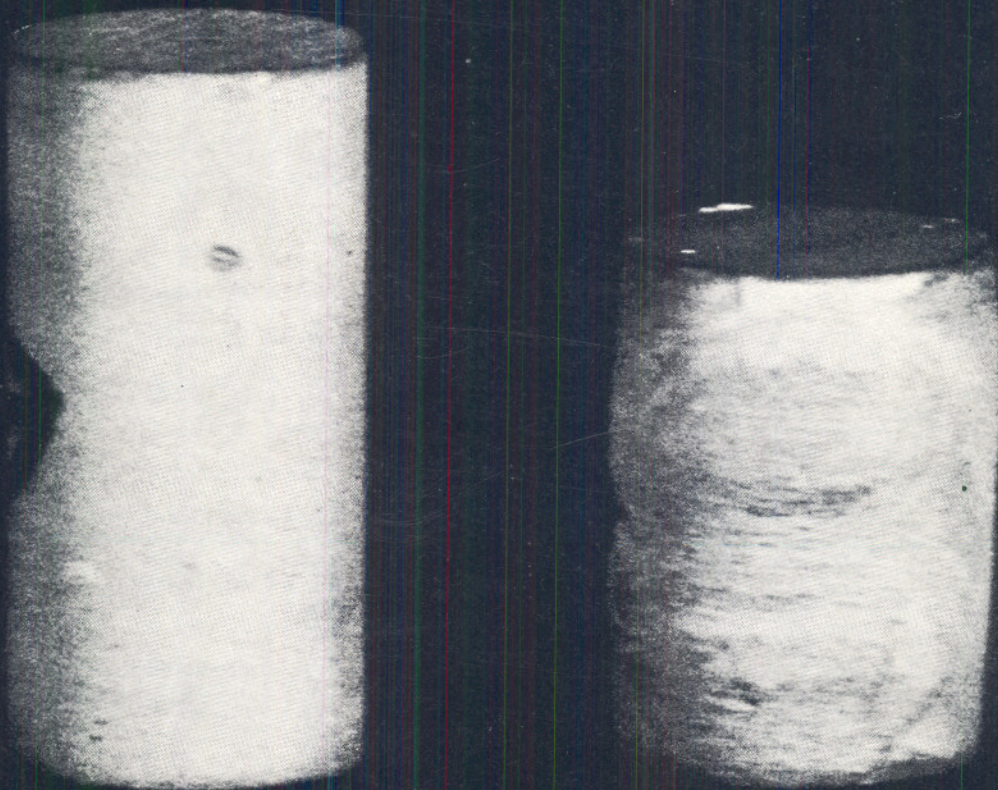


# industrie **minérale**

CAHIERS  
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME III - NUMÉRO 3



Numéro spécial du 15 novembre 1973

**COLLECTIVITES MEMBRES  
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE**

- Aquitaine-Organico. Laboratoire d'Applications de Serquigny, 27 — Serquigny.
- Bassin d'Essais des Carènes, 6, bd Victor, 75 — Paris (15°).
- Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., quai Anatole France, 75 - Paris (7°).
- Bibliothèque de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines, 60, bd St Michel, 75 - Paris (6°).
- CEDOCAR, Bibliothèque Centrale, 2, av. de la Porte d'Issy, 75 - Paris (15°).
- Centre d'Essais et de Recherches Techniques des Tabacs, B.P. n° 2, 45 — Fleury-les-Aubrais.
- Centre d'Etudes du Bouchet (Direction des Poudres), 91 - Vert-le-Petit.
- Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75 — Paris (13°).
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75 — Paris (8°).
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75 — Paris (15°).
- Centre de Mathématique et Calcul de l'I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Centre de Recherches, C.E.R.C.A., 26 — Romans-sur-Isère.
- Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Centre de Recherches Routières. Fokkerdreef 21, 1960 — Sterrebeek, Belgique.
- Centre Technique du Cuir, 181, av. Jean-Jaurès, 69 — Lyon (6°).
- Centre Technique des Industries Mécaniques, C.D.M., B.P. 67, 60 — Senlis.
- Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses GEDEX n° 175, 38 — Grenoble-Gare.
- Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, av. Hoche, 75 — Paris (8°).
- Chemistry and Physics Library, 303 Whitmore Laboratory, Pennsylvania State University, University Park, Penn. 16 802, USA.
- Compagnie Française de Raffinage, Centre de Recherches, B.P. n° 27, 76 — Harfleur.
- Compagnie Péchiney, 23, rue Balzac, 75 — Paris (8°).
- Compagnie de Raffinage Shell-Berre, Centre de Recherches, 76 — Grand Couronne.
- Compagnie de Saint-Gobain, Direction des Recherches, Laboratoires Scientifiques, 52, bd de la Villette, 75 — Paris (19°).
- Département Génie Civil et Urbanisme, I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Département Génie Civil, I.N.S.A., 20, Buttes-de-Coësmes, 35 — Rennes.
- Direction des Recherches et Moyens d'Essais, 5 bis, avenue de la Porte de Sèvres, 75 — Paris (15°).
- Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de Mécanique des Sols, 92 — Châtenay-Malabry.
- Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Bibliothèque, 151, bd de l'Hôpital, 75 — Paris (13°).
- Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne. Département de Métallurgie, 158 bis, cours Fauriel, 42 — Saint-Etienne.
- Ecole Polytechnique, Bibliothèque, C.P. 501, Snowdon, Montréal 248, Canada.
- Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Service Documentation, 6, quai Watier, 78 — Chatou.
- Electricité de France, Service Géologique et Géotechnique, 3, rue de Messine, 75 — Paris (8°).
- Electricité de France, SEPTEN, 17, av. de la Libération, 92 — Clamart.
- ESSO-Standard, S.A.F., Centre de Recherches de Mont-Saint-Aignan, 76 — Mont-Saint-Aignan.
- Faculté des Sciences. Laboratoire de Mécanique. Route de Chauvigny, 86 — Poitiers.
- Fédération des Fabricants de Peintures, Vernis et Encres d'Imprimerie, Laboratoire des Peintures et Vernis, rue H.-Dunant, 94 — Thiais.
- Filial Biblioteki, Akademii Nauk SSSR, Baltijskaja ul. 14 Moscou A-219, U.R.S.S.
- Institut Français du Pétrole, Dir. Doc. Inf. 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92 — Rueil-Malmaison.
- Institut Franco-Américain de Recherches de Saint-Louis, 12, rue de l'Industrie, 68 — Saint-Louis.
- Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Camichel, 31 — Toulouse.
- Institut de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Académie Tchèqueoslavaque des Sciences, Vysehradská 49, Praha 2, Nové Mesto, Tchèqueoslavaquie.
- Institut National de la Recherche Agronomique, Etoile de Choisy, 78 — Versailles.

CAHIERS  
DU  
GROUPE FRANÇAIS  
DE RHÉOLOGIE

Tome III – Numéro 3

15 novembre 1973

Edité par la Revue de l'Industrie Minérale  
19, rue du Grand-Moulin — 42000 Saint-Etienne

## sommaire

J.-D., WEBER

*Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse.....* 99

A. ZAOUÏ

*Etude de quelques phénomènes viscoplastiques transitoires de polycristaux métalliques en traction simple (modèle statistique et confrontation avec l'expérience) .....* 104

J.-C. PAISANT

*Aspect rhéologique du gonflement d'une membrane en caoutchouc. Mesure des configurations de forme .....* 111

J.-M. TATRAUX-PARO

*Théories du frottement d'adhésion viscoélastique par des processus de rupture d'agrégats moléculaires .....* 123

C. HUET

*Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux.  
Première partie : Bases théoriques .....* 128

### Photographie de la couverture

*Eprouvette de terre cuite avant et après essai triaxial sous pression de confinement égale à 100 bars. On distingue un double effet tonneau perpendiculaire au plan de figure, limité par la trace sur le cylindre de plans de glissement (Essai exécuté par le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique ; cliché Centre technique des tuiles et briques).*

# Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse\*

par J.-D. WEBER

Faculté des Sciences de Metz

## RESUME

Des essais de traction simple avec saut de vitesse permettent de montrer que le comportement rhéologique non-linéaire d'un polyéthylène, pour

$0 \leq \varepsilon \leq 0,35$  et  $10^{-4} \text{ sec}^{-1} \leq |\dot{\varepsilon}| \leq 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$  peut être représenté par l'équation

$$\dot{\sigma} = a(\varepsilon, \sigma) \dot{\varepsilon} + b(\varepsilon, \sigma),$$

qui correspond à un potentiel fonction de la déformation et d'une seule variable interne. Une équation de cette forme, déjà utilisée dans le cas des métaux semble pouvoir être appliquée aux déformations finies de nombreux matériaux, dans un domaine de vitesses convenablement limité ; par contre l'emploi d'équations rhéologiques correspondant à 2, 3, ...N variables internes soulève de grandes difficultés pratiquées pour des matériaux à comportement non-linéaire.

## SUMMARY

Simple tension tests with discontinuous strain rates show that the non-linear rheological behaviour of polyethylene, when

$0 \leq \varepsilon \leq 0,35$  and  $10^{-4} \text{ sec}^{-1} \leq |\dot{\varepsilon}| \leq 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$  can be represented by the equation

$$\dot{\sigma} = a(\varepsilon, \sigma) \dot{\varepsilon} + b(\varepsilon, \sigma)$$

which corresponds to a potential function depending on the deformation and on a single internal variable. Such an equation, which has been used in the case of metals, should be convenient for large deformations of many materials, in some limited range of deformation rates  $\dot{\varepsilon}$ ; but the use of rheological equations corresponding to 2, 3, ...N internal variables leads to considerable practical difficulties, when the behaviour of the material is non-linear.

\* Conférence au Groupe français de Rhéologie le 1<sup>er</sup> mars 1972.

## 1. INTRODUCTION

On représente fréquemment le comportement en traction simple d'un matériau au moyen d'une formule donnant la contrainte  $\sigma$  en fonction de la dilatation  $\varepsilon$  et de sa dérivée par rapport au temps  $\dot{\varepsilon}$ , sous la forme

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (1)$$

Les quantités  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  peuvent être définies de diverses manières, qu'il convient de distinguer lorsque les déformations ne sont pas infiniment petites ; dans le présent article leur signification sera la suivante :

$\sigma = \frac{F}{s_0}$ , quotient de la force de traction  $F$  par la section *initiale*  $s_0$  de l'éprouvette ;

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ , quotient de l'allongement  $\Delta l = l - l_0$  par la longueur *initiale*  $l_0$  de l'éprouvette (distance entre les mors de la machine

d'essais). La quantité  $\dot{\varepsilon}$  est alors égale à  $\frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt}$  (et non à  $\frac{1}{l} \frac{dl}{dt}$ )

Une relation de la forme (1) est susceptible de décrire le comportement viscoélastique ou viscoplastique de n'importe quel matériau dans les essais usuels à la machine de traction, au cours desquels la vitesse d'allongement demeure constante dans chaque expérience ; la relation (1) est alors tout simplement une représentation de la famille de courbes  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  dépendant du paramètre  $\dot{\varepsilon}$ . Mais une telle représentation ne peut pas être utilisée pour calculer  $\sigma$  dans les essais au cours desquels  $\dot{\varepsilon}$  varie rapidement.

Supposons par exemple que  $\dot{\varepsilon}$  subisse une discontinuité (saut de vitesse) à l'instant  $t$  ; celle-ci devrait entraîner, d'après (1) une discontinuité de  $\sigma$ , alors qu'expérimentalement on observe une discontinuité

de  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$  et non de  $\sigma$ . En particulier la relation (1) ne rend pas compte de la relaxation progressive de la contrainte lorsqu'on interrompt brusquement la déformation ( $\dot{\varepsilon} = 0$ ).

On évite cet inconvénient en décrivant un comportement viscoélastique ou viscoplastique, dans des essais isothermes, de l'une ou l'autre des deux manières suivantes :

a) en se donnant d'une part l'expression du potentiel thermodynamique  $\Phi$  en fonction de la déformation  $\varepsilon$  et d'un certain nombre de variables internes  $p_1, p_2, \dots, p_N$  (paramètres cachés) et d'autre part une matrice  $g_{uv}$  ( $u, v = 1, 2, \dots, N$ ), symétrique et définie positive, fonction des mêmes variables.

L'évolution des  $p_u$  dans une déformation  $\varepsilon(t)$  quelconque est alors déterminée par les équations différentielles

$$\dot{p}_u = \frac{dp_u}{dt} = - \sum_{v=1}^N g_{uv} \frac{\partial \Phi}{\partial p_v} \quad (2)$$

et la contrainte correspondante est donnée par

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \quad (3)$$

b) en se donnant une équation de comportement de la forme

$$\dot{\sigma} = a(\varepsilon, \sigma) \dot{\varepsilon} + b(\varepsilon, \sigma) \quad (4)$$

ou

$$\ddot{\sigma} = a_1(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}) \dot{\varepsilon} + b_1(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}) \quad (5)$$

ou encore

$$\ddot{\sigma} = a_2(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, \ddot{\varepsilon}, \ddot{\sigma}) \dot{\varepsilon} + b_2(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, \ddot{\varepsilon}, \ddot{\sigma}) \quad (6)$$

Une équation de la forme (4) correspond d'ailleurs, dans la description a), au cas  $N = 1$ , c'est-à-dire au cas où il n'y a qu'une seule variable interne : il suffit pour le vérifier de dériver (3) par rapport au

temps, d'y reporter la valeur de  $\dot{p}_i$  tirée de (2) d'où une équation (3'), et enfin d'éliminer l'unique variable interne  $p_1$  entre les équations (3) et (3').

De même (5) correspond à  $N = 2$ , et (6) à  $N = 3$ , etc.

Notons que l'équation (4) peut encore s'écrire

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a(\varepsilon, \sigma) + \frac{b(\varepsilon, \sigma)}{\frac{d\varepsilon}{dt}} \quad (7)$$

Nous avons donné dans [6] une justification des équations (2), (3), en montrant qu'elles sont compatibles avec les principes de la thermodynamique complétés par l'hypothèse des variables internes et le principe d'Onsager [2] [4] et qu'elles sont susceptibles de représenter le comportement rhéologique de n'importe quel assemblage de ressorts et d'amortisseurs non linéaires, à l'exclusion toutefois des assemblages comportant des patins.

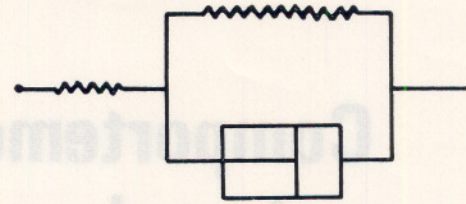


Fig. 1. — Modèle rhéologique du solide linéaire standard

Le but du présent article est de montrer par un exemple que l'introduction d'une seule variable interne permet d'interpréter certains comportements viscoélastiques non linéaires, dans les domaines de déformations et de vitesses de déformations convenablement limités. Le résultat que nous constaterons avec le polyéthylène s'appliquerait probablement à de nombreux matériaux susceptibles de recevoir de grandes déformations, et sans doute de préférence à ceux dont les déformations permanentes demeurent négligeables, c'est-à-dire dont les déformations sont viscoélastiques et non viscoplastiques (cas des elastomères par exemple) (1) ; cette dernière restriction ne semble cependant pas essentielle, car une équation rhéologique de la forme (4) a également été utilisée avec succès pour décrire la déformation viscoplastique des métaux [3].

Lorsque la fonction  $b(\varepsilon, \sigma)$  est linéaire et homogène en  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , l'équation rhéologique (4) est celle du solide linéaire standard de Zener, qui peut être représenté par le montage en série d'un ressort et d'un modèle de Kelvin (figure 1).

## 2. DESCRIPTION DES ESSAIS

Le matériau utilisé est un polyéthylène basse densité, le plastylène MA 0701 fabriqué par la Société Ethylène Plastique, qui nous a été livré sous la forme d'éprouvettes moulées représentées sur la figure 2. Les essais ont été effectués sur une machine de traction Instron à la température de 23° C.

Il y a grand avantage à utiliser la même éprouvette dans tous les essais, car on réduit ainsi la dispersion des courbes  $\sigma, \varepsilon$  correspondant à une vitesse

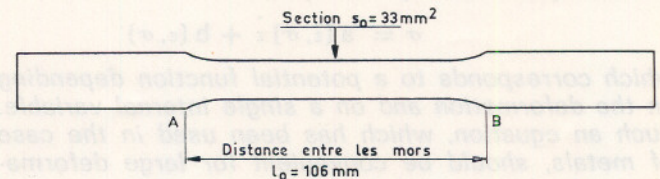


Fig. 2. — Schéma de l'éprouvette en polyéthylène

(1) Si en effet, après avoir été déformée, l'éprouvette est laissée déchargée ( $\sigma = 0$ ) pendant un temps suffisamment long,

on a  $\dot{\sigma} = \varepsilon = 0$  d'où  $b(\varepsilon, 0) = 0$  pour un matériau obéissant à (3) ; il en résulte qu'en général  $\varepsilon = 0$  puisqu'on a par ailleurs  $b(0, 0) = 0$ .

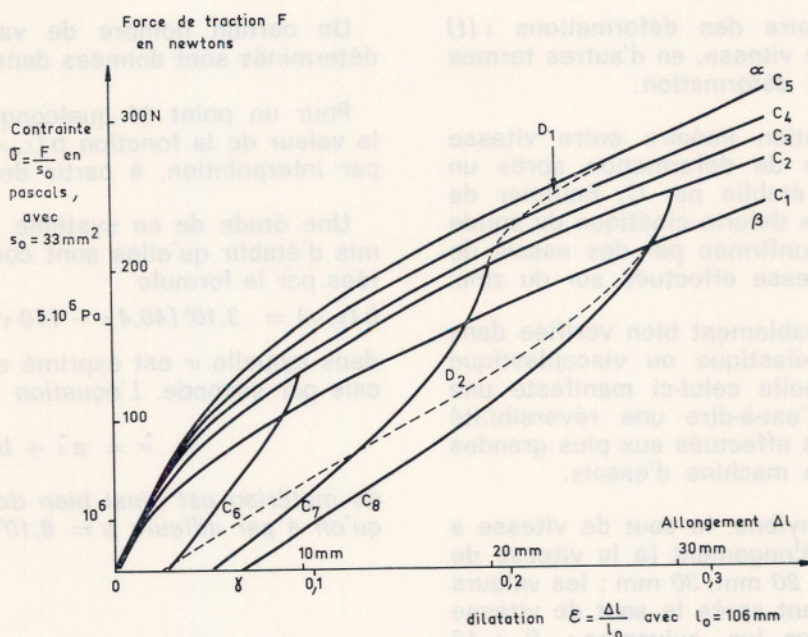


Fig. 3. — Essais de traction simple du polyéthylène

d'allongement donnée : les courbes de la figure 3 ont donc été enregistrées sur la même éprouvette.

Il faut cependant préciser que la réponse de l'éprouvette aux deux ou trois premiers allongements de 35 mm qui lui sont imposés, est légèrement différente de sa réponse aux allongements ultérieurs : le matériau a un comportement viscoplastique lors de ces premiers allongements, au cours desquels il se produit une déformation permanente de 6 %, ce qui porte à 106 mm la distance AB après suppression de la charge (figure 2 ; sur l'éprouvette mouleée non déformée, on a  $AB = 100$  mm).

Au cours des allongements ultérieurs, qui sont de 35 mm à chaque essai, il n'apparaît plus aucune déformation permanente supplémentaire<sup>(2)</sup> ; le comportement du matériau peut donc alors être considéré comme viscoélastique. Les courbes de la figure 3 sont relatives à ces allongements ultérieurs.

TABLEAU 1

	Vitesse d'allongement en mm/minute	Vitesse de dilatation en $\text{sec}^{-1}$
C <sub>1</sub>	1	1,57 $10^{-4}$
C <sub>2</sub>	5	7,86 $10^{-4}$
C <sub>3</sub>	10	1,57 $10^{-3}$
C <sub>4</sub>	20	3,14 $10^{-3}$
C <sub>5</sub>	50	7,86 $10^{-3}$
C <sub>6</sub> C <sub>7</sub> C <sub>8</sub>	— 20	— 3,14 $10^{-3}$

(2) A condition toutefois que la durée totale des essais ne dépasse pas une dizaine d'heures. Par contre, lorsque l'allongement de 35 mm est maintenu constant pendant 500 heures par exemple, il se produit une déformation permanente supplémentaire de 4 %. L'équation rhéologique à laquelle nous aboutirons ne s'applique donc pas à de tels essais de longue durée, c'est la raison pour laquelle nous limitons son domaine de validité à des valeurs (positives ou négatives) de  $\dot{\epsilon}$  telles que  $10^{-4} \text{ sec}^{-1} \leq |\dot{\epsilon}| \leq 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$ .

Précisons également qu'après chaque essai l'éprouvette déchargée est laissée au repos pendant une dizaine de minutes, ce qui lui permet de reprendre sa longueur initiale  $l_0 = 106$  mm. Les courbes C<sub>1</sub> C<sub>2</sub> ... C<sub>8</sub> de la figure 3 correspondent aux essais suivants, tableau 1.

Les courbes C<sub>6</sub> C<sub>7</sub> C<sub>8</sub> sont relatives à une phase de décharge de l'éprouvette, après un allongement initial (à la vitesse de 5 mm/minute) respectivement égal à 10 mm, 20 mm, 30 mm.

La non-linéarité du comportement du polyéthylène apparaît clairement sur cette famille de courbes : en effet, pour un matériau viscoélastique linéaire, deux courbes telles que C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> par exemple seraient homothétiques dans une homothétie de centre O et de rapport égal à celui des vitesses d'allongements, c'est-à-dire à  $\frac{1}{5}$  : les courbes C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> ne possèdent manifestement pas cette propriété.

Le coefficient  $a$  de l'équation (4) a été déterminé par des essais avec saut de vitesse, dans lesquels on a imposé à la nouvelle vitesse  $\dot{\epsilon}$  des valeurs variables d'un essai à l'autre, et mesuré la valeur correspondante de  $\dot{\sigma}$ .

Immédiatement après le saut de vitesse, la relation entre  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}$  est évidemment linéaire si le matériau obéit à l'équation (4), lorsque la déformation et la vitesse de déformation avant le saut de vitesse ont des valeurs qui ne varient pas d'un essai à l'autre.

Mais on doit noter que cette relation entre  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\epsilon}$  demeure linéaire pour un matériau dont le potentiel dépend de  $N$  variables internes [6], les coefficients  $a$  et  $b$  n'étant plus alors des fonctions de  $\epsilon$  et  $\sigma$  mais

des fonctions de l'histoire des déformations  $\varepsilon(t)$  avant l'instant du saut de vitesse, en d'autres termes des fonctionnelles de la déformation.

L'existence d'une relation linéaire entre vitesse de contrainte et vitesse de déformation après un saut de vitesse, a été établie par C. Bourcier de Carbon [1], à partir d'une théorie cinétique du solide dont il est l'auteur, et confirmée par des essais de torsion avec saut de vitesse effectués sur du zinc.

Cette relation est probablement bien vérifiée dans toute déformation viscoélastique ou viscoplastique d'un matériau dans laquelle celui-ci manifeste une élasticité instantanée, c'est-à-dire une réversibilité  $\sigma, \varepsilon$  dans les petits cycles effectués aux plus grandes vitesses que permette la machine d'essais.

Dans le cas du polyéthylène, le saut de vitesse a été provoqué après un allongement (à la vitesse de 5 mm/minute) de 10 mm, 20 mm, 30 mm ; les valeurs de la vitesse d'allongement après le saut de vitesse étaient dans chaque cas les suivantes : 0,  $\pm 10$  mm/minute,  $\pm 20$  mm/minute,  $\pm 50$  mm/minute. On

constate bien que la relation entre  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$  est linéaire ; en outre la valeur trouvée pour le coefficient  $a$  est sensiblement constante et égale à  $8.10^7$  pascals (soit  $8.10^9$  dynes/cm<sup>2</sup>).

La valeur de la fonction  $b(\varepsilon, \sigma)$  peut ensuite être déterminée en un point quelconque du domaine  $0 \alpha \beta \gamma$  de la figure 3. En effet, en un point  $M$  situé sur l'une des courbes  $C_1 C_2 \dots C_8$  de ce domaine on connaît les valeurs de  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\varepsilon}$  pour cette courbe, d'où la valeur de  $b = \dot{\sigma} - a \dot{\varepsilon}$ .

TABLEAU 2

Courbe sur laquelle est situé le point considéré	Allongement en mm	Valeur de $b$ (en pascals par seconde)
C <sub>1</sub>	0	0
	10	— 0,92. 10 <sup>4</sup>
	20	— 0,98. 10 <sup>4</sup>
	30	— 1,01. 10 <sup>4</sup>
C <sub>2</sub>	10	— 4,27. 10 <sup>4</sup>
	20	— 4,84. 10 <sup>4</sup>
	30	— 5,15. 10 <sup>4</sup>
C <sub>3</sub>	10	— 8,9. 10 <sup>4</sup>
	20	— 9,4. 10 <sup>4</sup>
	30	— 10,0. 10 <sup>4</sup>
C <sub>4</sub>	10	— 17,1. 10 <sup>4</sup>
	20	— 19,3. 10 <sup>4</sup>
	30	— 20,1. 10 <sup>4</sup>
C <sub>5</sub>	10	— 42,1. 10 <sup>4</sup>
	20	— 47,7. 10 <sup>4</sup>
	30	— 49,0. 10 <sup>4</sup>
C <sub>6</sub>	5	9,2. 10 <sup>4</sup>
C <sub>7</sub>	10	15,0. 10 <sup>4</sup>
C <sub>8</sub>	20	15,5. 10 <sup>4</sup>

Un certain nombre de valeurs de  $b(\varepsilon, \sigma)$  ainsi déterminés sont donnés dans le tableau 2.

Pour un point  $M$  quelconque du domaine  $0 \alpha \beta \gamma$ , la valeur de la fonction  $b(\varepsilon, \sigma)$  peut être déterminée par interpolation, à partir des valeurs précédentes.

Une étude de ce système de valeurs nous a permis d'établir qu'elles sont convenablement représentées par la formule

$$b(\varepsilon, \sigma) = 3.10^4 (40,4 \varepsilon - 110 \varepsilon^2 + 158 \varepsilon^3 - 10^{-6} \sigma^3) \quad (8)$$

dans laquelle  $\sigma$  est exprimé en pascals, et  $b$  en pascals par seconde. L'équation rhéologique

$$\dot{\sigma} = a \dot{\varepsilon} + b(\varepsilon, \sigma)$$

du matériau est ainsi bien déterminée par (8), puisqu'on a par ailleurs  $a = 8.10^7$  pascals.

### 3. CONSTRUCTION DE LA COURBE $\sigma, \varepsilon$ POUR $\varepsilon(t)$ QUELCONQUE

Pour  $\varepsilon(t)$  donné, l'équation rhéologique (4) devient une équation différentielle en  $\sigma$ , de la forme

$$\frac{d\sigma}{dt} = a \dot{\varepsilon}(t) + b(\varepsilon(t), \sigma)$$

qui peut être intégrée numériquement ou graphiquement.

On vérifie, par exemple, une bonne concordance entre la loi de relaxation  $\varepsilon(t)$  enregistrée à l'aide de la machine Instron et celle obtenue en intégrant l'équation différentielle

$$\frac{d\sigma}{dt} = b(\varepsilon, \sigma)$$

dans laquelle  $\varepsilon$  est une constante.

Ce résultat est conforme à celui obtenu par J. Lemaître dans le cas des métaux. On peut également déterminer à l'aide de l'équation différentielle (4) ou (7) et des courbes de la figure 3, la courbe  $\sigma, \varepsilon$  pour laquelle la vitesse d'allongement est égale à 5 mm/minute jusqu'à ce que l'allongement atteigne 20 mm (courbe C<sub>2</sub>), et où elle prend ensuite, après un saut de vitesse, une valeur égale à 50 mm/minute (courbe D<sub>1</sub>).

Il suffit d'ailleurs de vérifier qu'en chaque point de la courbe expérimentale D<sub>1</sub>, la pente de la tangente est donnée par (7) où  $a = 8.10^7$  pascals et où  $b(\varepsilon, \sigma)$  est déterminé par interpolation, à partir des courbes C<sub>1</sub> C<sub>2</sub> ... C<sub>8</sub>, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, on en a calculé à l'aide de (8).

La même vérification peut être faite sur la courbe expérimentale D<sub>2</sub> correspondant à une décharge de l'éprouvette, à la vitesse de — 5 mm/minute, après un allongement de 30 mm effectué à la vitesse de 5 mm/minute.



REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à MM. Bourcier de Carbon, Habib, Persoz, dont les observations lors de ma conférence m'ont conduit à reprendre certains essais et à réviser certains points de mon exposé. Je remercie également MM. Champier et Baudalet, qui ont bien voulu m'autoriser à utiliser la machine de traction de l'Ecole des Mines de Nancy.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ch. BOURCIER DE CARBON : Passage progressif du comportement visqueux au comportement plastique. Théorie cinétique du corps solide. C.R. Acad. Sc. Paris, séance du 12 avril 1944.
- [2] J.C. BUVET : Les méthodes modernes d'expression de la thermodynamique appliquées à la représentation des systèmes viscoélastiques. Cahiers du Groupe français de rhéologie, tome II - n° 6, juin 1972.
- [3] J. LEMAITRE : Intérêt des essais de relaxation appliqués à l'étude des corps élasto-visco-plastiques. Cahiers du Groupe français de rhéologie, tome I - n° 5, novembre 1967.
- [4] J. MANDEL : Mécanique des milieux continus, tome II, annexe XXI, viscoélasticité. Gauthiers Villars, Paris, 1966.
- [5] I.M. WARD : Mechanical properties of solid polymers. Chapitre 9, Non-linear viscoelastic behaviour. Wiley-Interscience 1971.
- [6] J.D. WEBER : Mécanique des milieux déformables non-linéaires. Eyrolles, Paris, 1972.

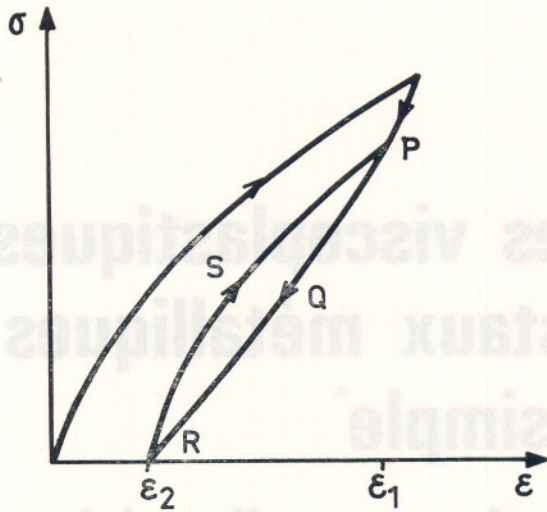


Fig. 4. — Comportement en traction simple d'un matériau obéissant à l'équation rhéologique  $\dot{\sigma} = a(\epsilon, \sigma) \dot{\epsilon} + b(\epsilon, \sigma)$

Nous ferons enfin la remarque suivante concernant les matériaux obéissant à une équation rhéologique de la forme (4) ou (7) : ces matériaux présentent une accommodation immédiate à tout cycle de déformation, lorsque la vitesse d'allongement est toujours la même dans la phase d'allongement d'une part, et dans la phase de raccourcissement d'autre part : dès qu'un cycle tel que P Q R S (figure 4) a été décrit une seule fois entre  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , le même cycle peut être décrit indéfiniment. On peut ainsi par un essai simple tester la validité, pour un matériau donné, d'une équation rhéologique de la forme (4) ou (7).

# Etude de quelques phénomènes viscoplastiques transitoires de polycristaux métalliques en traction simple\*

## (Modèle statistique et confrontation avec l'expérience)

par A. ZAOUÏ

Attaché de recherche au C.N.R.S.\*\*

### RESUME

On met en évidence, à partir de l'étude expérimentale du comportement de polycristaux métalliques en traction simple, l'existence de deux types d'effets physiques : un effet géométrique d'orientation et un effet « d'entraînement » viscoplastique de grain à grain par le jeu des contraintes internes. En utilisant la loi d'interaction de Kröner, on propose un modèle qui prend en compte ces effets et prévoit leur intervention pour diverses sollicitations. On indique en conclusion quelques extensions possibles pour ce modèle.

Il existe plusieurs phénomènes transitoires manifestés par les polycristaux métalliques qui semblent directement liés à l'inhomogénéité physique du matériau, caractérisée par la désorientation relative des grains qui constituent l'agrégat polycristallin. Quand on prend en compte cette inhomogénéité pour interpréter certaines propriétés de l'écroutissage ou du fluage des polycristaux, on est amené à distinguer deux types d'effets :

1. Un effet purement géométrique, que nous appellerons « effet d'orientation », qui se traduit, par exemple, par le fait que, à contrainte appliquée donnée, certains grains sont en régime plastique tandis

### SUMMARY

From an experimental study of the behavior of metallic polycrystals for uniaxial tension, two different physical effects are outlined: a geometrical orientation effect, an a viscoplastic « dragging » effect, which acts from grain to grain by means of the internal stresses. Then a model, based upon the law of interaction of Kröner, is proposed, which takes these effects into account, and predicts their way of acting for various types of loading. At last some possible extensions for this model are indicated.

que d'autres, dont les systèmes de glissement facile sont moins chargés du fait de leur orientation défavorable, sont en régime élastique.

2. Un effet mécanique, de nature viscoplastique, que nous appellerons « effet d'entraînement », qui se traduit par la plastification progressive de grains initialement élastiques sous l'effet de l'écoulement des grains actifs (à contrainte appliquée donnée).

On peut suivre les manifestations de ces effets sur plusieurs propriétés de l'écroutissage et du fluage des polycristaux métalliques.

[\*] Conférence au Groupe français de Rhéologie, le 10 mars 1971.

[\*\*] Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique (Paris).

Adresse actuelle : Laboratoire P.M.T.M., Centre de Saint-Denis, place du 8 mai 1945, 93200 Saint-Denis.

### 1. BASES EXPERIMENTALES

Considérons des expériences de fluage et d'écroutissage en traction simple sur des fils de cuivre polycristallin à la température ambiante.

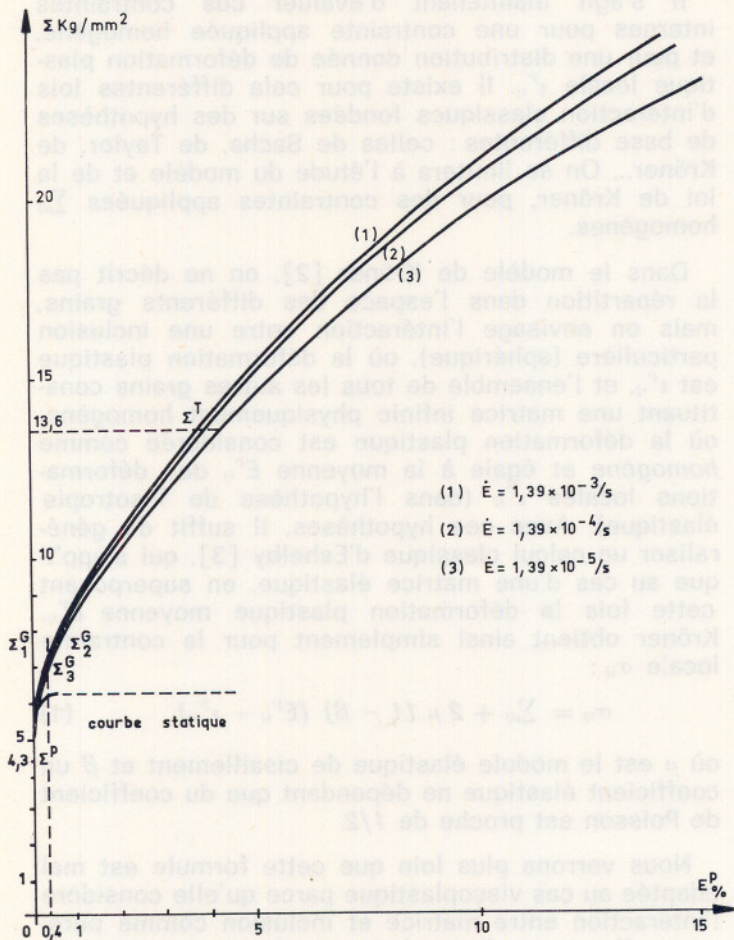


Fig. 1. — Courbes d'écroutissement en traction simple à  $\dot{E}$  constant

a) *Ecroutissement* : on peut analyser les courbes obtenues à vitesse de déformation imposée  $\dot{E}$  (figure 1) par la méthode des différences finies, qui permet de repérer des changements rapides de courbure et de délimiter ainsi des domaines différents d'écroutissement, comme l'a déjà fait Jaoul [1]. Intéressons-nous seulement aux deux premiers domaines, séparés par une valeur frontière  $\Sigma^G$  de la contrainte de traction, variable avec la vitesse de déformation imposée — le seuil initial  $\Sigma^P$  étant constant.

• *L'effet d'orientation* se manifeste par le fait que, dans toute la gamme ( $\Sigma^P, \Sigma^G$ ) tous les grains ne sont pas plastifiés, mais qu'il y en a une proportion de plus en plus grande à mesure que  $\Sigma$  se rapproche de  $\Sigma^G$ . Si  $\Sigma^P$  correspond à l'orientation du glissement pour les grains les plus chargés (la cission critique étant alors donnée par  $\tau_0 = \frac{\Sigma^P}{2}$ ),  $\Sigma^G$  correspondrait à la plastification totale de tous les grains : on peut noter que  $\frac{\Sigma^G}{\tau_0} = \frac{2 \Sigma^G}{\Sigma^P}$  est de l'ordre de 3,3 à 3,5. Au-delà de  $\Sigma^G$ , l'écroutissement est presque linéaire (« Parabole » d'exposant 0,8) jusqu'à  $\Sigma^T$ .

• *L'effet d'entraînement* se manifeste par le fait que  $\Sigma^G$  augmente avec  $\dot{E}$  : on peut penser que cet effet d'entraînement est d'autant plus efficace et exige des contraintes d'autant moins grandes que la vitesse de déformation plastique est plus faible et donc que l'entraînement viscoplastique au glissement peut jouer plus complètement.

b) *Fluage* : de la même façon en fluage, on voit (figure 2) qu'il existe deux domaines distincts : le premier, limité inférieurement par  $\Sigma^P$ , où le fluage est limité, le second, à partir de  $\Sigma^G$ , où la vitesse de fluage est nettement plus importante et l'amplitude apparemment illimitée. Là encore on peut voir à l'œuvre les deux effets déjà signalés.

• *L'effet d'orientation* se manifeste par le fait que, dans le premier domaine, la plastification reste partielle, ce qui entraîne un fluage limité, parce que contenu : par ailleurs l'amplitude du fluage et la proportion de grains actifs croissent avec la contrainte appliquée.

• *L'effet d'entraînement* se manifeste par le fait que  $\Sigma^P$  est inférieur à  $\Sigma^G$  (on a  $\frac{\Sigma^P}{\tau_0} \neq 2,85$ ), ce qui correspond à un écroutissement statique. Là, l'entraînement viscoplastique joue au maximum, mais il est cependant limité ( $\Sigma^P \neq \Sigma^P$ ).

c) *Hésitation au fluage* : il s'agit cette fois de la réponse à une décharge partielle en cours de fluage. Ces expériences, déjà rapportées ailleurs [5] permettent de dégager deux propriétés principales :

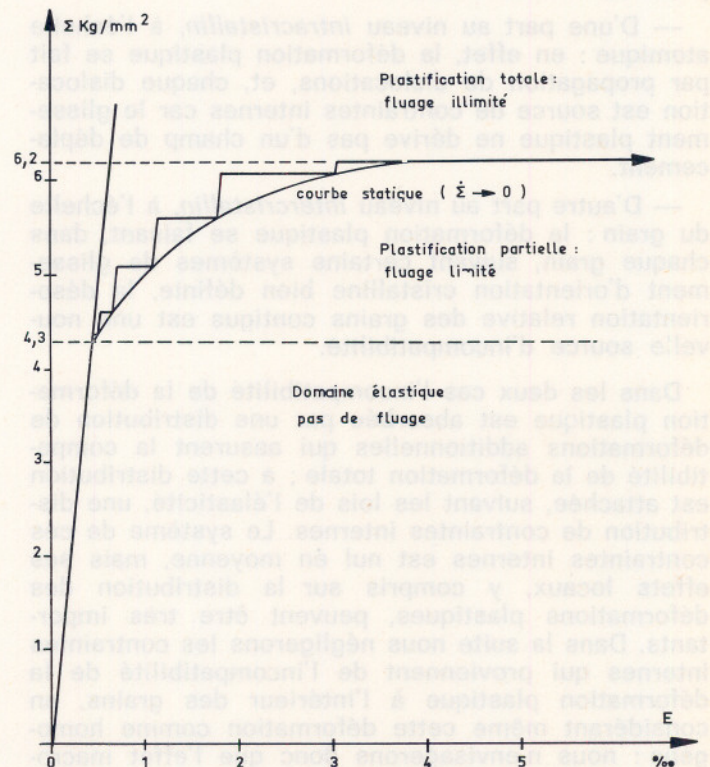


Fig. 2. — Domaines de fluage en traction simple

• Il y a une brusque diminution de la vitesse de fluage après décharge (et parfois même un arrêt quasi-total), ce qui correspond au blocage d'une proportion de grains d'autant plus grande que l'amplitude de la décharge est plus grande : c'est l'effet d'orientation qui joue.

• On note, dans une certaine gamme de contraintes, une réaccélération progressive du fluage (la « reprise »), ce qui correspond à une réactivation de certains grains initialement bloqués sous l'effet du glissement qui continue dans les grains actifs : c'est l'effet d'entraînement qui joue.

Une fois précisées ces bases expérimentales, il reste à exprimer le lien entre ces effets et la désorientation des grains : l'effet d'orientation est simplement lié à la variation des cissions effectives sur un système de glissement facile en fonction de l'orientation ; l'effet d'entraînement est dû aux contraintes internes liées à la désorientation des grains et à leur évolution au cours de l'écoulement viscoplastique. Le premier problème est de nature purement géométrique et ne présente pas de difficulté. Le second, proprement mécanique, mérite un examen plus approfondi.

## 2. ORIGINE ET EVALUATION DES CONTRAINTES INTERNES

D'une façon générale, les contraintes internes proviennent de l'incompatibilité de la déformation plastique. Si l'on se restreint, comme dans la suite, au cas d'un état de contraintes appliquées homogènes, cette incompatibilité de la déformation plastique est présente à deux niveaux.

— D'une part au niveau *intracristallin*, à l'échelle atomique : en effet, la déformation plastique se fait par propagation de dislocations, et, chaque dislocation est source de contraintes internes car le glissement plastique ne dérive pas d'un champ de déplacement.

— D'autre part au niveau *intercristallin*, à l'échelle du grain : la déformation plastique se faisant, dans chaque grain, suivant certains systèmes de glissement d'orientation cristalline bien définie, la désorientation relative des grains contigus est une nouvelle source d'incompatibilité.

Dans les deux cas l'incompatibilité de la déformation plastique est absorbée par une distribution de déformations additionnelles qui assurent la compatibilité de la déformation totale ; à cette distribution est attachée, suivant les lois de l'élasticité, une distribution de contraintes internes. Le système de ces contraintes internes est nul en moyenne, mais ses effets locaux, y compris sur la distribution des déformations plastiques, peuvent être très importants. Dans la suite nous négligerons les contraintes internes qui proviennent de l'incompatibilité de la déformation plastique à l'intérieur des grains, en considérant même cette déformation comme homogène : nous n'envisagerons donc que l'effet macroscopique de l'incompatibilité de grain à grain de la déformation plastique.

Il s'agit maintenant d'évaluer ces contraintes internes pour une contrainte appliquée homogène, et pour une distribution donnée de déformation plastique locale  $\varepsilon_{ij}^p$ . Il existe pour cela différentes lois d'interaction classiques fondées sur des hypothèses de base différentes : celles de Sachs, de Taylor, de Kröner... On se limitera à l'étude du modèle et de la loi de Kröner, pour des contraintes appliquées  $\Sigma_{ij}$  homogènes.

Dans le modèle de Kröner [2], on ne décrit pas la répartition dans l'espace des différents grains, mais on envisage l'interaction entre une inclusion particulière (sphérique), où la déformation plastique est  $\varepsilon_{ij}^p$ , et l'ensemble de tous les autres grains constituant une matrice infinie physiquement homogène, où la déformation plastique est considérée comme homogène et égale à la moyenne  $E_{ij}^p$  des déformations locales  $\varepsilon_{ij}^p$  (dans l'hypothèse de l'isotropie élastique). Avec ces hypothèses, il suffit de généraliser un calcul classique d'Eshelby [3], qui s'applique au cas d'une matrice élastique, en superposant cette fois la déformation plastique moyenne  $E_{ij}^p$ . Kröner obtient ainsi simplement pour la contrainte locale  $\sigma_{ij}$  :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1 - \beta)(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (1)$$

où  $\mu$  est le module élastique de cisaillement et  $\beta$  un coefficient élastique ne dépendant que du coefficient de Poisson est proche de  $1/2$ .

Nous verrons plus loin que cette formule est mal adaptée au cas viscoplastique parce qu'elle considère l'interaction entre matrice et inclusion comme purement élastique. Cependant, et du moins pour de faibles déformations plastiques, c'est un point de départ suffisant pour prévoir, au moins qualitativement, les effets des contraintes internes sur le comportement du polycristal.

## 3. DEFINITION D'UN MODELE STATISTIQUE POLYCRISTALLIN

On a besoin de trois types d'hypothèses :

• Une loi de distribution des orientations des différents grains : on la supposera isotrope (cas d'un recuit suffisant) et indépendante de l'état de déformation (ce qui est justifié pour des déformations plastiques relativement faibles).

• Une loi d'interaction entre les grains : ce sera la loi de Kröner (1).

• Une loi de comportement du monocristal : sous peine de ne pouvoir mener le calcul à bout et de s'interdire toute confrontation à l'expérience, il faut, au moins au début, procéder à des simplifications draconiennes. On se limitera à la structure cubique à faces centrées, en supposant :

— que le glissement ne peut s'effectuer, dans un sens ou dans l'autre, que suivant celui des 12 couples de systèmes de glissement facile qui est initialement le plus chargé (système principal),

— que le comportement viscoplastique, pour ce système de glissement, est du type de Bingham (amortisseur linéaire de viscosité  $\eta$  en parallèle avec un patin, éventuellement de Képès, de seuil  $\tau_0$  et de coefficient d'écroissage  $C$ ), de sorte que, pour un glissement plastique  $\gamma$ , et si la cission  $\tau$  est supérieure à  $(\tau_0 + C\gamma)$  on ait :

$$\tau = \tau_0 + C\gamma + \eta \dot{\gamma} \quad (2)$$

— que tous les grains ont mêmes caractéristiques ( $\tau_0$ ,  $C$ ,  $\eta$ ),

— que l'élasticité est isotrope.

On étudiera alors la réponse du modèle à deux types de charge :

— mise en charge en traction simple à la contrainte  $\Sigma_I$  ; étude du fluage, et de l'écroissage statique.

— décharge partielle en cours de fluage à l'instant  $\Theta$ , de  $\Sigma_I$  à  $\Sigma_{II}$ .

#### 4. REPONSE A UNE CONTRAINTE CONSTANTE

A chaque grain est attachée une matrice  $\alpha_{ij}$ , qui caractérise l'orientation de son système de glissement principal. On a alors

$$\tau = \alpha_{ij} \sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}^P = \gamma \alpha_{ij} \quad (3)$$

L'hypothèse d'isotropie élastique permet d'écrire :  $E_{ij}^P = \langle \varepsilon_{ij}^P \rangle$  (moyenne effectuée sur toutes les orientations). De plus, dans le cas de la traction simple où seul  $\Sigma_{33} = \Sigma_I$  est différent de 0, on montre que, avec nos hypothèses,

$$E_{ij}^P = E^P \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad E^P = \langle \gamma \alpha_{33} \rangle.$$

De même  $\dot{E}^P = \langle \dot{\gamma} \alpha_{33} \rangle$ ,  $\alpha_{33}$  variant entre  $\frac{2}{3\sqrt{6}}$  et  $\frac{1}{2}$

Pour obtenir la loi de fluage macroscopique reliant  $E^P$ ,  $\dot{E}^P$  et  $\Sigma_I$ , il suffit d'exprimer  $E^P$  comme moyenne des  $(\gamma \alpha_{33})$ , après avoir reporté la loi de comportement du monocristal dans la loi de Kröner. Trois cas se présentent alors :

a) si  $\Sigma_I < 2\tau_0$  = il n'y a glissement plastique dans aucun grain

b) si  $\Sigma_I > \frac{3\sqrt{6}}{2}\tau_0$  = tous les grains glissent d'emblée suivant la loi :

$$\tau = \alpha_{ij} [\Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(E_{ij}^P - \varepsilon_{ij}^P)] = \tau_0 + C\gamma + \eta \dot{\gamma} \quad (4)$$

D'après les remarques précédentes, cette expression se réduit facilement à :

$$\eta \dot{\gamma} + [C + \mu(1-\beta)] \gamma - 3\mu(1-\beta) E^P \alpha_{33} = \alpha_{33} \Sigma_I - \tau_0 \quad (4')$$

d'où en multipliant les deux membres par  $\alpha_{33}$  et en faisant la moyenne sur tous les grains :

$$\eta \dot{E}^P + [C + \mu(1-\beta)(1 - 3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)] E^P = \langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_I - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0 \quad (5)$$

où  $\langle \alpha_{33} \rangle \neq 0,452$  et  $\langle \alpha_{33}^2 \rangle \neq 0,206$  peuvent être calculés exactement. On obtient ainsi un fluage exponentiel décroissant, limité à la valeur

$$E^P_{\infty} = \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_I - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0}{C + \mu(1-\beta)(1 - 3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}$$

Il faut noter que le coefficient correspondant d'écroissage statique se trouve être de l'ordre de  $\mu$ . Nous y reviendrons.

Le calcul de  $E^P$  permet alors d'obtenir explicitement les grandeurs locales  $\gamma$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $\tau$ , etc... pour toutes les orientations.

c) si  $2\tau_0 < \Sigma_I < \frac{3\sqrt{6}}{2}\tau_0$  = cette fois, certains grains seulement glissent d'emblée — ceux dont le coefficient  $\alpha_{33}$  est supérieur à  $\tau_0/\Sigma_I$ . Cela correspond à « l'effet d'orientation ». Mais un deuxième effet agit progressivement :

pour un grain bloqué,  $\gamma = 0$  et  $\tau < \tau_0$ . Mais on a, d'après la loi de Kröner :

$$\tau = \alpha_{33} [\Sigma_I + 3\mu(1-\beta)E^P] \quad (6)$$

de sorte que, comme  $E^P$  augmente puisque certains grains sont en écoulement plastique,  $\tau$  augmente également jusqu'à atteindre éventuellement la valeur  $\tau_0$ , ce qui assurera le « déblocage » du grain considéré. D'une façon générale, on peut définir à chaque instant une valeur frontière  $\alpha_{33}^* = \frac{1}{y^*}$  telle que  $\tau(\alpha_{33}^*) = \tau_0$ , et que, pour  $\alpha_{33} > \alpha_{33}^*$  il y ait glissement, et blocage dans le cas contraire. On voit déjà que

l'on aura  $\dot{\alpha}_{33}^* < 0$ , ce qui correspond bien à un effet d'entraînement viscoplastique au glissement des grains passifs par l'écoulement des grains actifs.

Pour résoudre complètement la question, il faut déterminer la loi de variation de  $\alpha_{33}^*$  au cours du temps. Pour cela on a besoin de calculer les quantités :

$$[\alpha_{33}] = \int_{\alpha_{33}^*}^{1/2} \alpha_{33} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} \quad \text{et} \quad [\alpha_{33}^2] = \int_{\alpha_{33}^*}^{1/2} \alpha_{33}^2 P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$$

où  $P(\alpha_{33})$  est la densité de probabilité normée de  $\alpha_{33}$ . Ce calcul nécessite celui de  $P(\alpha_{33})$  et de la probabilité cumulée  $P_c(\alpha_{33})$ .

Pour cela il faut définir sur la demi-sphère unité 24 triangles sphériques égaux correspondant aux différentes expressions possibles pour  $\alpha_{33}$ , suivant le système de glissement qui est principal dans le domaine considéré. Par raison de symétrie, il suffit d'étudier un seul triangle sphérique ; l'aire sphérique intérieure au triangle et comprise entre les courbes  $(\alpha_{33})$  et  $(\alpha_{33} + d\alpha_{33})$  est proportionnelle à  $P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$ . On calcule de la même façon, à partir de là,  $P_c(\alpha_{33})$ ,  $[\alpha_{33}]$  et  $[\alpha_{33}^2]$  ; les expressions, reproduites sur les figures 3 et 4, font intervenir des intégrales

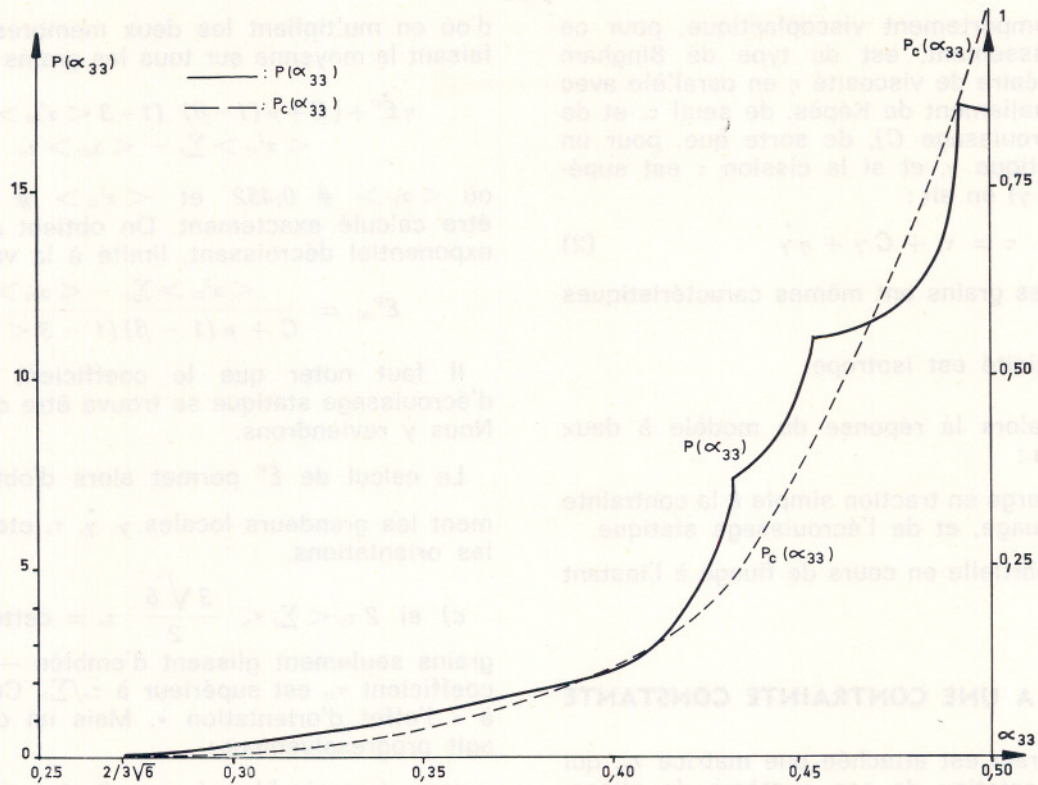


Fig. 3

elliptiques de 1ère, 2ème et 3ème espèces, et diffèrent suivant le mode d'intersection des courbes ( $\alpha_{33}$ ) et des côtés du triangle sphérique [4]. Il est à noter que ces calculs peuvent être utilisés pour une large gamme de lois d'interaction et de comportement.

Sur cette base on peut alors terminer le calcul précédent en évaluant  $\alpha_{33}^*$  et  $E^p$  en fonction du temps et de  $\Sigma_i$ . On vérifie bien :  $\dot{\alpha}_{33}^* < 0$ , ce qui traduit l'effet d'entraînement. 2 cas sont à distinguer :

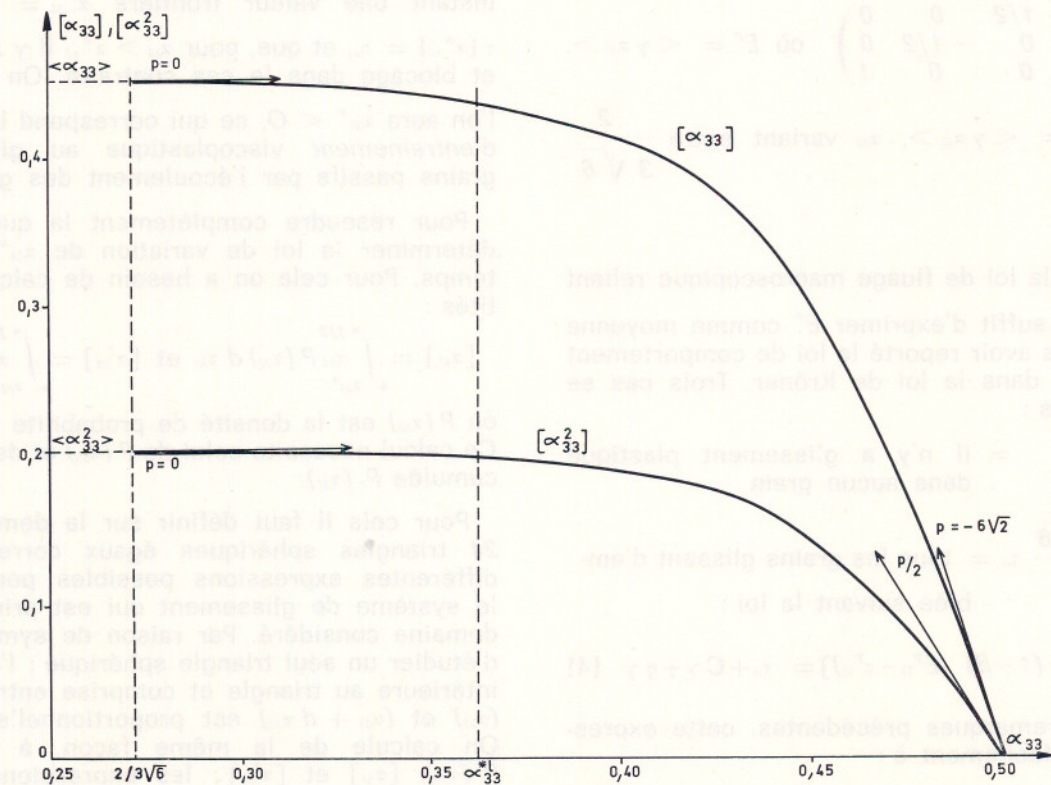


Fig. 4

— si  $\frac{\Sigma_I}{\tau_0} < y_i^* \neq 2,76 =$  l'entraînement est partiel seulement ; il restera toujours une certaine proportion de grains inactifs.

— si  $y_i^* < \frac{\Sigma_I}{\tau_0} < \frac{3\sqrt{6}}{2}$  = l'entraînement est total ; au bout d'un « temps d'entraînement »  $T_0$ , qui décroît de l'infini pour  $\Sigma_I = \tau_0 y_i^*$  à 0 pour  $\Sigma_I = \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$ , tous les grains finissent par glisser et le fluage continue jusqu'à une valeur limite  $E^P_\infty$  qui a la même expression que dans le cas où  $\Sigma_I > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$ .

La courbe d'écrouissage statique est donc composée au total d'une portion convexe pour

$$2 \tau_0 < \Sigma_I < y_i^* \tau_0$$

et d'une portion linéaire au-delà. La valeur théorique frontière de  $\Sigma_I/\tau_0$ , soit  $y_i^*$ , est proche de la valeur expérimentale  $\frac{\Sigma^P}{\tau_0} \frac{H}{H'} = 2,85$ .

## 5. DECHARGE PARTIELLE EN COURS DE FLUAGE

On impose  $\Sigma_I$  jusqu'à l'instant  $\Theta$ , puis la décharge partielle  $\Delta \Sigma = \Sigma_I - \Sigma_2$  ou  $\Sigma_2 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$  est maintenue constante dans tous les essais : seuls  $\Sigma_I$  et  $\Theta$  varient.

Pour étudier la réponse du modèle, on calcule  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\gamma}_I$  et  $\tau$  dans tous les grains à l'instant  $\Theta$ , soit  $\dot{\gamma}_I$  et  $\tau_I$ . A la décharge  $\Delta \Sigma$  correspond dans chaque grain la diminution de cisssion  $\Delta \tau = \tau_I - \tau_2 = \alpha_{33} \Delta \Sigma$ . L'écoulement plastique s'arrêtera dans un grain si  $\tau_2 = \tau_I - \alpha_{33} \Delta \Sigma < \tau_0 + C \dot{\gamma}_I$ . Ceci conduit à définir comme précédemment une valeur  $\alpha_{33}^*(\Theta)$  telle que si  $\alpha_{33} < \alpha_{33}^*(\Theta)$  il y ait blocage dans le grain considéré ; sinon, le fluage continue à une vitesse inférieure : on a là une manifestation de « l'effet d'orientation ».

Mais, par ailleurs, on a dans les grains bloqués :

$$\dot{\tau} = 3 \alpha_{33} \mu (1 - \beta) E^P > 0 \quad (7)$$

puisque, sauf si tous les grains sont bloqués  $E^P$  reste positif. Par suite, dans ce cas, la contrainte augmente dans les grains bloqués à l'instant  $\Theta$ , jusqu'à permettre la reprise de l'écoulement si  $\tau$  dépasse la valeur  $(\tau_0 + C \dot{\gamma}_I)$ . Le calcul se fait comme dans le cas précédent (mise en charge) et conduit à des conclusions analogues :

— on définit à tout instant une valeur limite  $\alpha_{33}^*$  séparant les grains actifs et les grains bloqués

—  $\alpha_{33}^*$  diminue au cours du temps, ce qui traduit un effet d'entraînement dû à l'écoulement des grains actifs, effet qui réactive de proche en proche tout ou partie des grains primitivement bloqués.

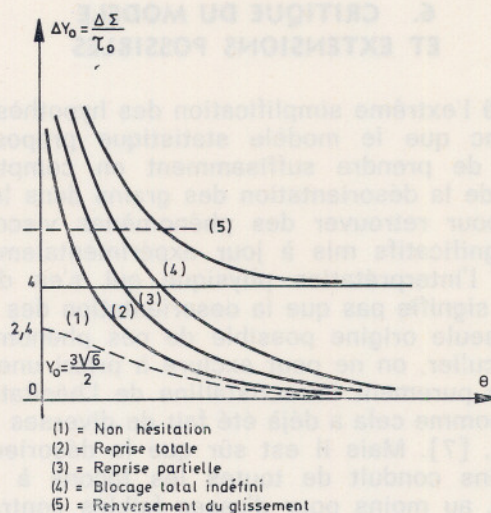


Fig. 5. — Réponse à une décharge partielle en cours de fluage

— suivant la valeur de  $\Delta \Sigma$  et de  $\Theta$ , on a différentes possibilités (figure 5) :

• aucun des grains ne se bloque à l'instant  $\Theta_+$  = tous les grains continuent de glisser, mais à une vitesse inférieure. Ceci se produit si

$$\alpha_{33}^*(\Theta) < \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

• certains grains se bloquent (pour  $\alpha_{33}$  petit) mais tous reprennent progressivement leur glissement = c'est ce qu'on peut appeler « l'hésitation au fluage » ; la reprise est totale au bout d'une période  $T_H$ , « temps d'hésitation », dont le calcul est identique à celui du « temps d'entraînement »  $T_0$  dans le cas précédent.

Ceci se produit si  $\frac{2}{3\sqrt{6}} < \alpha_{33}^*(\Theta) < \frac{1}{y_i^*}$ ,

• certains grains se bloquent mais tous ne parviennent pas à reprendre leur glissement = c'est le blocage partiel. On a  $\frac{1}{y_i^*} < \alpha_{33}^*(\Theta) < \frac{1}{2}$ ,

• tous les grains se bloquent, et le blocage est alors total et définitif,

• le glissement se renverse dans certains grains (pour  $\alpha_{33}$  élevé) ou dans tous les grains et les mêmes phénomènes apparaissent pour le glissement renversé.

Il est bien clair que ces phénomènes sont, pour le modèle, uniquement dus à l'effet de la désorientation des grains et aux contraintes internes qui leur sont attachées puisque, pour le monocristal isolé, une décharge partielle n'entraîne, suivant l'amplitude et l'instant de la décharge que deux réponses possibles = poursuite du fluage à vitesse inférieure ou blocage total et définitif.

## 6. CRITIQUE DU MODELE ET EXTENSIONS POSSIBLES

Malgré l'extrême simplification des hypothèses, on voit donc que le modèle statistique proposé est capable de prendre suffisamment en compte l'influence de la désorientation des grains dans le polycristal pour retrouver des phénomènes viscoplastiques significatifs mis à jour expérimentalement et appuyer l'interprétation physique qui s'en dégage. Cela ne signifie pas que la désorientation des grains soit la seule origine possible de ces phénomènes ; en particulier, on ne peut exclure a priori une interprétation purement intracristalline de l'hésitation au fluage, comme cela a déjà été fait de diverses façons [5], [6], [7]. Mais il est sûr que la désorientation des grains conduit de toutes les façons à un tel effet, et, au moins pour d'assez faibles contraintes, ses effets devraient être prépondérants. Cette origine permet en particulier de donner une interprétation physique au modèle de Schwedoff qui présente la propriété d'hésitation au fluage [5] : il faut comprendre alors le patin de ce modèle comme un grain particulier bloqué après une décharge partielle, et l'amortisseur en parallèle comme l'ensemble des grains restés actifs après décharge, et dont l'écoulement permet, par l'intermédiaire du ressort, l'augmentation des contraintes dans le patin et son déblocage au bout d'un certain temps d'hésitation.

Ceci étant, l'interprétation reste, à ce stade, purement qualitative et le modèle proposé présente plusieurs désaccords avec l'expérience ; principalement :

- valeur excessive du module d'érouissage en traction simple (environ 20 fois trop grand),
- fluage toujours limité,
- impossibilité d'un changement de courbure sur la courbe de fluage après décharge partielle,
- temps d'hésitation toujours infini pour une valeur de  $\Theta$  suffisamment grande.

Si on laisse de côté les limites du modèle dues à son caractère linéaire, en considérant qu'il ne peut, au mieux, que représenter un comportement « tangent » au comportement réel dans une gamme suffisamment étroite de contraintes, il reste deux principales sources d'écart avec l'expérience.

a) La première est l'hypothèse abusivement simplificatrice du *glissement simple* : on sait bien que, dès que la déformation plastique n'est plus très faible, d'autres systèmes de glissement que le système principal sont actifs, ce qui permet une meilleure relaxation des contraintes internes. La prise en compte du glissement multiple présente de nombreuses difficultés de calcul si l'on veut résoudre le problème explicitement, et demande de nouvelles hypothèses de comportement sur les interactions entre les différents systèmes d'un même grain. Cette étude est entreprise actuellement.

b) La seconde source d'écart avec l'expérience réside dans le choix de la *formule de Kröner* pour l'évaluation des contraintes internes. En effet cette loi, et le schéma qui la sous-tend (inclusion sphérique dans une matrice infinie où la déformation plastique est *homogène*) conviennent mal au cas de la viscoplasticité, parce qu'ils ne tiennent pas compte de la relaxation des contraintes internes dans l'inclusion par la déformation *viscoplastique*, et non pas seulement élastique, de la matrice autour de l'inclusion — déformation, bien sûr, *inhomogène*.

Si l'on revient en détail sur les hypothèses qui conduisent à la loi de Kröner et si l'on résoud [4] le problème parallèle au problème considéré mais dans le cas de la *viscoélasticité linéaire anisotrope* (calcul rendu possible par l'utilisation de la transformation de Laplace-Carson), on est conduit à adopter pour le problème viscoplastique une loi d'interaction semi-empirique, modifiée de la loi de Kröner où le facteur  $2\mu(1-\beta)$ , qui traduit l'interaction purement élastique entre matrice et inclusion, est pondéré par une fonction  $f$ , de valeur inférieure à l'unité, et dépendant de la contrainte, de la déformation plastique moyenne et de la proportion de grains actifs. On peut alors déterminer un certain nombre de conditions a priori de croissance pour la fonction  $f$ , et le calcul montre que ces seules conditions permettent de supprimer les principaux désaccords entre le comportement du modèle et les résultats d'expérience.

Si, de plus, on détermine, pour un matériau et un niveau moyen de contraintes données, la fonction  $f$  à partir de certains résultats expérimentaux, on peut alors obtenir un accord quantitatif satisfaisant avec l'ensemble des résultats expérimentaux [4]. On peut penser d'ailleurs que cet accord provient non seulement d'une meilleure appréciation des contraintes internes, mais également du fait que, en ajustant la fonction  $f$  à certains résultats d'expérience, on corrige en partie du même coup, mais d'une façon purement empirique, la première insuffisance du modèle portant sur l'hypothèse du glissement simple.

## REFERENCES

- [1] B. JAOUËL (1957). — J. Mech. Phys. Solids, 5, 95.
- [2] E. KRÖNER (1961). — Acta Met., 9, 155.
- [3] J.D. ESHELBY (1957). — Proc. Roy. Soc., A 241, 376.
- [4] A. ZAOUÏ (1970). — « Etude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique de métaux polycristallins (système CFC) » Thèse — Paris (à paraître).
- [5] L. BRUN et A. ZAOUÏ (1967). — Cahiers Gr. Fr. Rhéol., 5, 267.
- [6] R.P. CARREKER, J.G. LESCHEN et J.D. LUBAHN (1948). — A.I.M.M.E., Tech. Publ. n° 2477.
- [7] J. ZARKA (1969). — « Sur la viscoplasticité des métaux ». Thèse — Paris.



# Aspect rhéologique du gonflement d'une membrane en caoutchouc Mesure des configurations de forme\*

par J.-C. PAISANT

Professeur du Cadre des E.N.S.A.M.  
Agrégré Répétiteur à l'E.N.S.E.T.

## RESUME

Des membranes circulaires en caoutchouc ont été soumises à des essais sous pression afin d'en déterminer les différentes configurations au cours des transformations.

Cette étude a pour prolongement de détermination de la fonction énergie en compression homogène, elle devra permettre ultérieurement de déterminer la fonction énergie de déformation en extension biaxiale.

## ABSTRACT

*The purpose of this following work is to show the experimental determination of energy functions of natural rubber deformation in a monoaxial compression. As it is difficult to get an homogeneous deformation by compression of two plates it is easier to turn to the « virtual compression » method, also called second type homogeneous method by doing radial tractions.*

*Various methods which stick to a plane geometry can be used for this purpose but on account of precision we followed R.S.Rivlin's method (Large elastic deformation of isotropic materials. Experiments on the deformation of rubber.), which consists in pumping up air in a circular membrane to analyse it at the pole.*

*Besides we measured the membrane total deformation. We noticed the resultant configuration from*

(\*) Conférence au Groupe français de Rhéologie le 1<sup>er</sup> mars 1972.

Etude conduite sous le patronage de l'Institut français du Caoutchouc et du Laboratoire de Mécanique des Fluides de la Faculté des Sciences d'Orsay.

Expériences réalisées aux Laboratoires de recherches de l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique.

*a configuration of reference without trying to analyse the various mechanical, thermic and physico-chemical effects which occur during a change in the environment.*

*The following experiment is just a geometric one. The configurations measurements will be limited to the noted down positions and shapes of the membrane which bears a uniform inner pressure.*

## 1. INTRODUCTION

Le présent travail s'intègre dans une recherche visant la détermination expérimentale des fonctions énergie de déformation de vulcanisat de caoutchouc en compression monoaxiale. La difficulté d'obtenir une déformation homogène par compression entre deux plateaux conduit à s'orienter vers une méthode dite à « compression virtuelle » ou homogène du second type (1) (figure 1) en exerçant des tractions radiales.

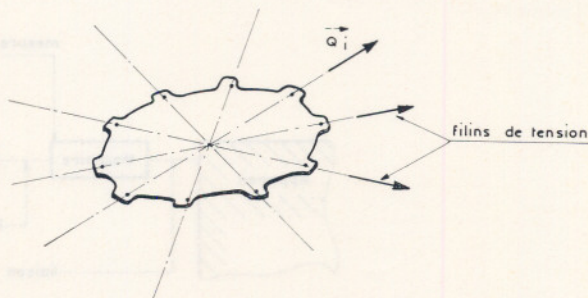


Fig. 1. — Essai de déformation homogène du deuxième type d'un corps bidimensionnel

Divers procédés conservant une géométrie plane peuvent être employés à cet effet, mais pour des raisons de précision nous avons retenu une méthode déjà utilisée par R.S. Rivlin en 1950 et qui consiste à gonfler à l'air une membrane circulaire pour en faire l'analyse au pôle (2) (figure 2).

Nous avons mesuré en outre la déformation globale de la membrane. A partir d'une configuration de référence, sans chercher à analyser les divers effets mécaniques, thermiques, physico-chimiques..., qui se produisent lors d'une transformation du milieu

(figure 3) nous avons relevé la configuration résultante.

L'étude suivante est purement géométrique. La mesure des configurations étant limitée à des relevés de position et de forme de la membrane soumise à une pression intérieure uniforme.

**2.1. Conditions aux limites**

La configuration initiale de l'éprouvette dépend des liaisons d'extrémités. Comme le montre la figure 4, la chaîne d'organes entre l'appareil d'essai et l'éprouvette comprend, en série, des liaisons dont le comportement caractérise les conditions aux limites.

La mesure effectuée entre mâchoires intègre le jeu, le manque de rigidité et, s'il existe, le glissement dans la liaison, d'où une source d'erreur (figure 5). Compte tenu de la souplesse des vulcanisats de caoutchouc, et de l'étanchéité à réaliser entre éprouvette et mâchoire, les principales liaisons sont du type à adhérence ou à obstacle. La réalisation pratique du serrage est donnée sur la figure 6, seule la solution du type (c), est adaptée aux grandes déformations du caoutchouc et nous avons retenu c, (8) qui est d'une réalisation plus simple que c (9) et suffisamment efficace.

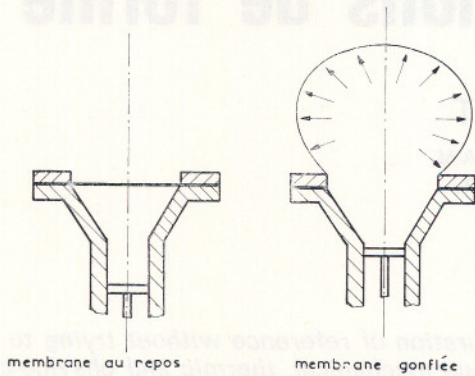


Fig. 2. — Essai de gonflement d'une membrane : principe

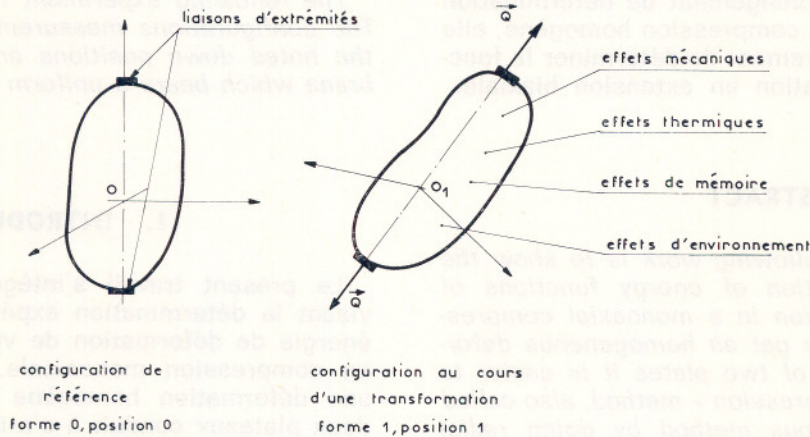


Fig. 3. — Configurations et effets dus à une transformation de la matière en cours d'essai.

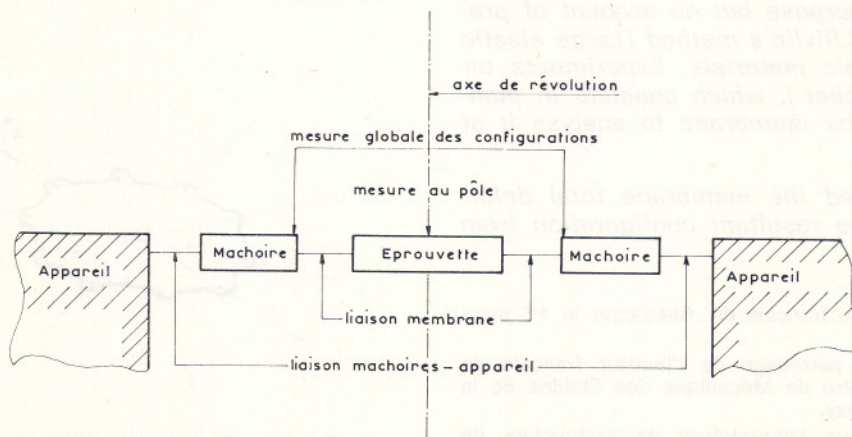


Fig. 4. — Organigramme fonctionnel de l'appareil d'essai

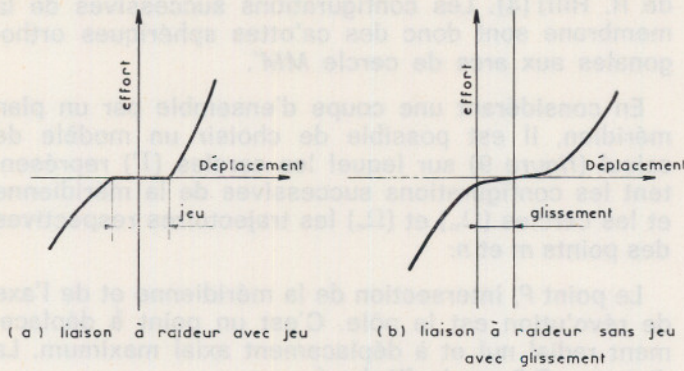


Fig. 5. — Modèles de comportement des liaisons

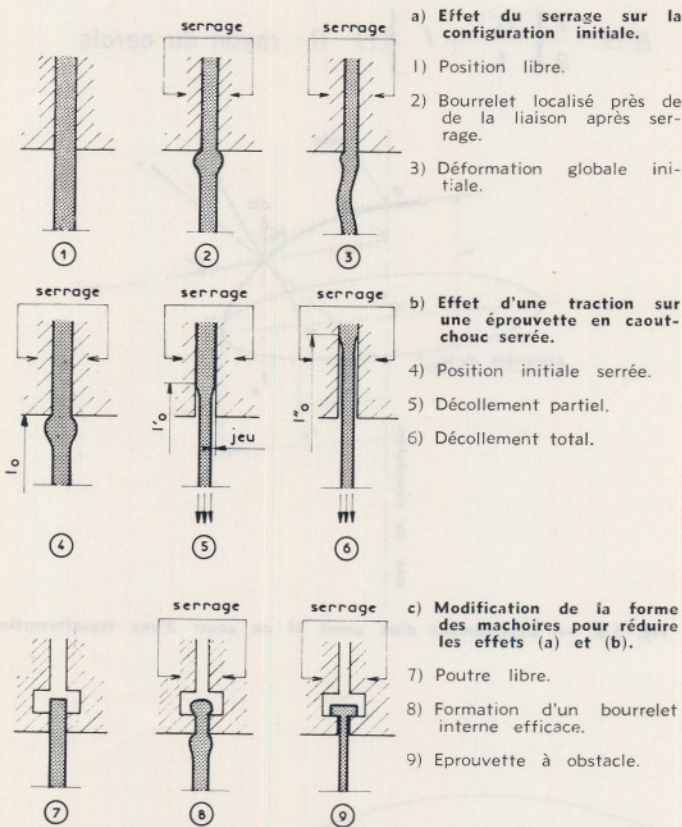


Fig. 6. — Etude comparée de différentes liaisons mâchoires-éprouvette

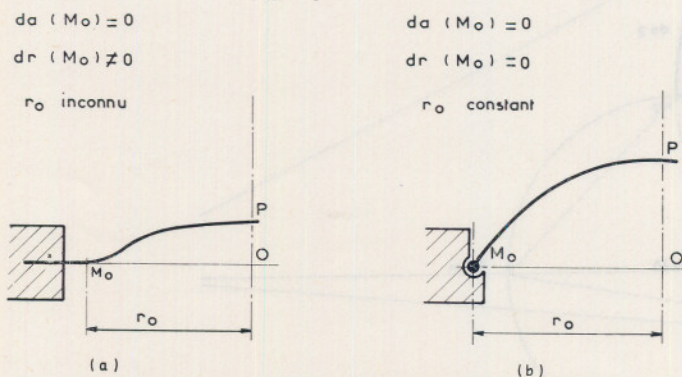


Fig. 7. — Conditions géométriques aux limites :  
a) domaine des très petites déformations  
b) domaine des moyennes et grandes déformations

Avec des précautions évitant les distorsions au montage de l'éprouvette, les conditions aux limites peuvent être posées pour le domaine des très petites et des grandes déformations, on peut admettre pour des déformations faibles de l'ordre de l'épaisseur de la membrane un encastrement fixe avec les conditions de la figure 7 a. Lorsque les déformations deviennent plus importantes, la liaison est telle que la distance  $r_0 = OM_0$  du point  $M_0$  à l'axe de révolution reste constante au cours de la déformation, la rotation devant être possible autour du parallèle de  $M_0$  (articulation fixe) (3) (figure 7 b).

Nous ne retiendrons ici que ce deuxième type de liaison, relatif aux grandes déformations et qui correspond à une déformation uniforme de la membrane. Nous avons réalisé un appareil donnant la possibilité d'approcher au maximum les conditions aux limites précédentes.

### 2.2. Définition de la déformation

A partir du paramétrage de la surface déformée (figure 8 a) nous définissons :

$R_\theta, R_\psi$  : rayons de courbure principale et  $\rho d\theta, R_\psi d\psi$  : déformation d'un élément.

Les coefficients d'extension principaux sont écrits sous la forme :

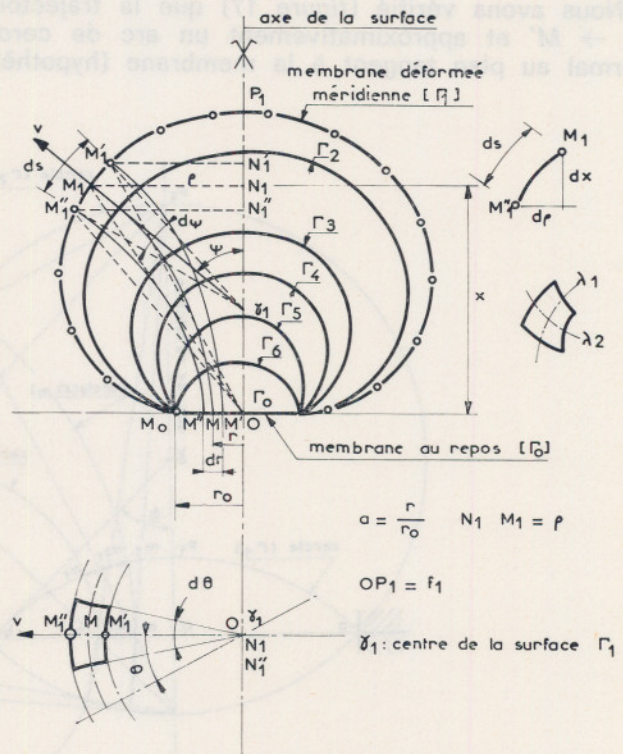


Fig. 8 a. — Définition de la déformation, paramétrage de la surface déformée

$$\lambda_1 = \frac{M_1 M_1''}{M' M''} = \frac{ds}{dr} = \frac{R_\psi d\psi}{dr} = [d\rho^2 + dx^2]^{1/2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho}{r}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{r}{\rho} [d\rho^2 + dx^2]^{-1/2}$$

Aux points caractéristiques de la déformée nous aurons :

au pôle :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rho \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda^2} = \alpha = \frac{e \rho}{e_0}$

$$\psi = 0 \quad R_\psi = R \rho \quad r = 0 \quad x = f$$

sur le parallèle de  $M_0$

$$r = r_0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 1 \quad \lambda_1 = 1$$

sur le parallèle de l'équateur :

$$\rho = R\psi$$

### 3. CONFIGURATION EN COURS D'ESSAI

Le passage de la configuration de référence à la configuration en cours d'essai est une transformation purement géométrique. Nous avons opéré à température constante et choisi des vulcanisats très élastiques dont les réactions mécaniques sont très peu sensibles à l'effet du temps.

Nous analysons le déplacement d'un point de la membrane d'un point de vue théorique (figure 8 b).

Nous avons vérifié (figure 17) que la trajectoire  $M \rightarrow M'$  est approximativement un arc de cercle normal au plan tangent à la membrane (hypothèse

de R. Hill) (4). Les configurations successives de la membrane sont donc des caottes sphériques orthogonales aux arcs de cercle  $MM'$ .

En considérant une coupe d'ensemble par un plan méridien, il est possible de choisir un modèle de calcul (figure 9) sur lequel les cercles ( $\Gamma$ ) représentent les configurations successives de la méridienne et les cercles ( $\Omega_m$ ) et ( $\Omega_n$ ) les trajectoires respectives des points  $m$  et  $n$ :

Le point  $P$ , intersection de la méridienne et de l'axe de révolution, est le pôle. C'est un point à déplacement radial nul et à déplacement axial maximum. La distance  $OP$  est la flèche  $f$ .

L'intérêt d'un tel modèle est qu'il permet d'écrire des relations géométriques simples telle que :

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{r_0^2}{f} + f \right] \quad (1) \quad R : \text{rayon du cercle}$$

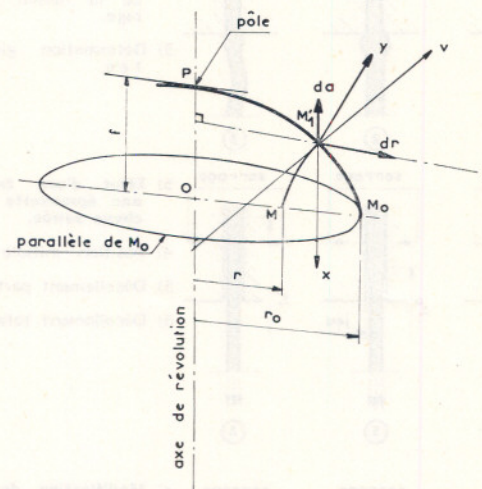


Fig. 8 b. — Déplacement d'un point  $M$  au cours d'une transformation

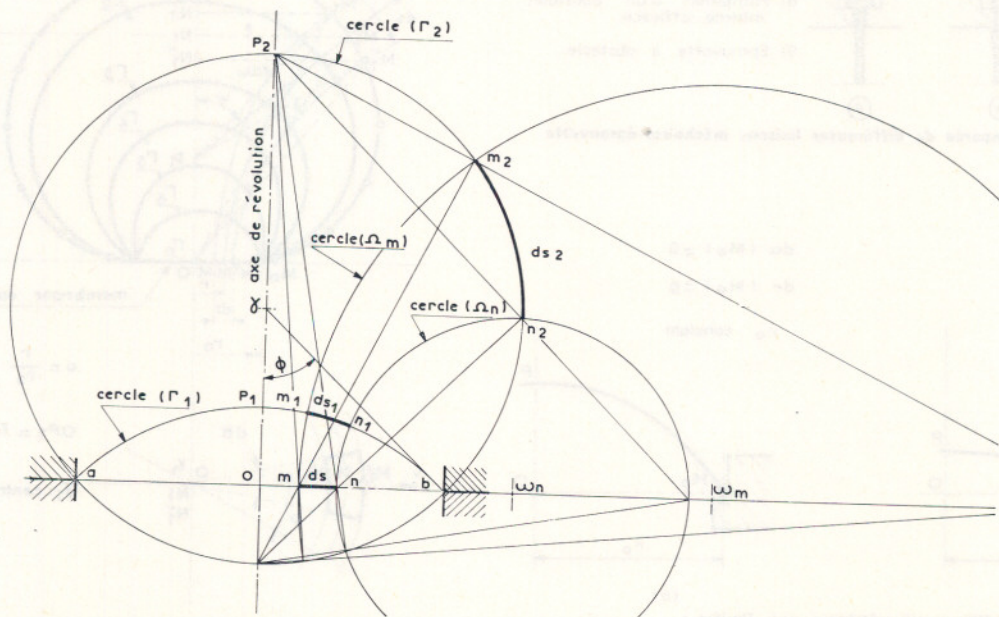


Fig. 9. — Modèle théorique de calcul du comportement de la membrane sous pression interne

et, si on suppose pour le caoutchouc, une conservation du volume au cours de la déformation [4] :

$$\frac{e_r}{e_o} = \left[ \frac{r_o^4 + r^2 f^2}{r_o^4 + r_o^2 f^2} \right]^2 = \left[ \frac{1 + a^2 \beta}{1 + \beta} \right]^2 \quad (2)$$

$\frac{e_r}{e_o}$  : rapport des épaisseurs au cours de la déformation :

avec  $\beta = \left(\frac{f}{r_o}\right)^2$  et  $a = \frac{r}{r_o}$

$$\frac{e_r}{e_o} \left[ \frac{1 + a^2 \beta}{1 + \beta} \right]^2 \quad (2')$$

au pôle  $r = 0$

$$\alpha = \frac{e_p}{e_o} = \left[ \frac{1}{1 + \beta} \right]^2 \quad (3)$$

Il est donc nécessaire de mesurer la flèche pour traduire numériquement des différentes expressions. Si celles-ci nous permettent, à partir d'une seule mesure, d'exprimer le comportement global de la membrane sous pression, elles ne peuvent rendre exactement compte du comportement réel en chaque point. C'est pourquoi nous avons effectué des mesures directes au pôle ; de déplacement, d'allongement, de rayon de courbure, afin d'en déduire le rapport d'épaisseur (figure 10).

$$\alpha = \frac{e_o}{e_p} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3')$$

avec  $\lambda = \frac{1}{l_o} = \frac{\text{arc } A_1 B_1}{A_o B_o} = \frac{2 R_p \text{ arc tg } \frac{c}{2 R_p}}{l_o}$

La zone dite polaire est telle que :

$$e_p [p(-)] = e_p [p(+)] = \varepsilon e_p$$

soit limitée à  $\varepsilon \leq 0,02$ , c'est-à-dire que :

$$a = \frac{r}{r_o} \leq 0,1$$

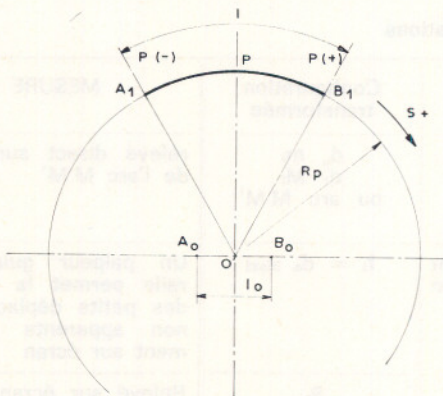


Fig. 10. — Etude géométrique locale au pôle.

#### 4. MATERIAUX ESSAYES

Nous avons essayé trois types de vulcanisats de caoutchouc fournis en plaque par l'Institut français du caoutchouc.

Tout d'abord, un caoutchouc naturel vulcanisé par 3,5 % de peroxyde de dicumyle à 147° C pendant 40 minutes de vulcanisation à 147° C. Il a été fourni en épaisseurs de 0,95 — 1,2 — 1,6 — 2,15 mm.

Ensuite un copolymère butadiène (76,5 %) styrène (23,5 %) référence commerciale S B R 1500 (Réf. 153) vulcanisé à 140° C pendant 60 minutes, fourni en épaisseur de 2,10 mm.

Enfin, une plaque de 2,13 mm d'épaisseur d'un vulcanisat de S B R contenant 10 volumes de noir I.S. A.F. (vulcanisation identique au S B R pure gomme précédent).

Le comportement en traction de ces vulcanisats est représenté sur la figure 11.

Les différentes éprouvettes utilisées au cours de ce travail ont été découpées à l'emporte pièce.

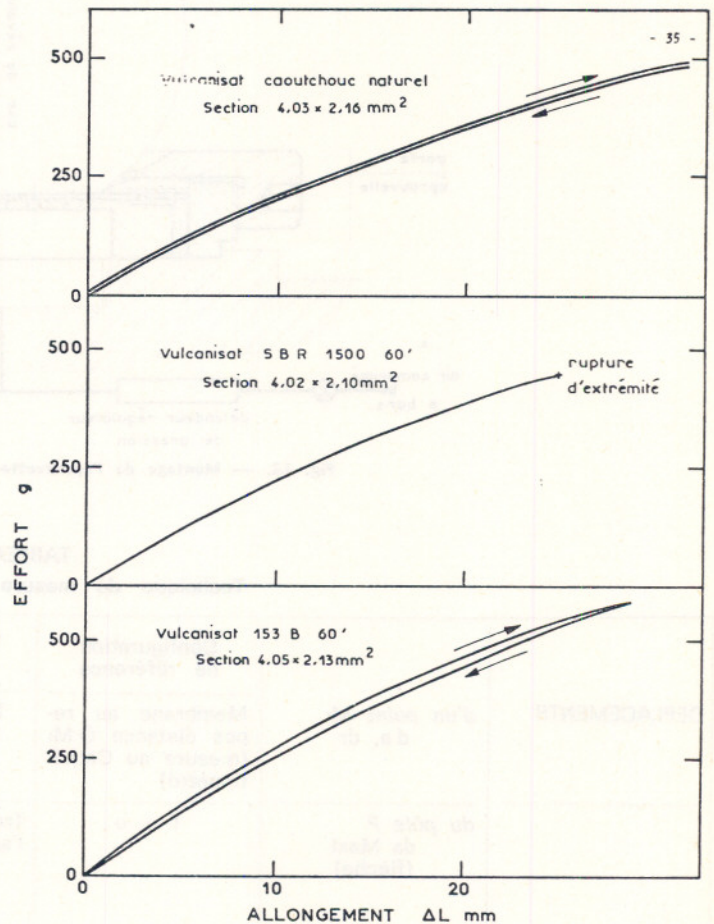


Fig. 11. — Essai de traction pour les trois matériaux choisis. Vitesse d'essai 0,5 mm par mn. Température 20° C — Longueur de référence  $L_o = 70$  mm

#### 4.1. Marquage des échantillons

Les différents points  $M$  ont été matérialisés par un vernis élastique constitué par une dissolution de vulcanoprène contenant du noir de carbone et présentant l'avantage d'épouser parfaitement toutes les déformations de la membrane sans aucun décollement. La dépose est faite à la seringue. Ce vernis fourni par l'Institut français du Caoutchouc a la particularité de suivre parfaitement toutes les déformations sans décollement même partiel, de plus il a été possible d'y noyer une gommure qui rend les mesures plus nettes à l'œil. Enfin aucune détérioration locale du caoutchouc n'est à craindre avec ce procédé.

#### 5. MONTAGE D'ESSAI

(figure 12)

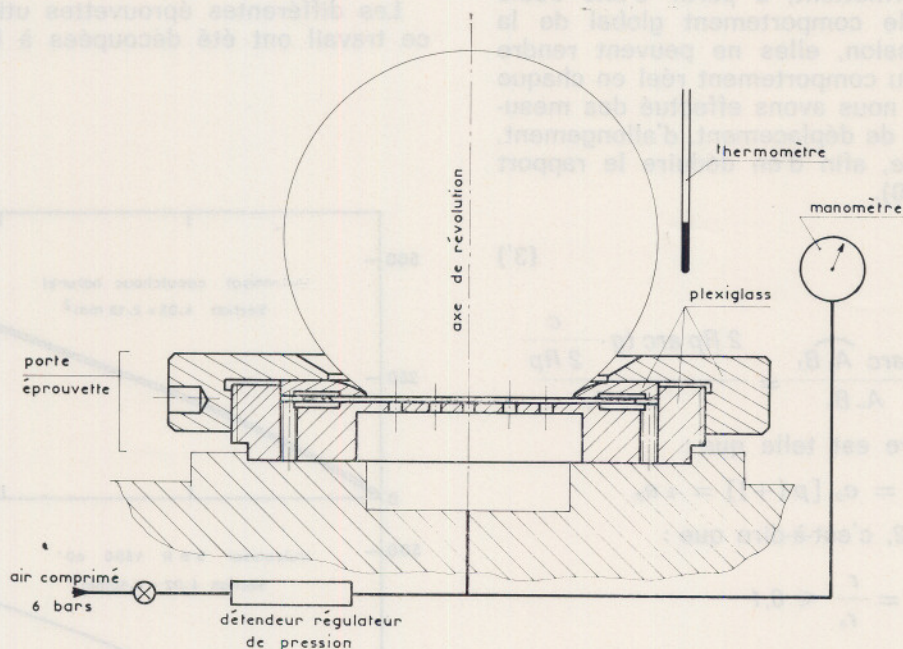


Fig. 12. — Montage de l'éprouvette — Schéma de principe de l'appareil

Il comporte conformément au schéma fonctionnel de la figure 4 :

- un bâti support reporté sur l'ensemble de mesure,
- un porte éprouvette, diamètre caractéristique  $2r_0 = 55$  mm,
- une alimentation stabilisée en pression et sa mesure,
- une mesure la température environnante.

#### 6. TECHNIQUE DE MESURE

La procédure utilisée doit permettre de mesurer en fonction de la pression intérieure les déformations figurant dans le tableau 1 dans des conditions aussi indépendantes du temps que possible. A cet égard les cycles de traction obtenus sur machine Zwick et indiqués figure 11, montrent que les vulcanisats examinés présentent, du fait qu'ils ont une

TABLEAU 1  
Technique de mesure des configurations

		Configuration de référence	Transformation	Configuration transformée	MESURE
DEPLACEMENTS	d'un point $M_i$ $d_a, d_r$	Membrane au repos distance $OM_i$ (mesure au Cathétomètre)	Translations ou Rotation $MM'_i$	$d_r, m_i$ $d_r, M_i$ ou arc $MM'$	relevé direct sur écran de l'arc $MM'$
	du pôle $P$ $d_a \text{ Maxi}$ (flèche)	$f = 0$	Translation suivant l'axe de révolution	$f_i = d_a \text{ Maxi}$	Un palpeur guidé par rails permet la mesure des petits déplacements non apparents directement sur écran
RAYON DE COURBURE	au pôle $R_p$	$R_p = \infty$	vairation de $R_p$	$R_{p1}$	Relevé sur écran par la méthode corde et flèche

structure macromoléculaire très réticulée, une hystérésis minime. Ce comportement est en accord avec les faibles relaxations de tension observées à allongement constant sur les caoutchoucs analogues par Chasset et Thirion [5].

Compte tenu de ces résultats, les mesures de déformation correspondant à des incréments ou décréments de pression ont pu être espacées par des temps d'une à deux minutes sans risque d'évolution de tension au cours de la mesure.

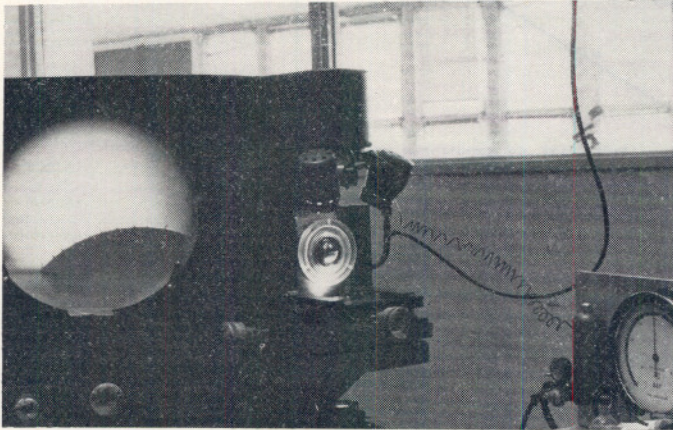


Fig. 13. — Photographie montrant l'appareil d'essai avec les équipements de mesure

Aucune détermination de la déformée par contact ne pouvant convenir, nous avons choisi un procédé par projection à rayons lumineux parallèles et agrandissement. Le projecteur de profil S.A.G.E.M. nous a permis des agrandissements de 10 à 100, soit des erreurs de 0,01 à 0,001 pour chaque lecture. Cet appareil présente l'avantage de relevés directs sur écran, l'échauffement des matériaux étant éliminé par interposition d'un écran anticalorifique.

Toutefois, certaines distances ont été relevées sur la membrane au cathétomètre.

La figure 13 montre le dispositif de mesure avec les équipements périphériques.

## 7. DEPOUILLEMENT DES RESULTATS

### 7.1. Mesure de la flèche

La mesure de la flèche ne donne pas une idée complète de la configuration globale de la membrane, bien qu'elle en soit étroitement dépendante. Nous avons cependant commencé par ces mesures, car elles permettent de connaître le comportement de l'appareil et des matériaux essayés (liaisons, effets du temps, effets thermiques...).

Les courbes de la figure 14 donnent, pour un vulcanisat de caoutchouc naturel essayé en quatre épaisseurs, la flèche en fonction de la pression. Les courbes retour montrent pour ces caoutchoucs très

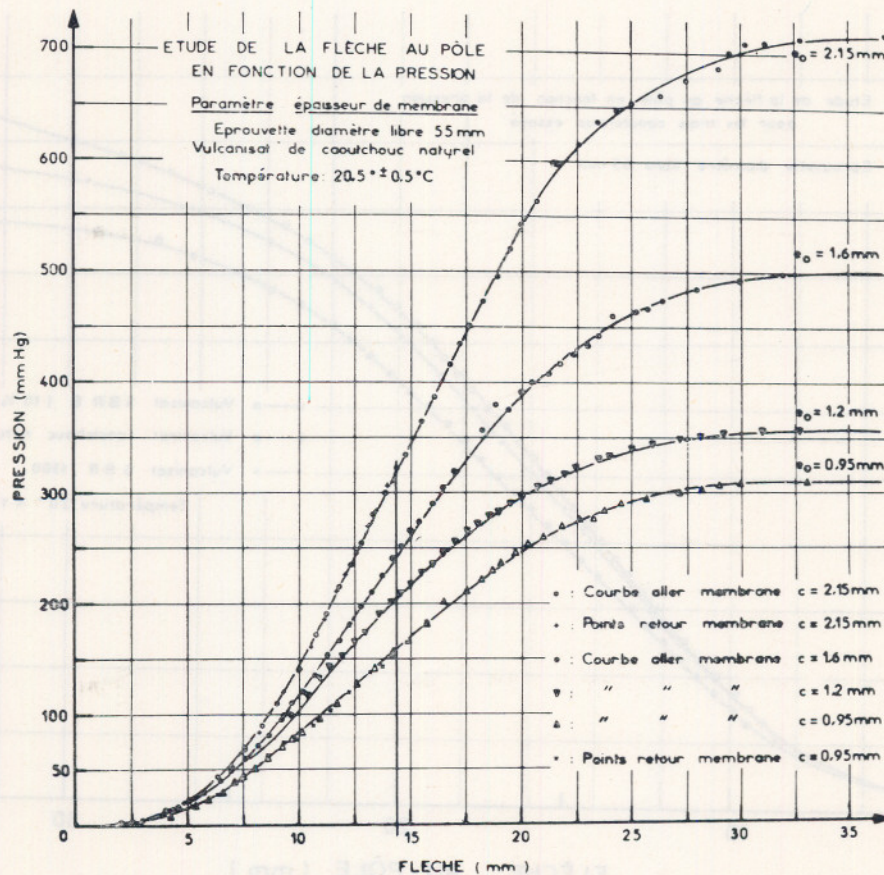


Fig. 14

vulcanisés que le changement de configuration s'effectue encore de façon réversible en extension biaxiale.

A partir d'une certaine pression critique, la flèche croît rapidement, jusqu'à l'éclatement. Cette pression limite semble être proportionnelle à l'épaisseur de la membrane (figure 15).

La figure 16 est relative à des mesures identiques effectuées sur chacun des trois vulcanisats, avec des éprouvettes d'épaisseurs aussi voisines que possible. Les comportements restent analogues, compte tenu des rigidités propres à chaque vulcanisat et ce résultat laisse prévoir une même configuration globale de la déformée.

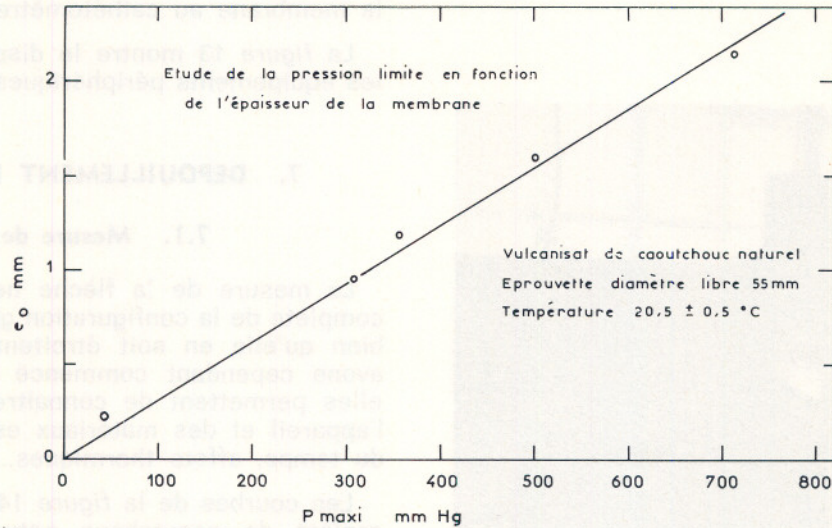


Fig. 15. — Etude de la pression limite en fonction de l'épaisseur de la membrane

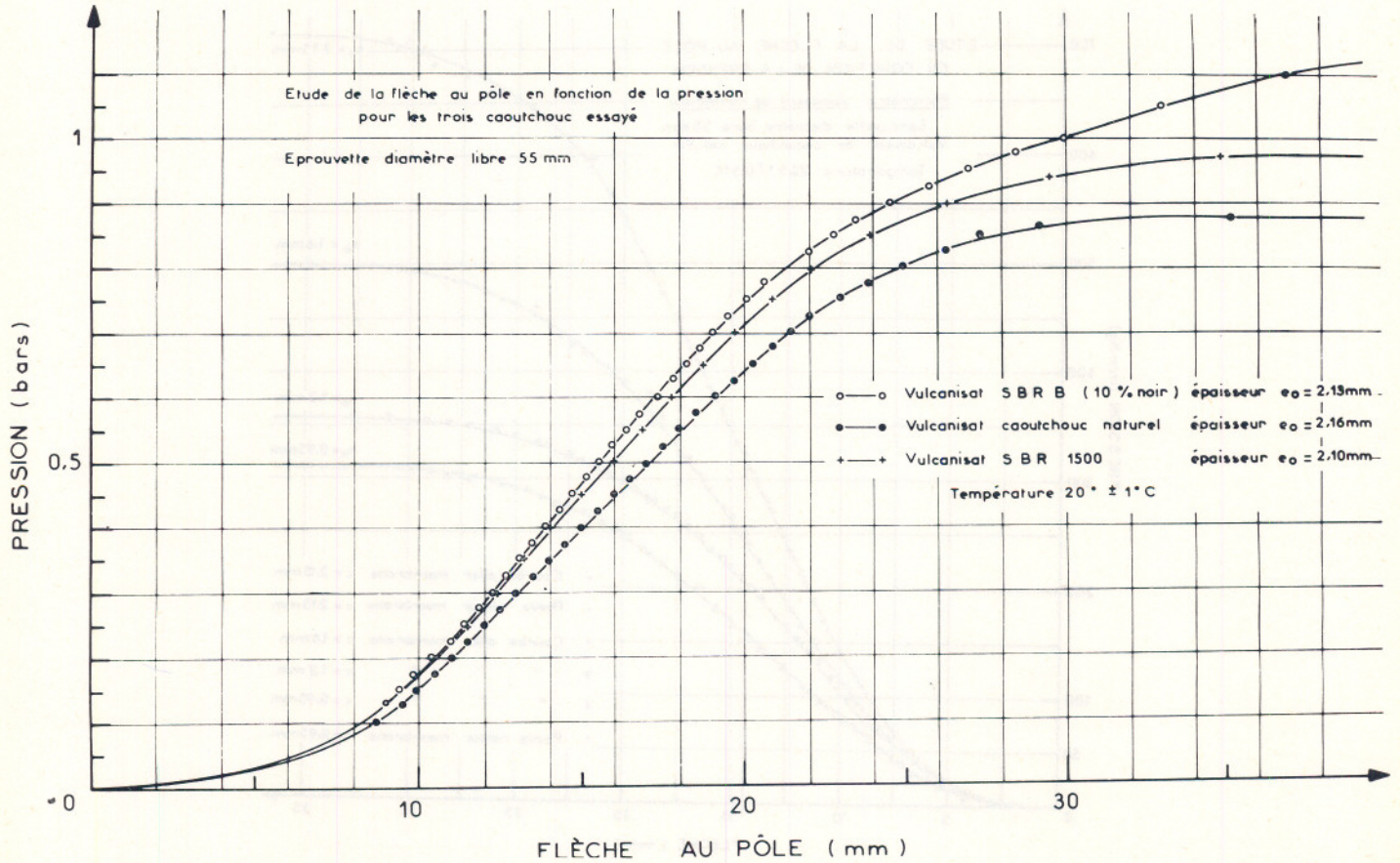


Fig. 16



**7.2. Configuration globale de la déformée**

Nous avons retenu, d'une série d'expériences conduites sur les trois caoutchoucs, quatre relevés des configurations successives de la méridienne. La

trajectoire suivie de différents points  $M$  figure sur les dessins.

Nous vérifions, dans un vaste domaine d'extension, avec des variations inférieures à 10 %, les

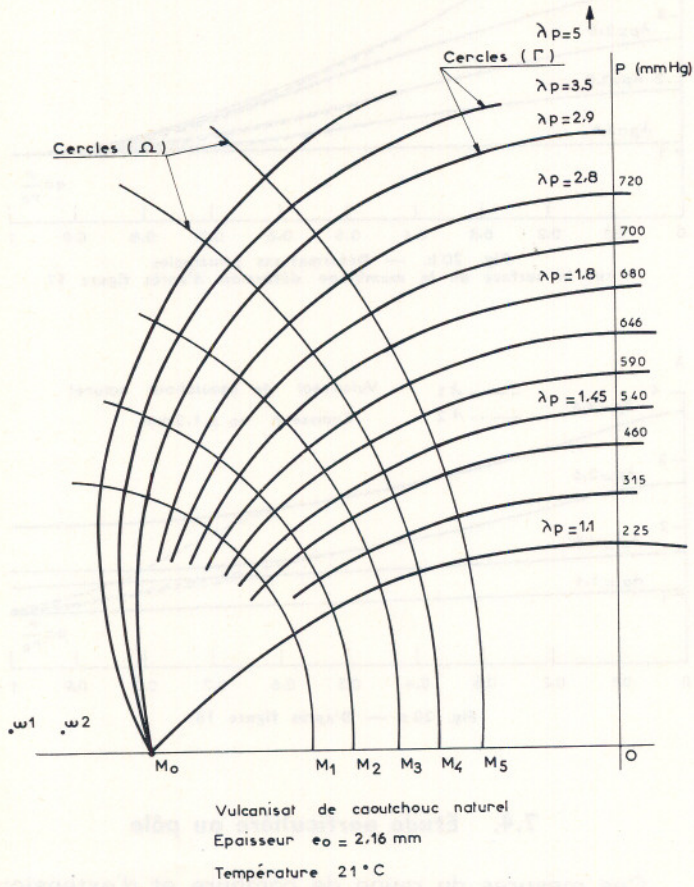


Fig. 17. — Etude de la déformée

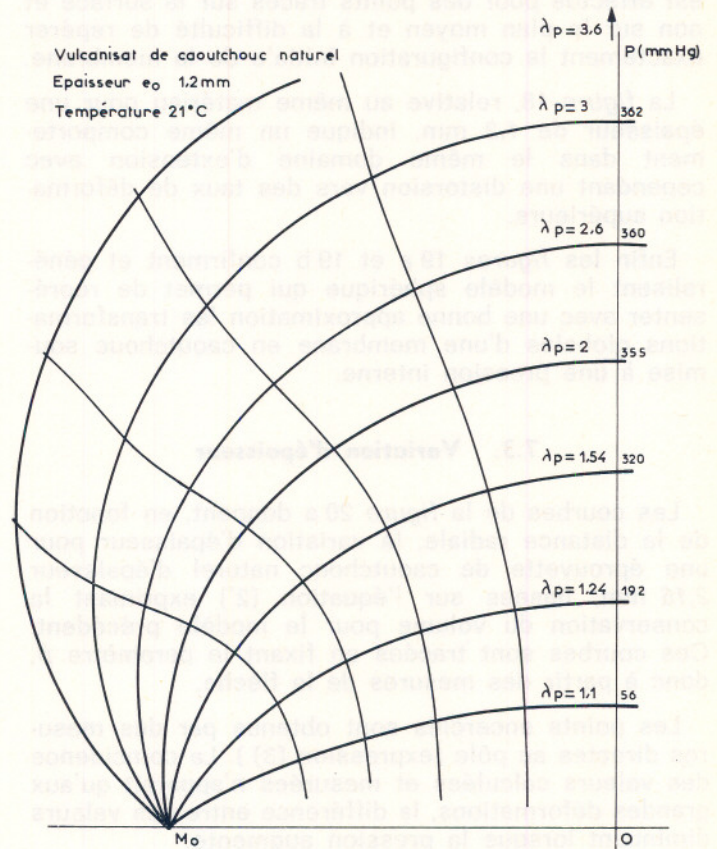


Fig. 18. — Etude de la déformée

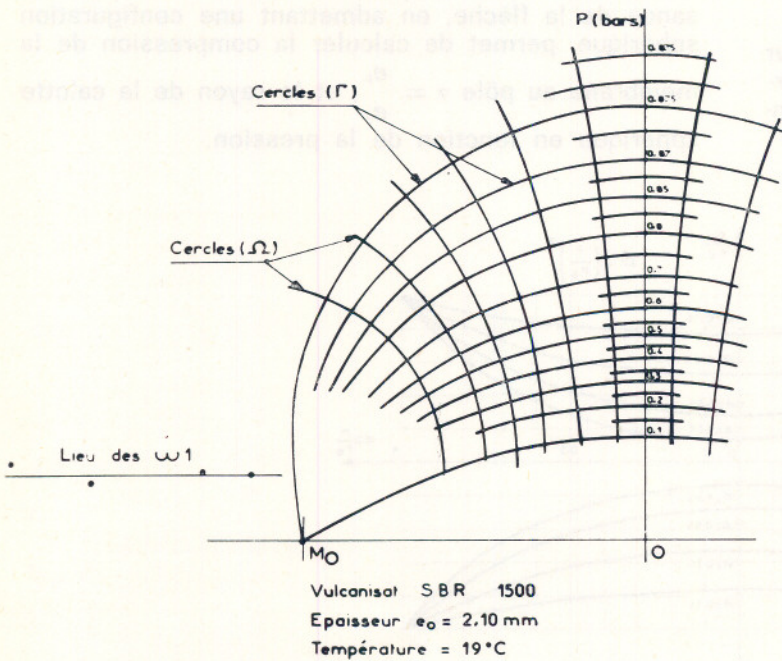


Fig. 19 a

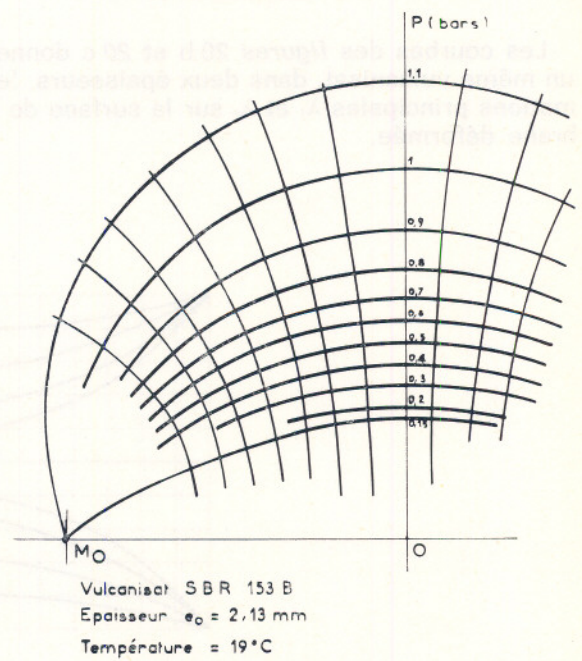


Fig. 19 b

Fig. 19. — Configuration globale de la déformée

hypothèses du modèle géométrique précédemment indiqué. En effet la figure 17 donnant un relevé effectué sur une membrane en caoutchouc naturel d'épaisseur 2,16 mm montre que le lieu des points  $M_i$  est un arc de cercle dont le centre se trouve très légèrement au-dessus du plan du parallèle de  $M_o$ . Ce décalage est sans doute dû au fait que le relevé est effectué pour des points tracés sur la surface et non sur le plan moyen et à la difficulté de repérer exactement la configuration initiale de la membrane.

La figure 18, relative au même matériau pour une épaisseur de 1,2 mm, indique un même comportement dans le même domaine d'extension avec cependant une distorsion vers des taux de déformation supérieurs.

Enfin les figures 19 a et 19 b confirment et généralisent le modèle sphérique qui permet de représenter avec une bonne approximation les transformations globales d'une membrane en caoutchouc soumise à une pression interne.

### 7.3. Variation d'épaisseur

Les courbes de la figure 20 a donnent, en fonction de la distance radiale, la variation d'épaisseur pour une éprouvette de caoutchouc naturel d'épaisseur 2,16 mm, basées sur l'équation (2') exprimant la conservation du volume pour le modèle précédent. Ces courbes sont tracées en fixant le paramètre  $\beta$ , donc à partir des mesures de la flèche.

Les points encadrés sont obtenus par des mesures directes au pôle (expression (3)). La coïncidence des valeurs calculées et mesurées n'apparaît qu'aux grandes déformations, la différence entre ces valeurs diminuant lorsque la pression augmente.

### 7.4. Variations de $\lambda_1$ $\lambda_2$

Les courbes des figures 20 b et 20 c donnent, pour un même vulcanisat, dans deux épaisseurs, les déformations principales  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur la surface de la membrane déformée.

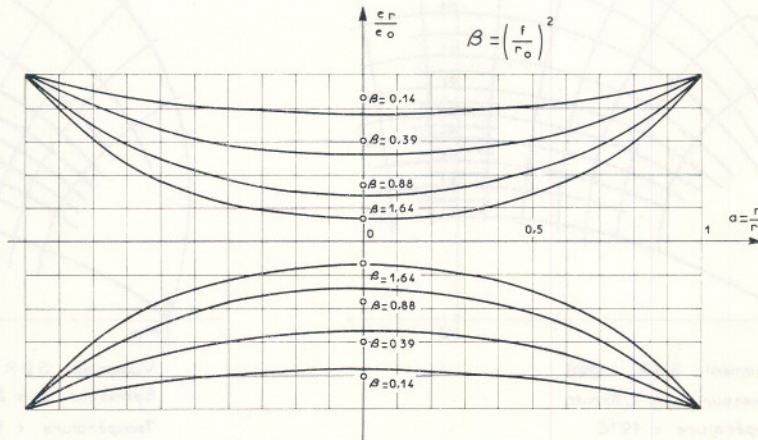


Fig. 20 a. — Etude de la variation d'épaisseur en fonction de la distance radiale. Vulcanisat de caoutchouc naturel  $e_0 = 2,16$  mm

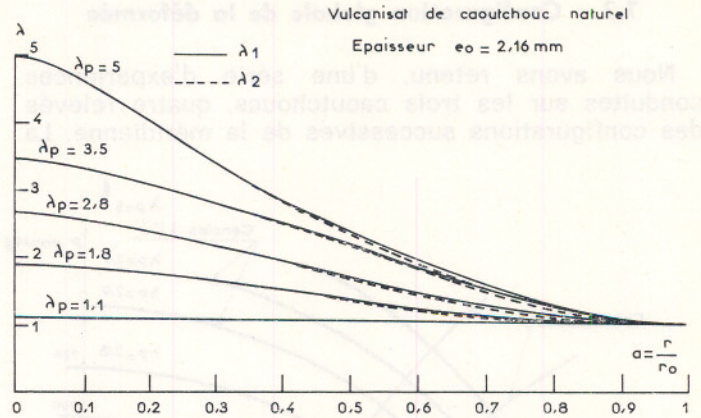


Fig. 20 b. — Déformations principales sur la surface de la membrane déformée, d'après figure 17

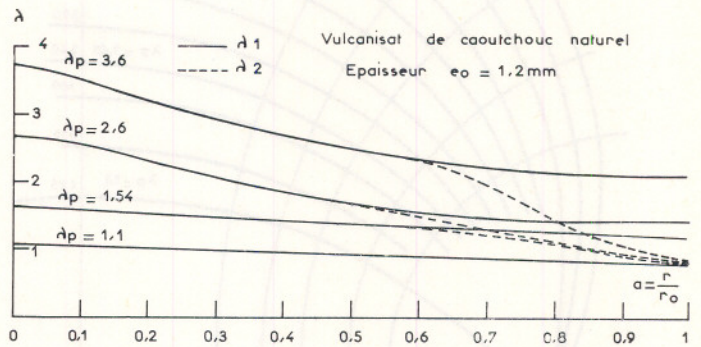


Fig. 20 c. — D'après figure 18

### 7.4. Etude particulière au pôle

Ces mesures du rayon de combure et d'extension au pôle ont été effectuées sur une éprouvette de caoutchouc naturel d'épaisseur 2,16 mm. La connaissance de la flèche, en admettant une configuration sphérique, permet de calculer la compression de la membrane au pôle  $\alpha = \frac{e_p}{e_0}$ , et le rayon de la ca'otte sphérique en fonction de la pression.

	Configuration initiale	Configuration déformée	Chercheurs et types d'essais
Sous traction	(a)		YANG-FENG (1970) étude en déformations. FOSTER (1967) étude en déformations.
	(b)		FOSTER (1967).
	(c)		McGUIRT-LIANIS (1970) relaxation en traction mono et biaxiale. OBATA-KAWABATA-KAWAI (1968) énergie de déformation en traction biaxiale.
	(d)		FOSTER (1967).
Sous pression	(a)		FOSTER (1967).
	(b)		FOSTER (1967).
	(c)		TRELOAR (1944) déformations et rupture. RIVLIN - SAUNDERS (1951). GREEN-ADKINS (1960) déformations - énergie de déformation. YU-VALANIS (1970) déformations avec gradient de pression. YANG-FENG (1970) déformations. DICKIE-SMITH (1969) déformations. HOPKINS (1958) rupture-plastique. FONTAINE (1970) fluage - plastique. HAWARD (1970) contrainte - plastique. BONIS (1970) déformation en canal.
	(d)		FOSTER (1967).

Fig. 21

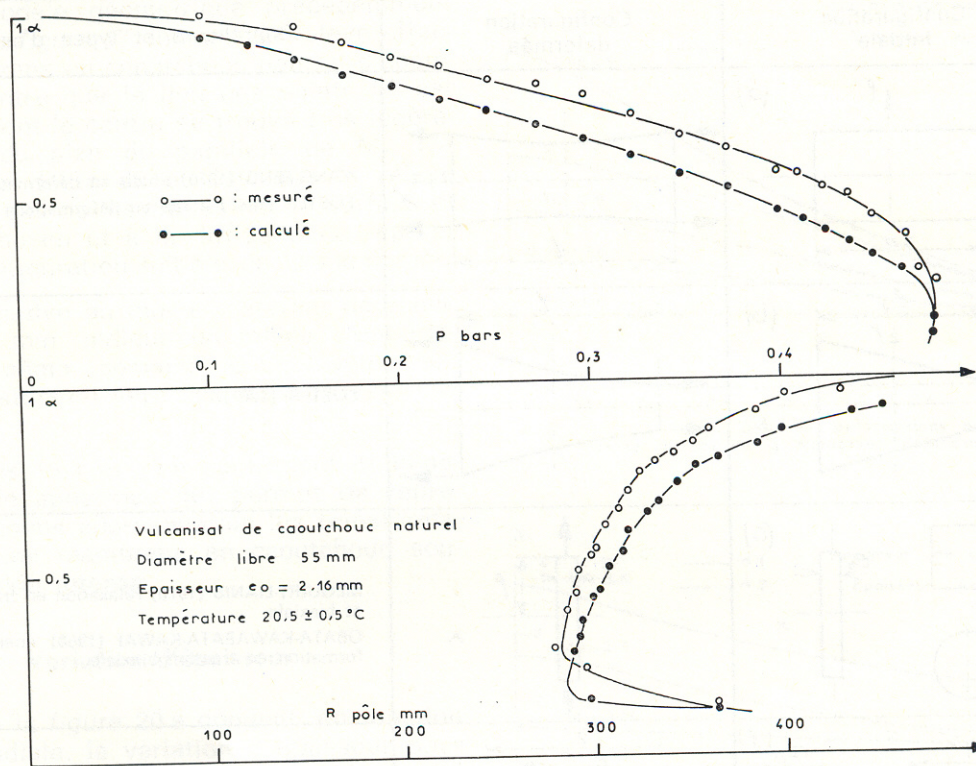


Fig. 22. — Etude au pôle

Les mesures directes effectuées sont comparées sur la figure 22. La différence entre les courbes est normale, compte tenu des approximations faites pour le modèle et des remarques déjà données.

Le passage par une pression maximale et par un rayon minimal à partir desquels se manifeste un phénomène d'instabilité peut être analysé à partir de la théorie des grandes déformations élastiques développée notamment par Rivlin. L'instabilité est marquée par une dilatation infinie (jusqu'à rupture) de la membrane aux grandes déformations.

## 8. CONCLUSIONS

La technique de mesure présentée dans ce travail constitue un perfectionnement de celle précédemment utilisée par Rivlin pour étudier l'extension biaxiale de vulcanisat de caoutchouc pure gomme par gonflement d'une membrane. La détermination précise des déformées, ainsi possible au moins dans la zone des grandes déformations a montré en première approximation que les configurations sont très voisines d'une calotte sphérique. Ce qui permet avec une bonne approximation une analyse simple des configurations géométriques des membranes circulaires.

Nous nous sommes volontairement limité ici à cet aspect géométrique du problème, réservant pour des recherches ultérieures localisées au pôle, une analyse des relations contraintes-déformation et des fonctions énergie en nous efforçant, dans la mesure du possible, d'atteindre la zone des petites déforma-

tions, soit en utilisant des membranes beaucoup plus minces, soit par des essais d'extension biaxiale homogène dans le plan de la membrane.

Non semblable mais complémentaire, ce travail s'intègre dans les expériences antérieures ou en cours concernant les déformations axisymétriques de membranes en matériaux non linéaires dont la figure 21 illustre les divers aspects de recherches.

## REMERCIEMENTS

Nous adressons nos remerciements à M. Comolet, professeur à la Faculté des Sciences d'Orsay pour son aide précieuse et tout particulièrement à M. Thirion, directeur de recherches, et M. Chasset, ingénieur à l'Institut français du Caoutchouc pour les nombreux conseils concernant le choix des matériaux et les techniques de mesure.

## 9. BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.D. WEBER. — Cahiers du Groupe français de Rhéologie Tome II. — n° 1, janvier 1969.
- [2] R.S. RIVLIN. — Large elastic deformations of isotropic materials. Experiments on the deformation of rubber. *Dav Faraday* 1950.
- [3] A. BRESSAUC. — *Revue française de Mécanique*, 1969, n° 32.
- [4] E. FONTAINE. — Etude de l'étrirage des films. Thèse ingénieur C.N.A.M. 1967.
- [5] P. THIRION et R. CHASSET. — Relaxation viscoélastique des vulcanisats de caoutchouc R.G.C.P. vol. 44 - n° 9, 1967.

# Théories du frottement d'adhésion viscoélastique par des processus de rupture d'agrégats moléculaires\*

par J.-M. TATRAUX-PARO

Attaché de recherches au C.N.R.S.  
Centre de recherches physiques de Marseille

## RESUME

Nous avons analysé le frottement d'adhésion d'un élastomère glissant sur un substrat infiniment rigide en supposant que ce type de frottement est dû à l'étirement d'agrégats moléculaires du caoutchouc au cours du glissement, étirement qui cesse lorsque la liaison entre l'agrégat et le substrat se rompt. Nous considérons tour à tour deux processus de rupture, l'un basé sur un critère dynamique, l'autre sur un critère énergétique. A chaque critère correspond un comportement particulier du frottement en fonction de la vitesse de glissement, la comparaison des résultats obtenus avec les résultats expérimentaux de Grosch montre que le critère énergétique de rupture est mieux approprié dans le cas étudié que le critère dynamique.

## ABSTRACT

*Adhesion friction of rubber slipping against a rigid substratum is analysed in this paper, it's assumed that this type of friction is due to the stretching of molecular aggregates of rubber, stretching which stops when the bond between the aggregate and the substratum breaks. Two processes of breaking are analysed successively, the first is based on a dynamic criterion, the second on a energetic one. For each criterion corresponds a peculiar behaviour of the friction force in fonction of the slipping speed, the comparison of these results with the experimental results obtained by Grosch shows that the energetic criterion of breaking is in a better agreement than the dynamic one.*

(\*) Conférence au Groupe français de Rhéologie le 1<sup>er</sup> mars 1972.

## 1. INTRODUCTION

On sait [1] que le frottement de glissement est la somme de trois composantes :

- a) l'abrasion qui est due à la rupture des cohésions internes,
- b) l'adhésion que l'on attribue aux forces inter-moléculaires,
- c) la déformation qui est due aux pertes par hystérésis ;

on se propose ici d'étudier la composante d'adhésion dans le cas du frottement du caoutchouc sur du verre. Dans la pratique, il est possible d'isoler cette dernière composante en différenciant par exemple le frottement total du frottement de déformation, qui s'obtient par lubrification (abrasion nulle) ; on peut aussi la mesurer, comme nous le montrerons dans une prochaine publication, en faisant pivoter, autour d'un axe perpendiculaire à la surface de contact, un corps de révolution ; la procédé a pour effet de laisser la déformation constante pendant la rotation, ce qui supprime les frottements par hystérésis.

Dans ce travail, on fera l'hypothèse suivante : la composante d'adhésion du frottement du caoutchouc sur le verre est due à la rupture des agrégats moléculaires du caoutchouc qui se trouvent en contact pendant le glissement ; on étudie successivement deux types de rupture : l'un dynamique, l'autre énergétique ; dans le premier cas, on suppose que la liaison (verre-caoutchouc) à la surface de contact se rompt lorsque la force de liaison de l'agrégat atteint une certaine valeur critique  $f_0$  ; dans le second cas, on suppose qu'il y a rupture lorsque l'énergie emmagasinée par l'agrégat atteint une certaine valeur critique  $W_0$ .

Le but de l'étude est de déterminer le comportement de la composante adhésion du frottement en fonction de la vitesse de glissement, et de le comparer avec les résultats expérimentaux donnés par

Grosch [2]. On montrera par ailleurs que la théorie mise en œuvre est compatible avec le principe d'équivalence vitesse-température.

Pour développer la théorie, on raisonne de la même façon quel que soit le type de rupture choisi : on suppose connue la fonction de relaxation des agrégats du caoutchouc, fonction déterminée à partir des propriétés mécaniques du matériau, d'autre part on impose un glissement uniforme de vitesse  $V$  entre les deux matériaux mis en contact ; connaissant la fonction de relaxation et la loi du déplacement, on obtient à partir de l'intégrale de Boltzmann l'expression de la force de liaison, ce qui permet de calculer la force de frottement comme la valeur moyenne des forces de liaison.

## 2. RUPTURE DE TYPE DYNAMIQUE

### 2.1. Equations

Soit  $n$  le nombre total de molécules susceptibles de liaisons au voisinage du contact, soit  $n_o$  le nombre à l'état lié,  $n_l$  le nombre à l'état libre ;  $t_o$  le temps qu'un agrégat demeure à l'état lié,  $t_l$  le temps qu'il demeure à l'état libre ; ces différentes qualités sont liées par les relations statistiques :

$$(1) \quad \frac{n_o}{t_o} = \frac{n_l}{t_l} = \frac{n}{t_o + t_l}$$

On suppose que le temps pendant lequel un agrégat demeure à l'état libre est proportionnel au temps de relaxation  $\tau$  d'un agrégat, soit :

$$(2) \quad t_l = a \tau$$

ce qui peut être justifié si on considère que le temps nécessaire à l'agrégat pour rejoindre un certain niveau dynamique est proportionnel à  $\tau$ .

Soit  $r(t)$  la fonction de relaxation ; le déplacement étant proportionnel à la vitesse  $V$  supposée uniforme, la force de liaison  $f$  des agrégats s'obtient par l'intégrale de Boltzmann :

$$(3) \quad f(t) = V \int_0^t r(t-t') dt'$$

On supposera connue la limite dynamique  $f_o$  d'une liaison (cette valeur peut être déterminée par la valeur du frottement au voisinage de vitesses de glissement nulles,  $f_o = \frac{2F(0)}{n}$  § 1.4), l'équation (3)

donne l'expression de la force de liaison en fonction du temps. On peut donc écrire, en supposant que cette liaison cesse lorsque la force atteint la valeur  $f_o$  :

$$(4) \quad f(t_o) = f_o$$

La force de frottement globale  $F$  qui est la valeur moyenne des forces de liaison des agrégats est définie par :

$$(5) \quad F = \frac{n_o}{t_o} \int_0^{t_o} f(t) dt$$

Ces cinq relations permettent d'étudier l'évolution de la composante adhésion du frottement en fonction de la vitesse de glissement.

### 2.2. Application à une distribution à temps unique de relaxation

Supposons que le caoutchouc puisse être caractérisé par une fonction de relaxation de la forme :

$$(6) \quad r(t) = E_o (1 + b e^{-t/\tau})$$

$\tau$  étant le temps de relaxation,  $E_o$  son module d'élasticité (ce type de caoutchouc conserve une élasticité non nulle au bout d'un temps infini lors d'une expérience de relaxation). On réduit le nombre des paramètres en posant :

$$(7) \quad L = V\tau \quad \alpha = \frac{t}{\tau}$$

d'après (3) et (6), la force élémentaire de chaque agrégat se met sous la forme :

$$(8) \quad f = E_o L [\alpha + b(1 - e^{-\alpha})]$$

(4) permet de déterminer  $t_o$  (i. e.  $\alpha_o$ ) par l'équation transcendante :

$$(9) \quad L = \frac{f_o}{E_o} [\alpha_o + b(1 - e^{-\alpha_o})]^{-1}$$

On obtient à l'aide de (5) et (8) l'expression du frottement global  $F$  :

$$(10) \quad F = \frac{n \alpha_o}{\alpha_o + a} E_o L \left\{ \frac{\alpha_o}{2} + b \left[ 1 + \frac{1}{\alpha_o} (e^{-\alpha_o} - 1) \right] \right\}$$

Pour connaître l'expression du frottement en fonction de la vitesse de glissement [i.e.  $F(L)$ ] il suffit d'éliminer  $\alpha_o$  entre les équations (9) et (10), on examinera dans ce qui suit les résultats ainsi obtenus.

### 2.3. Compatibilité avec le principe d'équivalence vitesse-température

On dit qu'une grandeur  $A(V, T)$  qui dépend de la vitesse et de la température obéit au principe d'équivalence vitesse-température s'il existe un nombre  $K(T_1, T_2)$  ( $T_1$  étant fixé ainsi que  $T_2$ ) tel que :

$$A(V, T_1) = A(KV, T_2) \quad \forall T_1, T_2$$

On a montré [3] que  $K$  variait en fonction de la température selon la loi empirique :

$$\text{Log}(K) = \frac{T - T_o}{c + d(T - T_o)}$$

où  $c$  et  $d$  sont des constantes dépendant de la température de référence  $T_o$ .

Les propriétés physiques des corps viscoélastiques obéissent en général au principe d'équivalence vitesse-température, c'est le cas, par exemple, du frottement du caoutchouc ; de la vitesse de propagation dans les bitumes et les plastiques [4, 5], etc... ; les applications de ce principe sont très importantes, en effet, il permet, en n'utilisant qu'une seule vitesse et en faisant varier la température, de connaître, après s'être ramené à une température de réf-

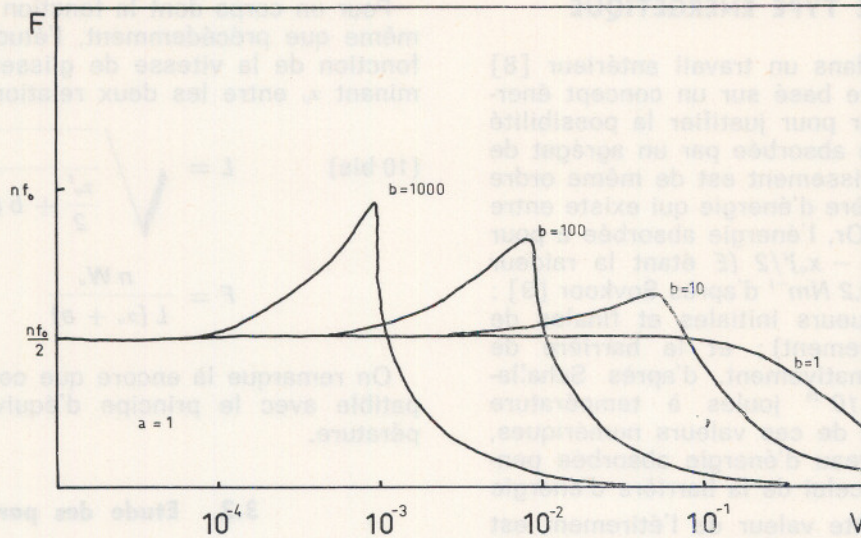


Fig. 1. — Influence de b (fig. 1) et a (fig. 2) sur le frottement déduit de la théorie de la rupture de type dynamique

rence, le phénomène pour plusieurs vitesses. C'est à partir de ce procédé que Grosch [2] a obtenu la courbe maîtresse que nous retrouverons par la suite.

Schallamach [6] donne une interprétation de ce principe d'équivalence vitesse-température : il montre que l'expression analytique supposée connue d'un phénomène obéissant au principe d'équivalence a une forme particulière, en effet, dans cette expression la vitesse et le temps de relaxation interviennent simultanément sous forme de produit, or on sait [7] que les temps de relaxation sont proportionnels à la viscosité qui dépend de la température (la loi empirique  $\eta = A e^{B/T-T_0}$  étant une bonne approximation de cette dépendance), ce qui explique la réciprocité des rôles joués par la vitesse et la température. L'expression du frottement dans la présente théorie s'obtient à partir des relations (9) et (10) qui donnent  $F$  et  $L$  en fonction de la coordonnée paramétrique  $\alpha_0$  ; l'élimination de  $\alpha_0$  entre ces deux

relations montre que  $V$  et  $\tau$  n'interviennent dans le frottement que sous la forme du produit  $L = V \tau$ , ce qui montre que la théorie est compatible avec le principe d'équivalence vitesse-température.

2.4. Influence des paramètres

A partir des équations (9) et (10), on porte sur un graphique les variations du frottement en fonction du logarithme décimal de la vitesse de glissement, et on étudie l'évolution de la courbe obtenue en fonction des paramètres. On remarque tout d'abord que  $F$  tend vers  $nf_0/2$  lorsque  $V$  tend vers zéro ; et qu'il tend vers zéro lorsque  $V$  croît indéfiniment ; entre ces valeurs extrêmes,  $F$  peut passer par un maximum qui est inférieur ou égal à  $nf_0$  (ces trois valeurs particulières sont indépendantes de  $a, b, E_0$ ). Une variation de  $f_0$  ou  $E_0$  a un effet de translation sur les abscisses et de changement d'unité sur les ordonnées. Les figures 1 et 2 indiquent l'influence de  $a$  et  $b$ .

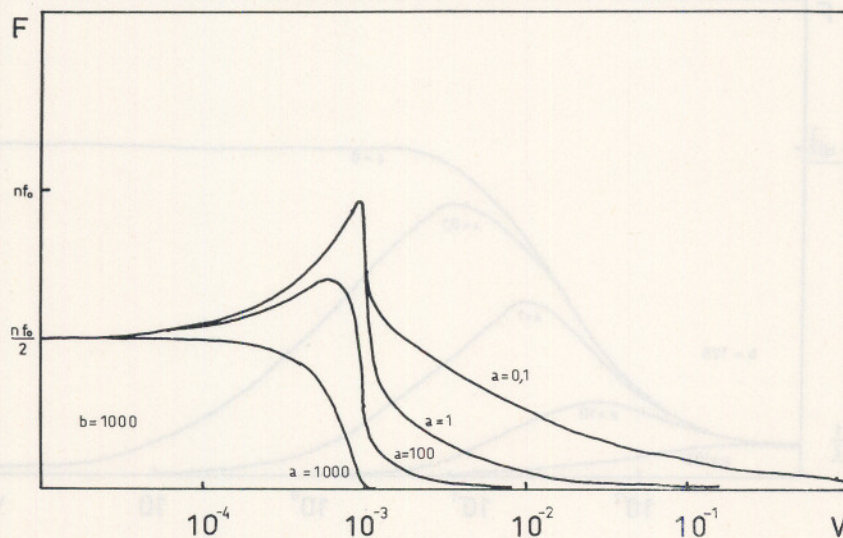


Fig. 2

### 3. RUPTURE DE TYPE ENERGETIQUE

Nous avons illustré dans un travail antérieur [8] le mécanisme de rupture basé sur un concept énergétique ; on doit vérifier pour justifier la possibilité de rupture que l'énergie absorbée par un agrégat de molécules pendant le glissement est de même ordre de grandeur que la barrière d'énergie qui existe entre l'état libre et l'état lié. Or, l'énergie absorbée a pour ordre de grandeur  $E(x_1 - x_0)^2/2$  ( $E$  étant la raideur linéaire de l'agrégat  $\neq 0,2 \text{ Nm}^{-1}$  d'après Sovkooor [9] ;  $x_0$  et  $x_1$  étant les longueurs initiales et finales de l'agrégat pendant l'étirement) ; et la barrière de potentiel vaut approximativement, d'après Schallamach [10],  $3kT$  ( $= 10^{-20}$  joules à température ambiante). Compte tenu de ces valeurs numériques, on peut dire que le niveau d'énergie absorbée pendant l'étirement atteint celui de la barrière d'énergie pour  $x_1 - x_0 \neq 3 \text{ \AA}$  ; cette valeur de l'étirement est suffisamment petite pour justifier la possibilité d'une rupture de type énergétique.

#### 3.1. Equations

On peut, compte tenu du paragraphe précédent, mettre en œuvre une théorie du frottement basée sur un concept énergétique de rupture ; on suppose qu'il y a rupture de la liaison lorsque l'énergie emmagasinée par l'agrégat lors du frottement atteint un certain niveau critique  $w_0$ .

L'étude théorique dans ce cas est tout à fait analogue à la précédente ; le critère énergétique détermine  $t_0$  par la relation :

$$(4 \text{ bis}) \quad W_0 = V \int_0^{t_0} f(t) dt$$

Il suffit alors de reprendre le même raisonnement que précédemment à partir des relations (1), (2), (3), (4 bis), (5). La relation (5), compte tenu de la précédente, peut se mettre sous la forme :

$$(5 \text{ bis}) \quad F = \frac{n_0 W_0}{V t_0}$$

Pour un corps dont la fonction de relaxation est la même que précédemment, l'étude du frottement en fonction de la vitesse de glissement se fait en éliminant  $x_0$  entre les deux relations suivantes :

$$(10 \text{ bis}) \quad L = \sqrt{\frac{W_0/E_0}{\frac{x_0^2}{2} + b(x_0 + e^{-a_0} - 1)}}$$

$$F = \frac{n W_0}{L(x_0 + a)}$$

On remarque là encore que cette théorie est compatible avec le principe d'équivalence vitesse-température.

#### 3.2. Etude des paramètres

On trace comme précédemment  $F$  en fonction de  $\log(V)$  ; le frottement tend vers  $n \sqrt{E_0 W_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2}\right)}$

si  $a$  est nul, lorsque  $V$  tend vers l'infini. Entre ces valeurs extrêmes, il peut passer par un maximum

inférieur à  $n \sqrt{E_0 W_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{b}{2}\right)}$  si  $a$  est non nul. Une

variation de  $E_0$  ou  $W_0$  a un effet de translation sur les abscisses et de changement d'unité sur les ordonnées. La figure 3 indique l'influence de  $a$  sur l'évolution du graphe, le maximum atteint par le frottement étant d'autant plus grand que  $b$  l'est.

### 4. CONCLUSION

#### 4.1. Influence de l'aire de contact

On remarque que dans la théorie exposée  $n$  demeure constant, ce qu'on peut interpréter comme une étude du frottement à effort normal constant ; en effet, bien que Floom et Buesche [11], Hallaun-

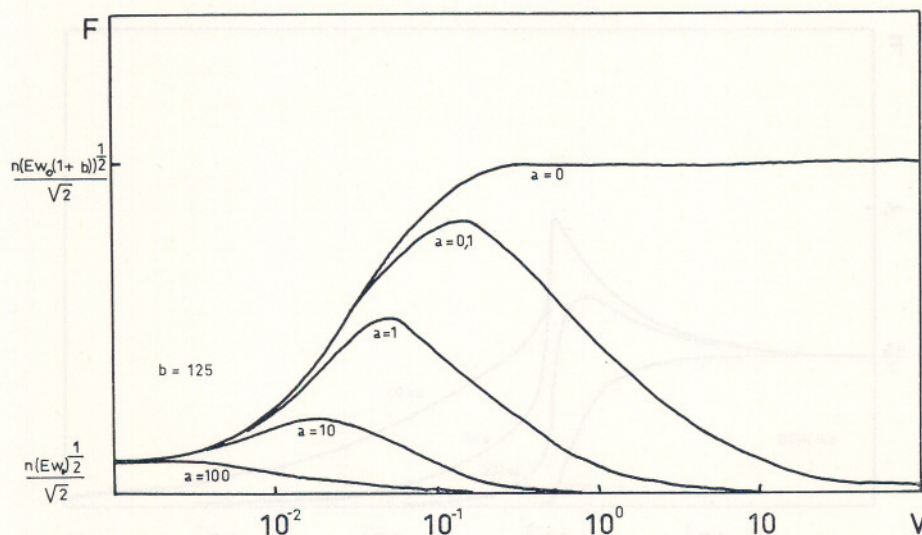


Fig. 3. — Concept énergétique de rupture  
Influence de  $a$  sur le frottement



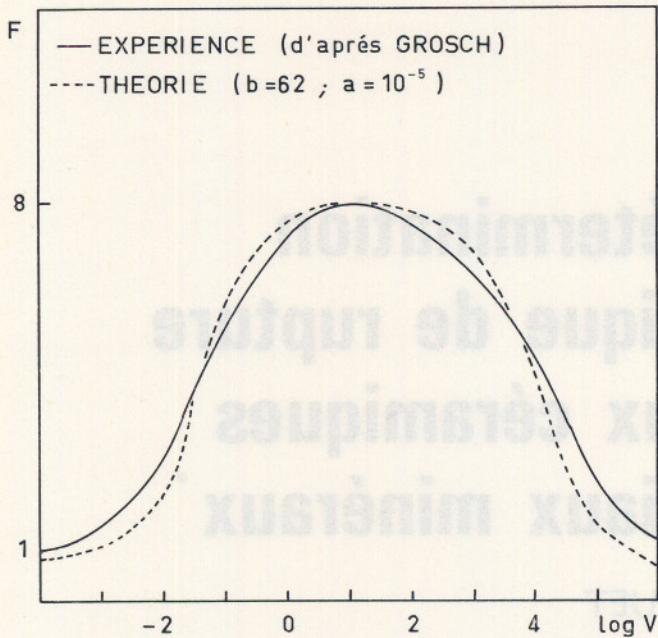


Fig. 4. — Rapprochement entre l'expérience de Grosch et la théorie du frottement basée sur le concept énergétique de rupture

brener [12], Ludema et Tabor [13] aient montré que la surface de contact diminuait en fonction de la vitesse de glissement lors d'une expérience à effort normal constant, on peut considérer que l'accroissement de pression qui en résulte a pour effet, en première approximation, de maintenir constant le nombre de molécules susceptibles de liaisons.

#### 4.2. Comparaison avec l'expérience

Les résultats de ces deux théories sont assez semblables, et on peut les rapprocher de ceux obtenus dans les travaux antérieurs de Schallamach [10] et de Savkoor [9]; leur comparaison avec les travaux expérimentaux de Grosch nous permet de déterminer le type de rupture le mieux adapté au phénomène étudié. On voit que le concept dynamique ne peut convenir, car la théorie correspondante donne un frottement inférieur au double de sa valeur initiale, ce qui est en contradiction avec les résultats expérimentaux. On remarque par contre que le

concept énergétique de rupture donne lieu à des courbes en cloche, non nulles à l'origine, qui peuvent, pour certaines valeurs des paramètres ( $b = 62$ ;  $a = 10^{-5}$ ), approximer les résultats expérimentaux de manière satisfaisante (figure 4).

Ainsi, la théorie basée sur la rupture des agrégats de type énergétique n'est pas en contradiction avec les résultats expérimentaux déjà obtenus; nous nous proposons de vérifier dans un travail ultérieur la validité des valeurs attribuées aux paramètres  $a$  et  $b$  en fonction des propriétés mécaniques du caoutchouc utilisé.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KUMMER. — Unified theory of rubber and tire friction. Pergamon Press, 1964.
- [2] K.A. GROSCH. — Viscoelastic properties and the friction of solids. Friction of polymers: influence of speed and temperature. Nature, 1963, 197, 856.
- [3] M.L. WILLIAMS, R.F. LANDEL, J.D. FERRY. — The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. J. amer. Chem. Soc., 1955, 77, 3701-3707.
- [4] C. HUET. — Etude, par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés. Thèse, Ing.-doc., Faculté des Sciences de Paris, 1963.
- [5] P. THIRION, R. CHASSET. — Le frottement du caoutchouc. Rapport bibliographique, mai 1964.
- [6] A. SCHALLAMACH. — Recent advances in knowledge of rubber friction and tire wear. Rubber Chem. & Technol., 1968, 41, n° 1.
- [7] C.A.F. TUIJNMAN, P.L.C. JETTEN, L.M.W. PENDERS. — Thermal activation relation. Rheol. Acta, 1971, 10, n° 2, 187-193.
- [8] D'après M.R. HATFIELD, G.B. RATHMANN. — Application of the absolute rate theory to adhesion. J. Phys. Chem., 1956, 60, 957.
- [9] A.R. SAVKOOR. — On the friction of rubber. Wear, 1965, 8, 222.
- [10] A. SCHALLAMACH. — A theory of dynamic rubber friction. Wear, 1963, 6, 375.
- [11] D.G. FLOM, A.M. BUECHE. — Theory of rolling friction of sphere. J. appl. Phys., 1959, 30, n° 11, 1725.
- [12] J. HALAUNBRENER, A. KUBISZ. — Contact region of a hard ball rolling on a viscoelastic plate. J. Lubric. Technol., 1968, 90, n° 1, 101.
- [13] K.C. LUDEMA, D. TABOR. — Le frottement et les propriétés viscoélastiques des polymères solides. G.A.M.I., n° spéc., 1967, n° 1, 47.

# Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux \*

par C. HUET

Dr. Ing., Délégué scientifique  
du Centre technique des Tuiles et Briques

## Première partie : Bases théoriques \*\*

### RESUME

On présente une méthode permettant, par un essai d'exécution simple et rapide, la mesure de l'énergie spécifique de rupture des matériaux fragiles et basée sur l'intégration de la courbe effort-déflexion d'une éprouvette entaillée soumise en flexion simple à déformation imposée. La première partie fait l'analyse théorique des conditions permettant d'obtenir la rupture contrôlée. Les insuffisances d'un raisonnement souvent rencontré dans la littérature sont mises en évidence, et l'on utilise un critère basé sur le signe de la courbure de la courbe d'évolution de la raideur en fonction de la longueur de fissure. L'étude de cas particuliers permet le choix de conditions d'essai donnant le contrôle jusqu'à rupture complète. Des relations permettant d'obtenir l'allure de la courbe effort-déflexion en rupture contrôlée lorsqu'on connaît la courbe d'évolution de la raideur sont présentées. On en déduit la relation permettant d'obtenir, à partir de la courbe effort-déflexion en rupture contrôlée, l'avancement de la fissure lorsqu'on ignore l'évolution de la courbe de raideur. On en déduit enfin le moyen d'obtenir cette dernière à partir d'une seule expérience de rupture contrôlée menée jusqu'à rupture complète sur une éprouvette unique (au lieu des expériences de charge-décharge sur une série d'éprouvettes comportant des entailles de longueurs

diverses, effectuées dans les méthodes classiques de « compliance calibration »).

Une deuxième partie, consacrée aux conséquences pratiques et à l'expérimentation, sera présentée dans le numéro suivant.

### SUMMARY

A method is presented by which specific fracture energy  $\gamma_F$  of brittle materials can be determined through a fast and simple test. This test is based on the integration of the load-displacement curve of an adequately notched bending specimen in imposed deflection conditions. A first part is devoted to theoretical analysis of the ways by which controlled fracture can be obtained. A criterium based on the curvature sign of the curve giving the variation of the stiffness in terms of the length of the notch is used. By the study of particular cases, choice is made of test conditions giving controlled fracture until achievement of rupture. Relations between load-displacement curve and stiffness variation curve are given. It is shown how, from these relations, crack length at any stage of the test can be computed from the load-displacement curve when the stiffness curve is not known, and how the stiffness curve itself can be determined by a single test (instead of several loading-unloading experiments on specimens of various notch length, as in classical « compliance calibration » methods).

A second part, devoted to practical implications and experimentation, will be presented in a next issue.

(\*) Conférence prononcée à la réunion du 13 mai 1970 du Groupe français de Rhéologie.

(\*\*) La deuxième partie : Conséquences pratiques et expérimentation, paraîtra dans le prochain numéro des Cahiers.

## INTRODUCTION

Par opposition aux métaux, qui manifestent le plus souvent un comportement ductile, les céramiques appartiennent à la catégorie des matériaux réputés fragiles, dans laquelle se trouvent également représentés d'autres matériaux tels que le verre, le béton et la plupart des roches naturelles.

On a pu donner du comportement fragile la définition suivante [1] :

« Fragile (Brittle) se dit du comportement d'un solide peu déformable lorsqu'il se rompt sans déformation permanente appréciable ».

« Se dit aussi du mode de rupture d'un solide, lorsque la séparation des deux parties n'est pas précédée par des glissements relatifs dans la zone de rupture. »

Il arrive également que la fragilité soit considérée comme un comportement caractérisé par une résistance à la traction faible devant la résistance à la compression.

Enfin il est courant d'associer à la notion de fragilité un certain nombre de phénomènes complexes et parfois inattendus tels que le fait, pour un matériau, de se briser facilement sous l'effet de chocs, qu'ils soient mécaniques ou même thermiques ; ou encore l'apparition, sous des sollicitations très localisées, de fissures pouvant se propager dans le matériau à de grandes distances, et à des vitesses qui peuvent atteindre l'ordre de grandeur de celle du son ; ou même le fait que dans un état de contrainte réputé homogène, la rupture se produise suivant une surface unique, assez souvent plane, ou tout au moins plane.

On s'aperçoit alors assez vite que des phénomènes aussi divers et complexes ne peuvent être déduits de la seule analyse de la courbe contrainte-déformation, si bien qu'ils ont pu conserver longtemps un caractère relativement mystérieux.

Le trouble s'est encore accru lorsqu'on s'est aperçu (au prix parfois de catastrophes spectaculaires) que les métaux, qui semblaient bien caractérisés par leur propriété de ténacité, pouvaient dans certaines conditions, et notamment dans le cas des structures de très grandes dimensions, manifester tous les phénomènes liés jusque-là au concept de fragilité.

## 1. NOTIONS SUR LES THEORIES DE LA RUPTURE

### 1.1. La micro-fissuration préexistante et l'énergie spécifique de rupture

Ce trouble ne s'est trouvé levé qu'à partir des premiers travaux de Griffith [2] dans les années 1920 et de son interprétation du phénomène de rupture par la propagation des microfissures toujours préexistantes (à au moins une échelle comprise entre

celle de l'observation macroscopique, et celle des dimensions atomiques).

Griffith cherchait à expliquer le fait que la contrainte macroscopique de rupture que l'on pouvait observer dans les matériaux réels est considérablement plus faible que celle que l'on peut prévoir (pour un matériau dont on aurait bloqué les mécanismes de glissements plastiques) à partir de l'énergie de liaison d'atomes adjacents en fonction de leur distance mutuelle. Une telle prévision donne en effet des contraintes de rupture de l'ordre du dixième du module d'élasticité [3]. Pour un matériau dont le module d'élasticité est de l'ordre du million de bars, on devrait ainsi trouver une résistance à la traction de l'ordre de 100 000 bars.

On sait à quel point sont éloignées de ce chiffre les valeurs données par l'expérience courante : pour le béton, la résistance à la traction est de quelques dizaines de bars (soit de l'ordre de  $10^{-4}$  fois le module d'élasticité) ; pour la terre cuite elle est de quelques centaines de bars (soit  $10^{-3}$  fois le module d'élasticité) ; elle peut approcher ou dépasser 1 000 bars pour certaines céramiques (soit  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$  fois le module) ; elle n'est encore que de 4 000 à 15 000 bars environ pour les aciers doux et durs respectivement (soit  $2 \cdot 10^{-3}$  à  $10^{-2}$  fois le module).

C'est la théorie de Griffith, et ses perfectionnements successifs, qui ont permis d'expliquer ces disparités. La preuve « a contrario » de la valeur de ces théories a même pu être donnée ces dernières années, qui ont vu la réalisation, d'abord en laboratoire, puis à l'échelle industrielle, de matériaux céramiques dont la résistance à la traction peut dépasser celle des aciers durs, et approcher ainsi la résistance théorique. En effet, la clef de l'obtention de telles résistances a été, par application de la théorie de Griffith, la réalisation de fibres permettant, par leur finesse, l'élimination des micro-fissures.

Une deuxième notion fondamentale introduite par Griffith, sur la base de considérations thermodynamiques, et étendue par la suite par Irwin [4], Orowan [5], et d'autres, est la mise en évidence du fait que la rupture est un phénomène consommateur d'énergie.

L'énergie ainsi consommée est, dans la théorie de Griffith, celle correspondant à la différence existant entre l'état énergétique des atomes situés sur le chemin de la fissure avant l'apparition de cette fissure, et l'état énergétique de ces mêmes atomes après le passage du front de fissure qui provoque la suppression de ces interactions. Elle s'assimile donc à une tension superficielle, et on la trouve de l'ordre de la centaine d'erg/cm<sup>2</sup>.

En fait, les travaux ultérieurs ont montré que la consommation d'énergie que l'on peut mettre en évidence au niveau macroscopique (i.e. pour les surfaces de rupture constituées par une section macroscopique du corps étudié), peut se révéler très supérieure à l'énergie d'interaction des atomes. Ceci est lié, notamment dans les solides polyphasiques et hétérogènes (bien que statistiquement homogènes) à divers phénomènes, qui peuvent d'ailleurs se pro-

duire à des échelles très différentes de l'échelle atomique.

Il peut s'agir par exemple de plastification locale, confinée au voisinage du front de fissure, de frottements entre grains le long des joints, de télé-fissuration, de poly-fissuration, de mouvements de dislocations, etc...

Pour les applications, il nous suffira en général de retenir que la rupture est consommatrice d'énergie, sans rechercher l'origine précise de cette consommation, qui sera d'ailleurs le plus souvent multiple, et diverse suivant les matériaux.

L'énergie ainsi consommée sera dénommée, pour l'unité d'aire des nouvelles surfaces qui se trouvent créées par la rupture, « l'énergie spécifique de rupture ». Elle s'exprime en erg/cm<sup>2</sup> et on la note généralement  $\gamma_F$ .

C'est une caractéristique intrinsèque à un matériau donné, au même titre, par exemple, que son module d'élasticité.

Pour la catégorie de matériaux auxquels nous nous intéressons, nous admettons, au moins dans un premier temps, que  $\gamma_F$  est indépendante de l'histoire du corps. Ceci n'est pas valable pour les métaux, du fait de l'intervention de la plasticité (et des divers phénomènes héréditaires qui l'accompagnent) dans un voisinage restreint du front de fissure, voisinage qui peut d'ailleurs varier considérablement, ainsi que le champ de contrainte qui en résulte, en fonction du degré d'avancement de la fissure.

## 1.2. Le critère de rupture selon Griffith-Irwin (point de vue énergétique)

Lorsque l'on augmente la sollicitation imposée à un matériau, il vient un moment où les contraintes qui en résultent au fond des micro-fissures préexistantes atteignent la limite de ce que les liaisons existant entre les éléments microscopiques constitutifs du matériau peuvent supporter sans rompre. C'est l'effet d'énorme concentration de contrainte au fond de chaque microfissure qui provoque l'abaissement considérable de résistance dont nous avons déjà parlé.

Griffith, et après lui Irwin, Rowan et d'autres ont trouvé avantageux d'exprimer le critère de rupture sous une forme énergétique, qui permet d'éviter la donnée d'un modèle microscopique des phénomènes se produisant en fond de fissure.

Lorsqu'une fissure progresse d'une quantité infinitésimale correspondant à l'aire  $dA$  (par exemple  $dA = bda$  si la fissure intéresse l'épaisseur  $b$  d'une cloison, et si la progression se fait sur une longueur infinitésimale  $da$ ), l'énergie consommée par la création des nouvelles surfaces formées par l'accroissement d'aire  $2dA$  des deux lèvres de la fissure est

$$(1) \quad dW_f = 2 \gamma_F dA$$

Par ailleurs, l'énergie emmagasinée dans le système, i.e. celle qui serait intégralement transformable en travail, lors d'un relâchement de la sollicita-

tion, s'il n'y avait pas consommation d'énergie, a des valeurs différentes dans les états de fissuration  $A$  et  $A + dA$ .

Autrement dit, il existe alors une différence d'énergie libre et plus généralement une différence  $d\psi$  entre les valeurs du potentiel thermodynamique  $\psi$  associé aux sollicitations et contraintes thermodynamiques, y compris par exemple la température, imposées au système.

Cette différence a pour expression

$$(2) \quad \psi(A + dA) - \psi(A) = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial A} dA$$

Si la rupture n'était pas consommatrice d'énergie, le passage de l'état  $A$  à l'état  $A + dA$  se traduirait par une libération d'énergie (qui deviendrait alors utilisable), égale à :

$$(3) \quad dW = -d\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial A} dA = +GdA$$

où

$$(4) \quad G = -\frac{\partial \psi}{\partial A}$$

est dénommé « taux de restitution d'énergie » (« energy release rate »).

Lorsque la progression  $dA$  consomme l'énergie  $2\gamma_F dA$ , l'énergie qui serait restituée se trouve partiellement consommée, l'excès  $(G - 2\gamma_F) dA$  se transformant intégralement en énergie cinétique s'il n'existe pas d'autre facteur de dissipation.

La progression ne sera donc physiquement réalisable que si  $G$  est supérieur à  $2\gamma_F$ , ce qui constitue le critère de Griffith pour la progression de la fissure :

$$(5) \quad G \geq 2\gamma_F$$

Il faut insister sur le fait que  $G$  ne constitue pas le taux de l'énergie effectivement restituée par le corps considéré, mais celle qui le serait si la progression de la fissure n'était pas consommatrice d'énergie.  $G$  est donc la quantité qui peut être calculée, dans le cas du système élastique idéal présentant une fissure, à partir de son potentiel total  $\psi$ . Il s'agit en quelque sorte du taux de variation de ce potentiel lors d'une progression « virtuelle »  $\delta A$  de la fissure.

Le potentiel total s'exprimant par

$$(6) \quad \psi = \Phi + \Omega$$

où  $\Phi$  est le potentiel élastique, et  $\Omega$  le potentiel des forces actives, on en déduit :

$$(7) \quad G \delta A = -\delta \Phi - \delta \Omega$$

Par exemple, à forces imposées, on a

$$(8) \quad \Phi = -\frac{1}{2} \Omega$$

d'où

$$(9) \quad G(A) = +\frac{\partial \Phi}{\partial A} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial A} > 0$$

A déplacements fixés, on aura  $\delta \Omega = 0$  d'où

$$(10) \quad G(A) = - \frac{\partial \Phi}{\partial A} > 0$$

$\Phi$ ,  $\Omega$  et  $\psi$  sont des formes quadratiques des sollicitations,  $G$  en est une aussi et est de plus définie positive.

$G$  est donc fonction croissante de celles-ci.

Une condition nécessaire de début de progression s'écrit

$$(11) \quad G = 2 \gamma_f$$

La contrainte en fond de fissure tendant vers l'infini, cette condition nécessaire pourra être considérée comme suffisante (cf. Orowan [13]).

En effet, considérons un essai effectué sous sollicitation monotone non décroissante.

Soit  $S_c$  la valeur de la sollicitation pour laquelle  $G$  atteint la valeur  $2 \gamma_f$ . Si l'on maintient  $S$  constante à partir de ce moment, il peut se passer deux choses :

a) ou bien l'on est dans une situation telle que

$$(12) \quad \frac{\partial G}{\partial A} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial A^2} < 0$$

et le critère de Griffith n'est plus satisfait dès que la fissure aura progressé d'une quantité infinitésimale, et il ne peut y avoir propagation.

b) ou bien i'on a

$$(13) \quad \frac{\partial G}{\partial A} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial A^2} \geq 0$$

et le critère de Griffith sera encore satisfait après la progression de  $dA$  : il y a propagation.

Le cas *b* correspond à la propagation « spontanée » ou « non contrôlée ».

Le cas *a* correspond à la rupture contrôlée : la progression de la fissure n'est possible que par une nouvelle augmentation de l'intensité de la sollicitation (i.e. apport d'énergie extérieure).

On voit donc que la théorie de Griffith-Irwin permet, non seulement de rendre compte, au moins qualitativement, de la faiblesse des résistances réelles, mais également de la propagation spontanée de fissures (figures 1 a et 1 b).

On constate de plus que le phénomène de rupture n'apparaît plus comme une caractéristique intrinsèque du matériau, puisque son éventualité et sa forme dépendent toutes deux du potentiel total du système, et par conséquent de sa géométrie, des conditions aux limites, etc...

Par contre, une nouvelle caractéristique intrinsèque est apparue qui est l'énergie spécifique de rupture, d'où l'importance qu'il y a à procéder à sa détermination expérimentale.

Enfin, on voit que, pour des corps réputés fragiles, et en particulier aptes à la propagation quasi-spontanée de fissures, il peut cependant exister, au moins

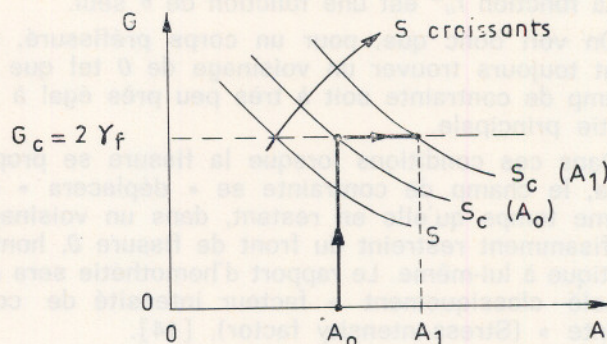


Fig. 1 a. — Variation du taux de restitution d'énergie en fonction de l'aire de la surface rompue. Cas d'une progression stable quand la sollicitation augmente.

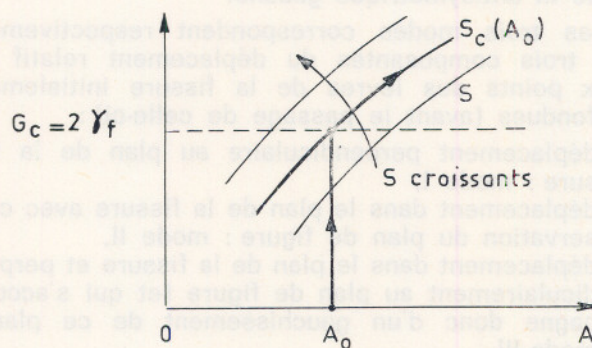


Fig. 1 b. — Cas d'une propagation instable à sollicitation constante ou même décroissante

en théorie, des conditions dans lesquelles cette propagation spontanée ne peut se manifester.

### 1.3. Le facteur intensité de contrainte et la mécanique « linéaire » de la rupture

Parallèlement à l'approche thermodynamique de la rupture faite par Griffith, le problème de la propagation des fissures a été étudié à partir de la détermination du champ de contrainte en fond de fissure.

Si l'on considère un corps possédant une discontinuité selon une demi-droite, Westergaard a montré que le champ de contrainte présente une singularité au pied  $O$  (figurant le front de fissure) de la demi-droite : lorsque l'on se rapproche de ce point, la contrainte tend vers l'infini, [6] à [9].

Si  $r$  désigne le rayon-vecteur par rapport au front de fissure, et  $\theta$  l'angle polaire, la partie principale du champ de contrainte est de la forme :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}(r, \theta, a) = \frac{K_m(a)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^m(\theta)$$

La singularité est donc en  $r^{-1/2}$ . Pour un corps de géométrie et de conditions aux limites données  $K_m(a)$  est une fonction de la seule longueur de fissure.

La fonction  $f_{ij}^m$  est une fonction de  $\theta$  seul.

On voit donc que, pour un corps préfissuré, on peut toujours trouver un voisinage de  $0$  tel que le champ de contrainte soit à très peu près égal à sa partie principale.

Dans ces conditions lorsque la fissure se propagera, le champ de contrainte se « déplacera » en même temps qu'elle en restant, dans un voisinage suffisamment restreint du front de fissure  $0$ , homothétique à lui-même. Le rapport d'homothétie sera  $K_m$  appelé classiquement « facteur intensité de contrainte » (Stress-intensity factor), [14].

L'indice  $m$  peut prendre trois valeurs I, II et III, correspondant respectivement aux trois modes de rupture :

Mode I symétrique, mode II antisymétrique p'an, mode III antisymétrique gauche.

Ces trois modes correspondent respectivement aux trois composantes du déplacement relatif de deux points des lèvres de la fissure initialement confondues (avant le passage de celle-ci) :

- déplacement perpendiculaire au plan de la fissure : mode I,
- déplacement dans le plan de la fissure avec conservation du plan de figure : mode II,
- déplacement dans le plan de la fissure et perpendiculairement au plan de figure (et qui s'accompagne donc d'un gauchissement de ce plan) : mode III.

De la même façon, les composantes  $u_i$  du déplacement en fond de fissures tendent vers  $0$  avec  $r$  et, comme  $r^{-1/2}$ .

Leurs parties principales sont de la forme :

$$(14) \quad u_i^m = \frac{\alpha}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_m g_i^m(\theta) \left\{ \begin{array}{l} m = I, II, III \\ i = 1, 2, 3 \end{array} \right.$$

où  $\alpha$  est une fonction du coefficient de Poisson et dépend de l'état de triaxialité (contrainte plane, déformation plane ou intermédiaire),

et où  $g_i^m(\theta)$  ne dépend, pour chaque mode  $m$ , que de  $\theta$ .

Les expressions de  $f_{ij}^m(\theta)$  et  $g_i^m(\theta)$  sont données en annexe I\*.

L'intensité de l'état de contrainte est donc entièrement déterminée par la valeur de  $K$  qui dépend de la géométrie et des conditions aux limites. Par exemple, pour une fissure isolée de longueur  $2a$  dans un corps illimité soumis à une contrainte uniforme  $\sigma_0$  à l'infini, on a :

$$(15) \quad K = (\pi a)^{1/2} \sigma_0$$

On voit que  $K$  est d'autant plus élevé que la contrainte  $\sigma_0$  est plus élevée, et que la taille de la fissure est plus grande.

Le facteur  $K$  est surtout utilisé lorsque un même matériau peut être employé avec des géométries et des conditions aux limites très variables, et avec des entailles macroscopiques, de longueur connue.

\* On trouvera les annexes en fin de deuxième Partie, i.e. dans le prochain numéro des Cahiers.

Les états en fond de fissures dans deux corps constitués du même matériau, mais de géométries et conditions aux limites différentes, seront considérés comme équivalents lorsque les valeurs de  $K$  seront les mêmes.

Dans l'exemple fourni par l'équation (15), deux états en fond de fissure tels que :

$$(16) \quad \left. \begin{array}{l} \text{état 1} \\ \text{état 2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = a_1 \sqrt{2} \\ \sigma_0 = \sigma_1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{état 2} \\ \text{état 1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = a_1 \\ \sigma_0 = 2\sigma_1 \end{array}$$

seront équivalents du point de vue de la mécanique linéaire de la rupture. Autrement dit, augmenter de 40 % la longueur de l'entaille a le même effet que si l'on doublait la charge.

On voit ainsi avec quelle rapidité les effets d'entaille peuvent entraîner des dépassements de la résistance à la rupture. L'ignorance dans laquelle les constructeurs furent longtemps de ces phénomènes a donné lieu à des cas de ruines spectaculaires. Ceci explique les efforts très importants faits en ce domaine dans l'industrie de la construction aéronautique et spatiale, et qui ne commencent que très lentement à s'introduire dans les constructions civiles [15].

En mécanique linéaire de la rupture, on admet que la fissure commence à progresser dès que la valeur de  $K$  (qui caractérise, on l'a vu, l'intensité du champ de contrainte en fond de fissure), atteint, par valeurs inférieures, une valeur critique  $K_c$ , caractéristique de chaque matériau, [14] à [16].

La détermination expérimentale de cette propriété intrinsèque exige donc que l'on procède à des essais dans des conditions où la géométrie de la fissure est connue, et où d'autre part on connaît la fonction.

$$(17) \quad K = K(CL; Q; g; a)$$

$CL$  représentant les conditions aux limites,  $Q$  l'intensité du chargement,  $g$  la géométrie, et  $a$  la longueur de la fissure pré-existante.

La détermination de cette fonction dans chaque cas particulier est un problème difficile. Un certain nombre de résultats ont été obtenus. Un grand nombre d'entre eux ont été rapportés par Paris et Sih [17].

L'emploi d'une fonction  $K$  bien définie et déterminée avec précision a permis la détermination d'essais normalisés, effectués avec des éprouvettes de forme et dimensions strictement définies.

Dans tous les cas, l'interprétation de ces essais et l'applicabilité de leurs résultats supposent connus :

— la taille exacte de la fissure préexistante au moment de l'essai, et qui est généralement macroscopique.

— la taille des fissures ou entailles présentes dans le corps où l'on veut faire l'application (ce qui ne s'applique donc également qu'à l'initiation de la rupture à partir de fissures de dimensions observables, tout en demandant en outre la connaissance de la relation entre  $K$ ,  $a$ , les charges et la géométrie dans chaque cas d'utilisation).

#### 1.4. Lien entre les deux théories précédentes

A première vue, les deux théories précédentes paraissent entièrement indépendantes. Il est donc tout à fait remarquable que l'on ait pu établir leur équivalence, basée sur l'utilisation commune par ces deux théories de ce que Broberg [18] appelle l'hypothèse « d'autonomie » du voisinage du front de fissure. Cette hypothèse est en réalité une propriété qui vient du fait que le champ de contrainte dans ce voisinage, étant partie principale d'un champ dont l'intensité tend vers l'infini, reste dans un voisinage suffisamment restreint homothétique à lui-même quand le front de fissure se déplace.

Bien que les conditions au front de fissure même soient différentes, de par la nature discontinue de la matière, de celles prévues par Westergaard, le voisinage en question est par ailleurs supposé suffisamment grand pour que les conditions régnant à son contour soient celles du champ élastique de Westergaard.

Ceci a pour conséquence que, hors de la zone ainsi définie, le champ réel est celui du cas idéal du milieu continu élastique avec fissure idéalisée sous forme d'une surface de discontinuité des déplacements.

Il a pu ainsi être montré que, pour les différents modes, les taux  $G_m$  de libération de l'énergie\*, et les facteurs intensité de contrainte  $K_m$  sont liés par les relations :

$$(18) \quad G_m = \frac{\sigma_m}{E} K_m^2; \quad G = \sum_{m=I}^{III} G_m; \quad m = I, II, III$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_I = \alpha_{II} \\ \alpha_{III} = 1 + \nu \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 : \text{en état de contrainte plane} \\ 1 - \nu^2 : \text{en état de déformation plane} \end{array}$$

En particulier, la relation entre le facteur intensité de contrainte critique  $K_c$  et le taux critique  $G_c$  de libération de l'énergie sera, en état de contrainte plane et pour les deux premiers modes :

$$(19) \quad G_c = \frac{1}{E} K_c^2 = 2 \gamma_F$$

d'où encore :

$$(20) \quad K_c = \sqrt{2 E \gamma_F}$$

Il apparaît donc que suivant la nature du problème et la commodité, on pourra utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux approches ou les deux conjointement.

L'approche énergétique présentera cependant un certain nombre d'avantages dont l'un est constitué par l'équation (18) qui permet la prise en compte d'états de déplacements complexes (plusieurs

\* Dans le bilan énergétique,  $G$  apparaît comme le facteur intensif lié à l'extensité  $dA$ , ce qui lui a fait attribuer parfois le nom de « force d'expansion de la fissure ».

modes combinés), alors que ceci n'est pas possible, dans le cas général, pour les facteurs intensités de contrainte : en effet le champ de contrainte n'est alors plus proportionnel à un seul coefficient  $K$ , et il est nécessaire d'appliquer le principe de superposition sur les tenseurs de contrainte eux-mêmes.

Cependant, dans le cas plan (où le mode III n'intervient pas), on peut introduire un facteur intensité de contrainte complexe.

$$(21) \quad K^* = K_I - iK_{II}$$

on a alors

$$(22) \quad K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \sqrt{\frac{EG}{\alpha_m}} \quad \forall K_{III} = 0$$

avec ici  $\alpha_m = \alpha_I = \alpha_{II}$ .

## 2. CHOIX D'UNE METHODE DE MESURE

Les considérations précédentes conduisent à plusieurs catégories de méthodes pour déterminer l'énergie spécifique de rupture  $\gamma_F$  (ou le facteur intensité de contrainte critique  $K_c$ ).

### 2.1. Mesure de la contrainte de rupture sur éprouvettes pré-fissurées

La première catégorie repose sur la mesure de la contrainte juste suffisante pour provoquer l'initiation de la progression, laquelle, dans les conditions expérimentales choisies, sera souvent suivie immédiatement d'une propagation instable. Ces méthodes fort utilisées par les métallurgistes, exigent cependant la connaissance exacte de la profondeur  $a$  de fissure, et la relation entre  $K$  et  $a$  pour la géométrie et le mode de chargement considérés. Ceci a conduit à des éprouvettes de forme et dimensions parfaitement définies, la difficulté essentielle étant dans l'obtention d'une entaille ayant les caractéristiques d'une fissure et de longueur elle-même parfaitement définie et connue.

### 2.2. Tracé de la courbe de raideur (ou de souplesse) en fonction de l'avancement de la fissure en rupture contrôlée

Une deuxième catégorie de méthodes consiste à utiliser les conditions de la rupture contrôlée définies plus haut, et le fait qu'il existe une relation entre  $G$  et la variation de la matrice d'influence du système (raideur ou souplesse suivant le cas).

Cette relation s'obtient, dans le cadre de la loi de Hooke, à partir des équations (9) ou (10) en appliquant à la forme bilinéaire du théorème de Clapeyron, les relations linéaires liant le vecteur de déplacements  $\{\xi_i\}$  au vecteur forces  $\{F_i\}$  ou réciproquement.

On obtient ainsi :

— à forces imposées

$$(23) \quad G^F(A) = + \frac{1}{2} \{F_i\}^T \left[ \frac{dc_{ij}(A)}{dA} \right] \{F_j\}$$

$i, j = 1 \text{ à } 3n$

où  $[c_{ij}]$  est la matrice de souplesse (à longueur de fissure constante), définie par (pour des forces appliquées en  $n$  points) :

$$(24) \quad \{\xi_i\} = [c_{ij}(A)] \{F_j\} \quad i, j = 1 \text{ à } 3n$$

— à déplacements imposés

$$(25) \quad G^\xi(A) = - \frac{1}{2} \{\xi_i\}^T \left[ \frac{dk_{ij}(A)}{dA} \right] \{\xi_j\}$$

$i, j = 1 \text{ à } 3n$

où  $[k_{ij}]$  est la matrice de raideur (à longueur de fissure constante), définie par :

$$(26) \quad \{F_i\} = [k_{ij}(A)] \{\xi_j\} \quad i, j = 1 \text{ à } 3n$$

On peut d'ailleurs montrer que l'on a

$$(27) \quad G^F = G^\xi = G$$

quelles que soient les conditions de sollicitation, et les vecteurs forces ou déplacements étant éventuellement fonctions de  $A$ , alors qu'ils sont respectivement constants dans les équations (23) et (25). Celles-ci cependant conservent leur forme même lorsqu'il n'en est plus ainsi.

En particulier, pour une force unique, on a

$$(28) \quad G(A) = + \frac{1}{2} F^2 \frac{dc}{dA} = - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{dk}{dA}$$

Dans le cas de la rupture contrôlée ( $\frac{\partial G}{\partial A} < 0$ ) on a à tout moment, sous sollicitation monotone non décroissante :

$$(29) \quad G(A) = G_c = 2 \gamma_F$$

En effet, dans ces conditions, la diminution  $\frac{\partial G}{\partial A} dA$  de  $G$  se trouve compensée par l'augmentation  $\frac{\partial G}{\partial S} dS$  qui, ramenant (à  $A$  constant)  $G$  à sa valeur  $2 \gamma_F$ , permet à nouveau à la fissure de progresser, et ainsi de suite.

Si l'on mesure simultanément  $F$  et  $\xi$  en fonction de  $A$ , on peut donc tracer la courbe  $c(A)$  (ou  $k(A)$ ) dont la pente en  $A$  donne, grâce à (26) et (27), la valeur de  $\gamma_F$  cherchée.

Cette méthode est très intéressante en ce qu'elle permet d'obtenir une mesure « ponctuelle » de  $\gamma_F$ , et d'obtenir sa loi de variation éventuelle en fonction de  $A$  et de l'histoire des sollicitations.

Outre l'obtention de conditions de rupture contrôlée, elle exige cependant l'observation de la longueur de fissure, ce qui est souvent difficile, et peut même prêter à discussion dans la mesure où la position du front de fissure est toujours mal définie, et peut en particulier être appréciée différemment suivant la puissance des moyens d'observation.

Cette méthode a été utilisée en France par Cholet [10].

### 2.3. Intégration de la courbe effort-déflexion en rupture contrôlée

Une troisième catégorie de méthodes consiste, en se plaçant également dans les conditions de rupture contrôlée, à remplacer l'observation ponctuelle de la position de la fissure, par une mesure globale, après rupture totale, de l'aire fissurée  $\Delta A$ . La seule intégration de la courbe effort-déformation permet alors la détermination de  $\gamma_F$ , s'il est constant, ou de sa valeur moyenne sur  $\Delta A$  dans le cas contraire.

On tire en effet de (28) et (29)

$$(30) \quad G_c(A) dA = 2 \gamma_F dA = \frac{1}{2} F^2 dc = - \frac{1}{2} \xi^2 dk$$

ce qui, tenant compte de (24) et (26) peut encore s'écrire :

$$(31) \quad 2 \gamma_F dA = \frac{1}{2} (Fd\xi - \xi dF)$$

L'intégrale de (31) suivant un cycle ramenant à l'état initial donne alors :

$$(32) \quad \int_{A_0}^{A_0+\Delta A} 2 \gamma_F dA = \frac{1}{2} \int_c (Fd\xi - \xi dF) = + \int_t Fd\xi = - \int_c \xi dF$$

soit, pour une courbe  $C$  telle que celle de la figure 2 :

$$(33) \quad 2 \gamma_F \Delta A = \int_0^{\xi_1} Fd\xi$$

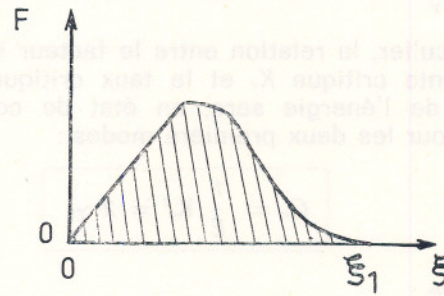


Fig. 2. — Courbe effort-déflexion en rupture contrôlée

La mesure de l'aire sous-tendue par la courbe effort-déflexion, et celle de la section de rupture permettent donc la détermination de la valeur de  $\gamma_F$  dans le cas où les conditions de rupture contrôlée sont remplies.

A cette catégorie de méthodes appartiennent celle employée par Nakayama [11] d'une part, Tattersall et Tapin [12] d'autre part.

C'est une variante de cette catégorie de méthodes que nous présentons ici.

Cette catégorie de méthodes est moins riche d'information que la précédente dans le cas où  $\gamma_F$



dépend de l'histoire (et en particulier de l'avancement de la fissure elle-même). Dans le cas où  $\gamma_F$  est constant (ce que nous admettons au moins dans un premier temps, quitte à le vérifier par la suite), les deux catégories de méthodes 2.2. et 2.3. sont équivalentes du point de vue de l'information, et la dernière est beaucoup plus aisée à mettre en œuvre et permet des mesures plus simples et plus rapides (ce dernier point étant particulièrement important du point de vue de la réalisation de programmes expérimentaux présentant un facteur répétition suffisant).

On a en effet cherché à définir une méthode permettant des essais rapides, sur des éprouvettes en grand nombre, dans des conditions n'exigeant pas un usinage précis des éprouvettes, non plus qu'une longue préparation (notamment en ce qui concerne les moyens d'imposer les conditions aux limites).

La rupture contrôlée est une condition de validité de l'équation (33). En effet, celle-ci n'est plus valable dans les conditions de propagation instable ou même semi-stable (i.e. propagation instable sur un certain intervalle, suivie d'arrêt à distance finie), conditions qui font intervenir, d'une part l'énergie cinétique\*, d'autre part (et par voie de conséquence), le frottement intérieur (de volume, et non plus de surface), du matériau, ce qui, dans l'espace d'observables ( $F, \xi$ ) se traduit par une énergie dissipée supplémentaire qui peut fausser les mesures de façon non négligeable lorsque les énergies de rupture à mesurer sont relativement faibles, comme c'est le cas notamment pour les céramiques (par rapport aux métaux par exemple).

L'élaboration de la méthode repose donc avant tout sur la définition de conditions expérimentales permettant l'établissement de la rupture contrôlée dans des matériaux tels que les céramiques, le verre, etc... L'expérience courante montrant que, dans les conditions usuelles de sollicitation, on assiste le plus souvent à propagation instable des fissures lorsqu'on les fait naître d'une zone de concentration de contrainte, la définition de dispositions expérimentales permettant d'obtenir ces conditions n'apparaît pas chose absolument immédiate.

### 3. INFLUENCE DU MODE DE SOLLICITATION SUR LE CONTRÔLE DE LA RUPTURE

#### 3.1. Raisonnement intuitif courant

Dans la recherche de conditions de rupture contrôlée, on rencontre souvent le raisonnement suivant.

La propagation instable se produit si la progression de la fissure libère une quantité d'énergie supérieure à celle qui se trouve consommée, l'excès accumulé constituant un réservoir d'énergie utilisable pour la poursuite de la propagation. Pour que la progression ne soit pas instable, on est donc conduit à diminuer le plus possible les apports d'énergie.

\* qui, du point de vue de l'éprouvette, introduit elle-même une cause d'absorption par propagation d'énergie vibratoire vers l'appareillage et ses supports, et par rayonnement acoustique.

Ceux-ci peuvent provenir d'une part des variations du potentiel élastique, d'autre part de celles du potentiel des forces actives.

Si les forces actives sont constantes, le système est un système en communication avec un réservoir d'énergie, qui fournit un apport au fur et à mesure des besoins, lesquels s'expriment par un déséquilibre des variables intensives. Ce réservoir est en principe inépuisable, et il semble que les conditions de propagation instable soient toujours satisfaites dans ce cas.

Si au contraire, les conditions sont celles de déplacements imposés, le système est un système isolé, et la seule source d'énergie disponible est le potentiel interne du système lui-même.

Ce potentiel est un réservoir d'énergie, mais qui cette fois n'est pas inépuisable: on ne peut en extraire qu'une quantité finie, au plus égale à la différence entre les potentiels de l'état initial pré-déformé, et de l'état naturel où toutes les contraintes sont relâchées (rupture complète). Le caractère fini de l'apport possible d'énergie dans le cas de la déformation imposée conduit donc à penser que l'on devra préférer les conditions de déformation imposée à celles de force imposée si l'on veut obtenir une rupture contrôlée. Sous peine de se ramener au cas précédent, on devra rechercher des conditions permettant l'initiation de la rupture sous des potentiels initiaux faibles, i.e. avec des concentrations de contraintes aussi élevées que possible.

#### 3.2. Discussion de ce raisonnement

Ce raisonnement intuitif semble mis en défaut par le fait que, comme nous l'avons indiqué plus haut, la valeur du taux de restitution d'énergie est la même, au moment de l'initiation de la progression, que l'on soit à déformation imposée, ou déflexion imposée. Et pourtant, l'application de ces conclusions permet effectivement (comme nous le verrons plus loin) de parvenir à la rupture contrôlée en pratiquant des essais de flexion à déformation imposée sur des éprouvettes entaillées de façon que la concentration de contrainte soit aussi élevée que possible, alors que cela est impossible sur la même éprouvette placée sur une machine à force imposée (hydraulique).

En fait, pour se faire une idée précise des conditions de stabilité, il n'est pas suffisant de considérer les valeurs prises par  $G$  au moment de l'initiation de la progression (i.e. lorsque la sollicitation atteint la valeur critique correspondant à la taille de la fissure donnée), mais encore, comme nous l'avons vu à la fin du paragraphe 1.2., la façon dont  $G$  varie alors en fonction de l'avancement de la fissure et en particulier le sens de cette variation (cf. équations (12) et (13)).

Ceci rejoint le fait bien connu que, si l'évolution de l'extensité  $A$  est bien gouvernée par la valeur de la dérivée première, par rapport à cette extensité, du potentiel (ici  $G$ , qui apparaît alors comme une variable intensive: la force de propagation de la fissure au sens d'Irwin), la stabilité de cette évolu-

tion est gouvernée par le signe de la dérivée seconde de ce potentiel (ici  $G'_A$ ).

Le fait que l'on ait pu parfois opposer une « instabilité » commandée par  $G$ , et donc la première dérivée  $\psi_A'$  du potentiel, et non par  $G_A'$  (et donc par  $\psi_A''_2$ ) est sans doute due à la confusion, fréquente dans la littérature, entre la notion de progression de la fissure (sous sollicitation croissante), et celle de propagation quasi-spontanée (sous sollicitation constante, et même décroissante), qui sont souvent réunies, à tort, sous le vocable « d'instabilité ».

**3.3. La courbure de la courbe de raideur comme critère de rupture contrôlée**

D'après les équations (12) et (13), on voit que l'on devra, pour conclure à la progression stable ou à la propagation spontanée, étudier le signe des dérivées par rapport à  $A$  des formes quadratiques (23) et (25).

On aura en effet :

— à forces imposées

$$(34) \quad \frac{\partial G^F}{\partial A} = + \frac{1}{2} \{F_i\}^T \frac{d^2}{dA^2} [c_{ij}(A)] \{F_j\}$$

— à déplacements imposés

$$(35) \quad \frac{\partial G^{\xi}}{\partial A} = - \frac{1}{2} \{\xi_j\}^T \frac{d^2}{dA^2} [k_{ij}(A)] \{\xi_j\}$$

Pour un système soumis à un ensemble de sollicitations complexes, il ne paraît pas possible, au moins à première vue, de présumer du signe des expressions (34) et (35).

Dans le cas d'une sollicitation ponctuelle unique maintenue constante, (34) et (35) se réduisent cependant à

$$(36) \quad \frac{\partial G^F}{\partial A} = + \frac{1}{2} F^2 \frac{d^2 c(A)}{dA^2}$$

$$(37) \quad \frac{\partial G^{\xi}}{\partial A} = - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{d^2 k(A)}{dA^2}$$

Le signe de  $G'_A$  est donc donné alors directement par le signe de la courbure de la courbe donnant l'évolution de la souplesse ou de la raideur du système en fonction de  $A$ .

Ce signe ne peut, là encore, être déterminé a priori et une fois pour toutes, mais on peut tirer quelques indications du fait que  $c(A)$  tend vers l'infini avec  $A$ , alors que  $k(A)$  tend vers zéro quand  $A$  tend vers l'infini.

En effet, d'après les expressions générales donnant  $K(a)$ , où  $a$  est la longueur de fissure, et qui sont toujours de la forme

$$(38) \quad K(a) = \sigma_0 a^{1/2} f(a)$$

où  $f(0)$  a une valeur finie  $G(a)$  est proportionnel à  $a$  pour  $a$  tendant vers 0, et s'annule donc avec la longueur de fissure.

Il en résulte que la pente de la tangente de  $c(a)$  ou  $k(a)$  est toujours nulle pour  $a = 0$ .

**3.4. Cas de la force imposée : formes envisageables pour la courbe de souplesse**

La souplesse  $c(a)$  tendant vers l'infini avec  $a$ , la courbe la plus simple que l'on puisse avoir est celle représentée par la courbe I de la figure 3 a, pour laquelle  $c_{A2}''$  est toujours positive. Pour un tel système, il ne pourra jamais y avoir rupture contrôlée à force imposée.

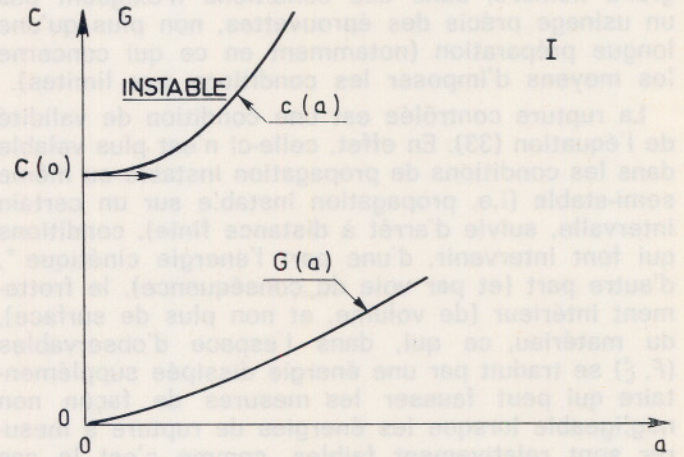


Fig. 3 a. — Courbe de souplesse (type I : instabilité à force imposée)

Une forme plus complexe est donnée par la courbe II (figure 3 b), qui présente une branche parabolique à partir d'un certain moment. Il pourra y avoir stabilité au-delà du point  $a_1$ .

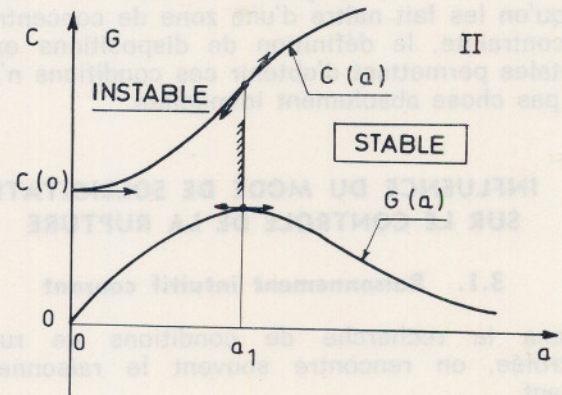


Fig. 3 b. — Courbe de souplesse (type II : stabilité à force imposée au-delà d'une certaine longueur  $a_1$  de fissure)

Une forme encore plus complexe est encore donnée par III (figure 3 c), qui donnerait stabilité pour  $a < a_1$ , et instabilité au-delà. Ce cas donne cependant  $G < 0$  pour certaines valeurs de  $a$  ; l'initiation de la progression est donc impossible pour  $a < a_1$  ; au-delà, on est ramené au cas I.

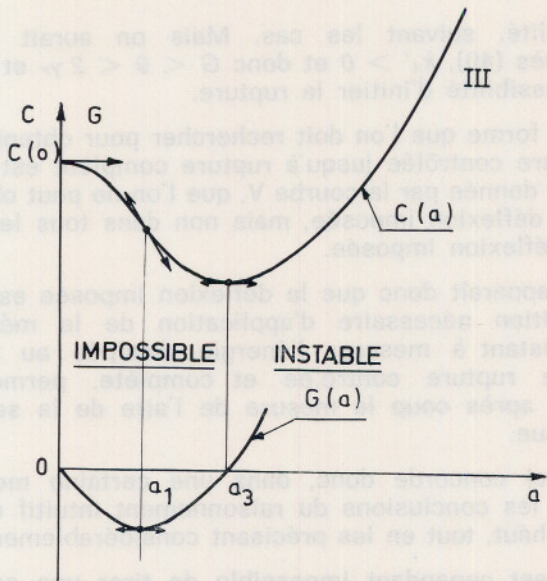


Fig. 3 c. — Courbe de souplesse (type IV : initiation de la progression impossible si  $a < a_3$ )

Enfin, la forme IV (figure 3 d) donne la stabilité pour  $a < a_1$  et  $a > a'_1$ , mais ne peut donner rupture pour  $a < a_3$ . Au-delà, on est ramené au cas II.

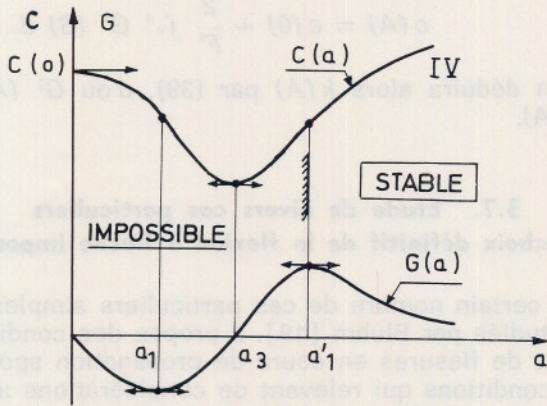


Fig. 3 d. — Courbe de souplesse (type III : initiation de la progression impossible si  $a < a_3$ )

### 3.5. Forme acceptable pour une rupture contrôlée jusqu'à rupture complète

Si l'on cherche, comme c'est le cas ici, à obtenir la stabilité le long d'un processus aboutissant à une rupture complète, on voit que le seul cas acceptable à force imposée est le cas II, et ceci à condition que la préfissuration initiale soit de dimension supérieure à  $a_1$ .

En fait, d'après la forme de l'expression donnant  $K$  pour une fissure approchant un bord libre sous force ou moment isolés imposés,  $K_a'$  est toujours positif, et il en est par conséquent de même de :

$$G_a' = 2 K K_a' E^{-1}$$

On a alors en effet, d'après Paris et Sih [17], pour la fissure approchant un bord libre et soumise au torseur  $(P, M)$  des forces appliquées :

$$(39) \quad K = \pi^{1/2} \frac{4\pi - 12}{\pi^2 - 8} P s^{-1/2} + \pi^{1/2} \frac{4\pi - 8}{\pi^2 - 8} M s^{-3/2}$$

où  $s$  est la distance du front de fissure au bord libre, et où  $P$  est appliqué à la distance  $s/2$  du bord libre (figure 4).

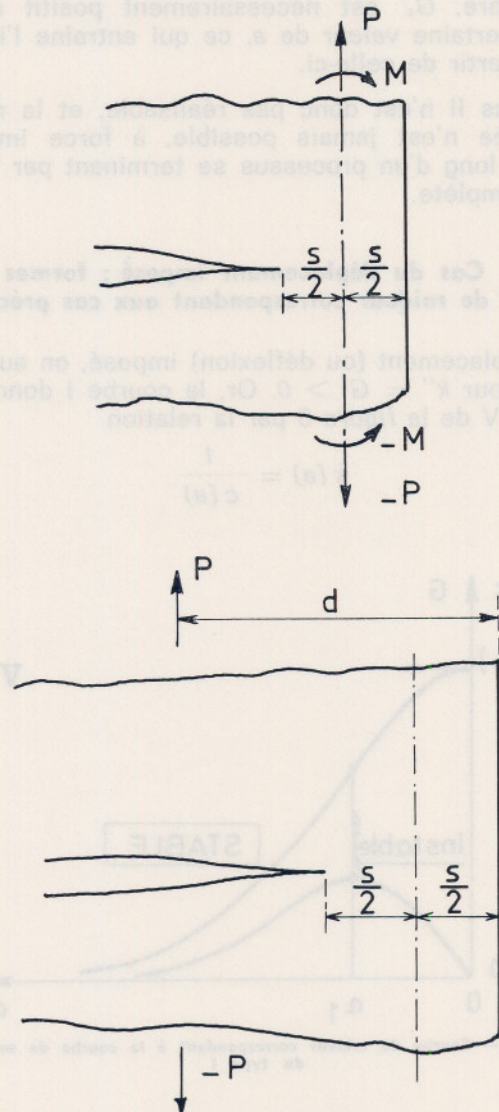


Fig. 4. — Fissure approchant d'un bord libre

Si  $P$  est appliqué à la distance  $d$  du bord libre, on aura

$$(40) \quad M = P \left( d - \frac{s}{2} \right) + M_0$$

et par conséquent :

$$(41) \quad K_s = \frac{\pi^{1/2}}{\pi^2 - 8} [4\pi - 8] (M_0 + Pd) s^{-3/2} - (8 - 2\pi) P s^{-1/2}$$

d'où :

$$(42) \quad K_s' = \frac{\pi^{1/2}}{\pi^2 - 8} \left[ -\frac{2}{3} (4\pi - 8) (M_0 + Pd) s^{-5/2} + \frac{1}{2} (8 - 2\pi) P s^{-3/2} \right]$$

On voit donc que, quand  $s \rightarrow 0$ ,  $K_s' \rightarrow -\infty$  en  $s^{-5/2}$ .

On a d'autre part

$$(43) \quad K_a' = -K_s' \rightarrow +\infty \text{ en } s^{-5/2}$$

Ceci montre que, lorsque la fissure approche du bord libre,  $G_a'$  est nécessairement positif au-delà d'une certaine valeur de  $a$ , ce qui entraîne l'instabilité à partir de celle-ci.

Le cas II n'est donc pas réalisable, et la rupture contrôlée n'est jamais possible, à force imposée, tout le long d'un processus se terminant par la rupture complète.

### 3.6. Cas du déplacement imposé : formes des courbes de raideur correspondant aux cas précédents

A déplacement (ou déflexion) imposé, on aura stabilité pour  $k'' = G' > 0$ . Or, la courbe I donnera la courbe V de la figure 5 par la relation

$$(44) \quad k(a) = \frac{1}{c(a)}$$

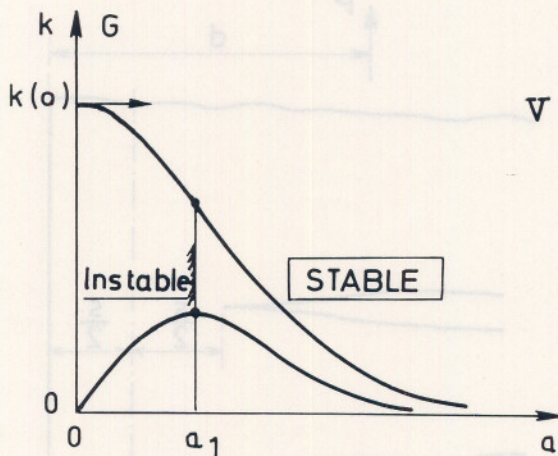


Fig. 5. — Courbe de raideur correspondant à la courbe de souplesse du type I

Cette courbe présente manifestement un point d'inflexion. En effet, on a

$$(45) \quad k_a'(a) = -\frac{c'(a)}{c^2(a)} \leq 0 \quad \forall a$$

et

$$(46) \quad k''(a) = \frac{2c'' - cc''}{c^3} < 0 \text{ pour } a = 0$$

alors que l'asymptote  $k = 0$  donne une courbure positive pour  $a \rightarrow \infty$ .

Par ailleurs les cas III et IV donneraient, à déformation imposée,  $k'' > 0$  pour  $a \rightarrow 0$ , et donc stabilité initiale qui pourra être suivie ou non de semi-

stabilité, suivant les cas. Mais on aurait alors, d'après (40),  $k_a' > 0$  et donc  $G < 0 < 2\gamma_F$  et donc impossibilité d'initier la rupture.

La forme que l'on doit rechercher pour obtenir une rupture contrôlée jusqu'à rupture complète est donc celle donnée par la courbe V, que l'on ne peut obtenir qu'à déflexion imposée, mais non dans tous les cas de déflexion imposée.

Il apparaît donc que la déflexion imposée est une condition nécessaire d'application de la méthode consistant à mesurer l'énergie dissipée au cours d'une rupture contrôlée et complète, permettant ainsi après coup la mesure de l'aire de la section rompue.

Ceci concorde donc, dans une certaine mesure, avec les conclusions du raisonnement intuitif décrit plus haut, tout en les précisant considérablement.

Il est cependant impossible de tirer une conclusion définitive sans référence au système particulier étudié, et l'on doit se reporter aux divers systèmes dont l'étude figure dans la littérature, et qui concernent d'ailleurs généralement la donnée de  $K(a)$  pour la force imposée. On en déduira le cas de la déflexion imposée, en calculant

$$(47) \quad G^P(A) = E^{-1} K^P(A)^2$$

en intégrant ensuite par rapport à  $A$ , ce qui donne

$$(48) \quad c(A) = c(0) + \frac{2}{F^2} \int_0^A G^P(S) dS.$$

On en déduira alors  $k(A)$  par (39), d'où  $G^S(A)$  et  $G^{TS}(A)$ .

### 3.7. Etude de divers cas particuliers et choix définitif de la flexion à flèche imposée

Un certain nombre de cas particuliers simples ont été étudiés par Bluhm [19], à propos des conditions d'arrêt de fissures en cours de propagation spontanée, conditions qui relèvent de considérations analogues. Les résultats de Bluhm confirment complètement les indications données ici. Son tableau n° IV donne en effet l'allure des variations de  $G(A)$ , sous charge constante d'une part, sous déflexion constante d'autre part, pour l'éprouvette en traction avec fissure centrale ou double entaille latérale  $a$ , l'éprouvette en traction avec entaille latérale unique  $b$ , l'éprouvette en flexion simple  $c$ , la bande de largeur constante en clivage  $d$ , la bande de largeur variable sollicitée en clivage  $e$  (figure 5 bis).

On constate qu'à charge constante,  $G'$  est toujours positif, sauf pour certaines formes particulières de la loi de variation de la largeur de bande dans le cas  $e$ . Hormis ce cas, il y a donc toujours propagation instable pour des cas simples de sollicitation. En fait, dans le cas  $e$ , il sera toujours difficile d'assurer un cheminement de la fissure conforme au schéma théorique, et d'éviter la rupture de l'un des bras.

En supposant réalisée cette conformité, on voit encore que lorsque la fissure approche du bord libre, on est dans la configuration représentée par la

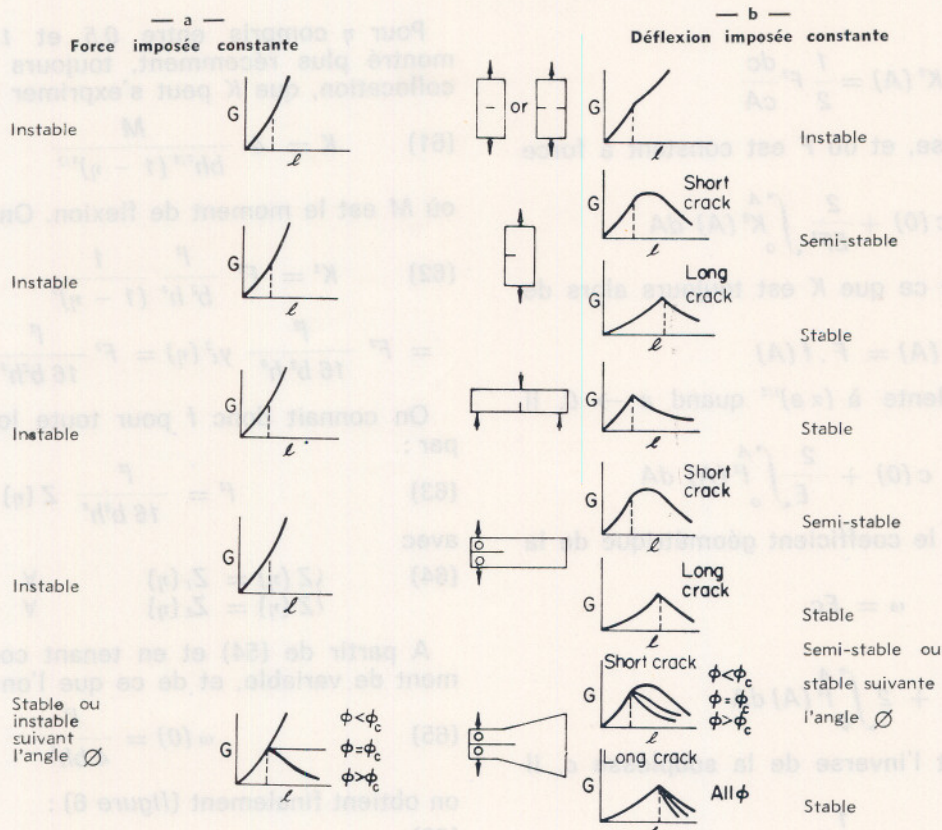


Fig. 5 bis. — Taux de restitution d'énergie  $G$  en fonction de la longueur de fissure pour diverses configurations simples (d'après Bluhm [19]). Interprétation de progression stable ou progression instable faite dans l'hypothèse d'un  $\gamma_F$  indépendant de la vitesse. Semi-stable est pris au sens de propagation instable avec arrêt avant rupture complète.

figure 4, si bien que l'influence de la variation de raideur à la flexion des bras qui permet l'évolution stable pendant un certain temps, est remplacée par l'influence de la transformation de l'encastrement en semi-articulation, conformément aux équations (41) et (42). L'allure de la variation de  $G$  à force imposée proposée par Bluhm n'est donc valable que tant que  $c$  reste assez grand, et ne s'applique donc pas au cas d'une évolution stable jusqu'à rupture complète.

A déflexion imposée, on constate que le cas  $a$  donne encore propagation instable ( $G'_A > 0$ ) quel que soit  $a$ . Pour les cas  $b, c, d, e$ , on constate qu'il peut y avoir progression stable (i. e. rupture contrôlée, correspondant à  $G'_A < 0$ ) si la taille initiale de la fissure est assez grande.

Cependant, pour ces cas, la forme de la courbe est bien celle du cas  $V$  (correspondant au fait qu'à force imposée les courbes ont la forme du cas  $I$ ), et correspondant donc à la forme que nous recherchons\*.

On voit de plus que les conditions de rupture pour ces derniers cas dépendent essentiellement de la taille des fissures initiales.

Parmi ces cas, seul le cas  $c$  de la flexion ne nécessite pas d'ancrage spécial de l'éprouvette. Dans ce cas, il suffit, pour permettre l'application de la sollicitation, que celle-ci soit posée sur appuis, ce qui constitue un avantage pratique important du

point de vue de la rapidité et du coût de l'essai. C'est ce mode de sollicitation que nous avons choisi, en y apportant quelques modifications de détail destinées à éliminer l'influence de paramètres secondaires.

Nous allons donc étudier plus en détail la variation de raideur d'une éprouvette de flexion entaillée, puisque, à déflexion imposée, c'est cette variation qui commande le contrôle de la rupture.

### 3.8. Variation de la raideur d'une éprouvette de flexion entaillée

On peut déterminer la variation, en fonction de l'avancement de la fissure, de la raideur d'une éprouvette entaillée à partir des facteurs intensités de contrainte à force imposée donnés dans la littérature.

\* Suivant une remarque qui nous a été faite par J.M. Servas, le cas  $a$  donne la forme du cas  $I$  pour  $c$  (a) sans donner la forme du cas  $V$  pour  $k$  (a). On a en effet alors  $k''(a) < 0$ . Jusqu'à rupture complète et  $k'(a) \rightarrow -\infty$  pour  $a = h$ , largeur totale de l'éprouvette. Ceci tient à la forme en  $\text{tg} \frac{\pi a}{2h}$  obtenue alors pour  $G^F$  [19] et montre que la forme  $I$  pour  $c$  (a) est, pour une éprouvette de dimensions finies, une condition nécessaire mais non suffisante d'existence d'une zone de progression stable de la fissure jusqu'à rupture complète (Note ajoutée sur épreuves, octobre 1973).

En effet, de

$$(49) \quad G = \frac{1}{E} K^2(A) = \frac{1}{2} F^2 \frac{dc}{cA}$$

où  $c$  est la souplesse, et où  $F$  est constant à force imposée, on tire

$$(50) \quad c(A) = c(0) + \frac{2}{EF^2} \int_0^A K^2(A) dA$$

Tenant compte de ce que  $K$  est toujours alors de la forme

$$(51) \quad K(A) = F \cdot f(A)$$

où  $f(a)$  est équivalente à  $(\alpha a)^{1/2}$  quand  $a \rightarrow 0$ , il vient :

$$(52) \quad c(A) = c(0) + \frac{2}{E} \int_0^A f^2(A) dA$$

Si l'on note par  $\omega$  le coefficient géométrique de la souplesse :

$$(53) \quad \omega = Ec$$

on a alors

$$(54) \quad \omega(A) = \omega(0) + 2 \int_0^A f^2(A) dA$$

La raideur  $k$  étant l'inverse de la souplesse  $c$ , il vient :

$$(55) \quad k(A) = \frac{1}{c(0) + \frac{2}{E} \int_0^A f^2(A) dA}$$

dont le coefficient géométrique  $\varpi$

$$(56) \quad \varpi = \frac{k}{E} = \frac{1}{\omega}$$

s'exprime par

$$(57) \quad \varpi(A) = \frac{1}{\omega(0) + 2 \int_0^A f^2(A) dA}$$

Gross et Srawley [20] ont déterminé, par une méthode de « collocation » (satisfaction locale discrète des conditions aux limites), la variation de  $k$  en fonction de

$$(58) \quad \eta = \frac{a}{h}$$

où  $a$  est la longueur d'entaille d'une éprouvette d'épaisseur  $b$ , de hauteur  $h$ , reposant sur deux appuis distants de  $l$ , et soumise en son milieu à une force transversale  $F$ . L'expression de  $K^2$  est donnée par un développement limité à 3 à termes, et valable pour  $\eta \leq 0,5$  (figure 6) :

$$(59) \quad K^2(\eta) = F^2 \frac{l^2}{16 b^2 h^3} y_1^2(\eta)$$

avec

$$(60) \quad y_1^2(\eta) = z(\eta) = \alpha_1 \eta - \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3 = Z_1(\eta); (\eta \leq 0,5)$$

Les  $\alpha_i$  sont des coefficients numériques positifs, dont les valeurs dépendent du rapport  $l/h$  (cette expression s'applique également au cas du moment constant, avec des valeurs appropriées des  $\alpha_i$ ).

Pour  $\eta$  compris entre 0,5 et 1, Wilson [21] a montré plus récemment, toujours par méthode de collocation, que  $K$  peut s'exprimer par

$$(61) \quad K = 4 \frac{M}{bh^{3/2} (1-\eta)^{3/2}} \quad (0,5 \leq \eta \leq 1)$$

où  $M$  est le moment de flexion. On a donc ici

$$(62) \quad K^2 = F^2 \frac{l^2}{b^2 h^3} \frac{1}{(1-\eta)^3} \quad (0,5 \leq \eta \leq 1) \\ = F^2 \frac{l^2}{16 b^2 h^3} y_2^2(\eta) = F^2 \frac{l^2}{16 b^2 h^3} Z_2(\eta)$$

On connaît donc  $f$  pour toute longueur d'entaille par :

$$(63) \quad f^2 = \frac{l^2}{16 b^2 h^3} Z(\eta)$$

avec

$$(64) \quad \begin{cases} Z(\eta) = Z_1(\eta) & \forall 0 \leq \eta \leq 0,5 \\ Z(\eta) = Z_2(\eta) & \forall 0,5 \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

A partir de (54) et en tenant compte du changement de variable, et de ce que l'on a

$$(65) \quad \omega(0) = \frac{l^2}{4 bh^3}$$

on obtient finalement (figure 6) :

$$(66) \quad \omega(A) = \omega(0) \left[ 1 + \frac{h}{2l} \int_0^\eta Z(\eta) d\eta \right] \equiv \omega(0) u(\eta)$$

et

$$(67) \quad \varpi(A) = \frac{\varpi(0)}{1 + \frac{h}{2l} \int_0^\eta Z(\eta) d\eta} \equiv \varpi(0) v(\eta)$$

en posant

$$(68) \quad u = v^{-1} = 1 + \frac{h}{2l} \int_0^\eta Z(\eta) d\eta$$

### 3.9. Prédiction de l'allure des courbes effort-déflexion

Pour clore cette partie théorique, qui nous a montré à quel point peut être délicate cette recherche des conditions de rupture contrôlée, indiquons comment les conditions de rupture contrôlée permettent de prévoir l'allure prise par la courbe effort-déflexion au fur et à mesure que la rupture progresse.

En effet, des équations (30) on tire

$$(69) \quad \begin{cases} F(A) = 2k \sqrt{-\frac{\gamma_F}{k'_A}} = 2 \sqrt{+\frac{\gamma_F}{c'_A}} \\ \xi(A) = 2 \sqrt{-\frac{\gamma_F}{k'_A}} = 2c \sqrt{+\frac{\gamma_F}{c'_A}} \end{cases}$$

ce qui,  $c(A)$  ou  $k(A)$  étant connus, constitue une représentation paramétrique de la courbe  $F(\xi)$ .

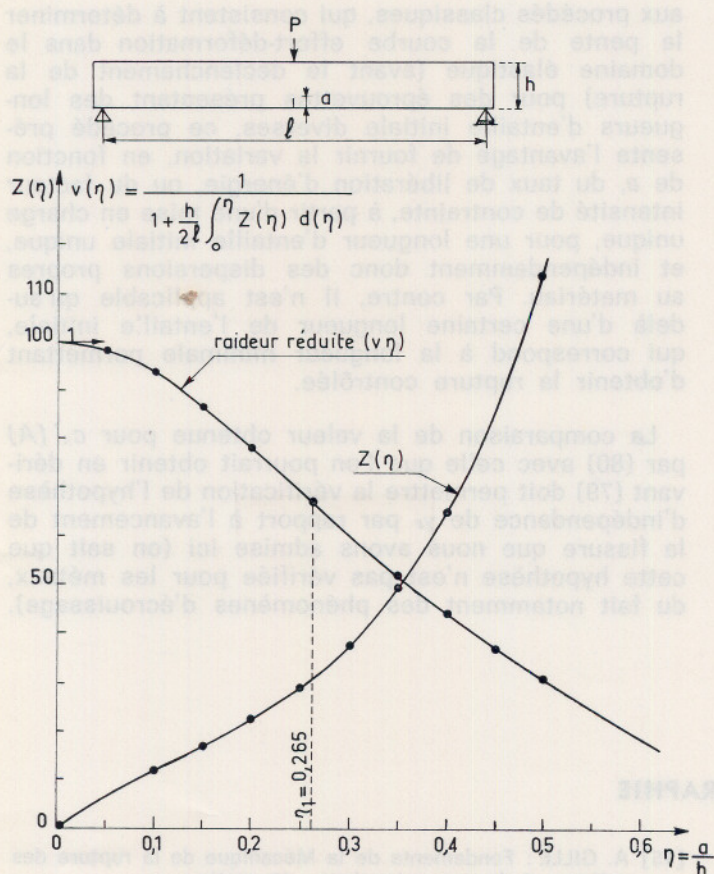


Fig. 6. —  $Z_I(\eta)$ , et courbe de raideur d'après Gross et Sawley [20] réduite  $v(\eta)$  qui s'en déduit, pour une poutre en flexion simple ( $l/h = 4$ ). Le point d'inflexion a pour abscisse  $\eta_1 = 0,265$  (longueur d'entaille minimale pour rupture contrôlée).

En particulier, pour  $c(A)$  donné par les équations (53) et (66), on trouve finalement, pour l'éprouvette de flexion simple :

$$(70) \quad \begin{cases} F(A) = 4 \frac{bh}{l} \sqrt{2 h E \gamma_F} \frac{1}{y(\eta)} \\ \xi(A) = \frac{1}{E} \left( \frac{l}{h} \right)^2 \sqrt{2 h E \gamma_F} \left[ 1 + \frac{h}{2l} \int_0^{\eta} y^2(\eta) d\eta \right] \frac{1}{y(\eta)} \end{cases}$$

où  $\gamma(\eta)$  est donné par (60) ou (62) suivant que  $\eta$  est inférieur ou supérieur à 0,5.

La figure 10 de la deuxième partie de cette étude présente l'allure que l'on obtient dans ce cas pour les courbes  $F(A)$ ,  $\xi(A)$  et  $F(\xi)$ .

Réciproquement, la connaissance de la fonction  $y(\eta)$  permet d'obtenir en outre une estimation de  $A$ , et donc de la longueur fissurée, à partir de la mesure simultanée de  $F$  et  $\xi$ , par

$$(71) \quad c(A) = \frac{\xi}{F} = \frac{l^3}{4 E b h^3} \left[ 1 + \frac{h}{2l} \int_0^{\eta} y^2(\eta) d\eta \right]$$

Mais la rupture contrôlée permet en outre d'estimer la longueur fissurée à partir de la mesure directe de  $F$  et  $\xi$ , même si l'on ne connaît pas la fonction  $y(\eta)$ , dès que l'on a déterminé la valeur de  $\gamma_F$ .

En effet, en considérant une courbe  $C$  correspondant à une rupture incomplète, et en admettant que la fissure est une fissure idéale n'entraînant aucune déflexion rémanente après relâchement de la sollicitation, on a (figure 7).

$$(72) \quad 2 \gamma_F \Delta A = \int_0^{\xi} F(\xi) d\xi - \frac{1}{2} F \xi \quad \forall \xi > \xi_0$$

On a donc à tout moment

$$(73) \quad \Delta A(\xi) = \frac{1}{2 \gamma_F} \left[ \int_0^{\xi} F(\xi) d\xi - \frac{1}{2} F \xi \right]$$

En particulier, pour une section triangulaire\* de hauteur  $a_1 - a_0$ , on a :

$$(74) \quad \Delta A = \frac{b}{2} \frac{(a_1 - a_0)^2}{a_1 - a_0}$$

et la quantité dont a progressé la longueur de la fissure pour un  $\xi$  donné supérieur à  $\xi_0$  est donc, pour la section triangulaire :

$$(75) \quad \Delta a \equiv a - a_0 = \left\{ \frac{a_1 - a_0}{b \gamma_F} \left[ \int_0^{\xi} F(\xi) d\xi - \frac{1}{2} F \xi \right] \right\}^{1/2}$$

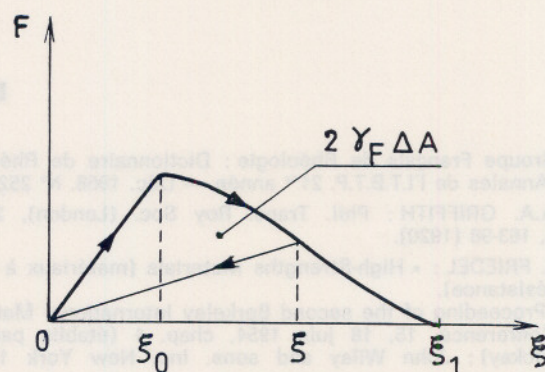


Fig. 7. — Lien entre longueur fissurée et courbe effort-déflexion dans une rupture contrôlée incomplète

Si la zone triangulaire est suivie d'une zone rectangulaire d'épaisseur  $b$  et de longueur  $a_2 - a_1$ , on aura :

$$(76) \quad a - a_0 \equiv (a_1 - a_0) + (a - a_1) = (a_1 - a_0) + \frac{1}{2 b \gamma_F} \left[ \int_{\xi_2}^{\xi} F d\xi - \frac{1}{2} F \xi \right]$$

où l'on a

$$(77) \quad \int_0^{\xi_2} F d\xi - \frac{1}{2} F \xi = b \gamma_F (a_1 - a_0)$$

soit finalement, en désignant par  $H$  la fonction échelon de Heaviside :

$$(78) \quad a - a_0 = \left\{ \frac{a_1 - a_0}{b \gamma_F} \left[ \int_0^{\xi} F d\xi - \frac{1}{2} F \xi \right] \right\}^{1/2} \times$$

$$H \left[ 1 - \frac{\int_0^{\xi} F d\xi - \frac{1}{2} F \xi}{(a_1 - a_0) b \gamma_F} \right] + \left\{ \frac{a_1 - a_0}{2} + \frac{1}{2 b \gamma_F} \left[ \int_0^{\xi} F d\xi - \frac{1}{2} F \xi \right] \right\} H \left[ \frac{F d\xi - \frac{1}{2} F \xi}{(a_1 - a_0) b \gamma_F} - 1 \right]$$

Enfin connaissant  $A(F, \xi)$  par l'équation (73) (ou bien par les équations (75) ou (78) qui s'en déduisent dans notre cas particulier), on en déduit immédiatement  $c(A)$  et  $k(A)$  par :

$$(79) \quad c(A) = \frac{\xi}{F} = \frac{1}{k(A)}$$

et de même

$$(80) \quad c_A' = \frac{F}{F^2(A)} ; k_A' = - \frac{F}{\xi^2(A)}$$

ceci fournit immédiatement, par (30), l'allure de  $G(A)$  à force imposée d'une part, ou à déflexion imposée d'autre part.

On peut donc ainsi obtenir la détermination directe de la fonction  $y(\eta)$  à partir du tracé d'une courbe effort-déflexion en rupture contrôlée, ce qui constitue un nouveau mode de ce que les anglo-saxons nomment « compliance calibration ». Contrairement

aux procédés classiques, qui consistent à déterminer la pente de la courbe effort-déformation dans le domaine élastique (avant le déclenchement de la rupture) pour des éprouvettes présentant des longueurs d'entaille initiale diverses, ce procédé présente l'avantage de fournir la variation, en fonction de  $a$ , du taux de libération d'énergie, ou du facteur intensité de contrainte, à partir d'une mise en charge unique, pour une longueur d'entaille initiale unique, et indépendamment donc des dispersions propres

au matériau. Par contre, il n'est applicable qu'au-delà d'une certaine longueur de l'entaille initiale, qui correspond à la longueur minimale permettant d'obtenir la rupture contrôlée.

La comparaison de la valeur obtenue pour  $c_A'(A)$  par (80) avec celle que l'on pourrait obtenir en dérivant (79) doit permettre la vérification de l'hypothèse d'indépendance de  $\gamma_F$  par rapport à l'avancement de la fissure que nous avons admise ici (on sait que cette hypothèse n'est pas vérifiée pour les métaux, du fait notamment des phénomènes d'écroûissage).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Groupe Français de Rhéologie : Dictionnaire de Rhéologie (Annales de l'I.T.B.T.P. 21<sup>me</sup> année — Déc. 1968. N° 252).
- [2] A.A. GRIFFITH : Phil. Trans. Roy Soc. (London), 221 A 4, 163-98 (1920).
- [3] J. FRIEDEL : « High-Strengths Materials (matériaux à haute résistance). [Proceeding of the second Berkeley International Materials Conference. 15, 18 juin 1954, chap. 1 (établis par V.F. Zackay); John Wiley and sons. Inc, New York 1965].
- [4] G.R. IRWIN et J.A. KIES : Weld J. Res. Suppl.; 33; 1935 (1954).
- [5] E. OROWAN : Trans. Inst. Eng. Shipbuild, Scotland, 89, 165 (1954).
- [6] H.M. WESTERGAARD : J. App. Mech. 6 A, 49 (1939).
- [7] M.L. WILLIAMS : On the Stress distribution at the base of a Stationary Crack (sur la distribution des contraintes en fond de fissure stationnaire). [J. App. Mech.; V 24; 109 (1957)].
- [8] M.L. WILLIAMS : The bending Stress distribution at the base of a stationary crack (la distribution des contraintes de flexion en fond d'une fissure stationnaire). [J. App. Mech, V 28; 78 (1961)].
- [9] L.A. WIGGLESWORTH : Stress distribution in a notched plate. (distribution des contraintes dans une plaque entaillée). [Mathematika; n° 4; (1957)].
- [10] H. CHOLET : Propagation d'une fissure sollicitée normalement à son plan. [Communication au colloque ANRT sur la fissuration des Roches; revue de l'Industrie Minérale; N° spécial — 15 mai 1968].
- [11] NAKAYAMA : J. Amer. Ceram. Soc., 48, 1965, p. 583.
- [12] H.G. TATTERSALL et G. TAPPIN : J. met. Sc., 1, 1965, p. 296-301.
- [13] E. OROWAN : Energy criteria of Fracture. [Welding Journal Research supplement; mars 1955].
- [14] J.D. ESHELBY in « Fracture Toughness ». (ISI Publication 121 — London 1969).
- [15] A. GILLE : Fondements de la Mécanique de la rupture des métaux et de ses extensions; 1<sup>re</sup> partie : [Annales des Ponts et Chaussées N° II — Mars-Avril 1970, p. 65]. 2<sup>me</sup> partie : [Idem N° III. Mai-Juin 1970. p. 131].
- [16] W.F. BROWN Jr. et J.E. SRAWLEY : Current status of plane crack toughness testing (Point des connaissances sur les essais de ténacité avec fissure plane). [ASTM STP 410; 1, 129 (1967)].
- [17] P.C. PARIS et G.C. SIH : Stress analysis of cracks (L'analyse des contraintes dans les corps fissurés). [ASTM STP 381; 30 (1965)].
- [18] K.B. BROBERG : Critical review of Some Theories in fracture Mechanics (étude critique de quelques théories de la Mécanique de la rupture). [Int. Symp. Fract. Mech; Kiruna (Août 1967; Noordhoff Ed.)].
- [19] J.I. BLUHM : Fracture Arrest. [in « Fracture » par M. LIEBOWITZ; Academic Press 1969].
- [20] GROSS et SRAWLEY : Stress-intensity factors of three point bend specimens by boundary collocation (facteur intensité de contrainte, pour des éprouvettes de flexion sollicitées en trois points, par la méthode de « collocation »). [Technical Note D — 3092; National Aeronautics and Space Administration (N.A.S.A.); Washington D.C. (décembre 1965)].
- [21] WILSON : Engineering Fracture Mechanics vol. 2 N° 2. Novembre 1970, page 169.

\* Utilisée pour des raisons qui seront précisées dans la Deuxième partie, à paraître dans le prochain numéro des Cahiers.



- Institut National des Sciences Appliquées, Bibliothèque Centrale, 20, Avenue Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Institut National des Sciences Appliquées, Département de Génie Civil, avenue de Rangueil, 31 — Toulouse.
- Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 3, rue Fernand-Hainaut, 93 — Saint-Ouen.
- Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 9, rue La Pérouse, 75 — Paris (16<sup>e</sup>).
- Institut Textile de France, 35, rue des Abondances, 92 — Boulogne.
- Institut Universitaire de Technologie de Belfort. Département Génie Mécanique. Rue Engel-Gros, 90 — Belfort.
- Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, bd Lefebvre, 75 — Paris (15<sup>e</sup>).
- Laboratoire du Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, B.P. n° 27 à 60 — Creil.
- Laboratorio de Engenharia de Angola, Caixa Postal 6 500 Luanda, Angola.
- Laboratoire de M. Cupcic, C.S.U., route de Laval, 72 — Le Mans.
- Laboratoire de Mécanique des Fluides, 2, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Laboratoire de Mécanique des Sols, Faculté des Sciences, Domaine Universitaire, CEDEX 83, 38 — Grenoble.
- Laboratoire de Recherches Unilever. Société Thibaud-Gibbs, 8, Impasse de la Montjoie, 93 - La Plaine St-Denis.
- Linda Hall Library, Kansas City, Mo 64110 U.S.A.
- Lhomargy, S.A., 3, bd de Bellevue, 91 — Draveil.
- Messageries du Livre, 116, rue du Bac, 75 — Paris (7<sup>e</sup>).
- Mesure et Automatisation pour l'Industrie et la Recherche (MAIR), 9 bis av. de Lattre de Tassigny, 92 — Boulogne.
- Michelin et Cie, place des Carmes, 63 — Clermont-Ferrand.
- The Milton S. Eisenhower Library, Serials Department, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland 21218, U.S.A.
- Minerais et Métaux, Services Techniques, 28, rue Arthur-Rozier, 75 — Paris (19<sup>e</sup>).
- Naphtachimie, Laboratoire, B.P. n° 2, à 13 - Lavera.
- National Lending Library for Science and Technology, Walton, Boston Spa (Yorkshire), Angleterre.
- National Science Library, National Research Council, Ottawa, 7, Ont. Canada.
- Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, av. de la Division Leclerc, 92 — Châtillon.
- L'Oréal, 1, avenue Saint-Germain, 93 — Aulnay-sous-Bois.
- Orta Dogu Teknik Universitesi, Engeneering Fakultesi, Ankara, Turquie.
- Pechiney-Saint-Gobain, Centre de Recherches, 12, rue des Gardinoux, 93 — Aubervilliers.
- Ponts et Chaussées, Service Documentation, B.P. 48, 69 — Bron.
- Produits Chimiques Péchiney-Saint-Gobain, 63, rue de Villiers, 92 — Neuilly-sur-Seine.
- Régie Nationale des Usines Renault, 10, avenue Emile-Zola, 92 — Billancourt.
- Rijksinstituut voor Grondmechanica, Hertogsstraat 89, Brussel, Belgique.
- Sangamo Controls Limited, North Bersted, Bognor Regis, Sussex, Angleterre.
- Service ERNUTH, Direction des Etudes et Recherches, E.D.F., Centre des Renardières, 77 — Ecuelles.
- Service Etudes Physiques, Société Rhodiacéta, 45, rue Sergent-Michel-Berthet, 69 — Lyon (9<sup>e</sup>).
- Service d'Etudes sur la Séparation des Isotopes de l'Uranium, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. n° 2, 91 — Gif-sur-Yvette.
- SICPA France, B.P. n° 66, 74 — Annemasse.
- Société Anonyme Jean Lamy et Cie, 19, av. Barthélémy-Thimonnier, 69 - Caluire.
- Société Commerciale Paulstra, Laboratoire Central, Route de Périn-gondas, 28 — Châteaudun.
- Société d'Equipement Industriel Electro-Mécanique, 8, rue Polonceau, 75 — Paris (8<sup>e</sup>).
- Société Ethylène-Plastique, Centre de Recherches, B.P. n° 1, 62 — Mazingarbe.
- Société Kléber-Colombes, 49, rue Jean-Jaurès, 95 — Bezons.
- Société Minière et Métallurgique de Penarroya, 1, bd de Vaugirard, 75 — Paris (15<sup>e</sup>).
- S.N.C.F. Direction des Installations Fixes, 42, rue de Châteaudun, 75 — Paris (9<sup>e</sup>).
- Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, Centre de Recherches de Lacq, B.P. n° 34, 64 — Lacq.
- Société Rhône-Poulenc, Atelier d'Applications de Vénissieux, 11, avenue de la République, 69 — Vénissieux.
- Techn. Hogeschool, Bibliotheek, Weg — en Waterbouwkunde, Oost-plantsoen 25, Delft (Hollande).
- Unilever Research Laboratory, The Frythe, Welwyn, Hertfordshire, (Angleterre).