t \underline{\gamma}$ est le tenseur de Cauchy à partir d'une configuration κ_0 , \underline{D} le tenseur vitesse de déformation, p un scalaire fonction de ρ densité et T température. Ce corps est un fluide au sens large puisqu'il ne peut rester en équilibre que sous une pression isotrope $p(\rho, T)$. Il est semi-fluide au sens de Noll. En effet on vérifie aisément que si l'on remplace la configuration κ_0 par une autre configuration qui ne s'en déduit pas par une transformation orthogonale, le facteur de \underline{D} ne conserve pas la même forme. Par conséquent, une transformation isochore non orthogonale modifie la réponse fonctionnelle.

Cette notion d'effacement n'ayant guère été jusqu'ici utilisée en rhéologie, quelques commentaires s'imposent avant de passer à la définition de la viscoélasticité. L'effacement est la propriété duale de la recouvrance (échange de σ et ε). Pour définir la recouvrance on considère un créneau de contrainte. Si, au bout d'un temps infini, la déformation revient à zéro, la recouvrance est totale. Mais la recouvrance totale ne permet pas de définir correctement la viscoélasticité, puisqu'un fluide viscoélastique n'a pas en général une recouvrance totale. La relation entre les deux propriétés est fournie par les deux propositions suivantes :

- P. 1 — S'il n'y a pas de liaisons intérieures, recouvrance totale quel que soit le créneau de σ implique effacement total quel que soit le créneau de ε (13).
- P. 2 — S'il n'y a pas de relations entre les contraintes à l'équilibre, effacement total, quel que soit le créneau de ε , implique recouvrance totale (quel que soit le créneau de σ).

Définition du comportement viscoélastique

Nous pouvons ici utiliser les 2 modes de classification :

Viscoélasticité stricte :

Le comportement est strictement viscoélastique dans la configuration κ si l'effet sur toutes les propriétés physiques de n'importe quelle déformation créneau à partir et dans un voisinage de κ est évanescent. Cet énoncé implique notamment l'effacement total des contraintes, mais il est plus fort, parce qu'il concerne toutes les propriétés physiques, en particulier la réponse fonctionnelle.

Viscoélasticité au sens usuel :

Le comportement est viscoélastique dans la configuration κ si pour n'importe quelle déformation créneau à partir et dans un voisinage de κ l'effacement des contraintes est total.

Un fluide est viscoélastique dans toute configuration (quel que soit le mode de classification adopté). En effet un créneau est un cas particulier d'échelon isochore.

Pour un fluide la proposition P2 n'implique pas qu'il y ait recouvrance totale puisqu'il y a des relations entre les contraintes à l'équilibre.

De même un semi-fluide peut être viscoélastique (sens usuel) sans qu'il y ait recouvrance totale pour un créneau de contrainte.

Un solide peut être viscoélastique au sens usuel dans un certain domaine (à 6 dimensions) pour le tenseur contrainte d'équilibre. Puisque dans ce domaine il n'y a pas de relations entre les contraintes à l'équilibre, il y a recouvrance totale.

(13) En effet, la recouvrance totale prouve que, en équilibre $\varepsilon = f(\sigma)$, relation inversible, à condition d'exclure les positions d'équilibre instable, lorsque les six composants ε_{ij} sont indépendantes.

Comportement plastique

Pour retrouver le sens usuel (comportement d'un solide lorsqu'il reçoit des déformations permanentes sans se fissurer), nous devons rattacher la définition de ce comportement à la classification par la contrainte d'équilibre (14).

Nous dirons que le comportement est plastique dans la configuration κ si, dans n'importe quel voisinage de κ , il existe des transformations créneaux de ε n'entraînant pas de fissuration et pour lesquelles l'effacement n'est pas total. D'après la proposition P 1, la recouvrance ne l'est pas non plus pour certains créneaux de contrainte (s'il n'y a pas de liaisons intérieures, ce qu'on a supposé au départ). Autrement dit il y a des déformations permanentes.

La question du seuil de plasticité. On définit habituellement le comportement plastique par l'existence d'un seuil du déviateur des contraintes pour les déformations permanentes, ceci afin de distinguer le corps plastique du fluide pour lequel le seuil serait nul.

Notre définition a l'avantage d'être affranchie de la notion de seuil. Si le seuil est nul, le domaine d'élasticité est réduit à zéro, sans que pour autant le comportement soit celui d'un fluide. La propriété commune avec le fluide est l'existence de déformations permanentes pour une variation des contraintes aussi petite que l'on veut. Mais pour le fluide, il y a effacement total, pour le solide plastique non.

De plus, l'équilibre du solide plastique de seuil nul n'exige pas que le tenseur des contraintes soit isotrope. Enfin pour ce solide les déformations permanentes sont limitées par l'écroutissage. Du fait de l'écroutissage, ou bien, après déformation le seuil cesse d'être nul (tel est le cas du cuivre électrolytique dont le seuil, à l'état naissant, est nul, mais ne l'est plus après déformation), ou bien on a un solide dont le domaine d'élasticité reste ponctuel, mais dépend des déformations permanentes subies. Cette conception étant peu courante en plasticité (parce que le modèle classique est celui du patin à frottement sec), nous donnons ici deux exemples :

1. Un sable lâche et sec subit des déformations permanentes pour des variations de contrainte très faibles. Le domaine d'élasticité, s'il existe, est d'étendue très faible. Ce cas n'est pas exceptionnel.

(14) On peut concevoir qu'il y ait effacement total, sans que le corps ait retrouvé toutes ses propriétés physiques : il n'y aurait pas viscoélasticité stricte, mais il paraît difficile d'utiliser le terme de plasticité dans ce cas.

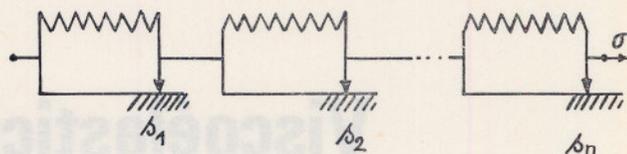


Fig. 3

Pour la plupart des matériaux la limite d'élasticité ne peut être définie que d'une manière conventionnelle.

2. Considérons un modèle formé d'éléments placés en série (figure 3). Chaque élément est constitué par un ressort et un patin à friction en parallèle.

Les seuils des patins sont : $s_1 \geq s_2 \dots \geq s_n$. L'étendue du domaine d'élasticité est donc $2s_n$ (15).

Si nous prenons une suite infinie d'éléments de seuils décroissants, telle que s_n tende vers zéro quand n tend vers l'infini, nous obtenons un modèle qui reste en équilibre sous n'importe quelle contrainte (ce n'est donc pas un fluide) et dont cependant le domaine d'élasticité reste toujours nul.

Signalons sans insister que les phénomènes de radoucissement et de thixotropie sont encore des exemples d'évanescence de certains effets (un créneau de contrainte entraîne des déformations permanentes, mais les autres effets physiques sont évanescents).

CONCLUSION

On a essayé d'établir une classification basée sur l'effet à long terme d'un échelon ou d'un créneau de déformation sur l'ensemble des propriétés physiques. Il a d'ailleurs paru nécessaire dans certains cas (plasticité) et plus commode dans tous les cas de faire appel à une classification un peu différente basée sur un seul effet : la contrainte permanente. Si imparfaite soit-elle notre tentative fait du moins apparaître que les effets à long terme jouent un rôle essentiel dans la classification des comportements rhéologiques.

(15) En effet s'il y a glissement du patin n vers la droite sous l'action d'une contrainte $R_n + s_n$, R_n désignant la tension du ressort n , il y aura glissement vers la gauche si la contrainte devient $R_n - s_n$. Lorsqu'on diminue la contrainte σ , les patins se bloquent, mais la vitesse de déformation s'inverse quand la contrainte a diminué de $2s_n$.

Viscoélasticité non linéaire et calcul symbolique*

par C. HUET

Dr. Ing., Délégué Scientifique
du Centre technique des Tuiles et Briques

RESUME

Par deux publications faites en 1972 [39], [40], nous avons présenté une méthode, basée sur l'emploi de la transformation de Laplace-Carson à plusieurs variables, et qui permet de faciliter le calcul de la réponse d'un matériau viscoélastique non linéaire pour une histoire quelconque de la sollicitation. Notre présentation initiale concernait le cas tri-dimensionnel. Nous traitons ici le cas uni-dimensionnel, ce qui rend plus accessible l'assimilation du principe de la méthode. Dans le même but, des exemples d'application sont fournis.

En outre, nous présentons en annexe les démonstrations de 8 propriétés de la transformation de Carson multiple appliquée à des tenseurs que, dans nos publications précédentes, nous avons présentées et utilisées sans démonstration. Enfin, comme nous l'avons montré en [41], la méthode s'applique sans difficulté à des systèmes physiques héréditaires quelconques. Ceci permet de traiter le cas de matériaux viscoélastiques sensibles à des variations de l'environnement physique.

SUMMARY

In two papers of 1972 [39], [40], we presented a method, based on multi-variables Laplace-Carson transform, permitting an easy calculation of the response of non-linear viscoelastic materials to stresses or strains varying versus time. That was in the three-dimension case. Here, we try to facilitate the understanding of the principles of the method by treating the one-dimension case, and giving a few examples. Furthermore we give, in Appendix, demonstrations of 8 properties of tensorial Carson transforms, that were given in the first two papers, but without demonstration. The same method can easily be applied to general hereditary systems, as we showed in [41]. This permits an easy treatment of viscoelastic materials showing properties modified by variations of physical environment.

* Conférence prononcée le 22 mars 1973 devant le Groupe Français de Rhéologie.

INTRODUCTION

L'utilité de l'aide que le calcul symbolique apporte aux rhéologues dans les problèmes de viscoélasticité linéaire n'est plus à démontrer, et les membres du Groupe français de Rhéologie, qui sont aussi lecteurs de ces Cahiers, savent de longue date (cf. [1] [2] [3]) comment, dans ce cas tous les problèmes de viscoélasticité, tant dynamiques que statiques, se trouvent ramenés à des problèmes d'élastostatique.

Ceci a permis à la viscoélasticité linéaire de constituer très tôt un corps de doctrine complètement cohérent, et susceptible d'applications en grand nombre. A titre d'exemple, citons celles que nous avons nous-mêmes eu l'occasion de réaliser ([4] à [10]).

La situation n'est pas exactement la même en ce qui concerne la viscoélasticité non linéaire, pour laquelle beaucoup de problèmes restent à résoudre.

Nous avons récemment été amenés (cf. [39], [40]), à proposer une méthode utilisant également le calcul symbolique, et pouvant apporter une certaine aide dans le traitement des problèmes de viscoélasticité non linéaire.

Cette méthode a déjà fait l'objet des publications mentionnées en [39] et [40]. Ces publications avaient cependant été rédigées de façon à présenter, sous un volume aussi restreint que possible, des résultats visant à atteindre le plus haut degré de généralité, et ce au détriment peut-être de la facilité d'assimilation.

C'est pourquoi il nous a été demandé de présenter, à l'intention des membres du Groupe, un exposé de la méthode sous une forme, peut être moins générale, mais à caractère plus didactique, demande à laquelle nous tentons de répondre bien volontiers.

Alors qu'en viscoélasticité linéaire, on utilise la transformation de Carson à une variable, nous verrons que, dans le cas non linéaire, la forme des expressions conduit à employer la transformation de Carson à plusieurs variables, dont nous aurons à rappeler quelques propriétés. Nous verrons en outre que nous aurons à modifier quelque peu cette transformation en la combinant avec une autre transformation qui permettra d'obtenir les résultats utiles et, en même temps, fournira des limites aux possibilités de la méthode.

1. RAPPELS SUR LES EQUATIONS DE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

On sait que, dans le cas général, la contrainte au temps t dans un élément de volume initialement au repos et soumis entre o et t à une histoire de la déformation $\varepsilon(t)$ s'exprime, s'il n'y a pas vieillissement (*), par une fonctionnelle de la forme.

$$\sigma(t) = \mathcal{F} \left[\sigma(t - \tau) \right]_{\tau=0}^t \quad (1)$$

De la même façon, si c'est une contrainte $\sigma(t)$ qui est imposée, la réponse en déformation $\varepsilon(t)$ sera une fonctionnelle de l'histoire de σ :

$$\varepsilon(t) = \mathcal{G} \left[\varepsilon(t - \tau) \right]_{\tau=0}^t \quad (2)$$

Dans le cas linéaire, les fonctionnelles sont linéaires et, d'après le théorème d'Hadarnard, on peut toujours les représenter par une intégrale. On aura par exemple pour \mathcal{G}

$$\varepsilon(t) = \int_{o^-}^t f(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (3)$$

où $f(t)$ est une fonction, la fonction fluage, indépendante de la contrainte.

La borne inférieure o^- signifie que la réponse à l'instant zéro est introduite sous le signe d'intégration, (3) étant équivalente à

$$\varepsilon(t) = f(t) \sigma(o) + \int_{o^+}^t f(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (4)$$

Dans (3) les termes de l'intégrande sont donc pris au sens des distributions.

Dans le cas où la fonctionnelle est non linéaire on pourra également lui donner une forme intégrale, cette fois par un développement en série d'intégrales multiples (développement de Fréchet-Riesz) :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \int_{o^-}^t f_1(t - \tau_1) \dot{\sigma}(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{o^-}^t \int_{o^-}^{\tau_1} f_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{\sigma}(\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

où les f_i sont des fonctions fluage indépendantes de la contrainte.

Il suffira, pour pouvoir écrire (5), que la fonctionnelle soit continue (théorème de Fréchet), en un sens à préciser. En gros, on peut dire que la continuité de la fonctionnelle exprime le fait qu'à deux histoires de la contrainte « infiniment proches » correspondent deux réponses infiniment proches pour les évolutions de la déformation (les expressions « infiniment proches » supposant la définition d'une distance, dans l'espace fonctionnel des histoires). Cette hypothèse étant plausible sur le plan physique, au moins

(*) cf. [16] à [18] pour une autre méthode opérationnelle adaptée au cas vieillissant.

dans un certain nombre de cas, le développement (5) sera donc une expression réaliste de la fonctionnelle, tout au moins si l'on borne le développement à un certain nombre n , servitude imposée par la nécessité de déterminer expérimentalement les fonctions f_i , qui sont des fonctions à i variables ($i=1$ à n).

On trouvera dans la littérature (cf. notamment Lockett [43]) la façon dont peut se faire cette détermination qui demande un grand nombre d'expériences de fluage avec plan de chargement en escaliers (le nombre minimal de marches nécessaire étant égal à l'ordre n de la fonction f_n à déterminer).

La réponse à une contrainte constante s'écrit en effet :

$$\varepsilon_o(t) = f_1(t) \sigma_o + f_2(t, t) \sigma_o^2 + \dots + f_n(t, \dots, t) \sigma_o^n + \dots$$

Si l'on se limite à l'ordre 2, la réponse à un escalier à deux marches fera elle intervenir $f_1(t)$, $f_1(t - t_o)$, $f_2(t, t)$, $f_2(t, t - t_o)$, $f_2(t - t_o, t)$ et $f_2(t - t_o, t - t_o)$.

Déterminer $f_2(\tau_1, \tau_2)$ revient à déterminer $f_2(t, t - t_o)$ pour toutes les valeurs de t_o (on montre qu'on peut prendre f_2 symétrique). Il y faut donc une infinité d'expériences. En fait on en prendra un nombre fini et l'on interpolera.

2. RAPPELS SUR L'UTILISATION DU CALCUL SYMBOLIQUE DANS LE CAS LINEAIRE ET COMPARAISON AU CAS NON LINEAIRE

Dans le cas linéaire, on applique à (3) (par exemple) la transformation de Carson définie pour une fonction $g(t)$ quelconque, par :

$$g^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \quad (7)$$

Cette transformation algébrisant la dérivation et la convolution, et conservant les constantes (ce que ne fait pas la transformation de Laplace) on obtient :

$$\varepsilon^*(p) = f^*(p) \sigma^*(p) \quad (8)$$

relation de même forme que la loi de Hooke du cas élastique :

$$\varepsilon = f \sigma \quad (9)$$

C'est cette propriété de ramener à la forme de la loi de Hooke, tout en facilitant le calcul du produit de convolution, qui donne toute sa puissance à la méthode.

Or, dans le cas non linéaire, on constate d'après (5) que le développement apparaît comme la somme de termes ayant à peu de choses près la forme de convolutions multiples.

La forme du terme d'ordre k est en effet

$$\varepsilon_k = \int_{o^-}^t \dots \int_{o^-}^{\tau_{k-1}} f_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \quad (10)$$

alors que la convolution multiple entre deux fonctions de k variables s'exprime par

$$h(x_1, \dots, x_k) =$$

$$\int_{0^-}^{x_1} \dots \int_{0^-}^{x_k} f(x_1 - \tau_1, \dots, x_k - \tau_k) g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \quad (11)$$

On pourrait prendre en effet

$$f = f_k; g(\tau_1, \dots, \tau_k) = \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_k) \quad (12)$$

Sachant, comme nous le verrons plus loin, que la transformation de Carson à plusieurs variables algébrise la convolution multiple sous la forme

$$h^*(p_1, \dots, p_k) = \frac{1}{p_1 \dots p_k} f^*(p_1, \dots, p_k) g^*(p_1, \dots, p_k) \quad (13)$$

on aurait le moyen d'algébriser (10) et donc (5).

Ceci ne peut se faire du fait que, dans (5), on a

$$x_1 = x_2 = \dots = x_k = t \quad (14)$$

ce qui rend impossible l'application de la transformation de Carson multiple sans une transformation préalable des termes du développement (5).

Nous nommerons pseudo-convolution multiple la forme (10). Remarquons que cette pseudo-convolution est une opération linéaire par rapport à f_k , ainsi que par rapport à g définie par la seconde équation (12), g étant elle-même multilinéaire par rapport aux $\dot{\sigma}(\tau_i)$.

3. DESCRIPTION DE LA TRANSFORMATION PROPOSEE

Pour le terme d'ordre n , nous venons de voir que l'on doit faire précéder l'application de la transfor-

$$\varepsilon_k(t) = \int_{0^-}^t \dots \int_{0^-}^t \underbrace{f_k(t - \tau_1, \dots, t - \tau_k)}_{n \text{ fois}} y(t - \tau_{k+1}) \dots y(t - \tau_n) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_k) \delta(\tau_{k+1}) \dots \delta(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (18)$$

L'application de la définition (16) donnera alors

$$\mathcal{D}_n \{ \varepsilon_k(t) \} = \int_{0^-}^{t_1} \dots \int_{0^-}^{t_n} f_k(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) y(t_{k+1} - \tau_{k+1}) \dots y(t_n - \tau_n) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_k) \delta(\tau_{k+1}) \dots \delta(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (19)$$

soit d'après (17), en effectuant les intégrations $\forall \tau_{k+1} \leq \tau_i \leq \tau_n$:

$$\mathcal{D}_n \{ \varepsilon_k(t) \} = \int_{0^-}^{t_1} \dots \int_{0^-}^{t_k} f_k(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k = \mathcal{D}_k \{ \varepsilon_k(t) \} \quad (20)$$

Ainsi définie par (16) on peut donc dire que \mathcal{D}_n jouit de la propriété de récurrence suivante :

$$\mathcal{D}_n \{ \varepsilon_k(t) \} = \mathcal{D}_k \{ \varepsilon_k(t) \} \quad \forall 0 < k \leq n \quad (21)$$

De plus, d'après (16), \mathcal{D}_n est évidemment linéaire :

$$\mathcal{D}_n \{ \lambda \varepsilon_n'(t) + \mu \varepsilon_n''(t) \} = \lambda \mathcal{D}_n \{ \varepsilon_n'(t) \} + \mu \mathcal{D}_n \{ \varepsilon_n''(t) \} \quad (22)$$

où λ et μ sont des constantes.

mation de Carson à n variables, que nous noterons \mathcal{E}_n , par une transformation préalable, que nous noterons \mathcal{D}_n .

La transformation \mathcal{H}_n que nous proposons d'appliquer à un développement d'ordre n sera donc le produit d'une dissymétrisation \mathcal{D}_n d'ordre n par la transformation de Carson à n variables \mathcal{E}_n :

$$\mathcal{H}_n \{ \varepsilon(t) \} = \mathcal{E}_n \mathcal{D}_n \{ \varepsilon(t) \} \quad (15)$$

3.1. Première transformation : Dissymétrisation \mathcal{D}_n

Nous définissons la dissymétrisation d'ordre n , \mathcal{D}_n , comme s'appliquant à une intégrale multiple du type (10) de la façon suivante (pour $k=n$) :

$$\mathcal{D}_n \{ \varepsilon_n(t) \} = \bar{\varepsilon}_n(t_1, \dots, t_n) = \int_{0^-}^{t_1} \dots \int_{0^-}^{t_n} f_n(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (16)$$

On a donc remplacé t par le t_i approprié, d'une part sur les bornes supérieures des intégrales, d'autre part dans les arguments de f_n . Les t_i sont une collection de n arguments arbitraires.

Pour $0 < k \leq n$, nous pourrions, en tenant compte de

$$\int_{0^-}^t y(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{0^-}^t y(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = y(t) = 1 \quad (17)$$

(où y et δ sont respectivement la fonction échelon de Heaviside, et sa dérivée la distribution de Dirac)

écrire (10) sous la forme :

Le développement (5), limité à l'ordre n , pouvant, moyennant la définition (10) de $\varepsilon_k(t)$, s'exprimer sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(t) \quad (23)$$

on pourra lui appliquer la transformation \mathcal{D}_n par

$$\bar{\varepsilon}(t_1, \dots, t_n) = \mathcal{D}_n \{ \varepsilon(t) \} = \sum_{k=1}^n \mathcal{D}_k \{ \varepsilon_k(t) \} \quad (24)$$

Réciproquement, connaissant $\bar{\varepsilon}(t_1, \dots, t_n)$, on en déduira immédiatement $\varepsilon(t)$ par

$$\varepsilon(t) = \mathcal{D}_n^{-1} \{ \bar{\varepsilon}(t_1, \dots, t_n) \} = \bar{\varepsilon}(t, \dots, t) \quad (25)$$

\mathcal{D}_n est donc immédiatement inversible.

On remarquera que $\mathcal{D}_n \{ \varepsilon(t) \}$ n'est pas définie de façon univoque, du fait du caractère d'arbitraire laissé, d'une part à l'ordre dans lequel on prend les t_i , d'autre part à la façon dont nous avons transformé, par (18) le développement (10) en une fonction faisant intervenir les arguments τ_{k+1} à τ_n . Nous verrons que ceci limite dans une certaine mesure les possibilités de la méthode.

Par contre, une fonction $\bar{\varepsilon}(t_1, \dots, t_n)$ étant connue, sa transformée par la transformation inverse \mathcal{D}_n^{-1} est unique, propriété qui confère finalement à la méthode son utilité en garantissant la valeur des résultats.

3.2. Deuxième transformation : transformation de Carson à n variables \mathcal{E}_n

Par extension de la transformation de Carson à 1 variable, on peut définir la transformée de Carson à n variables par

$$\mathcal{E}_n(f) = p_1 p_2 \dots p_n \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(p_1 \tau_1 + p_2 \tau_2 + \dots + p_n \tau_n)} f(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (26)$$

Nous désignerons l'application à f de cette transformation par la notation :

$$f(t_1, \dots, t_n) \underset{n}{\supset} f^{n*}(p_1, \dots, p_n)$$

Pour l'étude de cette transformation, on pourra se reporter à Poli et Delerue [14]. Des tables de transformées et de leurs inverses ont été établies par Ditkin et Prudnikow [33] pour les cas de $n = 1$ et 2 (calcul symbolique à 1 variable CS_1 et calcul symbolique à 2 variables CS_2).

Si l'extension du CS_1 au CS_2 présente certaines difficultés sur le plan mathématique, il n'en est plus ainsi, lorsqu'on les a résolues, pour l'extension du CS_2 au CS_n avec n entier fini quelconque (cf [14] et [15]).

Nous utiliserons dans la suite, les propriétés suivantes du CS_n scalaire :

— linéarité : $a_1 f_1 + a_2 f_2 \underset{n}{\supset} a_1 f_1^{n*} + a_2 f_2^{n*} \quad \forall a_1, a_2 = Ctes \quad (28)$

— récurrence : $f(t_1, \dots, t_{n-k}) \underset{n}{\supset} f^{(n-k)*}(p_1, \dots, p_{n-k}) \quad \forall k = 1, n \quad (29)$

— algébrisation de la convolution multiple :

$$\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} f(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) g(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k \underset{n}{\supset} \frac{1}{p_1 \dots p_k} f^{k*} \cdot g^{k*} \quad (30)$$

— algébrisation de la dérivation :

$$\dot{f}(t_i) \underset{n}{\supset} p_i f^*(p_i) \quad \forall f(0) = 0 \quad (31)$$

(ce qu'il est toujours possible de supposer dans notre cas par choix de l'origine avant toute application des sollicitations).

D'après les propriétés (29), (30) et (31), on aura pour la transformée $\bar{\varepsilon}_k^{n*}(p_1, \dots, p_k)$ par \mathcal{E}_n de la fonction de k variables $\bar{\varepsilon}_k(t_1, \dots, t_k)$ définie par (20) :

$$\bar{\varepsilon}_k^{n*}(p_1, \dots, p_k) \underset{n}{\supset} \bar{\varepsilon}_k^{n*}(p_1, \dots, p_k) = f_k^{k*}(p_1, \dots, p_k) \sigma^*(p_1) \dots \sigma^*(p_k) \quad (32)$$

où l'on a

$$f_k^{k*}(p_1, \dots, p_k) \underset{k}{\subset} f(t_1, \dots, t_k); \quad \sigma^*(p_i) \underset{1}{\subset} \sigma(t_i) \quad (33)$$

La linéarité (28) de \mathcal{E}_n permettra alors de mettre (24) sous la forme

$$\bar{\varepsilon}^{n*}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^n f_k^{k*}(p_1, \dots, p_n) \sigma^*(p_1) \dots \sigma^*(p_k) \quad (34)$$

3.3. Résultat final

L'expression (34) est la transformée par \mathcal{E}_n de $\varepsilon(t)$. C'est donc la transformée par \mathcal{H}_n de $\varepsilon(t)$, soit, en posant $\sigma^*(p_i) = \sigma_i^*$.

$$\bar{\varepsilon} = \mathcal{H}_n \{ \varepsilon(t) \} = \mathcal{E}_n \mathcal{D}_n \{ \varepsilon(t) \} = f_1^* \sigma_1^* + f_2^{2*} \sigma_1^* \sigma_2^* + \dots + f_n^{n*} \sigma_1^* \sigma_2^* \dots \sigma_n^* \quad (35)$$

Pour $n = 1$, on a

$$\mathcal{H}_1 \{ \varepsilon(t) \} = \mathcal{C}_1 \{ \varepsilon(t) \} = f_1^* \sigma_1^* \quad (36)$$

et on retrouve le traitement habituel de la viscoélasticité linéaire.

On a donc, grâce à la transformation \mathcal{H}_n , transformé le développement intégral (5) en un développement polynômial qui généralise le cas linéaire.

Pour la contrainte $\sigma(t)$, on aura de la même façon avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \mathcal{H}_n \{ \sigma(t) \} = \mathcal{C}_n \mathcal{D}_n \{ \sigma(t) \} \\ &= r_1^* \varepsilon_1^* + r_2^{2*} \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* + \dots + r_n^{n*} \varepsilon_1^* \dots \varepsilon_n^* \end{aligned} \quad (37)$$

Il faut noter cependant une différence essentielle entre le cas linéaire traité par Carson à une variable, et le cas non linéaire traité ici par \mathcal{H}_n . C'est que, dans le cas linéaire, aussi bien les termes du membre de gauche que ceux du membre de droite sont des transformées de Carson, ce qui permet toutes les manipulations algébriques courantes (par exemple la division par σ^*). Par contre, dans (35) par exemple, $\hat{\varepsilon}$ est une transformée par \mathcal{H}_n , alors que les fonctions intervenant dans le membre de droite (f_i^* , ou σ_k^* par exemple), sont, non pas des transformées par \mathcal{H}_n , mais des transformées de Carson. On n'a par exemple pas le droit de diviser deux membres par σ_i^* et d'inverser le résultat obtenu en appliquant \mathcal{H}_n^{-1} : cela n'aurait pas de sens du fait que le membre de droite ainsi manipulé ne serait plus une transformée par \mathcal{H}_n .

Pour éviter le risque d'effectuer de telles manipulations algébriques, il sera préférable d'utiliser (35) et (36) sous les formes suivantes, qui mettent complètement à l'abri d'erreurs éventuelles :

$$\varepsilon(t) = \mathcal{H}_n^{-1} \{ f_1^* \sigma_1^* + f_2^* \sigma_1^* \sigma_2^* + \dots + f_n^{n*} \sigma_1^* \dots \sigma_n^* \} \quad (38)$$

$$\sigma(t) = \mathcal{H}_n^{-1} \{ r_1^* \varepsilon_1^* + r_2^{2*} \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* + \dots + r_n^{n*} \varepsilon_1^* \dots \varepsilon_n^* \} \quad (39)$$

avec

$$\mathcal{H}_n^{-1} = \mathcal{D}_n^{-1} \mathcal{C}_n^{-1} \quad (40)$$

En effet, la transformation \mathcal{H}_n^{-1} étant définie, comme \mathcal{D}_n^{-1} et \mathcal{C}_n^{-1} , de façon univoque, $\varepsilon(t)$ est connue de façon unique lorsque l'on connaît les fonctions fluage généralisées $f_k(t_1, \dots, t_k)$ et $\sigma(t)$, connaissance elle-même nécessaire au calcul du développement (5).

Par conséquent, pour calculer $\varepsilon(t)$ connaissant les f_k et $\sigma(t)$, la démarche est la suivante :

1. Prendre la transformée de Carson simple $\sigma^*(p)$ de $\sigma(t)$.
2. Prendre les transformées de Carson à k variables ($k = 1$ à n) des fonctions de k variables $f_k(t_1, \dots, t_k)$ connues.

3. Effectuer les produits $f_k^{k*} \sigma_1^* \dots \sigma_k^*$ et leur somme.

4. Inverser par la transformation de Carson inverse \mathcal{C}_n^{-1} l'expression ainsi obtenue. On obtient une fonction des n variables t_i .

5. Faire $t_i = t \forall i = 1$ à n (application de \mathcal{D}_n^{-1}) dans l'expression ainsi obtenue ce qui fournit le résultat final cherché.

La même procédure s'applique pour le calcul de $\sigma(t)$ quand on connaît $\varepsilon(t)$ et les fonctions relaxation généralisées $r_k(t_1, \dots, t_n)$.

On notera que \mathcal{H}_n , produit de deux transformations linéaires, est linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \{ \lambda \varepsilon'(t) + \mu \varepsilon''(t) \} \\ = \lambda \mathcal{H}_n \{ \varepsilon'(t) \} + \mu \mathcal{H}_n \{ \varepsilon''(t) \} \end{aligned} \quad (41)$$

où λ et μ sont des constantes. Il faut bien sûr distinguer cette propriété de la non linéarité de la fonctionnelle par rapport à $\sigma(t)$.

Les opérations (1) à (5) remplacent celles que l'on aurait eu à effectuer dans l'utilisation directe du développement (5), à savoir :

1. dérivation de $\sigma(t)$
2. calcul des produits
3. calcul des intégrales.

Que le passage par \mathcal{H}_n soit ou non plus avantageux que le calcul direct est, comme dans le cas linéaire, une affaire de cas d'espèce. L'utilisation de \mathcal{H}_n sera grandement facilitée par les tables de correspondances fonctionnelles actuellement existantes. Nous donnons en Annexe 1 un résumé des principales correspondances. On pourra se reporter également aux ouvrages mentionnés dans la bibliographie.

3.4. Exemples

Montrons sur deux exemples la façon d'utiliser la méthode.

Nous nous contenterons de calculer le terme non linéaire d'ordre 2, l'extension aux ordres supérieurs étant immédiate.

Exemple 1

Soit une fonction relaxation d'ordre 2 de la forme :

$$r_2(t_1, t_2) = A (t_1 t_2)^{-1/2} \quad (42)$$

Elle se transforme par \mathcal{C}_2 en

$$r_2^{2*}(p_1, p_2) = A \left(-\frac{1}{2} \right)! (p_1 p_2)^{+1/2} \quad (43)$$

Imposons maintenant une première histoire de la déformation de la forme

$$\varepsilon(t) = B t^{1/2} \supset \varepsilon^*(p) = B \left(\frac{1}{2} \right)! p^{-1/2} \quad (44)$$

On aura

$$r_2^{2*} (p_1, p_2) \varepsilon^* (p_1) \varepsilon^* (p_2) = AB^2 \left(-\frac{1}{2} \right)! \left(\frac{1}{2} \right)! \left(\frac{1}{2} \right)! (p_1 p_2)^{1/2} p_1^{-1/2} p_2^{-1/2} = Cte \quad (45)$$

\mathcal{H}_n^{-1} conservant les constantes, l'inversion est immédiate et l'on a

$$\sigma_2(t) = Cte \quad (46)$$

Le calcul direct aurait donné

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad (47)$$

d'où

$$\sigma_2(t) = \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}} \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} d\tau_1 d\tau_2 \quad (48)$$

L'intégrale double se sépare en un produit de deux intégrales

$$\sigma_2(t) = \frac{1}{4} \int_{0^-}^t \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau_1(t-\tau_1)}} \times \int_{0^-}^t \frac{d\tau_2}{\sqrt{\tau_2(t-\tau_2)}} \quad (49)$$

D'après ce qu'on sait du corps à fluage parabolique linéaire, chacune de ces intégrales est bien égale à une constante (comme le montre le calcul en Carson simple) et il en est de même de leur produit.

Exemple 2

On prend la même fonction relaxation, et une histoire

$$\varepsilon(t) = Bt \Rightarrow \frac{B}{p} \quad (50)$$

On a, aux facteurs constants près :

$$r_2^{2*} \varepsilon_1^* \varepsilon_2^* = (p_1 p_2)^{1/2} p_1^{-1} p_2^{-1} = (p_1 p_2)^{-1/2} \frac{1}{2} \sqrt{t_1 t_2} = \bar{\sigma}_2(t_1, t_2) \quad (51)$$

d'où

$$\sigma_2(t) = \bar{\sigma}_2(t, t) = \sqrt{t t} = t \quad (52)$$

Si le terme du premier ordre est tel que :

$$r_1(t) = t^{-1/2} \quad (53)$$

on aura pour la contrainte totale limitée à l'ordre 2 :

$$\sigma(t) = a \sqrt{t} + bt \quad (54)$$

Le calcul direct aurait donné (aux facteurs constants près) :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = 1 &\Rightarrow \sigma_2(t) = \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{(t-\tau_1)(t-\tau_2)}} = - \int_{0^-}^t \frac{d\tau_1}{\sqrt{t-\tau_1}} \int_{0^-}^t \frac{d\tau_2}{\sqrt{t-\tau_2}} \\ &= \sqrt{t} \sqrt{t} = t \quad (55) \end{aligned}$$

ce qui est le même résultat.

Les exemples ci-dessus sont très simples, du fait que le noyau r_2 choisi est séparable en un produit de deux fonctions (cas auquel il sera toujours intéressant de tenter de se ramener).

L'intégrale double se réduit ainsi à un produit d'intégrales simples. En fait notre méthode revient à utiliser de façon automatique, pour les calculer, les mêmes correspondances qu'en viscoélasticité linéaire (la transformée \mathcal{C}_k étant le produit de k transformées par \mathcal{C}_1). Mais elle permet également de traiter des cas moins simples, tel que celui présenté ci-dessous.

Exemple 3

Supposons que la fonction relaxation d'ordre 2 soit de la forme (non séparable) :

$$r_2(t_1, t_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} - \frac{t_1}{t_1^2 + t_2^2} \right]^{1/2} + \left[\frac{1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} - \frac{t_2}{t_1^2 + t_2^2} \right]^{1/2} \quad (56)$$

forme plausible comme on le voit d'après la forme de $r(t, t)$.

On trouve dans les tables la transformée bidimensionnelle de l'un des deux termes, le deuxième étant obtenu par permutation.

L'on a :

$$r_2^{2*} (p_1, p_2) = \sqrt{\pi} \frac{p_1 \sqrt{p_2 + p_2} \sqrt{p_1}}{p_1 + p_2 + \sqrt{2 p_1 p_2}} \quad (57)$$

Appliquons la même histoire $\varepsilon = \sqrt{t}$ que dans l'exemple 1.

On obtient

$$\begin{aligned} r_2^{2*} (p_1, p_2) \varepsilon^* (p_1) \varepsilon^* (p_2) &= \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2}} \frac{p_1 \sqrt{p_2 + p_2} \sqrt{p_1}}{p_1 + p_2 + \sqrt{2 p_1 p_2}} \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{p_1 + p_2}}{p_1 + p_2 + 2 \sqrt{p_1 p_2}} \quad (58) \end{aligned}$$

La consultation de la table permet de montrer que cette expression s'inverse en

$$\bar{\sigma}_2(t_1, t_2) = 2 \times \left[\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - (\sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_1)^{1/2} - (\sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_2)^{1/2} \right] \quad (59)$$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma_2(t) &= \bar{\sigma}_2(t, t) = 4 \sqrt{t} - 2 \left[(\sqrt{2} - 1) t \right]^{1/2} \\ &= \left[4 - 2 (\sqrt{2} - 1)^{1/2} \right] \sqrt{t} \quad (60) \end{aligned}$$

résultat très particulier.

CONCLUSION

Sous peine d'alourdir exagérément cet exposé, nous ne pouvons entrer plus avant dans les détails d'application de la méthode, dont nous pensons avoir fait clairement comprendre le principe, et nous nous contenterons de renvoyer aux publications déjà faites par ailleurs à ce sujet.

On trouvera en [39] et [40] l'étude du cas tridimensionnel pour lequel nous avons été amené à étudier l'application à un tenseur de la transformation de Carson à plusieurs variables, et à en définir les principales propriétés. Cependant, celles-ci ayant été publiées sans démonstration, nous présentons ces dernières en Annexe 2 de la présente communication.

On trouvera encore en [40] l'étude détaillée de cas particuliers importants de forme des fonctions fluage ou relaxation, ou de forme des histoires de la sollicitation (en particulier cas d'une histoire sinusoidale, qui permet de montrer comment peut se généraliser la notion de module complexe).

On trouvera en [41] l'extension de la méthode au cas d'un système de variables physiques quelconques, ce qui permet en particulier son application au cas des matériaux viscoélastiques (linéaires ou non linéaires) dont les propriétés dépendent de l'environnement physique (température, hygrométrie, etc.), et même à ceux présentant du vieillissement (représentable par l'effet d'une variable chimique).

Bien entendu, si nous sommes convaincus de ce que cette méthode peut être d'une grande utilité dans les études de rhéologie non linéaire, nous ne pensons pas pour autant que les problèmes très difficiles liés à de telles études soient pour autant tous résolus, il s'en faut.

En particulier la méthode ne peut apporter plus que son point de départ, le développement de Frechet-Green-Rivlin de la fonctionnelle de comportement, développement dont les possibilités et modalités d'application pratiques ont été largement exposées et discutées ces dernières années (cf. [31], [43] par exemples) dans la littérature spécialisée. Là encore nous y renvoyons le lecteur, en indiquant simplement que des exemples d'utilisation effective de tels développements, auxquels pourrait pas conséquent s'appliquer notre méthode, peuvent se trouver en [22] à [28], [37], [38].

Signalons en outre cependant l'important problème (bien que très peu abordé jusqu'à présent dans la littérature) des relations entre fonctions fluage et relaxations généralisées, dont nous avons pu (en collaboration avec J. Servas et J. Mandel, cf [42]) donner tout récemment une solution définitive à l'établissement de laquelle la présente méthode, sans être indispensable, aura contribué de façon non négligeable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDEL : Sur les corps viscoélastiques à comportement linéaire (Comptes rendus Ac. Sc., t. 241, p. 1910-1912, 19 décembre 1955) — Application du calcul opérationnel à l'étude des corps viscoélastiques. (Cahier du Groupe français d'Etudes de Rhéologie, t. III, n° 4, 1958).
- [2] J. MANDEL : Sur les vibrations des corps viscoélastiques à comportement linéaire (C.R. Acad. Sc., t. 245, p. 2176-2178).
— Sur les vibrations des corps élastiques. (C.R. Acad. Sc., t. 245, 1957, p. 2004-2006).
— Vibrations des corps viscoélastiques linéaires (10^e Congrès intern. de Mécanique Appliquée, Stresa, 1960).
- [3] J. MANDEL : Mécanique des Milieux Continus (t. I et II, Gauthier-Villars Editeur, Paris, 1966).
- [4] C. HUET : Comportement viscoélastique d'un matériel hydrocarboné (C.R. Acad. Sc., t. 257, p. 1438-1441, 12 août 1963).
- [5] C. HUET : Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés (thèse, Paris 1963 ; Ann. Ponts et Chaussées, t. VI, 1965, p. 373-429).
— Une méthode d'étude en régime dynamique du comportement viscoélastique des matériaux enrobés (Bull. Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n° 8, juillet-août 1964, p. 4.1-4.20).
- [6] C. HUET : Détermination par une méthode de vibrations forcées des modules complexes de Young et de cisaillement des enrobés bitumineux routiers (Communication aux Journées d'étude du GAMI, Paris, mai 1964).
- [7] C. HUET, G. SAYEGH, P. SOLEMANI : Méthodes nouvelles pour l'étude du comportement mécanique des matériaux enrobés hydrocarbonés (Annales de l'ITBTP n° 219-220 mars-avril 1966 ; conférence prononcée le 12 janvier 1965 au Centre d'Etudes Supérieures de l'ITBTP).
- [8] C. HUET : Contribution à l'étude des effets différés dans les constructions composites [CIB International Symposium on Bearing Walls, WARSAW, 9-12 June 1969].
- [9] C. HUET : Représentation des modules et complaisances complexes dans les plans complexes arithmétiques et logarithmiques. [Communication au Groupe français de Rhéologie, 17 mars 1965 ; Cahiers du Groupe français de Rhéologie, tome 1, n° 5, 1967].
- [10] C. HUET : Sur la notion d'impédance réduite pour l'étude des vibrations forcées des corps viscoélastiques (C.R. Acad. Sc. t. 269, série B, 1969, p. 869-872).
— Impédances et Admittances réduites pour l'étude des vibrations forcées des corps viscoélastiques. [Journal de Mécanique, Paris, Vol. 10, n° 1, mars 1971].
- [11] A.E. GREEN et R.S. RIVLIN : The Mechanics of non linear Materials with memory. Part I. [Arch. for Rat. Mech. and Anal. 1957, vol. 1, p. 1-21].
A.E. GREEN, R.S. RIVLIN et A.J.M. SPENCER : The Mechanics of non linear Materials with memory. Part. II. [Arch. for Rat. Mech. and Anal. 1959, vol. 3, p. 82-90].
A.E. GREEN, R.S. RIVLIN : The Mechanics of non linear Materials with memory. Part. III. [Arch. Rat. Mech. Anal. tome 4, n° 26 (1960)].
- [12] A.J.M. SPENCER et R.S. RIVLIN : Further Results in the theory of Matrix polynomials. [Arch. Ratl. Mech. Anal., 1960, vol. 4, p. 214].
- [13] A.S. WINEMANN et A.C. PIPKIN : Material Symmetry Restrictions on constitutive Equations. [Arch. Ratl. Anal., 1964, vol. 17, p. 184-214].
- [14] L. POLI et P. DELERUE : Le calcul symbolique à deux variables et ses applications, [Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule 127, Gauthiers-Villars Ed. Paris 1954].

- [15] Mlle H. DELAVault : Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications.
[Mém. Sc. Math., Fasc. 148, Gauthier-Villars Ed. Paris 1961].
- [16] J. MANDEL : Sur les corps viscoélastiques linéaires dont les propriétés dépendent de l'âge,
[C.R. Acad. Sc. 1958, Paris, t. 247, p. 175-198].
- [17] C. HUET : Sur l'évolution des contraintes et déformations dans les systèmes multicouches constitués de matériaux viscoélastiques présentant du vieillissement.
[C.R. Acad. Sc. 1970, Paris, t. 270, p. 213-216].
- [18] C. HUET : Le séchage des pâtes argileuses et la Mécanique des milieux continus évolutifs.
[Communication au Groupe français des Argiles, Nov. 1970; Bull. Groupe français des Argiles, t. XXIII, p. 39-57].
- [19] V. VOLTERRA : Theory of functionals and of integral and integro differential equations.
[Madrid 1925 ; réédité par Dover Publ. Inc., N.Y., 1959].
- [20] M. FRECHET : Sur les fonctionnelles continues.
[Ann. Sc. 1910, Paris t. 27, n° 3, p. 193-216].
- [21] W. NOVACKI : Théorie du fluage.
[Eyrolles Ed. Paris 1965].
- [22] V.V. NEIS et J.L. SACKMAN : An Experimental Study of a non linear Material with Memory.
[Trans. Soc. Rheology, vol. 11, n° 3, 1967, p. 334-397].
- [23] W.N. FINDLEY et J.S.Y. LAI : A modified Superposition Principle Applied to creep of Nonlinear viscoelastic Material under abrupt changes of State of combined Stress.
[Trans. Soc. Rheology, vol. 11, n° 3, 1967 ; p. 361-380].
- [24] W.N. FINDLEY et K. ONARAN : Product form kernel functions for nonlinear viscoelasticity of PVC under constant rate Stressing.
[Trans. Soc. Rheol. Vol. 12, n° 2, 1968, p. 217-242].
- [25] J.S.Y. LAI et W.N. FINDLEY : Prediction of Uniaxial Stress Relaxation from Creep of nonlinear viscoelastic material.
[Trans. Soc. Rheol., vol. 12, n° 2, 1968, p. 243-258].
— Stress Relaxation of non linear viscoelastic material under uniaxial Strain.
[Trans. Soc. Rheol. Vol. 12, n° 2, 1968, p. 259-280].
- [26] S. ONOGI, T. MASUDA et T. MAMTUMOTO : Non linear Behavior of viscoelastic materials : I Disperse systems of polystyrene solution and Carbon black.
[Trans. Soc. Rheol. Vol. 14, n° 2, 1970, p. 275].
- [27] E.C. TING : Stress-Strain relations of thermorheologically simple materials under finite deformation.
[Trans. Soc. Rheol, vol. 14, n° 3, 1970, p. 297-306].
- [28] J.B. ADEYERI, R.Y. KRIZEK, J.D. ACHENBACH : Multiple integral description of the non linear viscoelastic behavior of a clay soil.
[Trans. Soc. Rheol., Vol. 14, n° 3, 1970, p. 375-392].
- [29] A.J.M. SPENCER et R.S. RIVLIN : Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3x3 matrices.
[Arch. Rational Mech. Anal., 2, 435 (1959)].
- [30] A.J.M. SPENCER et R.S. RIVLIN : Further results in the theory of matrix polynomials.
[Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 214 (1960)].
- [31] M.H. GRADOWCZYK : On the accuracy of the GREEN-RIVLIN representation for viscoelastic materials.
[Int. J. Solids Structures, 1969, Vol. 5, p. 873-877].
- [32] A.C. PIPKIN : Small finite deformations of viscoelastic Solids
[Proceedings of the Princetown University conference on Solid Mechanics ; Rev. Mod. Phys. 36, n° 4, 125-136 (1964)].
- [33] V.A. DITKIN et A.P. PRUDNIKOV : Formulaire pour le calcul opérationnel.
[Masson Ed. Paris, 1967].
- [34] I.I. GOLDENBLATT : Some problems of the Mechanics of deformable media.
[Noordhoff Ed. Groningen, Hollande, 1963].
- [35] H. CARTAN : Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.
[Hermann Ed. Paris, 1963].
- [36] J.E. ADKINS : Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials.
[Arch. Rational. Mech. Anal., 4, 193 (1960)].
- [37] G.J. CREUS et E.T. ONAT : Mechanics of porous adsorbent materials.
[Int. J. Engineering Sc. Vol. 10, n° 8, 1972, p. 649-658].
- [38] W. BISMUTH et Mme M. CHEZEAUX : Quelques expériences sur l'effet Weissenberg (colloque du Groupe français de Rhéologie « Progrès récents de l'étude des effets du second ordre » (19 juin 1969) ; Cahiers du Groupe français de Rhéologie ; t. 1 ; n° 6, avril 1968).
- [39] C. HUET : Sur une application du calcul symbolique à la viscoélasticité non linéaire [C.R. Acad. Sc., Paris, t. 275 (23 octobre 1972), p. 793-796].
- [40] C. HUET : Application à la viscoélasticité non linéaire du calcul symbolique à plusieurs variables [Communication au VI^e Congrès int. Rhéologie, Lyon ; avril 1972, Rheol. Acta 12, 279-288 (1973)].
- [41] C. HUET : Sur une méthode de calcul de la réponse en environnement variable de systèmes physiques ou physico-chimiques à comportement différé (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 276 - 28 mai 1973, p. 1469-1471).
- [42] J.M. SERVAS, C. HUET et J. MANDEL : Sur les relations entre fonctions fluage et relaxation en viscoélasticité non linéaire (C.R. Acad. Sc. Paris, 24 septembre 1973, p. 1003-1005).
- [43] F.J. LOCKETT : Non Linear Viscoelastic Solids (Acad. Press-London and New York - 1972).

ANNEXE 1

TABLE DES PRINCIPALES CORRESPONDANCES DES TRANSFORMEES DE CARSON A PLUSIEURS VARIABLES D'UNE FONCTION SCALAIRE

Propriété	Fonction originale		Transformée
Notation	$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$	\supset_n	$f^{n*} = \mathcal{L}_n [f(t)]$
Définition	$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$	$p_1 \dots p_n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_n t_n)} \times f(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$	
Linéarité	$a_1 f_1 + a_2 f_2$		$a_1 f_1^{n*} + a_2 f_2^{n*}$ $\forall a_1, a_2 = \text{Cte}$
Récurrence	$f(t_1, \dots, t_k)$		$f^{k*}(p_1, \dots, p_k) \forall k = 1 \text{ à } n$
Produits séparés	$f_1(t_1) f_2(t_2) \dots f_n(t_n)$		$f_1^*(p_1) f_2^*(p_2) \dots f_n^*(p_n)$
Dérivation première	$\frac{\partial}{\partial t_i} f(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n)$ avec $f(t_1, \dots, 0, \dots, t_n) = 0$ \uparrow i ^e terme		$p_i f^{n*}(p_1, \dots, p_n)$
Dérivée multiple	$\frac{\partial^m}{\partial t_i^m} f(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n)$ avec $f(t_1, \dots, 0, \dots, t_n) = 0$		$p_i^m f^{n*}(p_1, \dots, p_n)$
Dérivée mixte multiple	$\frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n}}{\partial t_1^{m_1} \dots \partial t_n^{m_n}} f(t_1, \dots, t_n)$ avec f = 0 dès que l'un ou plusieurs arguments sont nuls		$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} f^{n*}(p_1, \dots, p_n)$
Intégration multiple	$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$		$\frac{1}{p_1 \dots p_n} f^{n*}(p_1, \dots, p_n)$
Convolution multiple	$\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) g(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$		$\frac{1}{p_1 \dots p_n} f^{n*} g^{n*}$
Convolution multiple avec dérivée des produits séparés	$\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) \times \dot{g}_1(\tau_1) \dots \dot{g}_n(\tau_n) \times d\tau_1 \dots d\tau_n$		$f^{n*}(p_1 \dots p_n) g_1^*(p_1) \times g_2^*(p_2) \dots g_n^*(p_n)$
Théorème du retard	$f(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2, \dots, t_k - \tau_k)$		$e^{-(p_1 \tau_1 + \dots + p_k \tau_k)} f^{k*}(p_1, \dots, p_k)$
	$e^{-\sum a_i t_i} f(t_1, \dots, t_n)$		$\frac{p_1}{p_1 + a_1} \dots \frac{p_n}{p_n + a_n} f^{n*}(p_1, \dots, p_n)$
	$t_1 \dots t_n$		$\frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n}$
	$t_1^{m_1} \dots t_k^{m_k}$	$(m_1 ! m_2 ! \dots m_k !)$	$p_1^{-m_1} p_2^{-m_2} \dots p_k^{-m_k}$
	$e^{a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_n t_n}$		$\frac{p_1 p_2 \dots p_n}{(p_1 - a_1) \dots (p_n - a_n)}$

ANNEXE 2

**ETABLISSEMENT DES PROPRIETES
DU CS_n TENSORIEL**

Les numéros des équations sont ceux de la publication citée en [40] de la bibliographie.

1ère propriété (éq. 17). Le tenseur transformé a pour composantes les transformées des composantes

$$A(t_1, \dots, t_k) \supset_n A^{n*}(p_1, \dots, p_k) \quad (17)$$

i.e.
$$a_{ij}^{n*}(p_1, \dots, p_k) = p_1 \dots p_k \times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(p_1 \tau_1 + \dots + p_k t_k)} a_{ij}(t_1, \dots, t_k) \subset_n a_{ij}(t_1, \dots, t_k)$$

(C'est pratiquement une définition; la propriété consiste dans le fait qu'on en obtient bien un tenseur). C.Q.F.D.

2ème propriété (éq. 18) : Récurrence

Si A dépend de k variables t_i, la transformée à n variables de A (n > k) est égale à A^{k*} :

$$A^{n*}(p_1, \dots, p_n) = A^{k*}(p_1, \dots, p_k) \forall A = A(t_1, \dots, t_k); k \leq n$$

$$a_{ij}(t_1, \dots, t_k) \supset_n a_{ij}^{k*}(p_1, \dots, p_k) \Rightarrow a_{ij}^{n*} = a_{ij}^{k*} \quad (18)$$

C.Q.F.D.

3ème propriété (éq. 19) : conservation des produits séparés

$$C(t_1, t_2) = A(t_1) \cdot B(t_2) \supset_n A^*(p_1) B^*(p_2) = C^{**}(p_1, p_2) \quad (19)$$

$$c_{ij}(t_1, t_2) = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik}(t_1) b_{kj}(t_2)$$

$$\text{or } a_{ik}(t_1) b_{kj}(t_2) \supset_n a_{ik}^* a_{kj}^*(p_1) b_{kj}^*(p_2)$$

D'autre part $(\sum X)^* \supset \sum X^*$

$$\Rightarrow c_{ij} \supset_n \sum_k a_{ik}^*(p_1) b_{kj}^*(p_2) = c_{ij}^{**}(p_1, p_2)$$

C.Q.F.D.

4ème propriété (éq. 20) : Algébrisation des produits séparés des dérivées

$$\dot{A}(t_i) \dot{A}(t_j) \supset_n p_i p_j A^*(p_i) A^*(p_j) \text{ si } A_k(o) = 0 \forall k \quad (20)$$

$$\text{en effet } B = \dot{A}_i \dot{A}_j \Rightarrow b_{mn} = \sum_k \dot{a}_{mk}(t_i) \dot{a}_{kn}(t_j)$$

$$\supset_n \sum_k p_i a_{mk}^*(p_i) p_j a_{kn}^*(p_j) = p_i p_j \sum_k \dot{a}_{mk}^* \dot{a}_{kn}^* \quad \text{C.Q.F.D.}$$

5ème propriété (éq. 21) : Conservation de la trace

$$tr [A(t_i)] \supset_n tr [A^*(p_i)] \quad (21)$$

$$\text{on a } tr A(t_i) = \delta_{kj} a_{jk}(t_i) \supset_n \delta_{kj} a_{jk}^*(p_i) \quad (C.E.)^{(1)} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

6ème propriété (éq. 22) : conservation de la trace des produits séparés

$$tr [A(t_i) \dots A(t_k)] \supset_n tr [A^*(p_i) \dots A^*(p_k)]$$

$$C.E. \Rightarrow tr [A(t_i) \dots A(t_k)] = a_{\alpha\beta}(t_i) a_{\beta\gamma}(t_i + 1) \dots a_{z\alpha}(t_k) \supset_n$$

$$a_{\alpha\beta}^*(p_i) a_{\beta\gamma}^*(p_i + 1) \dots a_{z\alpha}^*(p_k) = tr [A^*(p_i) \dots A^*(p_k)] \quad (22)$$

C.Q.F.D.

7ème propriété (éq. 23) : Algébrisation de la trace des produits séparés des dérivées

$$tr [\dot{A}_i \dots \dot{A}_k] \supset_n p_i \dots p_k tr [A_i^* \dots A_k^*] \quad (23)$$

$$\dot{A}_j = B_j \quad j = i \text{ à } k \Rightarrow B_j^* = p_j A_j^* \quad (A(o) = 0)$$

$$tr [B_i \dots B_k] \supset_n tr [B_i^* \dots B_k^*] = tr [p_i \dots p_k A_i^* \dots A_k^*]$$

$$= p_i \dots p_k a_{\alpha\beta}^*(p_i) \dots a_{z\alpha}^*(p_k) \quad (C.E.)$$

$$= p_i \dots p_k tr [A_i^* \dots A_k^*] \quad \text{C.Q.F.D.}$$

8ème propriété (éq. 24) : Algébrisation de la convolution tensorielle multiple

$$\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} A(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) B(\tau_1, \dots, \tau_k) \times$$

$$d\tau_1 \dots d\tau_k \supset_n \frac{1}{p_1 \dots p_k} A^{k*} B^{k*} \quad (24)$$

$$c_{ij}(t_1, \dots, t_k) = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} \gamma_{ij}(t_1, \dots, t_k) d\tau_1 \dots d\tau_k$$

$$\text{avec } \gamma_{ij} = \sum_k a_{ik}(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) b_{kj}(\tau_1, \dots, \tau_k)$$

$$\Rightarrow C_{ij} = \sum_k \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} a_{ik}(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) b_{kj}(\tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k$$

$$\supset_n \sum_k \frac{1}{p_1 \dots p_k} a_{ik}^{k*} b_{kj}^{k*} = \frac{1}{p_1 \dots p_k} \sum_k a_{ik}^{k*} b_{kj}^{k*} = \frac{1}{p_1 \dots p_k} C_{ij}^{k*}$$

$$\text{avec } C^{k*} = A^{k*} B^{k*} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Les 8 propriétés qui permettent d'écrire l'équation (25) de la publication [40] sont donc démontrées.

(1) Convention d'Einstein.

La superplasticité*

par B. BAUDELET (1)

RESUME

On présente les propriétés mécaniques caractéristiques des matériaux superplastiques et quelques applications industrielles de ces matériaux.

SUMMARY

The important mechanical properties of superplastic materials and some of their industrial applications are presented.

Depuis quelques années l'intérêt a été porté sur des matériaux métalliques qui présentent un comportement superplastique. Dans leur domaine de superplasticité, ces matériaux peuvent subir des taux de déformation importants pouvant atteindre 2 000 % à la rupture lorsqu'ils sont soumis à des contraintes relativement faibles (figure 1).

Des articles généraux ont été consacrés à ces matériaux. Afin de ne pas alourdir ce texte, d'une part nous ne viserons pas à être exhaustif et d'autre part nous ne citerons pas les références dans le

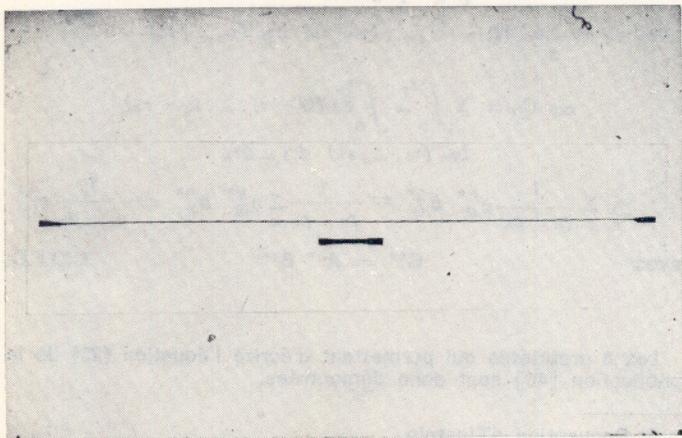


Fig. 1. — Eprouvettes d'alliage eutectique PbSn non déformé et allongé de 1 500 % (B. Baudalet)

* Conférence au Groupe Français de Rhéologie le 22 mars 1973.

(1) Laboratoire de Physique et de Technologie des matériaux. Université de Metz, 5700 Metz.

Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 155.

détail, le lecteur intéressé trouvera à la fin les références des articles généraux les plus récents auxquels il pourra se reporter [1].

Ces matériaux sont connus depuis longtemps. Dès 1920, Rosenhain avait observé qu'après laminage un alliage eutectique ternaire de zinc, cuivre et aluminium avait un comportement différent des autres matériaux cristallisés et présentait une ductilité élevée semblable aux verres dans leur domaine de fluidité. En 1924, Sauveur remarqua que des barres de fer soumises à un couple de torsion et placées dans un gradient thermique se tordaient plus aisément dans la zone où la température était égale à la température de transition du fer. Deux types de matériaux à comportement superplastique avaient été découverts : les matériaux superplastiques à grains fins de l'ordre du micron et les matériaux présentant un accroissement de ductilité au cours d'une transformation de phase. Depuis 1962, principalement aux Etats-Unis, de nombreux laboratoires universitaires et industriels développent des travaux sur la superplasticité.

Nous limiterons notre étude aux matériaux superplastiques à grains fins. Dans ce cadre, nous présenterons les résultats expérimentaux les plus caractéristiques, et indiquerons enfin quelques applications industrielles de ces matériaux.

1. ETUDES EXPERIMENTALES

Au cours d'essais de déformation uniaxiale, on peut supposer qu'à chaque stade la contrainte σ dépend de la déformation vraie ε , de la vitesse de déformation vraie $\dot{\varepsilon}$, de la température T et de la structure de l'alliage. Si la forme des grains (ou des phases) n'évolue pas au cours de la déformation dans le domaine superplastique, on peut caractériser l'influence de la structure par la taille moyenne \bar{L} , des grains (ou phases) :

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, T, \bar{L}) \quad (1)$$

Sous forme différentielle cette relation peut s'écrire :

$$d \ln \sigma = \gamma d \ln \varepsilon + m d \ln \dot{\varepsilon} + \frac{m}{k} Q d \left(\frac{1}{T} \right) + m a d \ln \bar{L} \quad (2)$$

Les coefficients γ , m , Q et a sont d'une manière générale fonctions des paramètres ε , $\dot{\varepsilon}$, T et \bar{L} . Le coefficient γ caractérise l'écroutissage du matériau; le coefficient m mesure la sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$, il est compris entre 0 et 1 pour tous les matériaux. Q est l'énergie d'activation apparente. Le coefficient a caractérise l'influence de la taille des grains.

Plusieurs types d'essais mécaniques ont été utilisés pour l'étude des coefficients γ , m , Q et a :

- des essais de traction à vitesse d'extension constante
- des essais de traction avec sauts de vitesse pour l'étude du coefficient m
- des essais de traction à vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ constante
- des essais de fluage à contrainte σ constante.

Les deux derniers types d'essais ont été très peu développés alors que ce sont les seuls qui maintiennent constant un paramètre apparaissant directement dans les relations 1 et 2.

1.1. Coefficient d'écroutissage

Dans le domaine où le matériau est superplastique, le coefficient d'écroutissage γ peut être considéré comme nul. Ainsi, un échantillon de plomb à 5 % de cadmium, déformé dans le domaine superplastique présente la même limite élastique qu'un échantillon recuit et une limite élastique supérieure après avoir été déformé dans le domaine non superplastique.

1.2. Courbe contrainte

vitesse de déformation vraie et coefficient sensible à la vitesse de déformation

La courbe de variation de la contrainte en fonction de la vitesse de déformation vraie, tous les autres paramètres étant fixes, présente généralement trois domaines pour ce type de matériau (figure 2 a). Le coefficient m sensible à la vitesse de déformation peut être déduit de la courbe précédente. Le coefficient m peut également être déterminé par une méthode de sauts de vitesse au cours d'essais de traction :

$$m \simeq \frac{\ln \sigma_2 / \sigma_1}{\ln \dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_1} = \frac{\ln P_2 / P_1}{\ln V_2 / V_1}$$

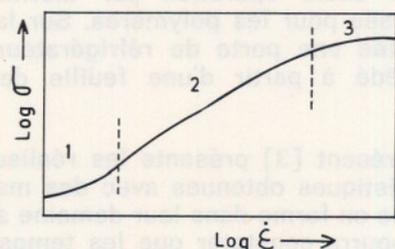


Fig. 2 a. — Courbe théorique de variation de la contrainte en fonction de la vitesse de déformation vraie

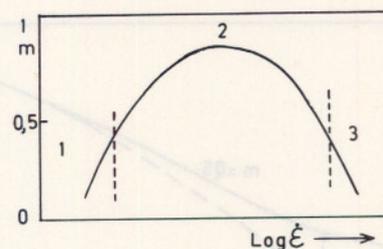


Fig. 2 b. — Courbe théorique de variation du coefficient m sensible à la vitesse de déformation en fonction de la vitesse de déformation vraie

V_1 et V_2 sont les vitesses d'extension avant et après, P_1 et P_2 les forces appliquées à l'éprouvette juste avant et après le saut de vitesse. De faibles divergences existent entre les valeurs du coefficient m déterminées par ces deux méthodes. Elles pourraient être dues à des différences dans la structure du matériau ou (et) dans la forme des éprouvettes au cours de la déformation.

La variation de m en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ est représentée sur la figure 2 b. Dans le domaine 2, le coefficient m présente des valeurs élevées comprises entre 0,3 et une valeur maximum pouvant atteindre 1 avec certains matériaux superplastiques. Il a des valeurs plus faibles dans les domaines 1 et 3. Pour les matériaux classiques, le coefficient m est voisin de 0,1 quelle que soit la vitesse de déformation.

Les allongements importants à la rupture correspondent aux valeurs élevées du coefficient m obtenues dans le domaine 2. En effet, lorsqu'au cours d'un essai de traction, une striction apparaît dans une éprouvette réalisée en matériau classique (ou avec un matériau à comportement superplastique déformé dans les domaines 1 ou 3), la vitesse de déformation augmente localement et cette augmentation ne nécessite pas un accroissement important de la contrainte puisque m a une valeur faible (relation 2), la striction peut se développer et la rupture apparaît. En revanche, une valeur élevée du coefficient m empêche la striction de s'aggraver, on assiste alors à la formation de série de strictions diffuses, la déformation est plus uniforme et l'allongement à la rupture plus grand. Le coefficient m permet de caractériser un comportement superplastique et on admet qu'un matériau est déformé superplastiquement lorsque m est compris entre 0,3 et 1. Nous remarquerons que les polymères à leur température de mise en forme ont un coefficient sensible à vitesse de déformation vraie également compris entre 0,3 et 1 et les verres un coefficient m voisin de l'unité.

Avant de poursuivre, il faut constater que s'il existe une contrainte critique σ_0 en dessous de laquelle les échantillons ne se déforment pas, la présentation en trois domaines n'est pas valable. La contrainte effective est égale à $(\sigma - \sigma_0)$ et aux faibles contraintes les valeurs de m sont plus élevées que prévues. Un choix judicieux de σ_0 peut donner à m des valeurs égales à 1 jusqu'au domaine que nous avons appelé 3 (figure 3).

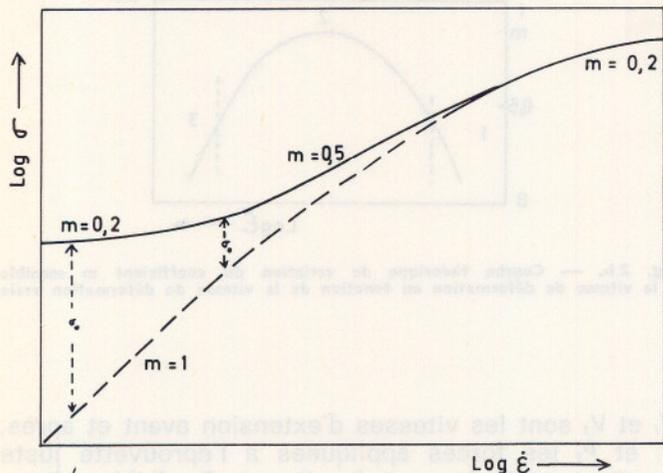


Fig. 3. — Courbe théorique de variation de la contrainte en fonction de la vitesse de déformation vraie (trait plein) et courbe théorique précédente en tenant compte d'une contrainte critique σ_0 pour la déformation (trait en tiret).

Des articles très récents semblent accréditer l'existence d'une contrainte σ_0 .

2. APPLICATIONS INDUSTRIELLES

La mise en forme des matériaux métalliques est réalisée pour 20 % par coulée directe et pour 80 % par des opérations telles que le laminage, le forgeage, l'extrusion, l'emboutissage... Ces opérations sont très onéreuses, car elles nécessitent des installations importantes pour atteindre les contraintes élevées requises pour déformer les métaux, l'usure des outils est grande, les taux d'écaillage des métaux rendant nécessaires des traitements de revenus pour restaurer les propriétés mécaniques, enfin leur faible déformation avant rupture ne permet pas de réaliser des formes complexes sans assemblage ou usinage. Au cours de cet usinage, du matériau est perdu, augmentant encore le prix de revient.

L'utilisation des polymères a permis de diminuer ce prix en réduisant l'importance des installations et l'usure des outils, en augmentant la complexité des

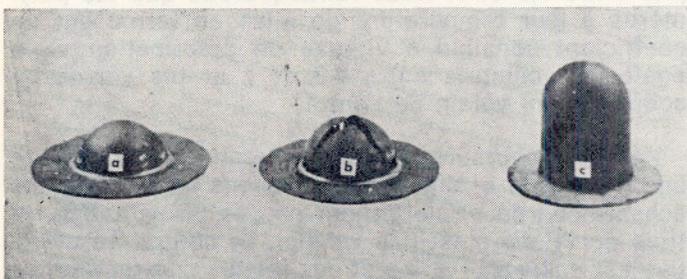


Fig. 4. — Coupelles obtenues par emboutissage profond de l'alliage Ti6Al4V; les coupelles a et b ont été formées à 650° C et la coupelle c à 950° C, la température optimale où le matériau est superplastique [2].

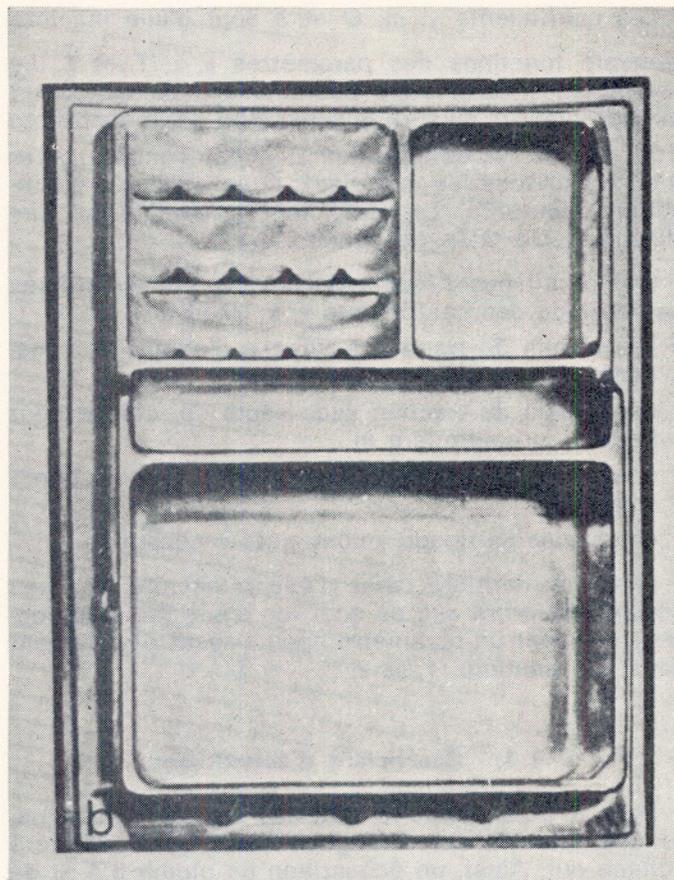


Fig. 5. — Porte intérieure de réfrigérateur mise en forme par thermoformage d'une feuille de prestal (Zn22Al) à 260° C — temps de mise en forme : quelques minutes.

pièces réalisées en une seule opération. Cependant le domaine d'utilisation des polymères est limité par leurs propriétés mécaniques inférieures à celles des métaux et par leur faible tenue en température.

La ductilité élevée des matériaux superplastiques a permis non seulement de faciliter des opérations classiques de mise en forme, mais encore de développer des procédés inhabituels pour les matériaux métalliques. Des coupelles de feuille de l'alliage Ti6Al4V peuvent être embouties plus profondément si elles sont déformées dans le domaine de température où ce matériau présente un comportement superplastique (figure 4). Des pièces complexes peuvent être réalisées en une seule opération par thermoformage, méthode utilisée pour les polymères. Sur la figure 5 est représentée une porte de réfrigérateur obtenue par ce procédé à partir d'une feuille de l'alliage Zn22Al.

Un article récent [3] présente les réalisations les plus caractéristiques obtenues avec des matériaux à grains fins mis en forme dans leur domaine superplastique et on pourra constater que les temps de mise en forme sont courts et compris entre quelques secondes et quelques minutes suivant le cas.

En dehors de leur domaine de superplasticité certains matériaux à grains fins ont des propriétés équivalentes à celles des alliages industriels. Malheureusement, ces alliages ont encore des prix de revient trop élevés car ils ne sont pas produits industriellement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Articles généraux sur la superplasticité

- La superplasticité et la mise en forme des matériaux. B. BAUDELET, (1971), Mémoires scientifiques de la Revue de Métallurgie, 68, 479.
- Superplasticité des métaux et alliages. G. CIZERON, (1968), Métaux-Corrosion-Industrie, 512, 141.

- Superplasticity : A Review. G.J. DAVIES, J.W. EDINGTON, C.P. CUTLER, K.A. PADMANABHAN, (1970), Journal of Materials Science, 5, 1091.
- Superplasticity. R.H. JOHNSON, (1970), Review 146 — Metallurgical Reviews, 115.
- Superplasticity. V. WEISS, R. KOT, Metal Deformation Processing — volume III — Defense Metals Information Center Battelle Memorial Institute, Columbus, Ohio 43201.
- Superplasticity. H.M. WELD, Information Circular, Department of Energy, Mines and Resources, Mines Branch, Ottawa, Canada, (1969).
- [2] Lockheed. Georgia Manufacturing — Research Investigation Report n° 1349.00.
- [3] The promise of superplastic alloys. A symposium presented by International Business Machines Corporation. For the design engineering conference. American Society of Mechanical Engineers, April 21, 1971.

Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux*

Deuxième partie :

Conséquences pratiques et expérimentation**

par C. HUET

Dr. Ing., Délégué scientifique
du Centre technique des Tuiles & Briques

RESUME

On poursuit la présentation d'une méthode permettant, par un essai d'exécution simple et rapide, la mesure de l'énergie spécifique de rupture des matériaux fragiles. Les conséquences des analyses théoriques effectuées dans une première partie (présentée dans le précédent numéro) sont tirées en ce qui concerne les influences de diverses dispositions pratiques telles que les dimensions de l'éprouvette, la raideur propre à l'appareillage, le caractère non idéal de l'entaille initiale. Un modèle d'éprouvette ayant permis de surmonter les difficultés correspondantes est présenté, ainsi que l'appareillage de mesure. On présente également les résultats obtenus sur diverses céramiques (terres cuites, céramiques réfractaires), des roches naturelles et le verre. La comparaison avec les résultats de la littérature montre une bonne concordance avec les résultats trouvés par d'autres méthodes.

SUMMARY

Second part of a paper presenting a method by which fracture energy γ_f of brittle materials can be determined through a fast and simple test. Inferences drawn from theoretical analysis made in first part of

the paper allow influence of various practical arrangements, such as specimen dimensions, apparatus stiffness, non ideal character of initial crack tip to be determined. Specimen shape overcoming involved difficulties, and measurement devices are described. Are also given results obtained on various ceramics (heavy burned clays, refractories), natural rocks, and glass. Comparison with references shows good agreement with results obtained by other methods.

4. CONSEQUENCES DE LA THEORIE SUR LA CONCEPTION DE L'ESSAI

Les analyses faites dans la première partie [38] ont montré que, parmi les cas simples de sollicitation, seuls certains essais effectués à déformation imposée permettent d'obtenir la progression contrôlée de la fissure jusqu'à rupture complète. Parmi ceux-ci, seule la flexion d'une éprouvette suffisamment entaillée conduit à un essai n'exigeant pas d'ancrage spécial de l'éprouvette. Nous étudions maintenant l'influence de divers facteurs résultant des conditions pratiques de l'essai, à savoir les dimensions de l'éprouvette, la raideur propre à l'appareillage, et enfin le caractère non idéal de l'entaille initiale. Nous allons voir que les résultats obtenus au chapitre 3 permettent une discussion aisée de ces influences, et rendent bien compte des difficultés expérimentales rencontrées au cours de la mise au point de l'essai. Les notations sont celles de la première partie.

* Conférence prononcée à la réunion du 13 mai 1970 du Groupe français de Rhéologie.

** La première partie: bases théoriques, a paru dans le numéro 3 des Cahiers.

4.1. Influence des dimensions de l'éprouvette sur le caractère contrôlé de la rupture

A déflexion imposée, nous avons vu que l'on aura rupture contrôlée

$$\forall K''_A > 0, \text{ soit } \forall \omega''_A > 0$$

où $k(A)$ est la raideur de l'éprouvette entaillée.

Compte tenu de (56), on a

$$(81) \quad \omega'' = \frac{2\omega'^2 - \omega\omega''}{\omega^3}$$

où ω est la souplesse.

Tenant compte de l'expression (66) de ω en fonction de la souplesse réduite $u(\eta)$ (cf. Première partie) il y aura donc rupture contrôlée pour une longueur initiale d'entaille telle que :

$$(82) \quad 2u'^2 - uu'' \geq 0$$

On a, d'après (68) :

$$(83) \quad u' = \frac{h}{2l} Z(\eta), \quad u'' = \frac{h}{2l} Z'(\eta) > 0$$

et (82) s'écrit finalement :

$$z(\eta) = \frac{Z^2(\eta)}{Z'(\eta)} - \frac{1}{2} \int_0^\eta Z(\eta) d\eta > \frac{l}{h} > 0 \Rightarrow \text{rupture contrôlée}$$

(84)

où $Z(\eta)$ est ici la courbe donnée par Gross et Srawley [20].

On voit donc que la rupture contrôlée sera d'autant plus facilement obtenue (*i.e.* pour une longueur d'entaille d'autant plus faible) que le rapport l/h sera plus faible. On constate par contre que l'épaisseur b est sans influence.

Au début de nos expériences nous avons ainsi été conduits à travailler sur des éprouvettes de hauteur grande par rapport à la portée (contrairement à ce

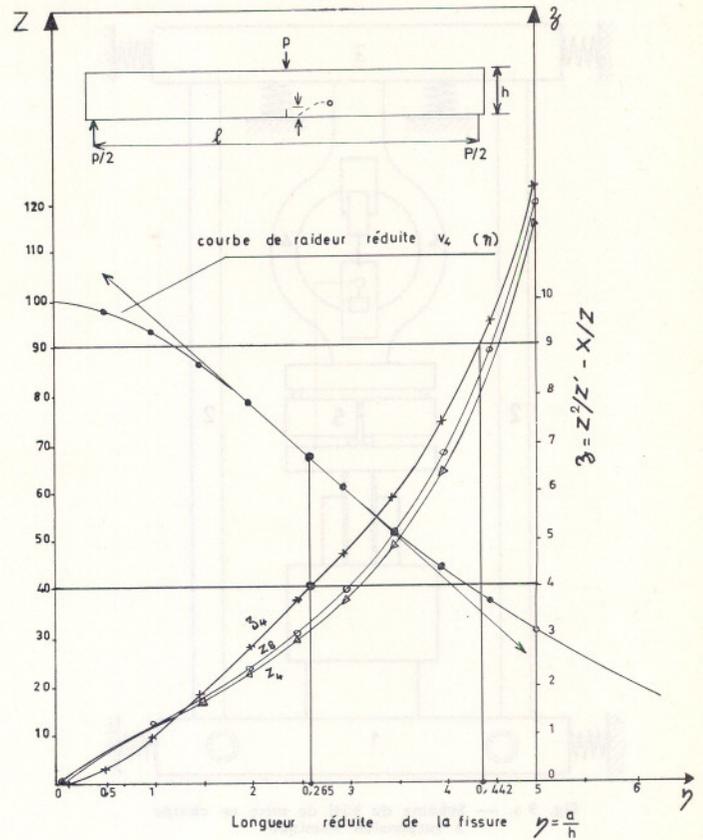


Fig. 8. — Détermination du point d'inflexion de la courbe de raideur $v(\eta)$ à partir de la comparaison à l/h de la fonction $z(\eta)$ de l'équation (72), pour $Z(\eta)$ donné par les résultats de Gross et Srawley [20].

4.2. Influence de la raideur propre à l'appareillage

Comme nous le verrons au chapitre 5, l'appareil permettant d'imposer les sollicitations est constitué par un cadre, la déflexion de l'éprouvette étant imposée par une avance mécanique (figure 9 a ci-après).

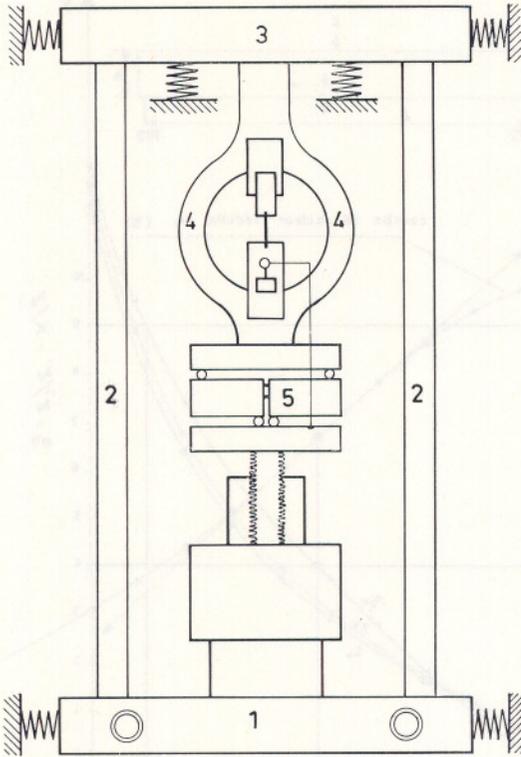


Fig. 9 a. — Schéma du bâti de mise en charge à suspension sismique

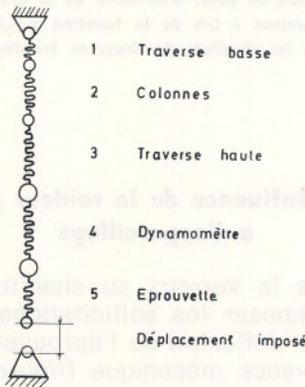


Fig. 9 b. — Modèle mécanique du système Epreuve-Bâti de charge

D'où, pour le coefficient géométrique de raideur :

$$w_t = \frac{w(o)}{\frac{c_m}{c(o)} + u(\eta)} \equiv \frac{w(o)}{\frac{k(o)}{k_m} + u(\eta)} \equiv \frac{w(o)}{w(\eta)}$$

La condition de contrôle de la rupture s'écrit donc :

$$(89) \quad 2w'^2 - ww'' \geq 0$$

avec

$$(90) \quad w = \frac{k(o)}{k_m} + u(\eta) \equiv 1 + \frac{k(o)}{k_m} + \frac{h}{2l} \int_0^\eta Z(\eta) d\eta$$

et

$$(91) \quad w' = \frac{h}{2l} Z(\eta) \equiv u'(\eta) ; w'' = \frac{h}{2l} Z'(\eta) = u''(\eta)$$

L'équation (89) s'écrit alors :

$$(92) \quad z(\eta) = \frac{z^2(\eta)}{z'(\eta)} - \frac{1}{2} \int_0^\eta Z(\eta) d\eta \geq \frac{l}{h} \left[1 + \frac{k(o)}{k_m} \right] > 0$$

où $k(o)$ est la raideur de l'éprouvette non entaillée :

$$(93) \quad k(o) = E \frac{4bh^3}{l^3}$$

Posant

$$(94) \quad \mu = \frac{h}{l} > 0$$

et

$$(95) \quad y = \frac{1}{\mu} + 4 \frac{Eb}{k_m} \mu^2$$

on voit que l'équation (92) sera d'autant plus facile à vérifier que y sera plus faible *. On voit immédiatement que ceci sera d'autant plus le cas que la raideur k_m de l'appareil sera plus forte, et que le module d'Young E de l'éprouvette et son épaisseur b (qui a cette fois une influence) seront plus faibles. On n'est pas maître du module de l'éprouvette, mais on l'est de son épaisseur dans une certaine mesure.

L'influence du rapport μ de la hauteur h à la portée l est plus complexe, et on constate qu'il existe une valeur μ_0 de μ pour laquelle y passe par un minimum (figure 10).

On a en effet

$$(96) \quad y_\mu' = -\frac{1}{\mu^2} + 8 \frac{Eb}{k_m} \mu$$

qui s'annule pour

$$(97) \quad \mu_0 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{k_m}{Eb}}$$

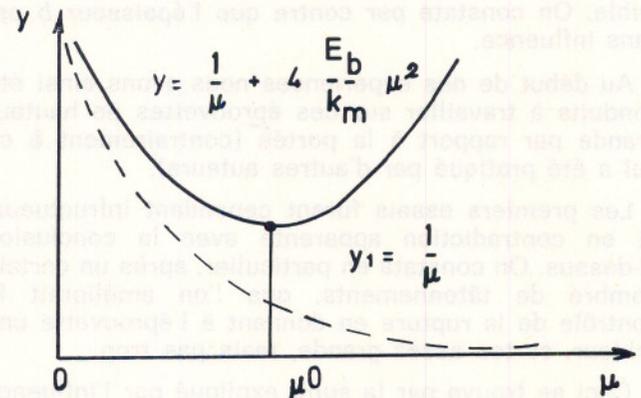


Fig. 10

* La condition ainsi obtenue diffère quelque peu de la condition obtenue par Nakayama [11] en minimisant l'énergie totale du système machine plus éprouvette non entaillée, et qui s'écrit : (en rétablissant le coefficient numérique erroné de Nakayama) :

$$W^t = W_1^t + W_2^t = \frac{Rt^2}{18E} bhl \left[1 + \frac{4Eb}{k_m} \frac{h^2}{l^3} \right]$$

Cette expression a bien la forme (95) par rapport à $\frac{h}{l}$, mais non par rapport à b et h , même si on la rapporte à la surface à rompre en divisant par bh . Ceci montre les limites du raisonnement basé sur la minimisation de l'énergie emmagasinée, discuté au chapitre 3 (cf. Première partie).

On a de plus

$$(98) \quad y'' = \frac{2}{\mu^2} + 8 \frac{EB}{k_m} > 0 \quad \forall \mu > 0$$

La valeur du minimum μ_0 dépend de k_m , de E , et de b , augmente avec k_m , et diminue lorsque E et b augmentent. La valeur optimale de y est alors, d'après (95) et (97) :

$$(99) \quad y_0 = \frac{3}{2 \mu_0} = 3 \sqrt[3]{\frac{Eb}{k_m}}$$

qui diminue quand k_m croît et quand E et b décroissent.

On a donc retrouvé, en la précisant, notre constatation expérimentale de l'existence d'un optimum du rapport $\frac{h}{l}$ de l'éprouvette pour une raideur donnée de l'appareillage. On a de plus montré que le contrôle de la rupture de l'éprouvette est d'autant meilleur que son épaisseur est plus faible, et que la raideur de l'appareillage est plus grande. Enfin on constate que, $z(\eta)$ étant ici fonction croissante de η , la longueur minimale de l'entaille initiale est supérieure à celle correspondant à une machine de raideur infinie, et ceci même pour l'optimum μ_0 , et d'autant plus qu'on s'éloigne de ce dernier.

Il reste encore à examiner un facteur ayant une influence sur le contrôle de la rupture et qui est constitué par le caractère non idéal de l'entaille initiale que l'on peut usiner dans l'éprouvette.

4.3. Influence du caractère non idéal de l'entaille initiale

Si, par usinage, on pratique une entaille, même de longueur suffisante, dans une éprouvette céramique, on constate que, généralement (et au moins pour les céramiques suffisamment résistantes), on ne peut obtenir la rupture contrôlée, même si les conditions précédentes sont remplies. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'une entaille usinée ne peut jamais avoir le caractère d'une fissure idéale, infiniment fine à son extrémité, alors que les fissures réelles résultant d'une propagation peuvent être considérées comme telles (ceci a d'ailleurs amené certains auteurs à générer des fissures initiales, soit par fatigue, soit par choc thermique local, avec l'inconvénient pour notre propos que l'on ne connaît pas alors la longueur de cette fissure initiale).

En effet, considérons une éprouvette dans laquelle nous avons pratiqué une entaille de longueur a , mais de rayon de courbure fini au fond (figure 11 a). La concentration de contrainte au fond deviendra, non plus infinie comme dans le cas de la fissure idéale, mais finie, et d'autant plus faible que le rayon de courbure ρ sera plus grand (en $\rho^{-1/2}$ pour l'éprouvette de flexion entaillée). Il en résulte que le déclenchement de la progression (contrôlée ou non) de la fissure aura lieu pour une valeur S_2 de la sollicitation qui pourra être notablement supérieure à celle de la

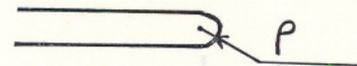


Fig. 11 a. — Entaille non idéale

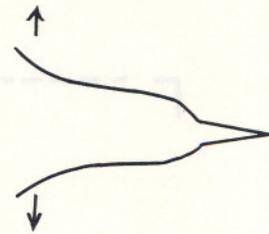


Fig. 11 b. — Entaille non idéale après progression de la fissure

sollicitation critique correspondant à la satisfaction du critère de Griffith pour la longueur a_0 donnée de l'entaille :

$$(100) \quad G(S_2, a_0) > G(S_c, a_0) = 2 \gamma_F$$

On se trouve donc, en pratique, dans le cas où le critère de Griffith n'est plus une condition suffisante de progression, mais seulement une condition nécessaire.

Après déclenchement de la progression, on aura une fissure naturelle (figure 11 b), et non plus une entaille usinée, et l'on pourra donc considérer que la poursuite de la progression satisfait au critère de Griffith. Posant

$$(101) \quad G_2(a) = G(S_2, a) \mid S_2 = C^{te},$$

le caractère contrôlé de la progression sera alors régi par l'allure de la courbe $G_2(a)$, et la comparaison de cette quantité à la quantité $2 \gamma_F$ (figure 12).

La courbe $G_2(a)$ se déduit d'ailleurs de la courbe $G(a)$ dans une affinité orthogonale parallèle à l'axe des G et de rapport S_2^2/S_c^2 , et possède donc les mêmes caractéristiques intrinsèques (notamment abscisse du maximum). Considérons une longueur a_0 d'entaille initiale supérieure à l'abscisse des maxima des fonctions $G(S, a)$. La valeur de G_2 au moment où la rupture se déclenche sera

$$(102) \quad G_2 = G(S_2, a_0) = \frac{S_2^2}{S_c^2} G(S_c, a_0) > G(S_c, a_0) = 2 \gamma_F$$

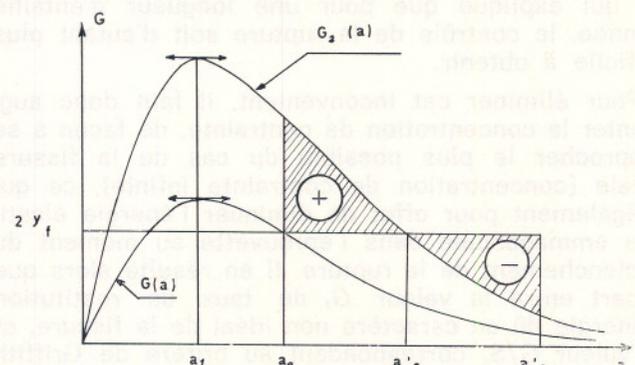


Fig. 12. — Variations du taux de restitution d'énergie (entailles idéale et non idéale)

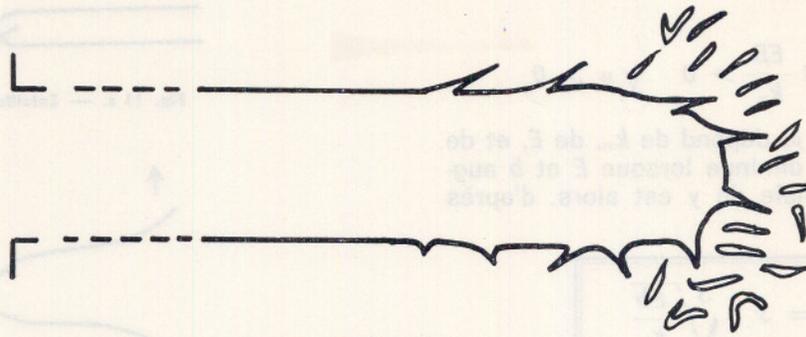


fig. 13 a

On aura bien alors

$$(103) \quad G'_a < 0$$

mais, après un accroissement infinitésimal de la longueur de fissure, l'inégalité

$$(104) \quad G > 2 \gamma_F$$

sera encore satisfaite et la rupture se poursuivra, la propagation de la rupture se faisant de façon spontanée à sollicitation constante jusqu'en un point a'_2 , tel que

$$(105) \quad G_2(a'_2) = 2 \gamma_F$$

et même au-delà de ce point à cause des effets dynamiques (la longueur maximale possible de propagation étant a'_3 , correspondant à l'égalité des aires hachurées, mais non forcément atteinte du fait des autres causes de dissipation — par exemple acoustiques — existant en propagation instable).

Il n'y aura pas rupture contrôlée, mais, au mieux, rupture semi-stable, tout au moins tant que a_0 ne sera pas supérieur à a'_3 .

Par conséquent, dans le cas d'une entaille non idéale, la condition de rupture contrôlée n'est plus

$$(106) \quad a_0 > a_1$$

mais

$$(107) \quad a_0 > a'_3$$

On voit que la longueur minimale de l'entaille initiale pouvant conduire à la rupture contrôlée est alors fonction de la valeur de la sollicitation déclenchant la rupture, ainsi que de la valeur de l'énergie spécifique γ_F elle-même. A sollicitation constante, elle est d'autant plus grande que γ_F est plus faible, ce qui explique que pour une longueur d'entaille donnée, le contrôle de la rupture soit d'autant plus difficile à obtenir.

Pour éliminer cet inconvénient, il faut donc augmenter la concentration de contrainte, de façon à se rapprocher le plus possible du cas de la fissure idéale (concentration de contrainte infinie), ce qui a également pour effet de diminuer l'énergie élastique emmagasinée dans l'éprouvette au moment du déclenchement de la rupture. Il en résulte alors que l'écart entre la valeur G_2 du taux de restitution d'énergie dû au caractère non idéal de la fissure, et la valeur G/S_c correspondant au critère de Griffith est plus faible en valeur absolue dans le cas de la double entaille, si bien qu'une rupture contrôlée, ou

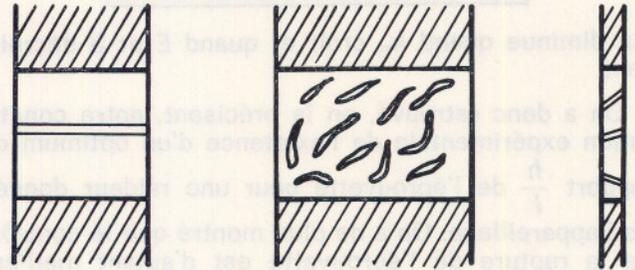


fig. 13 b

fig. 13 c

fig. 13 d

Fig. 13. — Influence de la largeur des micro-fissures préexistantes
 13 a. — Profil d'une entaille de rayon fini avec micro-fissures naturelles.
 13 b. — Micro-fissure préexistante intéressant toute la largeur du fond d'entaille.
 13 c. — Micro-fissures naturelles n'intéressant pas toute la largeur du fond d'entaille.
 13 d. — Epreuve d'épaisseur inférieure à la largeur des micro-fissures naturelles.

quasi contrôlée, est plus facile à obtenir puisque la courbe $G_2(a)$ recoupe plus tôt la droite d'ordonnée $2 \gamma_F$.

Ceci montre que le raisonnement physique intuitif présenté au début du chapitre 3 ne vaut qu'à cause du caractère non idéal de l'entaille initiale, et constitue alors une condition nécessaire, mais non suffisante, de contrôle. En particulier, nous avons vu qu'il sera impossible d'obtenir la rupture contrôlée à force imposée, ou même à déflexion imposée pour l'éprouvette de traction entaillée symétriquement, même si l'on abaisse la valeur de l'énergie emmagasinée à la rupture.

4.4. Influence de la largeur finie des micro-fissures naturelles préexistantes

Considérons à nouveau l'entaille, de rayon de courbure fini, obtenue par usinage des éprouvettes. Si on observe à grande échelle le profil du fond de l'entaille, on constatera que celui-ci est localement modifié par la présence de fines entailles correspondant aux micro-fissures naturelles atteintes par l'outil d'usinage (figure 13 a). Il pourra, généralement, en exister une, orientée sensiblement suivant l'axe de l'entaille principale, et qui devrait pouvoir jouer le rôle attribué au paragraphe précédent à la fissure après démarrage de la progression (figure 11 b). Il en résulte que, dans les cas réels, on devrait être plus proche du cas de la fissure idéale que de celui étudié en 4.3. Cependant, pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que la largeur de la micro-fissure intéresse

toute l'épaisseur de l'éprouvette dans le sens perpendiculaire au profil de l'entaille (*figure 13 b*). Dans le pratique, ceci ne sera pas réalisé pour la majorité des cas courants de matériaux n'apparaissant pas comme macroscopiquement fissurés (par exemple fissures lenticulaires de diamètre inférieur au millimètres), si l'on prend une épaisseur d'éprouvette de l'ordre du centimètre (*figure 13 c*). La faible largeur des micro-fissures en fond d'entaille laissera donc des ponts de matière résistante qui empêcheront l'apparition de la progression pour une valeur de la sollicitation correspondant au cas de la fissure idéale (*figure 13 c*).

Il n'en serait bien sûr pas de même si l'on ramenait l'épaisseur de l'éprouvette à une valeur de l'ordre de grandeur du diamètre des fissures lenticulaires préexistantes dans le matériau (*figure 13 d*). En supposant que cela soit techniquement possible dans tous les cas (par exemple par la technique des lames minces), on obtiendrait une éprouvette manipulable et ne pouvant se prêter à un essai mécanique (du fait d'une part des phénomènes de voilement, et d'autre part de l'influence de la multitude de micro-fissures de même taille réparties dans l'éprouvette et la traversant de part en part).

4.5. Application à la définition d'une éprouvette

D'après ce qui précède, une éprouvette pouvant se prêter à la rupture contrôlée devrait présenter les caractéristiques suivantes :

- Rapport hauteur/longueur ni trop faible, ni trop fort (existence d'un optimum fonction du module d'Young du matériau et de l'appareillage).
- Epaisseur aussi faible que possible sans nuire au caractère manipulable de l'éprouvette.
- Entaille initiale suffisamment profonde.
- Micro-fissures naturelles préexistantes intéressant l'épaisseur totale de l'éprouvette dans la zone d'amorçage de la progression.
- Contraintes de flexion concentrées dans un volume aussi faible que possible.

La deuxième condition s'obtient en donnant à l'éprouvette une épaisseur de 5 à 10 mm.

Les deux dernières conditions se trouvent à peu près remplies si l'on donne à la section de rupture une forme triangulaire (de façon analogue à la méthode déjà utilisée, pour d'autres raisons semble-t-il, par d'autres auteurs [11], [12]), et si l'on pratique une deuxième entaille située dans la partie comprimée de l'éprouvette.

En effet, une section de rupture en forme de triangle isocèle aigu (et non obtus comme en [11] et [12]) permet d'obtenir, dans la région d'initiation de la progression, une zone (la pointe du triangle) pour laquelle les micro-fissures naturelles préexistantes pourront intéresser la totalité de l'épaisseur locale de la section à rompre. Dans certains cas (le verre par exemple), l'usinage lui-même créera des micro-fissures remplissant cette condition au voisinage de la pointe du triangle. Des conditions se rapprochant du cas de la fissure idéale pourront donc être obtenues

même si l'on utilise des moyens d'usinage relativement grossiers (scie à lame diamantée par exemple), permettant la fabrication rapide d'un grand nombre d'éprouvettes. La partie triangulaire peut, sans inconvénient, être prolongée par une zone rectangulaire à l'épaisseur totale de l'éprouvette : une fois en effet que la fissure initiale a suffisamment progressé, en intéressant petit à petit une épaisseur de plus en plus grande, on obtient bien une fissure naturelle sur toute l'épaisseur de la cloison, pouvant jouer par conséquent le rôle de fissure idéale.

La deuxième entaille, située dans la zone comprimée, renforce les contraintes de compression tout en augmentant la raideur de l'éprouvette, et diminuant par conséquent l'énergie emmagasinée, et donc l'effet néfaste de l'écart par rapport à la fissure idéale. Ces deux effets contribuent encore au contrôle de la rupture.

La confirmation expérimentale de la validité des considérations précédentes a été donnée par le fait que ce n'est qu'à partir de l'introduction d'une géométrie d'éprouvette répondant à ces caractéristiques que l'on a pu obtenir des ruptures effectivement contrôlées même dans les cas les plus difficiles (y compris le verre). Le fait que nous ayons obtenu la progression contrôlée jusqu'à rupture complète sur des éprouvettes à section triangulaire prolongée par un rectangle montre bien en particulier que le rôle joué par le triangle est celui que nous avons dit (et qui semble différent de celui, peu clair, qui lui est attribué de diverses sources).

5. DISPOSITIONS EXPERIMENTALES

5.1. Eprouvettes

La forme et les dimensions des éprouvettes utilisées sont présentées sur la *figure 14*. Lorsqu'elles sont découpées dans des produits creux de terre cuite, leur épaisseur est celle d'une cloison du produit et peut donc varier de 5 à 15 mm. Les autres dimensions n'ont pas besoin d'être définies avec précision, ce qui facilite l'usinage. Elles sont de l'ordre de 5 cm pour la hauteur et 15 cm pour la longueur.

L'aire de la section de rupture est de l'ordre de 0,5 à 1,5 cm² suivant les cas. Ces éprouvettes sont usinées à la scie diamantée.

5.2. Appareil de mise en charge

L'appareil de mise en charge est constitué par une presse à 4 colonnes, type presse « C.B.R. », à avance mécanique par crémaillère et boîte à engrenage, et de force nominale 2 000 daN.

L'éprouvette est mise en place sur la machine de façon à former un double encorbellement, la pointe du triangle de rupture étant tournée vers le haut. Elle repose sur 2 appuis centraux inférieurs, constitués par des rouleaux d'acier de 10 mm de diamètre, situés de part et d'autre de la deuxième entaille, et à proximité immédiate de celle-ci, et reposant librement sur le plateau inférieur.

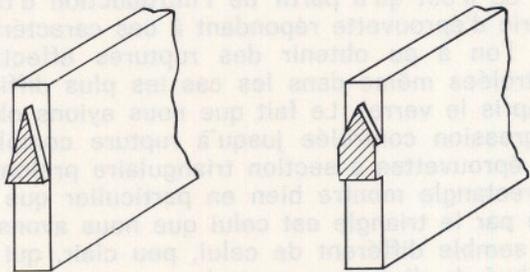
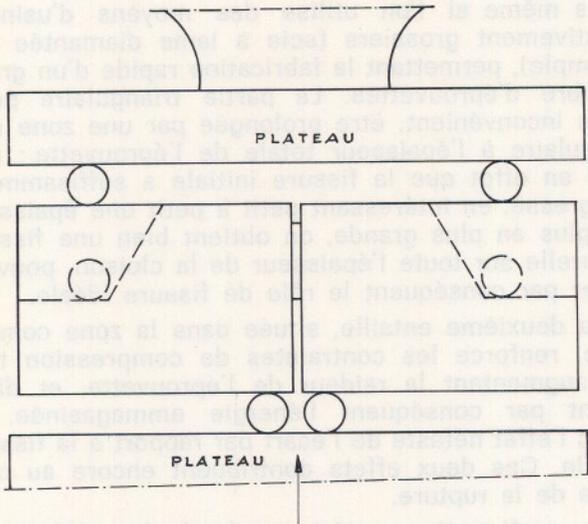


Fig. 14 a

La force est appliquée aux extrémités par deux autres rouleaux du même type que les précédents, suspendus au plateau supérieur par une liaison lâche permettant les mouvements latéraux.*

Dans la section de rupture on est donc en principe sous moment constant (à ceci près que le principe de Saint-Venant n'est pas applicable). L'effort tranchant est donc nul dans la section, et la rupture se fait

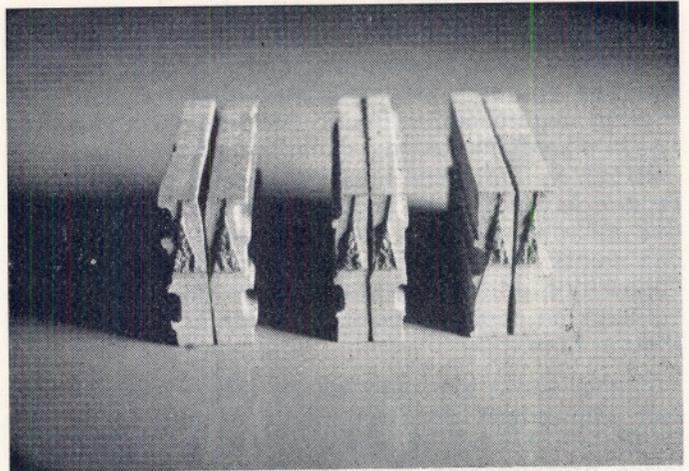


Fig. 14 c. — Exemples d'éprouvettes après rupture

suivant un mode simple (le mode I), au contraire de ce qui se passe dans le cas des dispositions adoptées, tant par Tattersall et Tappin, que par Nakayama. L'application d'une force unique centrée introduit en effet un effort tranchant dans la section de rupture, ce qui conduit à un mode complexe (modes I et II mélangés) qui est de plus mal défini du fait de la discontinuité de cet effort tranchant de part et d'autre de la section de rupture.

La disposition renversée (en double encorbellement) a pour effet de libérer (par l'action de la pesanteur) chaque moitié de l'éprouvette lors de la rupture. Ceci est nécessaire pour éliminer les frottements entre surfaces déjà rompues qui interviennent, par effet purement cinématique, dans la disposition contraire et qui provoquent une dissipation parasite d'énergie perturbant les mesures. La deuxième entaille (inférieure) contribue également à l'élimination de ces frottements.

5.3. Dispositif de mesure

La mesure de la force se fait par l'intermédiaire d'un anneau dynamométrique. De façon à obtenir une raideur suffisante on utilise un anneau de force

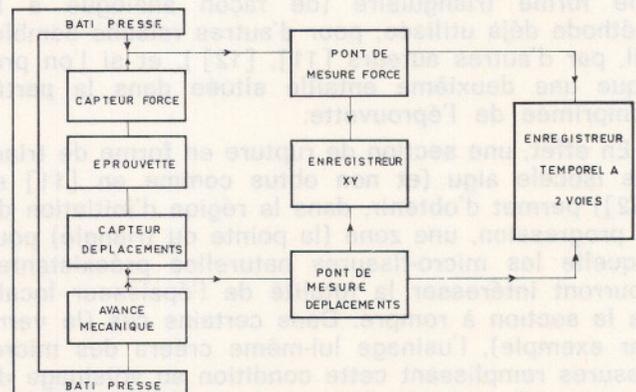


Fig. 15

* En fait, on utilise des rouleaux magnétiques.

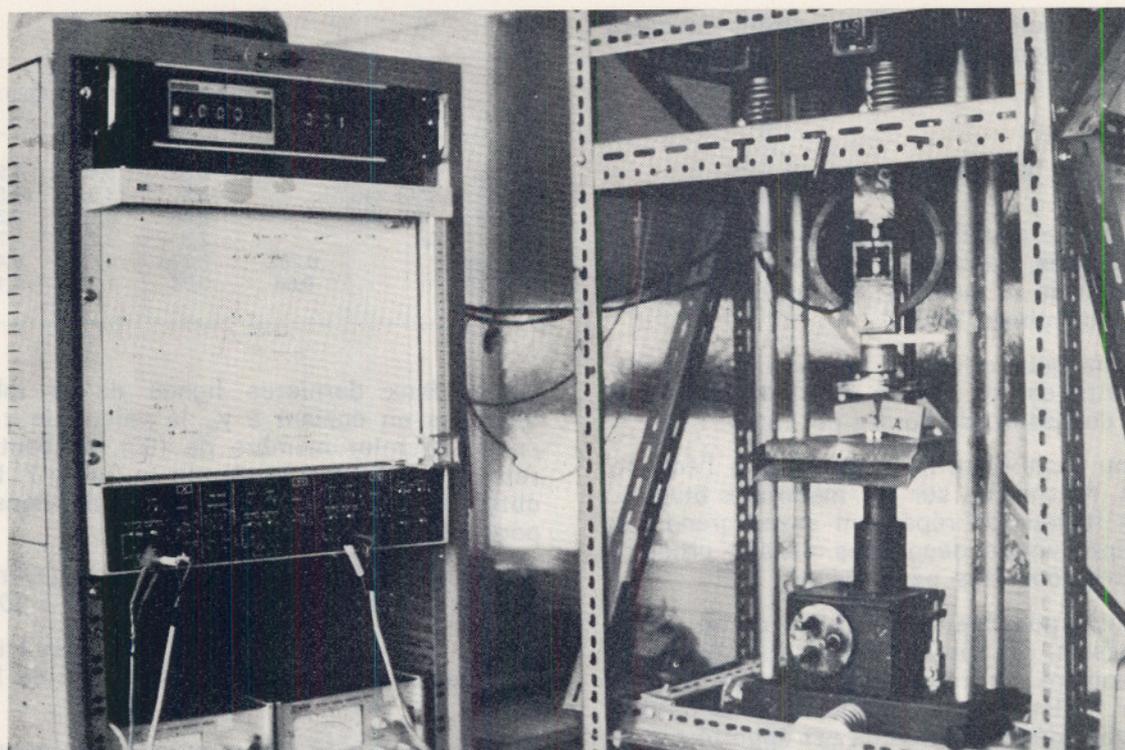


Fig. 16 a. — Vue d'ensemble de l'appareillage

nominale 3 000 daN, alors que les efforts à mesurer ne dépassent pas 10 à 20 daN et que l'on doit apprécier une fraction de daN. Cette sensibilité a été obtenue en remplaçant le comparateur de l'anneau par un capteur de déplacement à transformateur différentiel permettant de mesurer des déplacements de l'ordre de $0,1 \mu$ et dont la course est de ± 1 mm.

Un capteur du même type est monté entre l'anneau (solidaire du plateau supérieur) et le plateau inférieur, permettant ainsi la mesure de la flèche.

Ces capteurs alimentés par des ponts à porteuse, délivrent des signaux amplifiés et démodulés par ces mêmes ponts, et qui sont injectés à un enregistreur XY du type potentiométrique, lequel fournit directement la courbe effort-déflexion.

Un enregistreur temporel à deux voies permet également d'enregistrer simultanément les deux signaux en fonction du temps (ce qui est utilisé pour la vérification du caractère contrôlé de la rupture).

Le schéma organique du dispositif de mesure est présenté sur la figure 15, et une vue d'ensemble de l'appareillage sur la figure 16.

Pour empêcher les vibrations et chocs parasites de perturber les mesures, ce qui est inévitable compte tenu de la grande sensibilité des capteurs, on a isolé mécaniquement l'ensemble de la machine d'essai en la montant sur une suspension sismique, constituée par des amortisseurs métalliques, à très basse fréquence de résonance (3 à 5 Hz) et à amortissement non linéaire.

Avant chaque mesure ou série de mesures on procède au réglage des ponts, et au choix des sensibilités. Des étalonnages périodiques, effectués à

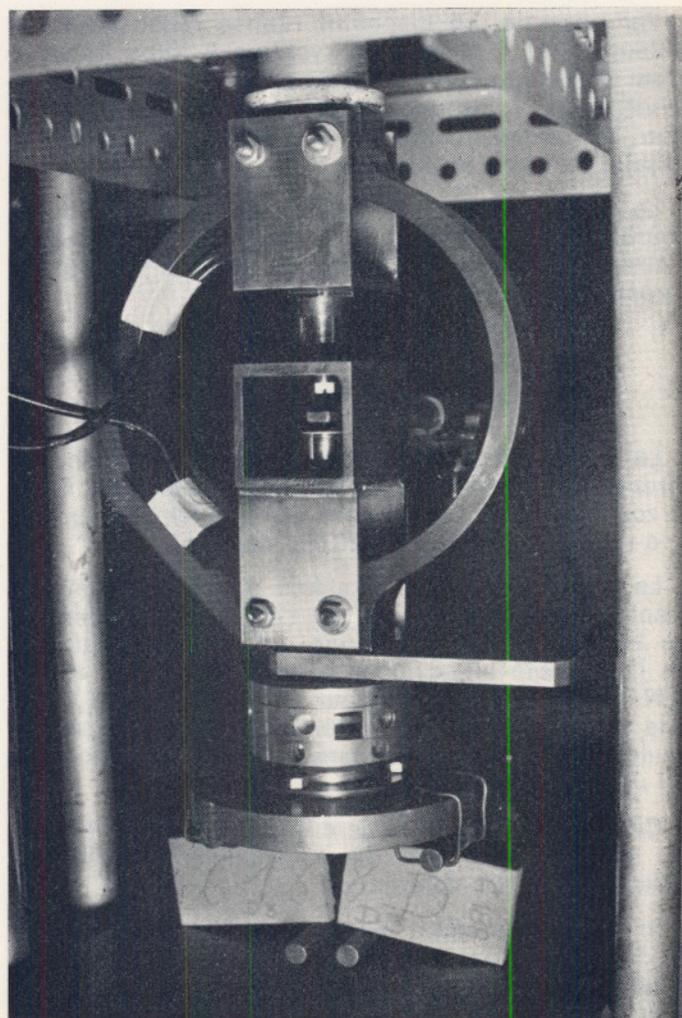


Fig. 16 b. — Détail en cours d'essai

l'aide d'une vis micrométrique, permettent en outre de déterminer les constantes numériques nécessaires au dépouillement.

5.4. Exécution des essais

Dans le montage actuel, l'application de la sollicitation est effectuée manuellement sur la plus faible vitesse d'avance de la machine, suivant une montée régulière et relativement lente.

Le temps mis pour effectuer la rupture complète d'une éprouvette est de l'ordre de 1 minute (pour une longueur de fissure de l'ordre de 1 cm).

Compte tenu de la forte hétérogénéité, à l'échelle du millimètre, rencontrée sur les matériaux étudiés, on adopte un facteur de répétition assez grand (en général, 18 éprouvettes découpées dans 6 produits à raison de 3 éprouvettes par produit).

Ceci est rendu possible par la faible durée d'exécution des essais, qui permet donc l'accumulation d'un grand nombre de résultats, qui sont soumis ensuite à un traitement statistique. Ceci constitue un avantage considérable qui nous est apporté par le soin mis à la définition des conditions de rupture contrôlée.

Par exemple, un dispositif réalisé récemment par ailleurs [22] à partir d'un système à force imposée muni d'une régulation à temps de réponse relativement élevé, exige une vitesse moyenne de sollicitation extrêmement faible, allongeant la durée des essais de façon prohibitive.

Le dépouillement s'effectue par intégration de la courbe effort-déflexion à l'aide d'un planimètre. L'aire de la section de rupture est obtenue par mesure directe de ses dimensions.

5.5. Raideur de la machine

La raideur de l'anneau dynamométrique s'obtient directement à partir de sa courbe d'étalonnage. Dans la zone de travail (soit autour de 10 daN), on a trouvé une raideur de l'ordre de 20 000 daN/cm.

La détermination de la raideur du bâti a exigé une manipulation spéciale, et on l'a trouvée également de l'ordre de 20 000 daN/cm. La raideur résultante de l'ensemble bâti-dynamomètre est donc de 10 000 daN/cm environ. Cette valeur est sensiblement égale à la valeur obtenue par Tattersall et Tappin pour leur seule cellule de mesure, dans le cas de la plus raide (11 000 daN/cm environ).

Cette raideur est près de 4 fois plus forte que celle de la plus raide des deux machines utilisée par Nakayama (2 700 daN/cm).

Si l'on admet que l'éprouvette à double entaille de la figure fonctionne comme une éprouvette à entaille unique de hauteur moitié moindre, on obtient, pour la valeur de $1/\mu_0 = (l/h)_0$ donnée par (85), en fonction du produit Eb :

TABLEAU 1

Eb daN	0	100 000	200 000	300 000	400 000
$1/\mu_0$	—	4,32	5,40	6,20	6,80
l_0 ($h = 2,5$) cm	—	10,8	13,5	15,5	17,0
h_0 ($l = 10$) cm	—	6,48	8,10	9,30	10,20
Y_0	—	2,3	2,2	1,7	1,5
η_0 min	0,265	0,375	0,424	0,445	0,465
a_0 cm	0,66	0,94	1,06	1,10	1,16

Les deux dernières lignes de ce tableau sont obtenues en égalant à y_0 , la valeur de $z(\eta)$ donnée par le premier membre de (80), et dont la courbe représentative est tracée sur la figure 7. Les valeurs obtenues pour a_0 doivent être augmentées si le rapport l/h s'écarte de l'optimum μ_0^{-1} .

Pour $h = 2,5$, l_0 devra varier entre 11 cm et 17 cm pour un produit Eb variant de 100 000 à 400 000.

Ceci pourra être aisément obtenu en faisant varier la distance entre points d'application de la sollicitation.

Si l'on fixe à 10 cm la portée entre appuis, on voit que h_0 varie de 2,3 cm à 1,5 cm dans les mêmes conditions.

6. EXEMPLES DE RESULTATS

Le tableau 2 présente quelques exemples de résultats obtenus, d'une part sur 7 terres cuites, sur du verre à glace, sur un certain nombre de céramiques réfractaires (échantillons fournis par la Société française de céramique, ainsi que les valeurs de E correspondantes), et sur des roches naturelles (échantillons fournis par le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique, également avec les valeurs de E).

Les courbes effort-déflexions obtenues correspondaient, dans la quasi-totalité des cas, à des ruptures à peu près parfaitement contrôlées. En particulier on a vérifié qu'il était possible de suspendre l'accroissement de la déflexion sans qu'il y ait poursuite de la diminution de la réaction de l'éprouvette, et donc sans qu'il y ait poursuite de la progression de la fissure (figure 17 d).

La connaissance de E et de F permet d'en déduire le facteur d'intensité de contrainte critique K_c :

$$(108) \quad K_c = \sqrt{2 E \gamma_i}$$

On constate que l'énergie spécifique de rupture moyenne observée sur les terres cuites étudiées varie de 5 000 ergs/cm² à 40 000 ergs/cm² environ. On observe d'ailleurs une dispersion autour de la valeur moyenne, qui peut être assez grande dans certains cas, mais reste du même ordre que celles observées pour d'autres caractéristiques mécaniques de ce matériau.

TABLEAU 2

Matériau	γ_f moyen ergs/cm ²	Module d'Young E dynes/cm ²	Facteur intensité de contrainte critique (CGS) $K^0 = 2E\gamma_f$		
I — Terres cuites					
1	11 970	0,179.10 ¹²	65,2.10 ⁶		
2	24 000	0,236.10 ¹²	106,2.10 ⁶		
3	25 700	0,137.10 ¹²	83,9.10 ⁶		
4	39 800	0,104.10 ¹²	91,1.10 ⁶		
5	8 600	0,238.10 ¹²	64,0.10 ⁶		
6	5 570	0,272.10 ¹²	55,0.10 ⁵		
7	32 900	0,239.10 ¹²	125,2.10 ⁶		
II — Verre à glace					
	3 530	0,443.10 ¹²	55,9.10 ⁶		
III — Céramiques réfractaires * (1)					
Mullite-cordiérite	20 600	0,180.10 ¹²	86 .10 ⁶		
Alumine frittée	63 980	0,538.10 ¹²	262 .10 ⁶		
Alumine électro-fondue	59 570	1,062.10 ¹²	356 .10 ⁶		
Mullite	34 030	0,690.10 ¹²	217 .10 ⁶		
IV — Roches naturelles * (2)					
Granit à grain fin séché	31 200	0,480.10 ¹²	173 .10 ⁶		
Granit à grain fin saturé.....	31 200	0,480.10 ¹²	173 .10 ⁶		
Protogine du Mont Blanc.....	58 900	0,500.10 ¹²	242 .10 ⁶		
Marbre du Mosset.....	20 000	0,800.10 ¹²	179 .10 ⁶		
Calcaire de Saint-Vaast.....	3 720	0,045.10 ¹²	18,3.10 ⁶		
V — Argiles crues séchées					
Mélange	1	2	3	4	5
γ_f moyen	25 360	23 400	12 380	9 870	7 300

* échantillons fournis ainsi que les valeurs de E correspondantes :

(1) par la Société française de Céramique ;

(2) par le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique.

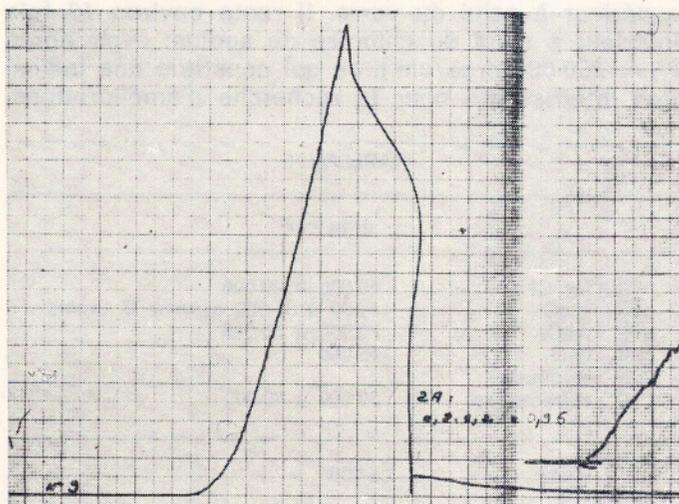


Fig. 17 a. — Enregistrement XY d'une courbe effort-déplacement :
rupture instable (ou non contrôlée)

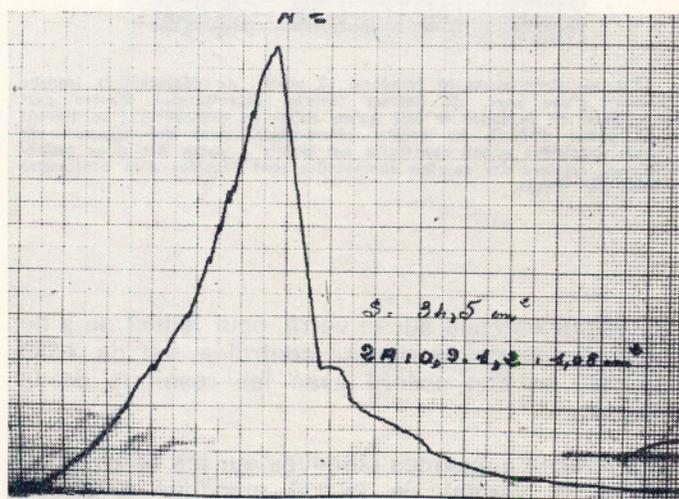


Fig. 17 b. — Enregistrement XY d'une courbe effort-déplacement : rupture
semistable (non contrôlée sur une certaine longueur de propagation, suivie
de rupture contrôlée).

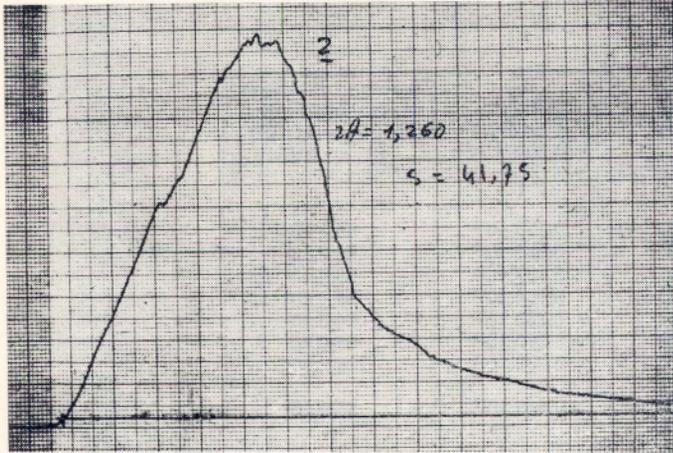


Fig. 17 c. — Enregistrement XY d'une courbe effort-déplacement : rupture contrôlée

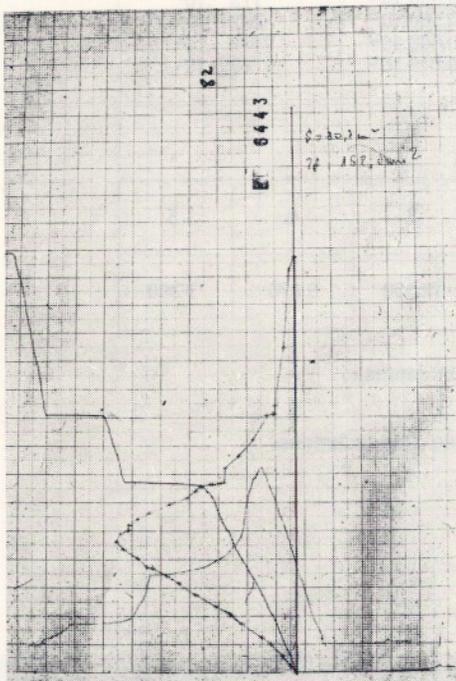


Fig. 17 d. — Enregistrement temporel (2 voies), du déplacement (courbe croissante) d'une part, de l'effort (courbe décroissante) d'autre part mettant bien en évidence le fait qu'un palier de déplacement se traduit par un palier d'effort. La courbe effort-déplacement qui apparaît sur le même graphique a été construite par points à partir des deux précédentes. Les origines des courbes temporelles sont décalées d'un centimètre sur l'axe des temps.

La valeur obtenue sur le verre, pour lequel on a pu obtenir également la rupture contrôlée, est de $3\,530 \text{ ergs/cm}^2$, en bon accord avec les résultats de la littérature.

Les valeurs moyennes obtenues sur les céramiques réfractaires varient de $20\,000 \text{ ergs/cm}^2$ à $65\,000 \text{ ergs/cm}^2$ environ, ce qui est également de l'ordre de grandeur des valeurs fournies par la littérature pour cette catégorie de matériau ($30\,000$ à $50\,000$).

La moitié inférieure de ces valeurs recouvre la moitié supérieure de celles observées sur les terres cuites.

Les roches naturelles fournissent une gamme de valeurs allant de $3\,700 \text{ ergs/cm}^2$ à $60\,000 \text{ ergs/cm}^2$ qui recouvrent donc l'ensemble des deux gammes précédentes. A noter que le calcaire de Saint-Vaast a une valeur du même ordre que celle du verre, mais du fait de sa très forte porosité, a un comportement mécanique totalement différent (il s'agit en fait d'une roche extrêmement friable).

Les valeurs de K_c montrent que la meilleure résistance à l'effet d'entaille est obtenue pour l'alumine électro-fondue, pour laquelle on obtient une valeur de $356 \cdot 10^6$ (C.G.S.). Les plus faibles valeurs sont obtenues pour le calcaire de Saint-Vaast ($18,3 \cdot 10^6$) et le verre ($56 \cdot 10^6$). Leurs résistances sont cependant très différentes du fait des différences dans la taille des microfissures préexistantes.

Enfin, ce tableau 2 fournit également quelques valeurs obtenues sur des argiles crues séchées. On constate, de façon assez inattendue, que les valeurs que l'on obtient dans ce cas, sont du même ordre que celles que l'on obtient pour les terres cuites. Les modules n'ayant pas été mesurés, on n'a pu en déduire K_c .

7. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DE LA LITTERATURE

Le tableau 3 présente quelques résultats relevés dans la littérature, concernant divers matériaux et obtenus par différentes méthodes, dont certaines sont analogues (mais non exactement semblables) à la nôtre (cf [23]).

On constate que les ordres de grandeur des résultats obtenus au cours de la présente étude s'inscrivent très bien dans ce tableau. On remarque que le γ_f de la terre cuite est en général de plusieurs fois supérieur à celui du verre. Il reste environ 10 fois inférieur à celui du chlorure de sodium avec fibres ($\gamma_f = 200\,000 \text{ ergs/cm}^2$), ce qui constitue une indication intéressante pour la recherche d'améliorations.

TABLEAU 3

		$\gamma_f \text{ ergs/cm}^2$
solides polycristallins	Na Cl	20 000 à 40 000
	MgO	4 200 à 35 000 suivant \varnothing grains
	Al ₂ O ₃	20 000 à 50 000
	BeO	15 000
	Briques réfractaires	30 000 à 50 000
	Verre	4 000
	NaCl + fibres	200 000

CONCLUSION

Les résultats obtenus montrent que, tel qu'il a été conçu et mis au point, l'essai que nous proposons pour la mesure de l'énergie spécifique de rupture permet de caractériser convenablement les diverses terres cuites de ce point de vue, dont l'importance est fondamentale pour la compréhension du comportement à la rupture de ce matériau dans les diverses conditions de sollicitations, ainsi que pour la recherche d'améliorations.

Une fois bien au point, et moyennant un matériel approprié, cet essai se révèle d'exécution facile, rapide et relativement peu coûteuse, ce qui permet d'accumuler rapidement un grand nombre de résultats et d'appliquer à ceux-ci un traitement statistique.

Les essais exploratoires réalisés sur une large gamme de matériaux minéraux, tant artificiels que naturels, montrent que le champ d'application de la technique que nous avons présentée peut déborder assez largement le domaine des céramiques de construction. En particulier, la possibilité d'obtenir la rupture contrôlée sur le verre montre que cette technique peut être utilisée jusque dans les cas les plus difficiles (faible énergie de rupture et forte résistance).

Les résultats obtenus montrent que, pour les divers matériaux minéraux que nous avons étudiés, l'énergie de rupture moyenne peut varier dans de très larges proportions, allant de 3 000 ergs/cm² pour le verre à près de 65 000 ergs/cm² pour des céramiques hautement réfractaires, soit un rapport entre extrêmes allant de 1 à 20 environ. A noter que l'on retrouve un rapport du même ordre pour les roches naturelles, alors qu'il n'est que de 1 à 8 pour les terres cuites, qui possèdent par ailleurs des énergies de rupture allant de 2 fois à 13 fois celle du verre.

La résistance mécanique étant commandée par une combinaison de l'énergie de rupture et d'un paramètre de texture (ordre de grandeur de la taille des micro-fissures préexistantes), il apparaît que l'on peut envisager deux voies d'amélioration correspondant, l'une à l'augmentation de l'énergie de rupture, l'autre à la modification de la taille des microfissures. Compte tenu de ce que nous avons constaté plus haut sur les conditions qui gouvernent la propagation instable et non contrôlée d'une fissure, cette modification devra se faire dans le sens d'une diminution ou d'une augmentation de cette taille suivant le mode de sollicitation auquel on aura affaire.

En particulier, dans certains cas de sollicitations à déformations imposées rencontrées dans la pratique, et qui donnaient lieu dans certaines conditions à propagation instable d'une fissure dans une zone de concentration de contrainte très localisée, il est apparu que, pour y remédier, il était nécessaire d'augmenter la taille des micro-fissures préexistantes (contrairement à l'idée courante que ce sont les fissu-

res de plus grande taille qui sont « critiques »). Ceci a permis d'expliquer la constatation paradoxale qui avait été faite, et suivant laquelle, dans ces conditions, c'étaient les terres à forte résistance qui donnaient lieu à rupture, et non les terres à résistance moindre.

Ceci montre à quel point les caractéristiques de rupture usuellement déterminées (résistance à la traction, à la compression) ne peuvent être considérées comme des caractéristiques intrinsèques puisque les conditions et le mode de rupture dépendent fortement, comme nous l'avons vu plus haut, des conditions extrinsèques de sollicitation, y compris la géométrie. Par contre l'énergie de rupture est (au moins en première approximation, correspondant à une hypothèse d'indépendance par rapport à l'histoire du chargement) la quantité intrinsèque qui fournit la clef de ces divers comportements pour peu que l'on connaisse suffisamment par ailleurs les paramètres de texture définissant la morphologie interne du matériau.

En première approximation ces paramètres de texture peuvent se ramener à la seule taille des microfissures efficaces, laquelle commande au premier chef (nous l'avons vu dans la première partie), les conditions de stabilité, semi-stabilité ou instabilité complète de la progression des fissures.

Ceci nous a permis de compléter les conséquences tirées ici des analyses théoriques faites au premier chapitre de façon à obtenir une méthode de détermination de la taille de ces microfissures efficaces. Cette méthode est constituée par la combinaison de trois déterminations expérimentales :

- l'énergie de rupture γ_f décrite ici.
- la résistance R à la rupture en traction ou en flexion classique à force imposée.
- le module d'élasticité E .

Sachant que la rupture se déclenche au moment où G atteint la valeur $2\gamma_f$, moment qui correspond en outre à la valeur maximale atteinte par la force F , la connaissance simultanée de γ_f , E et F permet en effet de déterminer la valeur de la fonction $y_1^2(\eta) = Z_1(\eta)$ de l'équation (59) de la première partie. Le report de cette valeur sur le graphique de la figure 6 (première partie) fournit alors immédiatement la valeur de $\eta_0 = a_0/h$ correspondant à la taille initiale a_0 des microfissures présentes dans l'essai réalisé.

Nous avons effectivement, et de façon systématique, utilisé cette méthode qui conduit, sur la base d'essais de réalisation simple et rapide, à la possibilité d'une description complète du comportement à rupture d'un matériau donné dans les diverses conditions de sollicitations. Les résultats correspondants feront l'objet de publications ultérieures.

BIBLIOGRAPHIE (suite) *

- [22] G. PROVOST, L. LECRIVAIN, P. ZOMBAS : Energie de rupture de produits réfractaires : Etude d'un dispositif d'essai (bulletin de la Société française de céramique n° 84, page 67 à 73 - Juill. Sept. 1969).
- [23] R.W. DAWIDGE et F.J. CLARKE : La résistance aux chocs thermiques et mécaniques des céramiques. [Bulletin de la S.F.C. n° 72 - page 61 à 71, Juill.-Sept. 1969].
- [24] J. STOKES : Fracture of Ceramics (La rupture des céramiques) [in « Fundamental Phenomena in the Material Sciences » vol. 4: Fracture of Metals, Polymers, and Glasses, par L.J. BOUIS, J.J. DUGA et J.J. GILMAN; Proceedings of the Fourth Annual, Symposium of —; Boston 31 janvier — 1^{er} février 1966; Plenum Press New York (1967)].
- [25] G.M. BARTENEV : The structure and mechanical properties of inorganic Glasses (structure et propriétés mécaniques des verres minéraux (chap. IV, p. 174-179); Wolters-Noordhoff Publishing, Groningue, Pays-Bas, (1970).
- [26] T. YOKOBORI : Strength Fracture and Fatigue of Materials; résistance, rupture et fatigue des matériaux), chap. 5, p. 108. [Noordhoff Ed. Groningue, Pays-Bas, (1965)].
- [27] L.A. WIGGLESWORTH : Stress distribution in a notched plate. (Distribution des contraintes dans une plaque entaillée). [Mathematika; n° 4; (1957)].
- [28] D.P.H. HASSELMANN : Analysis of the Strain at Fracture of Brittle Solids with High Densities of microcracks (Analyse de la déformation à rupture des solides fragiles à densités élevées de microfissures). [J. of. AMER: Cer. Sty. Vol. 52 N° 8-p. 458 Août 1969]
- [29] J.P. BERRY : Some kinetic Considerations of the Griffith Criterion for Fracture. (Quelques considérations cinétiques sur le critère de rupture de Griffith). [I — Jal. Mech. Phys. Solides, 1960, Vol. 8, p. 194-206; II — Idem p. 207 to 216].
- [30] J. PLATEAU : About the meaning of the Griffith Conditions and the Practical Application of Fracture Mechanics to metals (sur la signification du critère de Griffith et applications pratiques de la Mécanique de la rupture aux métaux). [Int. Symp. Fract. Mech.; Kiruna (Août 1967); Wolters, Noordhoff Pub. Groningue 1968 p. 35].
- [31] D.P. CLAUSING : Crack Stability in linear elastic fracture Mechanics (Stabilité des fissures en mécanique linéaire élastique de la rupture). [Int. J. Fracture Mechanics; Pays-Bas, vol. 5 N° 3 (Sept. 1969)].
- [32] D.I. BARENBLATT : The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. (La théorie mathématique des fissures en équilibre dans la rupture fragile). [Adv. in App. Mech.; by H.L. DRYDEN et T.H. VON KARMAN 55 — 129, Academic Press (1962)].
- [33] H.F. BUECKNER : The propagation of Cracks and Energy of Elastic Deformation (Trans. Am. Soc. Mechanical Engrs: N° 6 p. 1225 — 30; 1958).
- [34] C. ATKINSON et J.D. ESHERBY : The flow of Energy into the tip of a moving Crack. [Intal Symposium on Fracture Mechanics, Kiruna Août 1967; Wolters Noordhoff Publishing — Groningue, 1968].
- [35] E.B. GLENNIE et J.R. WILLIS : An examination of the effects of some idealized models of fracture on accelerating Cracks. [Jal of the Mechanics and physics of Solids; vol. 19, N° 1, page 11 à 30; Février 1971].
- [36] E. YOFFE : Phil. Mag. 42, 739 (1951) The Griffith Moving crack.
- [37] C. HUET : Détermination expérimentale de l'énergie spécifique de rupture et de la valeur critique du facteur d'intensité de contrainte des céramiques de construction et de divers matériaux. (C.R. Acad. Sc. de Paris, t. 272 — pages 1474-1477 (2 juin 1971).

* Pour les références [1] à [21], voir la première partie de cette étude, parue dans le numéro 3 des Cahiers.

Modèle du système cardio-vasculaire*

Etude sur calculateur analogique de l'autorégulation mécanique et de la fonction ventriculaire gauche

par G. DEMOMENT⁽¹⁾, P. PERONNEAU⁽²⁾,
R. DUPERDU⁽³⁾, J. HINGLAIS⁽⁴⁾

RESUME

Un modèle non linéaire de la circulation chez le chien, ne mettant en jeu que des propriétés mécaniques, a été comparé par simulation sur calculateur analogique à des résultats expérimentaux. Une formulation précise de la fonction ventriculaire gauche a été faite, avec en particulier l'introduction de l'influence mécanique de la circulation coronaire.

SUMMARY

An analog computer model of the cardiovascular system of the dog was developed based primarily on mechanical characteristics. Isolated heart and in situ experiments allowed both identification of the major parameters and verification of the validity of the model. Special attention was paid to definition of left ventricular function and a novel description based on compliance has been developed by taking in account the non-linear pressure-volume relationship and a first approach to the short-term influence of the coronary circulation on myocardial performance.

* Conférence au G.F.R. le 11 décembre 1971.

(1) Boursier C.N.R.S. — Ecole supérieure d'électricité 92 - Malakoff.

(2) — Centre d'études des techniques chirurgicales C.N.R.S. - Hôpital Broussais - Paris.

(3) Chef du service des Mesures - Ecole supérieure d'électricité 92 - Malakoff.

(4) Directeur du Centre d'études des techniques chirurgicales C.N.R.S. - Hôpital Broussais - Paris.

1. INTRODUCTION

L'intérêt général des modèles pour l'analyse et la compréhension de systèmes complexes multiparamétriques et multibouclés apparaît remarquable dans le domaine biologique.

L'apport de la méthode est particulièrement évident pour la physiologie du système cardio-circulatoire, au niveau duquel se trouvent imbriqués des phénomènes hydrauliques et des régulations neuro-humorales.

Ces deux aspects ont déjà fait l'objet d'études avec modèle, mais la revue de ces travaux appelle deux remarques :

— d'une part, ce sont surtout les boucles de régulation centrale qui ont été étudiées, alors que peu de travaux encore ont été consacrés à une définition précise du système hydraulique ;

— d'autre part, ces études sont surtout théoriques et comportent peu de confrontations précises avec les résultats de l'expérimentation animale.

Le présent travail s'est délibérément limité aux facteurs mécaniques du système cardio-vasculaire. Pour cela, un modèle mathématique à constantes localisées a été défini et son étude effectuée sur calculateur analogique.

Les buts essentiels ont été :

1. La mise en place du système et l'identification des paramètres,

2. l'étude plus particulière de la fonction du ventricule gauche, dont l'interprétation mécanique n'avait pas encore été suffisamment développée,

3. l'appréciation du rôle des facteurs purement mécaniques dans la régulation de l'ensemble du système cardio-vasculaire.

Une préoccupation constante a été la confrontation à des résultats expérimentaux, soit pour l'identification des paramètres, soit pour l'estimation du degré de conformité.

2. METHODE GENERALE

2.1. Définition des différents blocs et paramètres du modèle

Le système cardio-circulatoire est découpé en dix blocs placés en série (figure 1) qui sont, successivement: le ventricule gauche, l'aorte, les artères systémiques, la résistance systémique, les veines systémiques, la résistance pulmonaire, les veines pulmonaires, les artères pulmonaires, le ventricule droit, les veines caves (thoraciques).

Les grandeurs d'entrée et de sortie des différents blocs sont définies selon la théorie des systèmes. Ce choix est en grande partie arbitraire; les différents blocs qui constituent le système circulatoire étant placés en cascade, les grandeurs composant la sortie d'un de ces blocs devront être choisies comme grandeurs d'entrée pour d'autres blocs.

Les grandeurs mises en jeu sont la pression P , le débit Q et le volume sanguin V ; elles sont les variables de l'ensemble des équations constituant le modèle mathématique. Lorsque le système est bouclé, il n'est pas possible d'ajuster une de ces variables à une valeur donnée indépendamment des autres variables. Par contre, en l'absence de toute

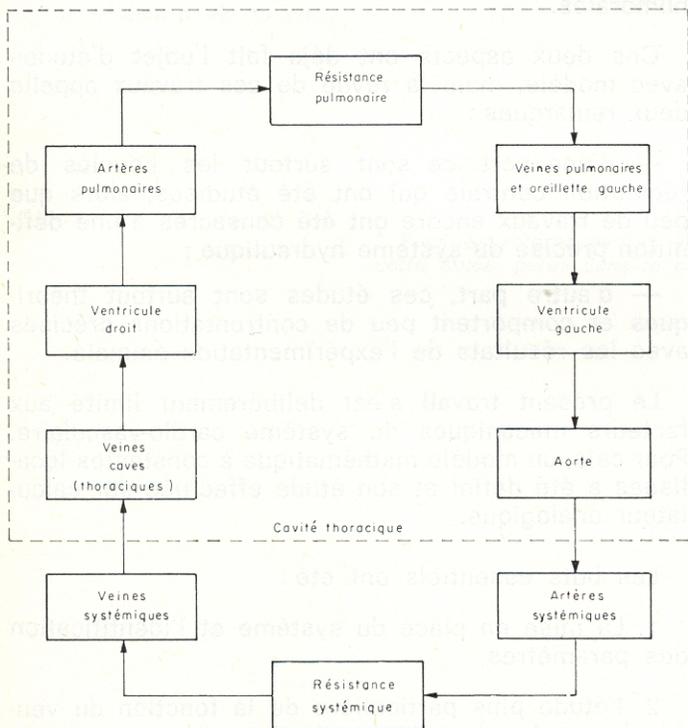


Fig. 1

régulation nerveuse ou humorale, on peut admettre en première approximation que la fréquence cardiaque ne dépend pas des paramètres mécaniques de la boucle, elle devient donc variable indépendante.

2.2. Description mathématique

2.2.1. FONCTIONNEMENT DES VAISSEAUX

L'étude étant centrée sur le fonctionnement des ventricules, les différents blocs vasculaires sont supposés à constantes localisées. Dans ces conditions, l'écoulement sanguin dans un tel bloc peut être décrit par:

a) une équation de continuité:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t (Q_1 - Q_2) dt \quad (1)$$

traduisant les hypothèses du sang incompressible et de l'absence de fuites au travers des parois (ce qui est admissible si l'horizon d'observation est limité à quelques minutes).

V est le volume du lit vasculaire considéré
 Q_1 et Q_2 sont les débits d'entrée et de sortie.

b) une équation de mouvement:

$$P_1 - P_2 = R Q_1 + L \frac{\partial Q_1}{\partial t} \quad (2)$$

P_1 et P_2 sont les pressions à l'entrée et à la sortie du lit vasculaire. Dans cette équation, R est la résistance visqueuse à l'écoulement et L l'inertance de la colonne sanguine en mouvement.

c) Les relations pression-volume dans un lit vasculaire ont l'allure donnée à la figure 2. Nous pouvons écrire une troisième équation pour de petites variations autour du point de fonctionnement moyen:

$$P = \frac{1}{C} (V - V_r) \quad (3)$$

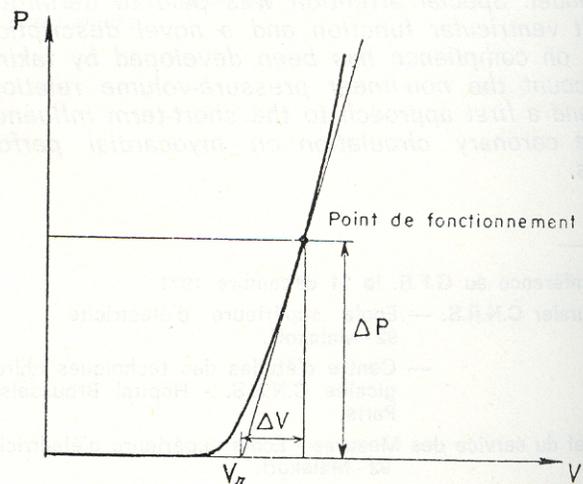


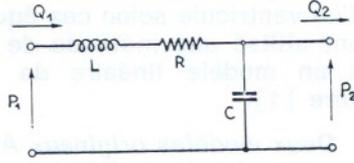
Fig. 2

ARTERES

$$V = V_0 + \int_0^t (Q_1 - Q_2) dt$$

$$P = \frac{1}{C} (V - V_r)$$

$$P_1 - P_2 = R Q_1 + L \frac{dQ_1}{dt}$$

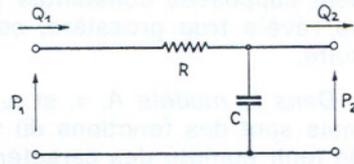


VEINES

$$V = V_0 + \int_0^t (Q_1 - Q_2) dt$$

$$P = \frac{1}{C} (V - V_r)$$

$$P_1 - P_2 = R Q_1$$



RESISTANCE SYSTEMIQUE

$$P_1 - P_2 = R Q_1$$

$$= R Q_2$$

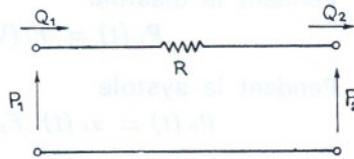


Fig. 3

La compliance C est donc la pente de cette courbe au point de fonctionnement et V_r est le volume résiduel des vaisseaux considérés.

Pour simplifier encore cette description du fonctionnement des vaisseaux, l'hypothèse suivante est faite :

Les paramètres R, L, C, V_r sont supposés constants et indépendants de la fréquence, de la pression, du volume. C'est-à-dire, que le système vasculaire est considéré comme étant linéarisé.

D'autre part, les débits instantanés étant beaucoup plus faibles dans les réseaux veineux que dans les vaisseaux artériels, l'inertance y sera négligée devant la résistance visqueuse à l'écoulement. De même, dans les réseaux artériolocapillaires qui constituent l'essentiel des résistances systémique et pulmonaire, survient essentiellement une chute de pression en phase avec le débit et la compliance y sera négligée. Nous obtenons donc trois types d'équations auxquelles correspondent trois analogues électriques (figure 3).

2.2.2. FONCTIONNEMENT DES VENTRICULES

Les ventricules sont des organes dont le fonctionnement est plus complexe que celui des vaisseaux et auxquels ne peuvent être appliquées les méthodes ayant servi pour ces derniers. En effet, la forme du ventricule est complexe et le jeu des valves introduit des non-linéarités.

On peut toutefois admettre qu'il n'y a pas de fuite au travers de la paroi myocardique, et l'équation de continuité (1) est alors valable pour le ventricule.

Pour décrire le fonctionnement, les débits d'entrée et de sortie sont supposés suivre des lois analogues à celles des vaisseaux (équation 2). Pour simplifier la représentation, elles sont linéarisées, c'est-à-dire que L et R sont supposés indépendants de la fréquence, du volume et de la pression. Il faut toutefois tenir compte des non-linéarités introduites par les valves et de l'état différent dans lequel se trouve le myocarde, selon que le ventricule se remplit (diastole) ou qu'il se contracte (systole). L'équation (2) devient donc pour un ventricule :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \frac{P_1 - P}{R_{VD}} \text{ si } P_1 \geq P \\ Q_1 = 0 \text{ si } P_1 < P \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = \frac{P - P_2}{R_{VA}} - \frac{L}{R_{VS}} \frac{dQ_2}{dt} \text{ si } P \geq P_2 \\ Q_2 = 0 \text{ si } P < P_2 \end{array} \right. \quad (5)$$

Le remplissage se faisant à basse pression, les phénomènes d'inertie sont négligés devant la résistance à l'écoulement pendant la diastole.

L'action de pompage du cœur est décrite en considérant qu'elle peut être décomposée en quatre phases :

- 1° Une phase de remplissage sous l'action de la pression veineuse pulmonaire (puisque la contribution active des oreillettes est négligée dans notre modèle).
- 2° Une phase de contraction à volume constant (toutes valves fermées), le sang étant supposé incompressible.
- 3° Une phase d'éjection, la pression ventriculaire étant supérieure à la pression aortique. (Valves aortiques ouvertes).

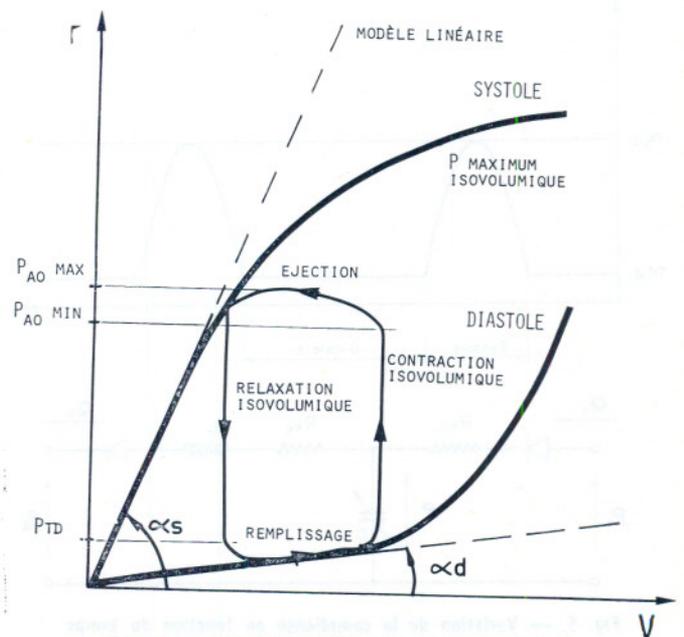


Fig. 4. — Relation pression-volume d'un ventricule

aiguës à thorax ouvert ont permis de relever les valeurs des pressions dans les diverses cavités vasculaires et cardiaques, la vitesse du sang dans l'aorte initiale (par débitmétrie électromagnétique) dont l'intégration fournit $Q_{VG.AO}$, et les variations instantanées du diamètre transversal du V.G. (par méthode ultrasonore).

b) Une série expérimentale de *cœurs isolés* placés en circulation parabolotique a été effectuée par S. Hagl et est rapportée par ailleurs [4]. Dans ces conditions particulières l'aorte et les artères coronaires sont irriguées à pression ajustable. Le cœur bat à fréquence spontanée régulière, n'effectuant qu'un travail de pression, sans éjection (contraction « isovolumique »). Un ballon introduit dans la cavité ventriculaire et rempli de liquide permet d'imposer le volume intracavitaire. Les fonctions F_1 , F_2 et F_3 ont été identifiées à partir de cette série expérimentale.

Seules les inertances $L_{VG.AP}$, $L_{AO.AS}$, $L_{VD.AP}$ n'ont pas été calculées à partir des données dont nous disposons. Les paramètres étant localisés, les valeurs ne peuvent être calculées à partir des dimensions vasculaires ; elles ont donc été ajustées sur le calculateur de façon à obtenir des courbes correctes de pressions, débits et volume.

Les unités adoptées pour la suite de ce travail sont, pour plus de commodité, celles utilisées par les médecins. (Pressions en mm Hg, volume en ml et débits en ml/s).

Les réponses du modèle ont été relevées autour d'une condition *moyenne de fonctionnement* estimée « normale » pour un chien de 20 kg.

Remarques :

1. Par opposition avec les identifications de processus plus habituelles, on peut expérimentalement avoir une approche directe de nombreuses grandeurs à divers niveaux du système cardio-circulatoire. L'ensemble du système ne se présente donc pas comme une « boîte noire » dont seules sont accessibles l'entrée et la sortie. Par exemple, pour le bloc artériel pulmonaire, connaissant le débit moyen de la pression artérielle pulmonaire instantanée, on identifie très simplement la résistance et la compliance. Dans certaines conditions expérimentales, il est en outre possible de modifier certaines grandeurs indépendamment les unes des autres.

2. Tous les paramètres ne sont cependant pas accessibles et en particulier chez un même animal. La multiplication des expérimentations fournit des résultats numériques très dispersés, dont la normalisation n'est pas évidente. Aussi est-on souvent conduit à des approximations par rapprochement des résultats personnels et de ceux de la littérature. Mais il apparaît qu'une marge assez large est possible pour l'évaluation numérique de certains paramètres (en particulier les caractéristiques des compartiments veineux) sans modifier la valeur des réponses d'ensemble du système.

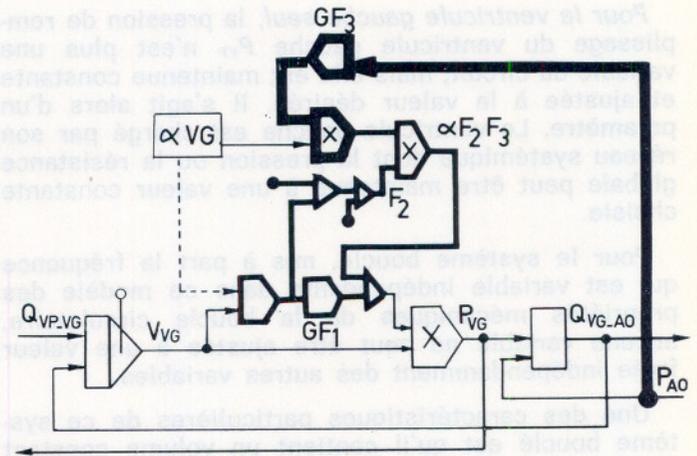


Fig. 6. — Schéma de câblage pour la résolution du système d'équations de la fonction ventriculaire gauche

2.4. Résolution du système d'équations

L'ensemble du modèle comporte un système de 30 équations dont la plupart sont différentielles du premier ordre.

L'adaptation du système d'équations à la programmation du calculateur analogique se fait à l'aide de facteurs d'échelle. Cette mise à l'échelle est effectuée ici sans grandes difficultés puisque l'on connaît les ordres de grandeur des différentes variables.

Le calculateur utilisé est un calculateur analogique d'enseignement fabriqué à l'Ecole supérieure d'électricité et qui permet d'obtenir une précision suffisante compte-tenu de la nature du problème étudié, pour un prix de revient particulièrement bas. La seule opération susceptible de créer quelques difficultés est la multiplication des deux fonctions α_{VG} et V_{VG} au niveau du ventricule gauche. En effet, la dynamique de la pression ventriculaire gauche est telle que l'on doit utiliser un facteur d'échelle important. L'utilisation d'un multiplieur relativement plus performant que l'ensemble des autres éléments a permis de conserver la précision initiale du calculateur.

Les résultats sont illustrés sur la figure 6 où apparaît le schéma de câblage du calculateur pour le seul ventricule gauche.

2.5. Conditions d'étude

Les résultats sont illustrés sur la figure 6 où apparaît :

- d'une part, pour le ventricule gauche seul (« système en boucle ouverte »),
- d'autre part, pour le ventricule gauche inclus dans l'ensemble de la boucle circulatoire (« système bouclé »). (*)

(*) Pour l'étude du système bouclé, le modèle A a été appliqué au ventricule droit.

aiguës à thorax ouvert ont permis de relever les valeurs des pressions dans les diverses cavités vasculaires et cardiaques, la vitesse du sang dans l'aorte initiale (par débitmétrie électromagnétique) dont l'intégration fournit $Q_{VG.AO}$, et les variations instantanées du diamètre transversal du V.G. (par méthode ultrasonore).

b) Une série expérimentale de *cœurs isolés* placés en circulation parabolique a été effectuée par S. Hagl et est rapportée par ailleurs [4]. Dans ces conditions particulières l'aorte et les artères coronaires sont irriguées à pression ajustable. Le cœur bat à fréquence spontanée régulière, n'effectuant qu'un travail de pression, sans éjection (contraction « isovolumique »). Un ballon introduit dans la cavité ventriculaire et rempli de liquide permet d'imposer le volume intracavitaire. Les fonctions F_1 , F_2 et F_3 ont été identifiées à partir de cette série expérimentale.

Seules les inertances $L_{VG.AP}$, $L_{AO.AS}$, $L_{VD.AP}$ n'ont pas été calculées à partir des données dont nous disposons. Les paramètres étant localisés, les valeurs ne peuvent être calculées à partir des dimensions vasculaires ; elles ont donc été ajustées sur le calculateur de façon à obtenir des courbes correctes de pressions, débits et volume.

Les unités adoptées pour la suite de ce travail sont, pour plus de commodité, celles utilisées par les médecins. (Pressions en mm Hg, volume en ml et débits en ml/s).

Les réponses du modèle ont été relevées autour d'une condition *moyenne de fonctionnement* estimée « normale » pour un chien de 20 kg.

Remarques :

1. Par opposition avec les identifications de processus plus habituelles, on peut expérimentalement avoir une approche directe de nombreuses grandeurs à divers niveaux du système cardio-circulatoire. L'ensemble du système ne se présente donc pas comme une « boîte noire » dont seules sont accessibles l'entrée et la sortie. Par exemple, pour le bloc artériel pulmonaire, connaissant le débit moyen de la pression artérielle pulmonaire instantanée, on identifie très simplement la résistance et la compliance. Dans certaines conditions expérimentales, il est en outre possible de modifier certaines grandeurs indépendamment les unes des autres.

2. Tous les paramètres ne sont cependant pas accessibles et en particulier chez un même animal. La multiplication des expérimentations fournit des résultats numériques très dispersés, dont la normalisation n'est pas évidente. Aussi est-on souvent conduit à des approximations par rapprochement des résultats personnels et de ceux de la littérature. Mais il apparaît qu'une marge assez large est possible pour l'évaluation numérique de certains paramètres (en particulier les caractéristiques des compartiments veineux) sans modifier la valeur des réponses d'ensemble du système.

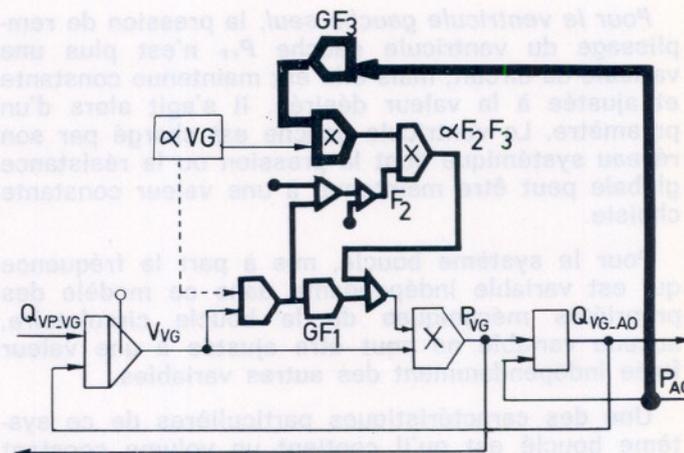


Fig. 6. — Schéma de câblage pour la résolution du système d'équations de la fonction ventriculaire gauche

2.4. Résolution du système d'équations

L'ensemble du modèle comporte un système de 30 équations dont la plupart sont différentielles du premier ordre.

L'adaptation du système d'équations à la programmation du calculateur analogique se fait à l'aide de facteurs d'échelle. Cette mise à l'échelle est effectuée ici sans grandes difficultés puisque l'on connaît les ordres de grandeur des différentes variables.

Le calculateur utilisé est un calculateur analogique d'enseignement fabriqué à l'Ecole supérieure d'électricité et qui permet d'obtenir une précision suffisante compte-tenu de la nature du problème étudié, pour un prix de revient particulièrement bas. La seule opération susceptible de créer quelques difficultés est la multiplication des deux fonctions α_{VG} et V_{VG} au niveau du ventricule gauche. En effet, la dynamique de la pression ventriculaire gauche est telle que l'on doit utiliser un facteur d'échelle important. L'utilisation d'un multiplieur relativement plus performant que l'ensemble des autres éléments a permis de conserver la précision initiale du calculateur.

Les résultats sont illustrés sur la figure 6 où apparaît le schéma de câblage du calculateur pour le seul ventricule gauche.

2.5. Conditions d'étude

Les résultats sont illustrés sur la figure 6 où apparaît :

- d'une part, pour le ventricule gauche seul (« système en boucle ouverte »),
- d'autre part, pour le ventricule gauche inclus dans l'ensemble de la boucle circulatoire (« système bouclé »). (*)

(*) Pour l'étude du système bouclé, le modèle A a été appliqué au ventricule droit.

Pour le ventricule gauche seul, la pression de remplissage du ventricule gauche P_{VP} n'est plus une variable du circuit, mais elle est maintenue constante et ajustée à la valeur désirée. Il s'agit alors d'un paramètre. Le ventricule gauche est chargé par son réseau systémique dont la pression ou la résistance globale peut être maintenue à une valeur constante choisie.

Pour le système bouclé, mis à part la fréquence qui est variable indépendante dans ce modèle des propriétés mécaniques de la boucle circulatoire, aucune variable ne peut être ajustée à une valeur fixée indépendamment des autres variables.

Une des caractéristiques particulières de ce système bouclé est qu'il contient un volume constant de sang. Les propriétés observées pour les deux cœurs droit et gauche en boucle ouverte doivent apparaître modifiées dans le système bouclé dans lequel toute augmentation du volume sanguin d'un bloc se fait au détriment du volume des autres blocs.

Deux remarques s'imposent à ce propos :

Ces deux types d'étude correspondent bien aux modèles expérimentaux :

- Les préparations de cœur isolé sont bien identifiables à la simulation du ventricule gauche seul.
- L'étude du cœur in situ correspond au « système bouclé », en remarquant que, dans les conditions d'anesthésie profonde, l'action des régulations centrales peut être considérée comme minime, ce qui répond aux limitations de notre étude.

3. RESULTATS

3.1. Influence de la fréquence cardiaque sur le système bouclé

La fréquence, variable indépendante dans le modèle, varie de 1 à 5 Hz autour de sa valeur normale (3 Hz), tous les autres facteurs étant inchangés. Dans ces conditions, étudiées pour le modèle A, le volume éjecté par coup décroît constamment lorsque la fréquence augmente, les pressions et débits augmentent, passent par un maximum et décroissent rapidement (figure 7).

Cette figure montre qu'une augmentation de la fréquence cardiaque de 1 à 5 Hz ne s'accompagne que d'une augmentation de 30 à 68 ml/s du débit moyen, ce qui est en accord avec les données expérimentales établissant que la seule fréquence cardiaque n'est pas un moyen suffisant pour agir sur le débit de sortie des ventricules.

Il est intéressant de noter la présence d'un maximum du débit d'éjection du ventricule en fonction de la fréquence : celui-ci est situé plus haut que la fréquence « normale » de fonctionnement du ventricule, mais les propriétés électriques du myocarde et le réseau coronaire ne sont pas représentés dans ce modèle. Leur action conjointe aurait pour effet de

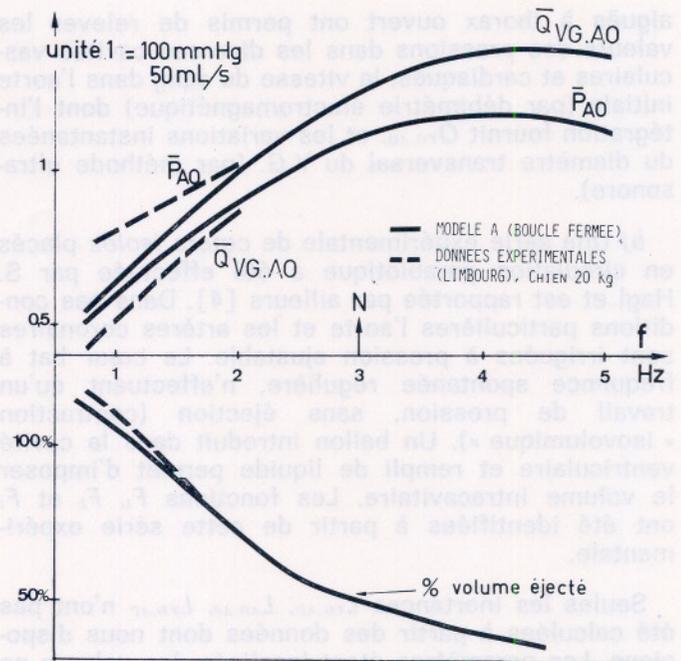


Fig. 7. — Débit cardiaque, Pression aortique moyenne et % volume éjecté en fonction de la fréquence cardiaque

déplacer ce maximum vers les fréquences basses en altérant les possibilités de contraction du myocarde aux fréquences élevées.

Les résultats fournis par le calculateur pour le système bouclé peuvent être comparés précisément à ceux d'expérimentation in vivo, par exemple à ceux récemment publiés par Limbourg [5] sur des chiens anesthésiés à thorax fermé chez lesquels la fréquence cardiaque était artificiellement imposée entre 40 et 130 pulsations à la minute. La comparaison est significative car les débits sont normés par rapport aux poids des animaux et il est donc facile de les ramener au poids du chien simulé (figure 7).

Les chiens utilisés par Limbourg avaient une fréquence au repos relativement basse (1 Hz environ), si bien que les courbes ne recouvrent pas entièrement la gamme des fréquences que nous avons explorée.

Compte tenu de la dispersion entre les différents individus d'une même population en biologie, nous constatons une bonne concordance entre ces différents résultats : les pentes des courbes de pression aortique et de débit sont égales et les courbes de pourcentage du volume éjecté coïncident sensiblement.

3.2. Influence de la résistance systémique sur le ventricule gauche isolé

C'est essentiellement la réponse aux variations de la résistance systémique qui a été étudiée, la fréquence cardiaque et la pression veineuse de remplissage étant ajustées à des valeurs constantes.

Pour le modèle A, dans ces conditions, le volume télédiastolique reste constant, ce qui est normal, la phase de remplissage n'étant pas sensiblement affectée par la charge. Lorsque la résistance croît, les pressions augmentent et le débit moyen d'éjection décroît. Il est possible de comparer les résultats fournis par le calculateur à des résultats d'expérimentation in vivo : Beneken [3] et Sagawa [7] ont étudié les mêmes grandeurs hémodynamiques (pression veineuse pulmonaire, pression aortique, débit de sortie du ventricule gauche) sur des préparations de cœur isolé de chien. Leurs résultats sont présentés sous la forme de courbes reliant le débit moyen d'éjection à la pression veineuse de remplissage pour différentes pressions aortiques. La figure 8 présente ces résultats comparativement aux résultats obtenus sur notre modèle, et donne une relation fournie dans les mêmes conditions avec le modèle linéaire : alors que le modèle linéaire donne une réponse incorrecte, le modèle A reproduit bien la saturation du débit observée pour les fortes pressions de remplissage, et le niveau de saturation varie avec la pression aortique. Compte tenu des différences de poids entre les chiens qui entraînent des différences de pente entre les courbes, la concordance est très acceptable entre les courbes réelles et les courbes fournies par le modèle A.

Les courbes reliant le débit moyen d'éjection à la pression aortique moyenne peuvent être tracées pour différentes pressions veineuses pulmonaires : une famille de droites est obtenue (figure 9). Dans le domaine des pressions aortiques faibles, un désaccord apparaît avec les courbes réelles publiées par Sagawa [7] et Beneken [3] qui présentent une satu-

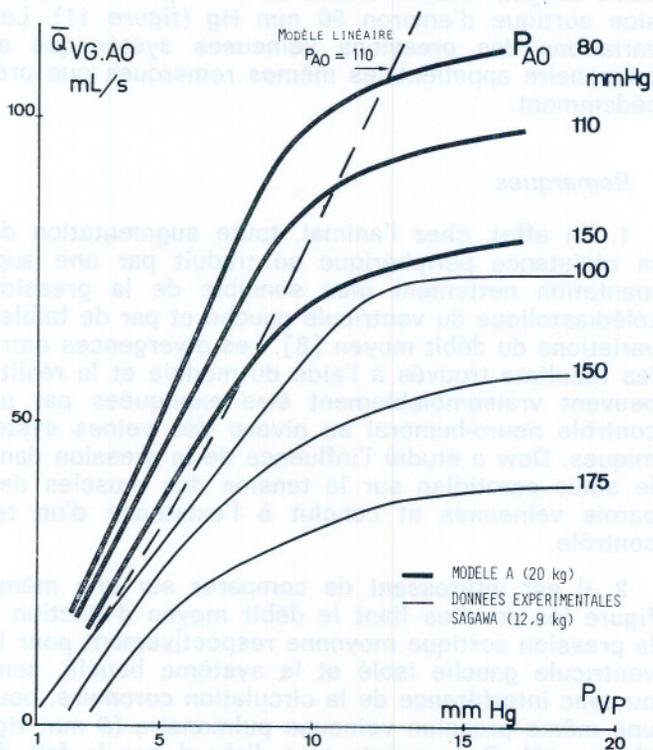


Fig. 8 — Débit cardiaque en fonction de la pression veineuse pulmonaire dans un système ouvert (modèle A)

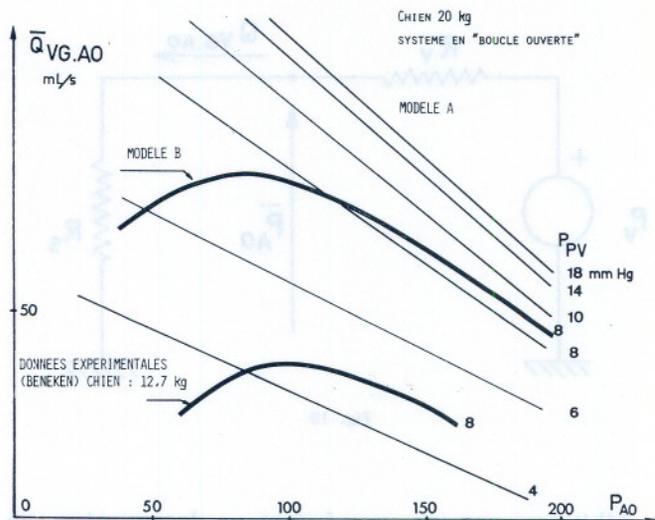


Fig. 9

ration et même un maximum dans cette zone. Cette divergence a été attribuée à l'influence du réseau coronaire, dont le modèle B s'est efforcé de rendre compte.

Modèle B : les résultats fournis par le calculateur permettent de tracer, pour la pression veineuse pulmonaire « normale », la courbe reliant le débit moyen d'éjection à la pression aortique moyenne (figure 9). Pour les pressions aortiques supérieures à la pression normale (110 mmHg), la courbe est peu modifiée et présente sensiblement la même pente. Par contre, pour les pressions aortiques inférieures à la pression aortique normale, elle diffère largement : la courbe obtenue avec une simulation de l'influence du réseau coronaire présente un maximum puis une décroissance marquée lorsque la pression aortique décroît.

Sur cette même figure est rapportée une courbe obtenue par Beneken [3] pour un chien de 12,7 kg. La différence de poids explique la différence de débit pour une même pression aortique moyenne. A cette restriction près, la coïncidence est bonne entre les courbes.

Remarques

Pour le modèle A, il est intéressant de remarquer que, lorsque la résistance systémique passe de la moitié au double de sa valeur normale, la pression aortique moyenne passe de 65 à 157 mm Hg, alors que le débit moyen ne décroît que de 86 à 56 ml/s.

Si on prend comme analogue électrique simplifié du ventricule gauche en régime établi une source de tension de valeur constante (pour une pression veineuse pulmonaire de remplissage constante), de résistance interne R_i , chargée par une résistance R_s (figure 10), on voit qu'au voisinage du point de fonctionnement normal, R_i vaut environ le double de R_s . Ceci suggère que, dans les conditions normales de fonctionnement, le ventricule associé à son réseau systémique se comporte plus comme un générateur

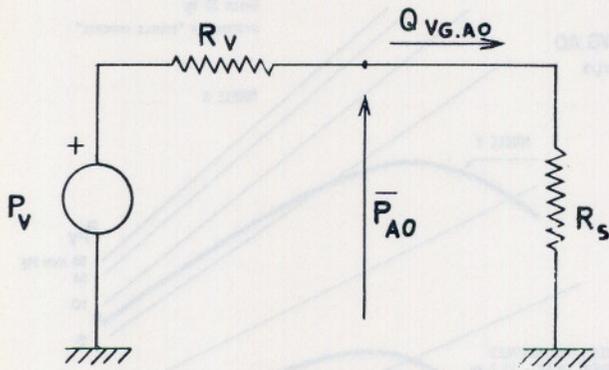


Fig. 10

de débit que comme un générateur de pression, ce qui rejoint les résultats publiés par Robinson [6] dont la représentation du fonctionnement ventriculaire était notablement différente de la nôtre.

Un des problèmes auxquels s'était heurté Robinson lors de l'élaboration de son modèle était celui du phénomène décrit par Sarnoff sous le nom de « régulation homéométrique ».

Cet auteur avait mis en évidence le fait que le ventricule effectue un plus grand travail d'éjection (défini comme étant le produit de la pression et du volume éjecté par coup) à partir de la même augmentation du volume télédiastolique (donc de la pression veineuse pulmonaire) lorsque cette augmentation se fait à débit constant plutôt qu'à pression aortique constante.

Cette particularité apparaît dans notre modèle. En effet, une augmentation de pression veineuse pulmonaire de 2 mm Hg à partir de l'état normal amène dans le premier cas une augmentation de travail double du second cas. Cette « régulation homéométrique » pourrait donc n'être que la conséquence de cette propriété du ventricule d'être plus un générateur de débit qu'un générateur de pression.

3.3. Influence de la résistance systémique sur le système bouclé

Tous les paramètres du système cardio-vasculaire sont fixés à leur valeur normale et seule la résistance systémique est variée. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 11.

Pour le modèle A, on constate que, lorsque R_s augmente, le débit moyen diminue, la pression aortique croît au détriment de la pression dans les veines systémiques. La pression veineuse pulmonaire croît avec la résistance systémique, alors que la pression artérielle pulmonaire décroît. Ceci a pour effet d'augmenter le volume télédiastolique du ventricule et donc de limiter la diminution du débit due à l'augmentation de résistance. Il y a donc un transfert de sang qui s'effectue aux dépens des veines systémiques et des artères pulmonaires vers les veines pulmonaires et les artères systémiques.

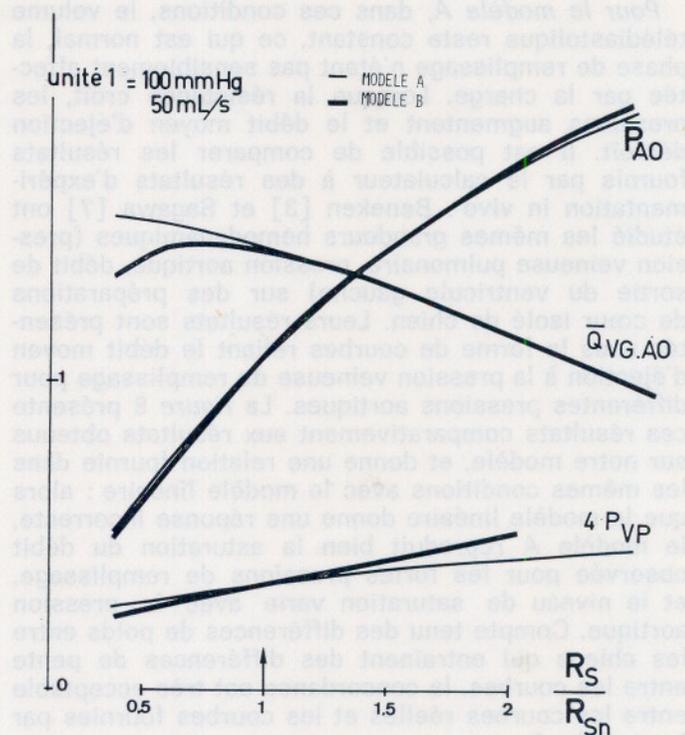


Fig. 11. — Pression aortique moyenne, débit cardiaque et pression veineuse pulmonaire en fonction de la résistance systémique dans le système bouclé

Pour le modèle B, la seule différence sensible avec les résultats du modèle A apparaît dans le domaine des basses pressions aortiques : un maximum du débit sanguin moyen existe en effet pour une pression aortique d'environ 90 mm Hg (figure 11). Les variations des pressions veineuses systémiques et pulmonaires appellent les mêmes remarques que précédemment.

Remarques

1. En effet, chez l'animal, toute augmentation de la résistance périphérique se traduit par une augmentation nettement plus sensible de la pression télédiastolique du ventricule gauche et par de faibles variations du débit moyen [8]. Les divergences entre les résultats trouvés à l'aide du modèle et la réalité peuvent vraisemblablement être expliquées par un contrôle neuro-humoral au niveau des veines systémiques. Dow a étudié l'influence de la pression dans le sinus carotidien sur la tension des muscles des parois veineuses et conclut à l'existence d'un tel contrôle.

2. Il est intéressant de comparer sur une même figure les courbes liant le débit moyen d'éjection à la pression aortique moyenne respectivement pour le ventricule gauche isolé et le système bouclé, sans ou avec interférence de la circulation coronaire, pour une même pression veineuse pulmonaire (8 mm Hg) (figure 12). On constate tout d'abord que le fait de boucler le système circulatoire, et donc de travailler à volume sanguin constant entraîne une stabilisation

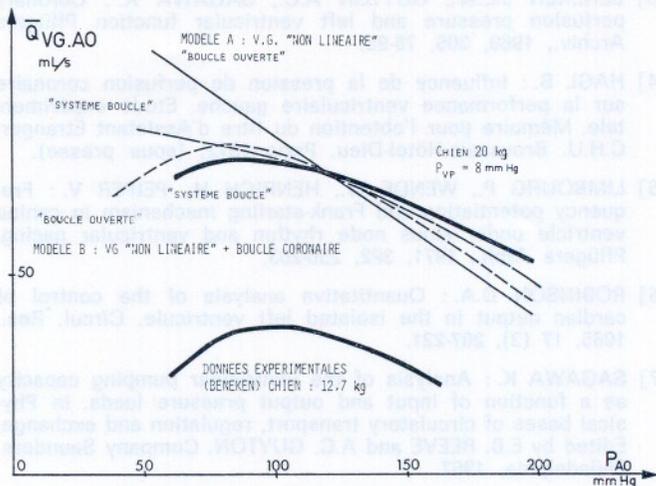


Fig. 12

du débit moyen vis-à-vis des variations de pression aortique : une variation plus faible du débit est observée lorsque le système est bouclé. D'autre part, dans la zone des pressions aortiques supérieures à 8 mm Hg, l'introduction du réseau coronaire a pour effet d'améliorer la stabilisation du débit vis-à-vis des variations de la pression aortique. Pour des pressions inférieures à 80 mm Hg, le ventricule entre en défaillance et la représentation adoptée pour le réseau coronaire ne peut nous renseigner que sur l'instant suivant immédiatement la chute de pression aortique.

4. CONCLUSION

A ce stade de l'étude, le fonctionnement du modèle, et plus particulièrement celui du modèle du ventricule gauche, apparaît relativement fidèle à la réalité. La comparaison entre les performances des systèmes bouclés (à volume sanguin total constant) et en boucle ouverte (ventricule gauche isolé) montre que les propriétés mécaniques de la boucle circulatoire suffisent à assurer, à elles seules, une relative stabilité du débit sanguin lorsque la résistance périphérique varie.

Dans sa conception d'ensemble actuelle, le modèle de la fonction ventriculaire gauche présente trois originalités :

1. Les relations pression-volume des ventricules sont non-linéaires. Cette amélioration est importante, car elle permet de rechercher les réponses ventriculaires dans la zone des pressions-volumes ventriculaires élevés.
2. L'introduction d'une boucle de réaction entre la pression aortique et la fonction ventriculaire gau-

che (circulation coronaire) permet de retrouver une bonne concordance avec les données expérimentales.

3. La confrontation avec les résultats expérimentaux a été recherchée le plus souvent possible dans l'élaboration du modèle, aussi bien pour l'identification des paramètres que pour vérifier la validité du modèle.

La vérification du degré de conformité du modèle est le deuxième aspect de la confrontation à l'expérimentation. Ici encore deux stades très différents sont à distinguer :

— L'obtention de réponses qualitativement conformes aux données expérimentales apparaît déjà comme un stade très instructif pour l'analyse des mécanismes en cause.

— Plus délicate est la définition d'une conformité quantitativement satisfaisante, qui nécessite la confrontation de diverses expériences de perturbations réglées.

La conformité satisfaisante d'un modèle ne signifie pas sa « véracité », et il ne peut de toutes façons contenir plus que ce qu'on y a mis.

Le fait, par exemple, d'avoir obtenu avec le dernier modèle, des réponses comparables aux données expérimentales n'assure pas que la définition de la fonction ventriculaire par le seul terme de compliance variable est fondamentalement vraie, ni que sa modulation en fonction de la pression de perfusion coronaire est exactement représentée. Mais, il paraît important qu'un tel modèle, même approximatif et hypothétique, puisse servir à caractériser le fonctionnement ventriculaire, puisque les paramètres caractéristiques peuvent être déduits de grandeurs mesurées à l'entrée et à la sortie. Une première approche globale de ce type présente donc un intérêt pratique certain. Alors que la recherche de caractéristiques plus élaborées, telles que la vitesse de contraction de l'élément contractile, doit passer par diverses hypothèses non directement vérifiables, la quantification de la compliance ventriculaire apparaît une voie intéressante et est envisageable par approche directe ou indirecte.

Au total, dans son état présent d'élaboration, le modèle développé apporte une contribution pratique à l'analyse de la régulation du système cardio-circulatoire. Il est important de souligner que les seules propriétés mécaniques, en tenant compte des caractéristiques propres du ventricule et de l'influence de la circulation coronaire, suffisent à assurer une relative stabilité du système et à retrouver les schémas fondamentaux de sa régulation. Le fait que les relations pression-débit du ventricule gauche soient bien retrouvées, paraît déjà important. La poursuite de ce travail avec une plus grande précision de l'identification des paramètres devrait donc permettre de développer les applications attendues dans divers domaines :

— diagnostique, par corrélation entre diverses grandeurs. Rappelons tout particulièrement l'intérêt d'une définition de la compliance ventriculaire gauche.

- *physiologique, par une définition quantitative de ces régulations.*
- *pharmacologique, la comparaison avec le modèle permettant l'analyse du point d'action des agents pharmacologiques dans la boucle cardio-vasculaire.*
- *technologique, pour la définition des caractéristiques de prothèses cardiaques.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENEKEN J.E.W. : A mathematical approach to cardiovascular function. Ph. D. Thesis, Univ. Utrecht, Netherlands, 1965.
- [2] BENEKEN J.E.W., de WIT B. : A physical approach to hemodynamic aspects of the human cardiovascular system. In physical Bases of circulatory transport, Regulation an Exchange, edited by E.B. REEVE and A.C. GUYTON. Saunders Company, Philadelphia, 1967.
- [3] BENEKEN J.E.W., GUYTON A.C., SAGAWA K. : Coronary perfusion pressure and left ventricular function Pflügers Archiv., 1969, 305, 76-95.
- [4] HAGL S. : Influence de la pression de perfusion coronaire sur la performance ventriculaire gauche. Etude expérimentale. Mémoire pour l'obtention du titre d'Assistant Étranger, C.H.U. Broussais-Hôtel-Dieu, Paris 1972, (sous presse).
- [5] LIMBOURG P., WENDE W., HENRICH H., PEIPER V. : Frequency potentiation and Frank-Starling mechanism in canine ventricle under sinus node rhythm and ventricular pacing Pflügers Arch., 1971, 322, 250-263.
- [6] ROBINSON D.A. : Quantitative analysis of the control of cardiac output in the isolated left ventricle. Circul. Res., 1965, 17 (3), 207-221.
- [7] SAGAWA K. : Analysis of the ventricular pumping capacity as a function of input and output pressure loads. In Physical bases of circulatory transport, regulation and exchange. Edited by E.B. REEVE and A.C. GUYTON. Company Saunders, Philadelphia, 1967.
- [8] TSAKIRIS AG., DONALD D.E., RUTISHAUSER W.J., BANCHEIRO N., WOOD E.H. Cardiovascular responses to hypertension and hypotension in dogs with denervated hearts. J Appl. Physiol., USA, 1969, 27 (6), 817-821.

CONCLUSION

À ce stade de l'étude, le fonctionnement du modèle et plus particulièrement celui du modèle du ventricule gauche apparaît relativement fiable à la limite de la complexité entre les performances des systèmes boucles (le volume sanguin total constant) et en boucle ouverte (ventricule gauche isolé) contre que les propriétés mécaniques de la boucle circulatoire suffisent à assurer à elles seules une relative stabilité du débit sanguin lorsque la résistance périphérique varie.

Dans sa conception d'ensemble actuelle, le modèle de la fonction ventriculaire gauche présente trois caractéristiques :

1. Les relations pression-volume des ventricules sont non linéaires. Cette non linéarité est importante car elle permet de rechercher les réponses ventriculaires dans la zone des pressions-volume ventriculaires élevées.

2. L'introduction d'une boucle de réaction entre la pression ventriculaire et la fonction ventriculaire gauche.

- Institut National des Sciences Appliquées, Bibliothèque Centrale, 20, Avenue Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Institut National des Sciences Appliquées, Département de Génie Civil, avenue de Rangueil, 31 — Toulouse.
- Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 3, rue Fernand-Hainaut, 93 — Saint-Ouen.
- Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 9, rue La Pérouse, 75 — Paris (16^e).
- Institut Textile de France, 35, rue des Abondances, 92 — Boulogne.
- Institut Universitaire de Technologie de Belfort. Département Génie Mécanique. Rue Engel-Gros, 90 — Belfort.
- Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, bd Lefebvre, 75 — Paris (15^e).
- Laboratoire du Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, B.P. n° 27 à 60 — Creil.
- Laboratório de Engenharia de Angola, Caixa Postal 6 500 Luanda, Angola.
- Laboratoire de M. Cupcic, C.S.U., route de Laval, 72 — Le Mans.
- Laboratoire de Mécanique des Fluides, 2, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Laboratoire de Mécanique des Sols, Faculté des Sciences, Domaine Universitaire, CEDEX 83, 38 — Grenoble.
- Laboratoire de Recherches Unilever. Société Thibaud-Gibbs, 8, Impasse de la Montjoie, 93 - La Plaine St-Denis.
- Linda Hall Library, Kansas City, Mo 64110 U.S.A.
- Lhomargy, S.A., 3, bd de Bellevue, 91 — Draveil.
- Messageries du Livre, 116, rue du Bac, 75 — Paris (7^e).
- Mesure et Automatisation pour l'Industrie et la Recherche (MAIR), 9 bis av. de Lattre de Tassigny, 92 — Boulogne.
- Michelin et Cie, place des Carmes, 63 — Clermont-Ferrand.
- The Milton S. Eisenhower Library, Serials Department, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland 21218, U.S.A.
- Minerais et Métaux, Services Techniques, 28, rue Arthur-Rozier, 75 — Paris (19^e).
- Naphtachimie, Laboratoire, B.P. n° 2, à 13 - Lavera.
- National Lending Library for Science and Technology, Walton, Boston Spa (Yorkshire), Angleterre.
- National Science Library, National Research Council, Ottawa, 7, Ont. Canada.
- Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, av. de la Division Leclerc, 92 — Châtillon.
- L'Oréal, 1, avenue Saint-Germain, 93 — Aulnay-sous-Bois.
- Orta Dogu Teknik Universitesi, Engeenering Fakultesi, Ankara, Turquie.
- Pechiney-Saint-Gobain, Centre de Recherches, 12, rue des Gardinoux, 93 — Aubervilliers.
- Ponts et Chaussées, Service Documentation, B.P. 48, 69 — Bron.
- Produits Chimiques Pechiney-Saint-Gobain, 63, rue de Villiers, 92 — Neuilly-sur-Seine.
- Régie Nationale des Usines Renault, 10, avenue Emile-Zola, 92 — Billancourt.
- Rijksinstituut voor Grondmechanica, Hertogsstraat 89, Brussel, Belgique.
- Sangamo Controls Limited, North Bersted, Bognor Regis, Sussex, Angleterre.
- Service ERNUTH, Direction des Etudes et Recherches, E.D.F., Centre des Renardières, 77 — Ecuelles.
- Service Etudes Physiques, Société Rhodiacéta, 45, rue Sergent-Michel-Berthet, 69 — Lyon (9^e).
- Service d'Etudes sur la Séparation des Isotopes de l'Uranium, Centre d'Etudes Nuciéaires de Saclay, B.P. n° 2, 91 — Gif-sur-Yvette.
- SICPA France, B.P. n° 66, 74 — Annemasse.
- Société Anonyme Jean Lamy et Cie, 19, av. Barthélémy-Thimonnier, 69 - Caluire.
- Société Commerciale Paulstra, Laboratoire Central, Route de Périn-gondas, 28 — Châteaudun.
- Société d'Equipement Industriel Electro-Mécanique, 8, rue Polonceau, 75 — Paris (8^e).
- Société Ethylène-Plastique, Centre de Recherches, B.P. n° 1, 62 — Mazingarbe.
- Société Kléber-Colombes, 49, rue Jean-Jaurès, 95 — Bezons.
- Société Minière et Métallurgique de Penaroya, 1, bd de Vaugirard, 75 — Paris (15^e).
- S.N.C.F. Direction des Installations Fixes, 42, rue de Châteaudun, 75 — Paris (9^e).
- Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, Centre de Recherches de Lacq, B.P. n° 34, 64 — Lacq.
- Société Rhône-Poulenc, Atelier d'Applications de Vénissieux, 11, avenue de la République, 69 — Vénissieux.
- Techn. Hogeschool, Bibliotheek, Weg — en Waterbouwkunde, Oost-plantsoen 25, Delft (Hollande).
- Unilever Research Laboratory, The Frythe, Welwyn, Hertfordshire, (Angleterre).