

industrie minérale

CAHIERS
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE

TOME III — NUMÉRO 2



Numéro spécial du 15 avril 1973

COLLECTIVITES MEMBRES DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

- Aquitaine-Organico. Laboratoire d'Applications de Serquigny, 27 — Serquigny.
- Bassin d'Essais des Carènes, 6, bd Victor, 75 — Paris (15°).
- Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., quai Anatole-France, 75 — Paris (7°).
- Bibliothèque de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines, 60, bd St-Michel, 75 — Paris (6°).
- CEDOCAR, Bibliothèque Centrale, 2, av. de la Porte d'Issy, 75 — Paris (15°).
- Centre d'Essais et de Recherches Techniques des Tabacs, B.P. n° 2, 45 — Fleury-les-Aubrais.
- Centre d'Etudes du Bouchet (Direction des Poudres), 91 — Vert-le-Petit.
- Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75 — Paris (13°).
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75 — Paris (8°).
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liant Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75 — Paris (15°).
- Centre de Mathématique et Calcul de l'I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Centre de Recherches, C.E.R.C.A., 26 — Romans-sur-Isère.
- Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Centre de Recherches Routières. Fokkerdreef 21, 1960 — Sterrebeek, Belgique.
- Centre Technique du Cuir, 181, av. Jean-Jaurès, 69 — Lyon (6°).
- Centre Technique des Industries Mécaniques, C.D.M., B.P. 67, 60 — Senlis.
- Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses GEDEX n° 175, 38 — Grenoble-Gare.
- Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, av. Hoche, 75 — Paris (8°).
- Chemistry and Physics Library, 303 Whitmore Laboratory, Pennsylvania State University, University Park, Penn. 16 802, USA.
- Compagnie Française de Raffinage, Centre de Recherches, B.P. n° 27, 76 — Harfleur.
- Compagnie Péchiney, 23, rue Balzac, 75 — Paris (8°).
- Compagnie de Raffinage Shell-Berre, Centre de Recherches, 76 — Grand Couronne.
- Compagnie de Saint-Gobain, Direction des Recherches, Laboratoires Scientifiques, 52, bd de la Villette, 75 — Paris (19°).
- Département Génie Civil et Urbanisme, I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Département Génie Civil, I.N.S.A., 20, Buttes-de-Coësmes, 35 — Rennes.
- Direction des Recherches et Moyens d'Essais, 5 bis, avenue de la Porte de Sèvres, 75 — Paris (15°).
- Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de Mécanique des Sols, 92 — Châtenay-Malabry.
- Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Bibliothèque, 151, bd de l'Hôpital, 75 — Paris (13°).
- Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne. Département de Métallurgie, 158 bis, cours Fauriel, 42 — Saint-Etienne.
- Ecole Polytechnique, Bibliothèque, C.P. 501, Snowdon, Montréal 248, Canada.
- Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Service Documentation, 6, quai Watier, 78 — Chatou.
- Electricité de France, Service Géologique et Géotechnique, 3, rue de Messine, 75 — Paris (8°).
- Electricité de France, SEPTEN, 17, av. de la Libération, 92 — Clamart.
- ESSO-Standard, S.A.F., Centre de Recherches de Mont-Saint-Aignan, 76 — Mont-Saint-Aignan.
- Faculté des Sciences. Laboratoire de Mécanique. Route de Chauvigny, 86 — Poitiers.
- Fédération des Fabricants de Peintures, Vernis et Encres d'Imprimerie, Laboratoire des Peintures et Vernis, rue H.-Dunant, 94 — Thiais.
- Filial Biblioteki, Akademii Nauk SSSR, Baltijskaja ul. 14 Moscou A-219, U.R.S.S.
- Institut Français du Pétrole, Dir. Doc. Inf. 1 et 4, avenue de Bois Préau, 92 — Rueil-Malmaison.
- Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis, 12, rue de l'Industrie, 68 — Saint-Louis.
- Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Camichel, 31 — Toulouse.
- Institut de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Académie Tchèque Slovaque des Sciences, Vysehradská 49, Praha 2, Nové Město Tchecoslovaquie.
- Institut National de la Recherche Agronomique, Etoile de Choisy, 78 — Versailles.

CAHIERS
DU
GROUPE FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE

Tome III — Numéro 2

15 avril 1973

Edité par la Revue de l'Industrie Minière
19, rue du Grand-Moulin — 42 - Saint-Etienne

sommaire

Avant-propos	31
--------------------	----

J. MANDEL

<i>Exposé introductif au Colloque sur la viscoplasticité</i>	33
--	----

<i>Les trois fonctions viscosimétriques d'un fluide incompressible</i>	35
--	----

G. FANTOZZI, J. PEREZ, P.F. GOBIN

<i>Bases physiques de la viscoplasticité</i>	38
--	----

J. ZARKA

<i>Modèle phénoménologique unidimensionnel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations</i>	53
---	----

C. DUMONT, P. MORLIER

<i>Simulation électronique de modèles viscoplastiques</i>	62
---	----

R. MAZET

<i>Les domaines d'application de la viscoplasticité</i>	71
---	----

C. WIPPLER

<i>Le formage à froid des matières plastiques</i>	73
--	----

Cl. LEGRAND

<i>Détermination des caractéristiques rhéologiques des corps viscoplastiques à thixotropie partielle, application aux mortiers frais</i>	82
--	----

J.L. MARTIN, P. LACOUR-GAYET, P. COSTA

<i>Déformation plastique du carbure de tantale jusqu'à 2 200° C</i>	91
---	----

A. ZAOUI

<i>Sur l'accommodation viscoplastique intergranulaire dans les polycristaux métalliques</i>	92
--	----

Photographie de la couverture

Figure de corrosion de l'hématite, en relation avec les points d'émergence des dislocations. Photo prise au microscope électronique à balayage ($\times 1750$).

Laboratoire de Métallurgie Structurale, Université de Metz.

Avant-propos

Le présent numéro contient les communications qui ont été présentées au colloque du Groupe Français de Rhéologie qui s'est tenu à Paris le 8 décembre 1971 et qui a porté sur la viscoplasticité.

La première partie, introduite et présidée par le professeur J. Mandel a concerné les aspects généraux de la viscoplasticité, tandis que la seconde, animée par le professeur R. Mazet, s'est intéressée aux applications particulières.

Exposé introductif au Colloque sur la viscoplasticité*

par J. MANDEL

Le programme suggère un exposé sur « Définition et cadre de la viscoplasticité ». Je dirai donc quelques mots à ce sujet et présenterai ensuite un modèle rhéologique, qui illustre bien, je pense, le comportement viscoplastique.

La définition ? Examinons un exemple. Appliquons un poids à l'extrémité d'une éprouvette en plexiglas ou en chlorure de polyvinyle. On observe une flèche instantanée, puis, le poids restant appliqué, la flèche continue à augmenter c'est la déformation différée. Retirons le poids au bout d'un certain temps : il y a

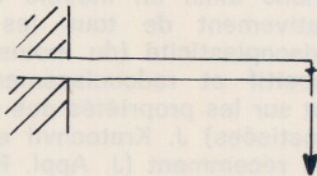


Fig. 1

un retour élastique instantané suivi d'un retour progressif et total, appelé *recouvrance* différée. La déformation différée à la charge était donc élastique : l'éprouvette est *viscoélastique*.

Faisons la même expérience avec une éprouvette en plomb : cette fois-ci on n'observe pas de *recouvrance* différée. La déformation différée observée à la charge était donc permanente ou plastique : l'éprouvette est *viscoplastique*.

Donc, du moins pour un solide :
recouvrance différée totale $\rightarrow$ viscoélasticité.
Modèle de Kelvin (fig. 2 a)
recouvrance différée nulle $\rightarrow$ viscoplasticité.
Modèle de Bingham (fig. 2 b)

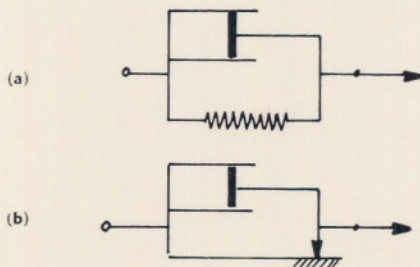


Fig. 2

Le cadre ? Mais il est immense ! parce que toutes les déformations plastiques sont plus ou moins accompagnées de viscosité. Strictement la plasticité pure (patin seul) ne se rencontre pas ; c'est un cas limite théorique (d'ailleurs très intéressant et pouvant donner des approximations valables). En règle générale on a viscoplasticité. Les métaux sont viscoplastiques, de mêmes les pâtes, les terres (notamment l'argile), le béton, le bitume, le verre à la température où on le travaille, etc.

Mais ceci concerne plutôt les domaines d'application de la viscoplasticité. Voyons donc...

Le cadre physique. Nos conférenciers vous l'expliqueront en détail. Je dirai seulement que, pour les métaux, la déformation plastique est produite par le déplacement de défauts d'arrangement des atomes et principalement des défauts linéaires appelés dislocations. Mais sur son parcours une ligne de dislocation rencontre des obstacles, qu'elle ne peut franchir que grâce à l'apport d'une certaine énergie d'activation, donc au bout d'un certain temps. C'est l'origine de la viscosité.

D'autre part la déformation plastique crée de nouvelles dislocations, d'où l'*écrouissage*. En revanche l'agitation thermique entraîne la disparition d'un certain nombre d'entre elles par annihilation : c'est le phénomène de restauration lente ou *radoucissement*, qui s'observe notamment au cours d'une période de repos.

Tel est le cadre physique. Bien entendu les dislocations ne sont pas le seul agent de la viscoplasticité. Par exemple des glissements entre grains peuvent intervenir, notamment pour les matériaux dont les grains sont faiblement liés. Mais on retrouve toujours ces quatre aspects du phénomène : plasticité (comportement différent de part et d'autre d'un seuil), viscosité, écrouissage (négatif dans certains cas), enfin remaniement lent de la structure pouvant entraîner un radoucissement mais quelquefois aussi un durcissement.

Je ne décrirai pas ici le *cadre mathématique* que l'on peut utiliser pour traduire ces divers aspects d'un comportement qui, on le voit, est complexe. Je me contenterai de présenter trois modèles rhéologiques.

Le premier est le modèle de Bingham (fig. 2 b), complété par un ressort en série traduisant l'élasti-

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

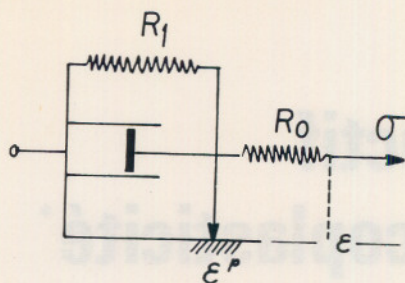


Fig. 3

ité instantanée. Ce modèle rend compte de la plasticité (patin) et de la viscosité (amortisseur), mais pas de l'écroutissage. Pour obtenir l'écroutissage nous ajoutons un ressort R_1 en parallèle avec le patin et l'amortisseur. L'énergie élastique de ce ressort correspond bien à l'énergie élastique attachée aux dislocations nouvelles créées par la déformation plastique.

Mais ce modèle qui se traduit par une équation de la forme :

$$(1) \quad \dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} f(\sigma, \varepsilon^p) & \text{si } f(\sigma, \varepsilon^p) > 0 \\ 0 & \text{si } f(\sigma, \varepsilon^p) \leq 0 \end{cases}$$

où $\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$ désigne la déformation permanente, ne rend pas compte du radoucissement. Négliger le radoucissement peut être légitime si les déformations sont rapides. Mais en déformation lente le radoucissement a des conséquences importantes :

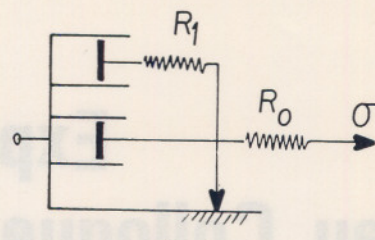


Fig. 4

— évolution du seuil de plasticité au cours d'une période de repos ;

— fluage illimité, à vitesse constante sous contrainte constante (l'équation (1) exclut cette possibilité) ;

— hésitation : si, au cours du fluage, on diminue brusquement la contrainte de $\Delta\sigma$, puis on la maintient constante, le fluage s'arrête ; mais il reprend au bout d'un certain temps, si $\Delta\sigma$ n'est pas trop élevé.

Pour simuler le radoucissement, il suffit de placer un amortisseur en série avec le ressort R_1 responsable de l'écroutissage (fig. 4). Cet amortisseur relâche progressivement la tension du ressort R_1 .

Nous obtenons ainsi un modèle qui rend bien compte qualitativement de tous les phénomènes observés en viscoplasticité (du moins lorsqu'il y a écroutissage positif et radoucissement). Signalons qu'en se basant sur les propriétés des métaux (extrêmement schématisées) J. Kratochvil et O.W. Dillon Jr. ont proposé récemment (J. Appl. Phys. 1970) un modèle mathématique dont les équations correspondent exactement au modèle rhéologique précédent.

Les trois fonctions viscosimétriques d'un fluide incompressible*

par J. MANDEL

Dans ce court exposé je voudrais attirer l'attention des rhéologues sur les travaux faits aux Etats-Unis par W. Noll, B.D. Coleman et C.C. Wang.

Dans une précédente conférence (10 mars 1971) j'ai présenté la définition proposée par W. Noll pour les fluides. Dans le cas d'un fluide incompressible, à température constante, cette définition conduit à la conséquence suivante : le tenseur des contraintes à l'instant t est une fonctionnelle isotrope de l'histoire de la déformation relative $S_t(\tau)$ (déformation de l'élément fluide à l'instant $\tau \leq t$ par rapport à la configuration actuelle) :

$$\sigma(t) = \mathcal{P}[S_t(\tau)] \quad -\infty < \tau \leq t$$

Partant de ce résultat, Noll, Coleman et Wang étudient les écoulements, dits à histoire de déformation relative constante, pour lesquels $S_t(\tau)$ ne dépend que de $t - \tau$. Parmi ceux-ci figurent notamment les écoulements viscosimétriques permanents, que je définirai plus loin. Les auteurs montrent que pour ces écoulements viscosimétriques, malgré l'énorme diversité des réponses fonctionnelles $\mathcal{P}$, le tenseur des contraintes ne dépend que de trois fonctions de la vitesse de distorsion. Cela provient de ce que ces écoulements, dans lesquels en définitive on ne peut faire varier qu'un seul paramètre, le gradient de la vitesse, sont en réalité très spéciaux et ne permettent d'explorer qu'une toute petite partie du comportement du fluide.

Prenons l'exemple du glissement simple. Il s'agit d'un écoulement par filets parallèles à Ox_2 avec une

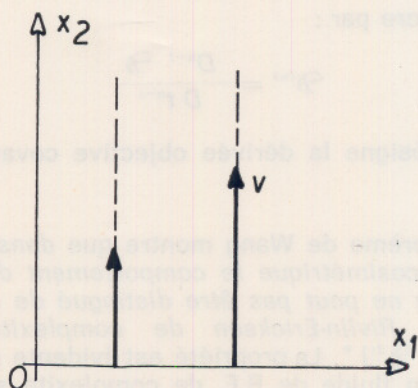


Fig. 1

vitesse $v(x_1)$ indépendante de t (écoulement permanent).

Nous posons :

$$\frac{dv}{dx_1} = m(x_1)$$

m peut être fonction de x_1 .

Le fluide étant incompressible, les contraintes ne sont déterminées qu'à une pression isotrope près.

D'autre part la transformation subie par un élément fluide tout au long de son histoire est entièrement caractérisée par m . On peut donc poser :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + \varphi_1(m) & \sigma_{12} &= \varphi_3(m) \\ \sigma_{22} &= -p + \varphi_2(m) & \sigma_{23} &= \varphi_4(m) \\ \sigma_{33} &= -p & \sigma_{31} &= \varphi_5(m) \end{aligned}$$

Le fluide est *isotrope*. Cela signifie que si l'on remplace les axes x_1, x_2, x_3 par d'autres axes rectangulaires qui peuvent être de disposition inverse des précédents, les relations entre les coordonnées du tenseur vitesse de déformation et du tenseur des contraintes restent les mêmes. Rappelons que les coordonnées σ_{ij} se transforment comme celles du produit $u_i v_j$ de deux vecteurs.

Changeons alors le sens de Ox_3 . m ne change pas. σ_{23} et σ_{32} changent de signe. Donc :

$$\varphi_4(m) = -\varphi_4(m) = 0, \quad \varphi_5(m) = -\varphi_5(m) = 0$$

Il reste bien trois fonctions viscosimétriques.

En changeant le sens de Ox_1 , on change le signe de m . σ_{11} , σ_{22} ne changent pas et σ_{12} change de signe. Donc :

$$\begin{aligned} \varphi_1(m) &= \varphi_1(-m), \quad \varphi_2(m) = \varphi_2(-m) \rightarrow \varphi_1, \varphi_2 && \text{fonctions paires} \\ \varphi_3(-m) &= -\varphi_3(m) && \rightarrow \varphi_3 \\ &&& \text{fonction impaire} \end{aligned}$$

De plus la puissance dissipée doit être positive d'où :

$$\sigma_{12} m = m \varphi_3(m) > 0$$

$$\text{Enfin pour } m = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33},$$

$$\text{d'où } \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

Nous avons mis ainsi en évidence l'existence de trois fonctions viscosimétriques et leurs propriétés sur un exemple simple, en utilisant des considérations de symétrie. Ce qu'ont démontré Noll, Wang et Coleman, c'est que les résultats précédents s'étendent à tous les écoulements viscosimétriques. Ce fait avait d'ailleurs été reconnu dès 1957 par H. Markovitz, mais en partant d'hypothèses restrictives sur le comportement des fluides.

Un écoulement est dit viscosimétrique si pour un élément fluide déterminé et par rapport à certains axes mobiles, i.e. pour certain observateur, la transformation de l'élément tout au long du temps est un glissement simple à vitesse constante, comme dans l'exemple précédent. Les relations de comportement étant objectives, on peut, pour les écrire, utiliser le repère mobile et l'on est ramené au cas du glissement simple. Il n'est pas nécessaire que les filets soient rectilignes, puisque l'observateur peut tourner en suivant l'un de ces filets. Les écoulements réalisés dans tous les viscosimètres sont de ce type.

Exemples : 1. Ecoulement dans un tube par filets parallèles à l'axe du tube avec une vitesse $f(r)$. En prenant Ox_1 suivant le rayon vecteur, Ox_2 parallèle à l'axe, on est ramené au glissement simple.

2. Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux de vitesses de rotation différentes autour de leur axe commun (viscosimètre de Couette). Ici nous imaginons un observateur placé en M_0 , centre de l'élément fluide, et tournant de manière que Ox_1 soit toujours suivant le rayon vecteur de M_0 . Pour cet observateur, un point M infiniment voisin de M_0 aura une vitesse relative parallèle à Ox_2 égale à $v - \omega_0 r$ (si v est sa vitesse absolue et $\omega_0 = \frac{v_0}{r_0}$ la vitesse de rotation des axes), soit $\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)_{x_1}$. On est bien dans les conditions du glissement simple avec

$$m = \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)_{x_1}$$

Deux remarques :

1. Il faut s'assurer que l'écoulement postulé est compatible avec les équations de la dynamique, i.e. que l'on peut calculer p et $\vec{v}$ de manière à satisfaire à ces équations. On le vérifie dans les deux exemples précédents. Mais cela n'a pas lieu dans le viscosimètre cône-plan, sauf à titre d'approximation

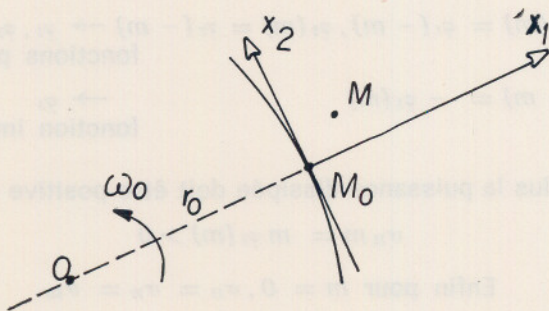


Fig. 2

pour un angle très faible entre cône et plan et pour des vitesses très faibles. Ni dans un viscosimètre à plateaux parallèles tournant l'un par rapport à l'autre autour de leur normale commune, à moins que les vitesses ne soient très petites.

2. J'ai dit que les expériences viscosimétriques n'exploraient en quelque sorte qu'une tranche de la réponse fonctionnelle d'un fluide (ou de son comportement). Cependant elles ont apporté la preuve que les fluides classiques ne sont pas les seuls fluides réels.

Un fluide classique est un fluide pour lequel le tenseur des contraintes σ est une fonction isotrope de la vitesse de déformation $\mathcal{D}$, de la température et de la densité, d'où dans le cas d'un fluide incompressible, à température constante :

$$\sigma = -p1 + a\mathcal{D} + b\mathcal{D}^2$$

a et b étant fonctions des invariants $tr \mathcal{D}^2$ et $tr \mathcal{D}^3$.

Or en appliquant cette relation dans le cas du glissement simple on trouve :

$$\varphi_1(m) = \varphi_2(m)$$

soit $\sigma_{11} = \sigma_{22}$. Mais cette égalité est contredite par l'expérience pour certains liquides (par exemple les solutions de polyisobutène).

Comme exemples de fluides non classiques de définition simple on peut citer :

a) le fluide de Maxwell, qui, en prenant comme dérivée objective du déviateur des contraintes la dérivée de Jaumann, conduit à l'égalité :

$$\varphi_1(m) = -\varphi_2(m)$$

b) les fluides de Rivlin-Ericksen. Ils sont définis par :

$$\sigma = f(\mathcal{D}, \mathcal{D}^{(2)}, \dots, \mathcal{D}^{(n)})$$

$\mathcal{D}^{(n)}$ est la vitesse de déformation d'ordre n que l'on peut définir par :

$$\frac{d^n(\delta s^2)}{dt^n} = 2 \delta \vec{x} \mathcal{D}^{(n)} \delta \vec{x}$$

δs^2 étant le carré de la longueur d'un élément linéaire $\delta \vec{x}$, ou encore par :

$$\mathcal{D}^{(n)} = \frac{D^{n-1} \mathcal{D}}{D t^{n-1}}$$

où $\frac{D}{Dt}$ désigne la dérivée objective covariante (ou de Rivlin).

Un théorème de Wang montre que dans un écoulement viscosimétrique le comportement d'un fluide quelconque ne peut pas être distingué de celui d'un fluide de Rivlin-Ericksen de complexité $n = 2$ $\sigma = f(\mathcal{D}, \mathcal{D}^{(2)})$ *. La propriété est évidente par exemple pour un fluide de R.E. de complexité supérieure

* Ne pas confondre $D^{(2)}$ dérivée de la matrice D avec D^2 carré de cette matrice.

à 2, parce que le calcul des dérivées de Rivlin de $\mathcal{D}$ dans l'écoulement par glissement simple montre que $\mathcal{D}^{(n)}$ est nul dès que n dépasse 2. Ce théorème précise les conclusions qu'on peut tirer des expériences viscosimétriques : elles permettent seulement d'affirmer qu'un fluide appartient à une certaine classe qui contient tous les fluides équivalents (dans un viscosimètre) à un même fluide de R.E. de complexité 2.

Par exemple, si l'on trouve $\varphi_2(m) \neq \varphi_1(m)$, on peut affirmer que le fluide n'est pas un fluide classique. Mais si l'on trouve $\varphi_2(m) = \varphi_1(m)$, on ne peut pas affirmer qu'il soit un fluide classique ; un fluide de R.E. de complexité $n > 2$ tel que σ ne dépende pas de $\mathcal{D}^{(2)}$ donne, dans un viscosimètre, les mêmes résultats qu'un fluide classique.

Ainsi, bien des expériences autres que les expériences viscosimétriques demeurent nécessaires pour explorer un peu plus complètement le comportement rhéologique des fluides.

BIBLIOGRAPHIE

- H. MARKOWITZ. — Trans. Soc. Rheol. 1 37-52 1957.
 B.D. COLEMAN et W. NOLL. — Arch. Rat. Mech. Anal. 3 289-303 1959.
 B.D. COLEMAN. — Trans. Soc. Rheol. 6 293-300 1962.
 W. NOLL. — Arch. Rat. Mech. Anal. 11 97-105 1962.
 C.C. WANG. — Arch. Rat. Mech. Anal. 20 329-340 1965.
 B.D. COLEMAN, H. MARKOWITZ et W. NOLL. — Viscosimetric Flows of Non Newtonian Fluids Springer Tracts in Natural Philosophy - Vol. 5 - 1966.

ABSTRACT

If a stress is applied on a crystalline material it appears above a threshold a permanent strain. This strain is called of an hysteretic effect on one hand a viscoplastic effect on the other hand. Viscoelasticity or creep is due to thermally activated movements of crystal lattice defects. In this paper the main physical models of creep (logarithmic creep, high temperature creep, Newtonian creep) are described. Typical one of these models is presented in two cases : — high amplitude damping experiments. — high speed deformation tests.

1. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous limiterons à l'étude de la viscosité des solides cristallins ; nous admettrons que ces solides sont caractérisés par l'existence d'un seul et même effet de glissement permanent pour une déformation permanente non négligeable. En effet, dans tout le domaine de contraintes, la déformation permanente est connue et la somme des deux composantes : une déformation instantanée et la vitesse de propagation des cordes élastiques (dans une déformation visqueuse) ou l'écoulement du fluide.

Collège de France, Paris, 1973.

Bases physiques de la viscoplasticité*

par G. FANTOZZI, J. PEREZ, P.F. GOBIN

Laboratoire de physique des matériaux
I.N.S.A.
69621 — Villeurbanne

RESUME

Les matériaux cristallins sont caractérisés par l'existence d'un seuil de contrainte au-dessus duquel ils présentent une déformation permanente : cette déformation peut être considérée comme la somme d'un effet hystérétique, et d'un effet viscoplastique. La viscoplasticité ou fluage est due au mouvement thermiquement activé des défauts de réseau.

Dans cet article, les principaux modèles physiques de fluage sont décrits (fluage α ou logarithmique, fluage-restauration, fluage visqueux). Une application de ces modèles est traitée dans deux cas :

- frottement intérieur associé au comportement viscoplastique,
- déformation plastique à grande vitesse.

ABSTRACT

If a stress is applied on a crystalline material, it appears, above a threshold a permanent strain. This strain is settled of an hysteretic effect on one hand, a viscoplastic effect on the other hand.

Viscoplasticity, or creep, is due to thermally activated movements of crystal lattice defects.

In this paper, the main physical models of creep (logarithmic creep, high temperature creep, Herring Nabarro creep) are described. Typical use of these models is presented in two cases :

- *high amplitude damping experiments,*
- *high speed deformation tests.*

1. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous limiterons à l'étude de la viscoplasticité des solides cristallins : nous admettrons que ces solides sont caractérisés par l'existence d'un seuil au-dessus duquel ils présentent une déformation permanente non négligeable. En effet, dans tout le domaine de contraintes, la déformation peut être considérée comme étant la somme de deux composantes : une déformation instantanée (à la vitesse de propagation des ondes élastiques près) et une déformation visqueuse (ou fonction du temps).

Au-dessous du seuil de plasticité, nous distinguons ainsi la déformation élastique pure et la déformation viscoélastique ; au-dessus du seuil, s'ajoutent à ces deux composantes*, la *déformation hystérétique* (c'est-à-dire une déformation plastique instantanée ; cette déformation est dite renversable s'il est possible en changeant le sens de la contrainte, de ramener le solide à ses dimensions initiales) et la *déformation viscoplastique* (ou fluage).

La déformation visqueuse de tels solides est due au mouvement thermiquement activé des défauts de réseau. On peut envisager dans le domaine viscoplastique, soit le déplacement des défauts ponctuels (fluage Herring-Nabarro), soit le déplacement des défauts linéaires (fluage logarithmique et fluage restauration) ou bien l'évolution des défauts plans (fluage intergranulaire).

Par suite du rôle particulièrement important joué par les dislocations dans ce type de comportement, une part importante de cet exposé est consacré à l'étude de leur déplacement.

Nous établirons d'abord, d'un point de vue physique la distinction entre les notions d'hystérésis et de déformation visqueuse.

Nous discuterons ensuite les principaux modèles de comportement viscoplastique (modèles de fluage).

Enfin, nous appliquerons ces données à deux cas particuliers : le frottement intérieur, dans le domaine viscoplastique où les contraintes appliquées et les vitesses de sollicitation sont faibles, et la déformation plastique à grande vitesse, où, tout au contraire, les contraintes appliquées et les vitesses de sollicitation sont élevées.

2. COMPORTEMENT VISQUEUX DES DISLOCATIONS ET NOTION D'ACTIVATION THERMIQUE

2.1. Position du problème

Le comportement d'une dislocation dans un solide peut être décrit par l'équation générale (1)

* Un comportement viscoélastique peut en effet subsister dans le domaine plastique mais nous considérerons, ici, que ce phénomène est négligeable.

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

$$\tau b + C \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - B \frac{\partial y}{\partial t} + \tau_p b \sin \frac{2\pi y}{a} - \rho(x) \frac{\partial E(y)}{\partial y} - M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

où

M est la masse effective de la dislocation par unité de longueur,

C la tension de ligne,

B le coefficient d'amortissement visqueux,

τ_p la contrainte de Peierls,

$\rho(x)$ la densité de points d'ancrage le long de la ligne,

$E(y)$ l'énergie d'interaction dislocation ancrage,

τ la contrainte appliquée,

b le module du vecteur de Burgers de la dislocation.

En supposant que la courbure des dislocations reste faible, et que leur vitesse de déplacement n'est pas excessive, on peut négliger le second terme qui décrit la force de rappel associé à la tension de ligne et le dernier terme ou terme d'inertie.

De même, le quatrième terme qui caractérise la résistance à l'avancement propre au réseau cristallin parfait* peut également être négligé.

L'équation (1) se simplifie donc en (2)

$$\tau b - B \frac{\partial y}{\partial t} - \rho(x) \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

qui montre bien que le comportement des défauts linéaires est principalement réglé par ses interactions avec les vibrations de réseau (par le terme B) et avec tous les obstacles ou ancrages rencontrés dans son mouvement.

L'expérience montre, par ailleurs, que le terme B n'a d'influence sensible que par les fréquences de sollicitation $\approx 10^6 \text{ S}^{-1}$; il n'interviendra donc pas dans les expériences classiques de fluage et de déformation à vitesse lente qui sont les plus répandues.

Par contre, nous devons en tenir compte dans l'analyse des essais de traction à grande vitesse où les durées de mise en charge sont de l'ordre de la micro seconde.

2.2. Franchissement thermiquement activé des obstacles

Il est commode, pour étudier le franchissement thermo-mécanique des obstacles, d'envisager le cas simple d'une ligne de dislocation rencontrant des obstacles identiques et régulièrement espacés de l (fig. 1 a).

Dans ces conditions, une force τb est appliquée sur le défaut linéaire contre chaque obstacle. Chaque

obstacle peut être, alors, caractérisé par son profil « $F(y)$ », c'est-à-dire par la force nécessaire au franchissement de l'obstacle, en fonction du chemin y parcouru par la dislocation.

La figure 1 b représente la variation de cette force avec la distance y ;

L'aire sous la courbe $F(y)$ est l'énergie E_0 qu'il faut fournir pour franchir cet obstacle.

Cette énergie E_0 peut être fournie de 2 façons : sous forme mécanique par le travail des forces appliquées et sous forme thermique par les vibrations du réseau.

Sous l'effet de la contrainte appliquée τ , la dislocation se déplace jusqu'à la position y_0 correspondant à une force F agissant sur l'obstacle, égale à $\tau b l$. Le franchissement de l'obstacle sera possible si l'énergie d'origine thermique E_2 est suffisante, c'est-à-dire au moins égale à l'aire hachurée horizontalement (fig. 1 b).

On peut écrire :

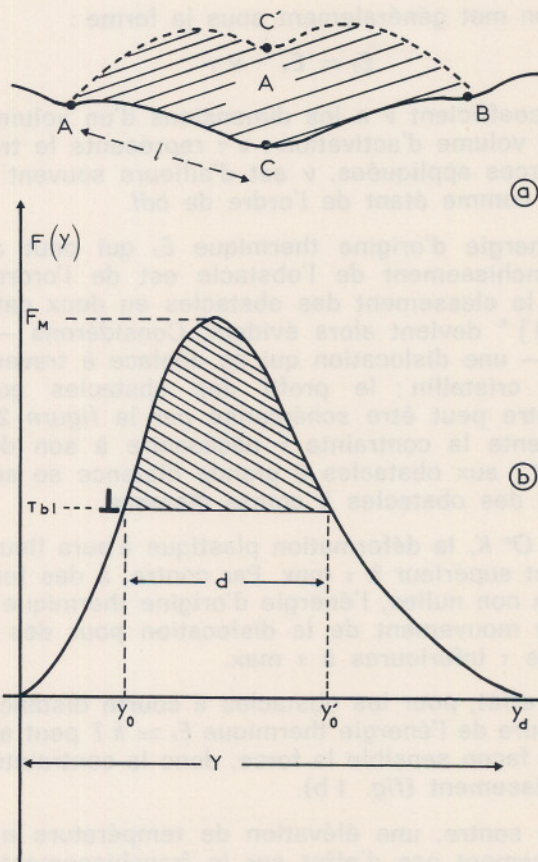


Fig. 1 a. — Ligne de dislocation rencontrant des obstacles identiques espacés de l

b. — Force nécessaire au franchissement d'un obstacle fonction de la distance y à cet obstacle

* Une dislocation qui se déplace dans un plan dense, voit son énergie varier avec la période du réseau. La variation d'énergie ainsi mise en jeu est faible et ne doit être prise en compte, dans les métaux, que pour des températures très basses ($\approx 0,1 \text{ Tf}$)

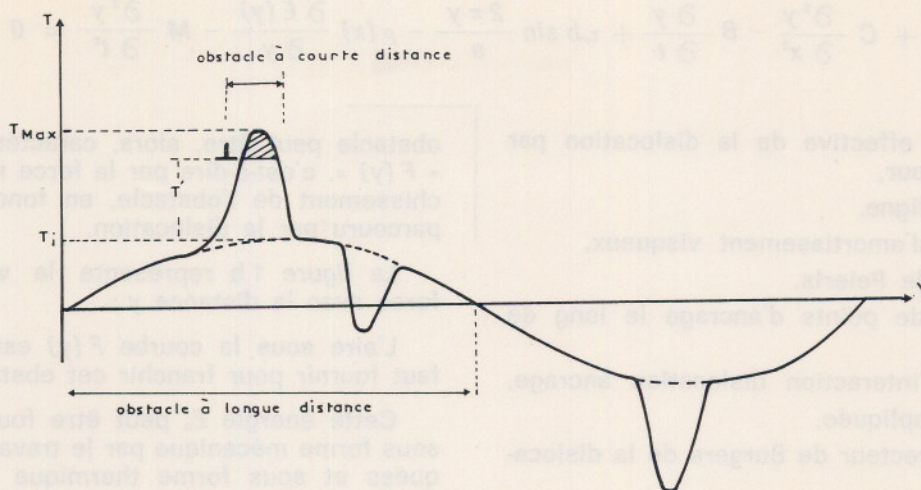


Fig. 2. — Champ de contraintes internes rencontré par une dislocation dans son plan de glissement

$E_z = E_o -$ travail fourni par la force appliquée
soit :

$$E_z = E_o - \left[\int_0^y F(y) dy + \tau b l d + \int_{y'_0}^{y_d} F(y) dy \right]$$

que l'on met généralement sous la forme :

$$E_z = E_o - v \tau \quad (3)$$

où le coefficient v a les dimensions d'un volume et est dit volume d'activation ; $v \tau$ représente le travail des forces appliquées. v est d'ailleurs souvent considéré comme étant de l'ordre de bdl .

L'énergie d'origine thermique E_z qui peut aider au franchissement de l'obstacle est de l'ordre de kT et le classement des obstacles en deux catégories [1] * devient alors évident. Considérons — en effet — une dislocation qui se déplace à travers le réseau cristallin ; le profil des obstacles qu'elle rencontre peut être schématisé par la figure 2 qui représente la contrainte τ nécessaire à son déplacement ; aux obstacles à grande distance se superposent des obstacles à courte distance.

Au $0^\circ K$, la déformation plastique n'aura lieu que si τ est supérieur à τ_{max} . Par contre, à des températures non nulles, l'énergie d'origine thermique permet le mouvement de la dislocation pour des contraintes τ inférieures à τ_{max} .

En effet, pour les obstacles à courte distance, la fourniture de l'énergie thermique $E_z \simeq kT$ peut abaisser de façon sensible la force, donc la contrainte, de franchissement (fig. 1 b).

Par contre, une élévation de température n'aura pratiquement pas d'effet sur le franchissement des obstacles à grande distance, car, dans ce cas

$E_z \simeq kT$ est pratiquement négligeable devant l'énergie E_o nécessaire au franchissement d'un tel obstacle (fig. 2). Ainsi la contrainte τ ne peut être inférieure à τ_i , valeur qui permet le franchissement des obstacles à grande distance.

Ainsi, on peut considérer que la contrainte appliquée se décompose en deux parties :

— l'une égale à τ_i qui correspond au franchissement thermique des obstacles à grande distance et qui n'est pas affectée par la température,

— l'autre égale à τ' qui dépend de la température T et de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ et qui permet le franchissement thermiquement activé des obstacles à courte distance.

On écrit :

$$\tau = \tau' (T, \dot{\epsilon}) + \tau_i \quad (4)$$

Dans cette hypothèse, la variation de la contrainte d'écoulement avec la température est donnée par la figure 3.

Pour une température T_o , l'activation thermique est suffisante pour que les obstacles à courte distance soient franchis sans l'aide de la contrainte ($E_z \simeq E_o$) : la contrainte d'écoulement est alors réduite à τ_i .

Certains obstacles athermiques, dans le domaine des basses températures, peuvent devenir thermiquement activés à plus haute température (domaine II de la figure 3) : il apparaît alors une nouvelle baisse de la contrainte d'écoulement qui indique que les obstacles à grande distance sont à leur tour franchis pour des contraintes inférieures à τ_i .

Le comportement d'un matériau est donc lié à la nature des obstacles que peuvent rencontrer les dislocations dans leur déplacement.

* Les chiffres entre crochets [] renvoient aux références à la fin de l'article.

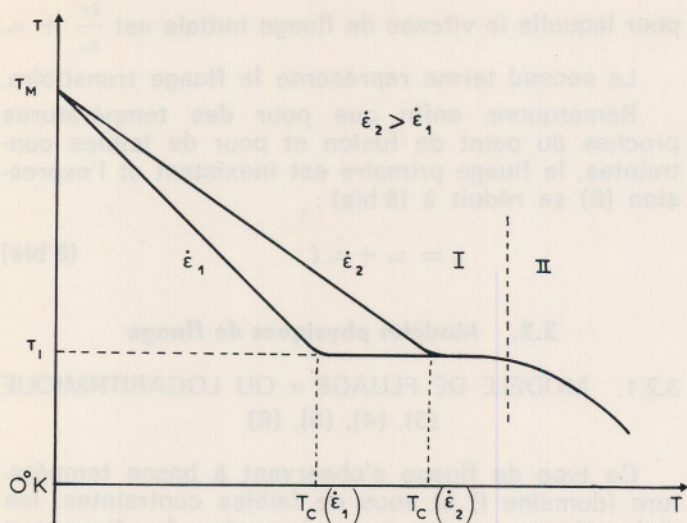


Fig. 3. — Variation de la contrainte nécessaire au déplacement d'une dislocation avec la température et la vitesse de déformation

Les obstacles larges ou athermiques pourront être par exemple des dislocations ne coupant pas le plan de glissement et agissant par leur champ de contraintes à grande distance ou de gros précipités. Parmi les obstacles thermiques, nous citerons les collines de Peierls-Nabarro, les dislocations coupant le plan de glissement (arbres de la « forêt » de dislocations), le mouvement non conservatif des crans, le glissement dévié (par suite de l'énergie nécessaire au pincement), la montée de dislocations, etc...

Dans tous les cas, la vitesse de déformation du solide sera donnée par [3] :

$$\dot{\epsilon} = Nb\dot{A} \quad (5)$$

où N est le nombre d'arcs de dislocations par unité de volume,

A l'aire moyenne balayée par un arc élémentaire.

Le déplacement des dislocations peut être considéré comme la somme de sauts élémentaires d'arcs de longueur moyenne l .

La vitesse de déformation (5) s'écrit d'une façon plus détaillée (6) :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\rho_D}{l} b A \frac{v_D}{l} b \exp \left[- \frac{E_0 - v(\tau - \tau_i)}{kT} \right] \quad (6)$$

ρ_D/l est le nombre d'arcs élémentaires si ρ_D est la densité de dislocation, A est l'aire balayée à l'occasion du franchissement d'un obstacle (saut de C en C' , fig. 1 a), le produit $\frac{v_D b}{l}$

$$\exp \left[- \frac{E_0 - v(\tau - \tau_i)}{kT} \right]$$

représente le nombre de sauts par unité de temps d'un arc élémentaire. *

En confrontant certains paramètres de l'expression (6) aux valeurs expérimentales on a pu dans certains cas identifier avec une certitude raisonnable les mécanismes élémentaires qui contrôlent le comportement visqueux.

2.3. Hystérésis et viscoplasticité

Il est désormais possible de préciser le sens physique des termes hystérésis et viscoplasticité [2] :

— à $0^\circ K$ le franchissement de tout obstacle ne peut se faire que grâce à l'action de la contrainte ; le temps n'intervient pas : c'est l'hystérésis. Dans ce cas : $\tau v \geq E_0 \gg kT$.

— à une température finie, il existe toujours pour un obstacle donné une probabilité de franchissement, mais la fréquence de saut est négligeable pour les obstacles larges (dans le domaine I, fig. 3).

— On peut alors envisager 2 cas :

1° $\tau < \tau_i$: la contrainte appliquée permet le franchissement de quelques obstacles à courte distance mais la dislocation reste bloquée par les obstacles à grande distance ; c'est la « viscoélasticité ».

2° $\tau > \tau_i$: on observe une déformation quasi instantanée (hystérétique) suivie d'un écoulement viscoplastique.

— Dans le domaine II, même sous une contrainte faible on obtient un comportement viscoplastique car la probabilité de franchissement des obstacles à grande distance n'est plus négligeable.

3. MODELES PHYSIQUES DE FLUAGE

3.1. Aspect phénoménologique

La déformation par fluage des matériaux peut être représentée schématiquement par la courbe donnant la déformation en fonction du temps (fig. 4).

A basses températures $\left(\frac{T}{T_f} < 0,3 \text{ avec } T_f = \text{température de fusion} \right)$ et sous faibles contraintes, la vitesse de fluage décroît constamment (courbe 1), la déformation reste faible : ce type de fluage est appelé fluage α ou logarithmique.

On peut décrire $\epsilon(t)$ par une expression de la forme

$$\alpha_x = \epsilon_0 + \alpha \log(1 + \gamma t) \quad (7)$$

* La fréquence de saut d'une dislocation est le produit de la fréquence propre de l'arc $v_D \frac{b}{l}$, ou v_D est la fréquence de Debye, par la probabilité $\exp \left[- \frac{E_2}{kT} \right]$ qu'à chaque vibration une énergie égale à E_2 soit fournie à la dislocation au voisinage de l'obstacle.

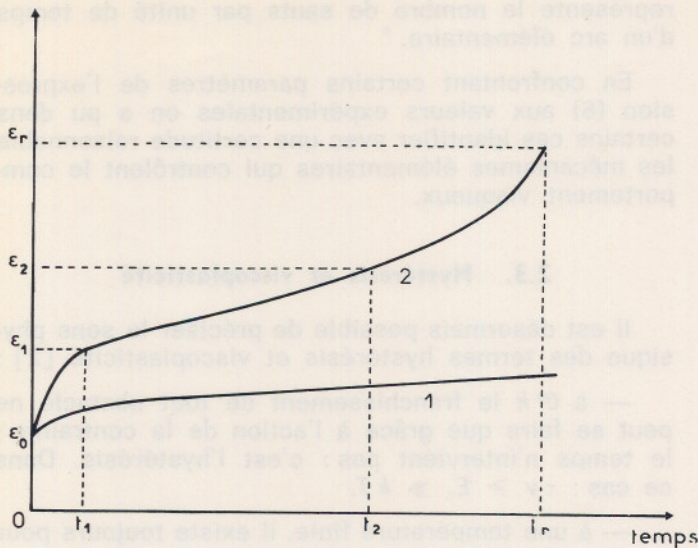


Fig. 4. — Représentation schématique d'une courbe de fluage

ε_0 étant la déformation initiale, α et γ sont des constantes.

A plus haute température ($\frac{T}{T_f} > 0,3$) et sous fortes contraintes, le fluage est décrit par la courbe 2 de la figure 4 : ce type de fluage appelé fluage-restauration, est le plus important en pratique. Il est caractérisé par 3 périodes :

- entre ε_0 et ε_1 , la vitesse de fluage décroît : c'est le fluage primaire ou transitoire ou β ,
- entre ε_1 et ε_2 , la vitesse de fluage est constante : c'est le stade de fluage secondaire ou stationnaire ou χ ,
- entre ε_2 et ε_r , la vitesse de fluage croît jusqu'à la rupture. Cette période est appelée tertiaire ou accélérée.

Cette décomposition du fluage en 3 périodes est arbitraire car ces trois périodes ne sont pas indépendantes, mais elle est commode du point de vue phénoménologique.

Le fluage-restauration de nombreux matériaux [4] peut être décrit par la relation :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta t^m + \dot{\varepsilon}_s t \quad (8)$$

avec ε_0 = allongement à la mise en charge

et β , m = constantes caractérisant le fluage primaire qu'on appelle alors fluage parabolique ou fluage β ($0 < m < 1$)

$\dot{\varepsilon}_s$ = vitesse de fluage secondaire.

L'équation précédente implique que la vitesse de fluage initiale est infinie. On peut alors la remplacer par l'expression suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_r \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \right] + \dot{\varepsilon}_s t \quad (9)$$

pour laquelle la vitesse de fluage initiale est $\frac{\varepsilon_r}{\tau_0} + \dot{\varepsilon}_s$.

Le second terme représente le fluage transitoire.

Remarquons enfin que pour des températures proches du point de fusion et pour de faibles contraintes, le fluage primaire est inexistant et l'expression (8) se réduit à (8 bis) :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}_s t \quad (8 \text{ bis})$$

3.2. Modèles physiques de fluage

3.2.1. MODELE DE FLUAGE α OU LOGARITHMIQUE (3), (4), (5), (6)

Ce type de fluage s'observant à basse température (domaine I) et sous de faibles contraintes, les dislocations ne quittent pas leur plan de glissement et la déformation se produit grâce au processus de coupure des arbres de la « forêt » de dislocation [5] (fig. 5).

Les obstacles athermiques, à l'origine de τ_i , sont évidemment dans ce même cas constitués par le champ de contrainte à grande distance des dislocations du réseau de Frank. Comme la densité de dislocation croît avec la déformation, la contrainte τ_i croît et la vitesse de fluage décroît comme on le voit sur l'expression (6).

Pour élaborer un modèle de fluage α , l'hypothèse la plus simple consiste à supposer une variation linéaire de τ_i avec la déformation. Comme la déformation en fluage α reste faible, on peut ne conserver que le premier terme du développement limité de τ_i autour de ε_0 :

$$\tau_i = \tau_i(\varepsilon_0) + (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon_0} + \dots \quad *$$

dans ces conditions :

$$E_2 = E_0 - \nu (\tau - \tau_i) \text{ devient}$$

$$E_2 = E_0 - \nu \tau + \nu \tau_i(\varepsilon_0) + \nu (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon_0}$$

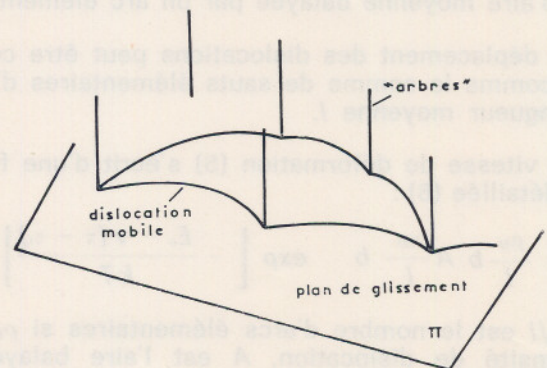


Fig. 5. — Coupure par les dislocations mobiles des arbres de la « forêt » de dislocations (fluage α)

* $\left(\frac{\partial \tau_i}{\partial \varepsilon} \right)$ est la pente de la courbe effort-déformation pour $\varepsilon = \varepsilon_0$ si les obstacles athermiques sont à la base du durcissement.

(6) s'écrit alors (10)

$$\dot{\varepsilon} = \rho_D A v_D \frac{b^2}{f^2} \exp - \frac{E_s}{kT} = \rho_D A v_D \frac{b^2}{f^2} \exp \left[- \frac{U}{kT} \right] \exp \left[- \frac{h(\varepsilon - \varepsilon_0)v}{kT} \right] \quad (10)$$

où $U = E_0 - v(\tau - \tau_{i(\varepsilon_0)})$ et $h = \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon_0}$

L'intégration de (10) en fonction du temps conduit à l'expression (7) avec $\alpha = \frac{kT}{h v}$

$$\text{et } \gamma = \rho_D A v_D \frac{b^2}{f^2} \frac{h v}{kT} \exp \left[- \frac{U}{kT} \right]$$

L'énergie d'activation du fluage E_s est donné par :

$$E_s = kT \ln \left[\frac{\rho_D v_D b^2}{\dot{\varepsilon}} \right] \text{ si } A \simeq f^2 \quad (11)$$

Pour de faibles déformations, le terme logarithmique est pratiquement constant et l'énergie d'activation est, aux basses températures, pratiquement proportionnelle à la température. Ce résultat est assez bien vérifié dans le cas de l'aluminium [7].

Dans le cas du modèle qui vient d'être développé, l'énergie E_0 correspond à l'énergie de formation de 2 crans lors de la coupure des dislocations, mais E_0 peut être l'énergie de franchissement à 0°K de tout obstacle thermique. Le formalisme de l'expression (10) peut s'appliquer, avec quelques modifications, à la déformation d'une solution solide diluée ou au franchissement des collines de Peieils-Nabarro, pourvu que l'hypothèse fondamentale de l'augmentation des contraintes internes avec les déformations, soit respectée.

3.2.2. MODELES DE FLUAGE RESTAURATION

Les modèles thermiques ont été développés essentiellement pour le fluage stationnaire, où l'on postule la stabilité de la structure.

La période de transition doit être associée à une évolution du réseau de dislocations qui, à partir de l'état observé immédiatement après la déformation initiale tend vers la configuration responsable du fluage stationnaire.

Dans le cas des métaux purs, l'énergie d'activation apparente est voisine de l'énergie d'auto-diffusion et ce fait permet de penser que le mécanisme de montée des dislocations coins joue pour le fluage se produisant dans le domaine II (fig. 3), un rôle important. Parmi les modèles décrivant cet aspect de la viscoplasticité, nous nous limiterons aux modèles de Weertmann [8] et de Nix et de Barret [9].

3.2.2.1. Modèle de Weertmann

Les obstacles au glissement, phase dispersée (fig. 6 a) ou empilement de dislocations dans un plan parallèle (fig. 6 b), sont franchis par une montée de h .

Quand la dislocation de tête évite l'obstacle, toutes les dislocations de l'empilement viennent prendre la place de celle qui les précédait. Ce déplacement de l'ensemble entraîne une déformation macroscopique qui se produit à chaque « échappement » d'une dislocation en tête d'empilement.

Il s'agit donc là de deux processus en série — échappement par montée — puis glissement de l'ensemble entraînant une microdéformation. Le premier de ces processus est lent et nécessite l'intervention de la diffusion : c'est donc lui qui contrôlera l'ensemble du phénomène.

Le modèle de la figure 6 b élaboré pour les métaux purs, répond sans faire appel à des recombinaisons statistiques à la condition de stabilité de la structure. En effet, les deux dislocations de tête des empilements s'éliminent réciproquement en montant chacune de h et deux nouvelles dislocations émises des sources S_1 et S_2 viennent s'ajouter aux empilements, gardant ainsi constantes la densité ρ_D de défauts linéaires.

La formule (5) reste valable si N est désormais le nombre de sources par unité de volume et $\bar{A} = \bar{A} v$ où $\bar{A}$ est l'aire moyenne balayée par l'ensemble des dislocations d'un empilement chaque fois que la dislocation de tête disparaît, et v est la fréquence à laquelle ce phénomène se produit.

L'établissement du modèle se ramène donc au calcul de $\bar{A}$ et de v . Si l'on considère que chaque empilement est issu d'une source activée par la contrainte appliquée, l'aire balayée sera de l'ordre de πl^2 où l est le libre parcours moyen d'une dislocation avant son blocage. $\bar{A}$ sera donc inversement proportionnel au nombre de sources par unité de volume et à la distance moyenne de blocage h .

La fréquence v d'annihilations sera réglée par la vitesse de montée des dislocations, c'est-à-dire, le coefficient des lacunes qui, sous l'effet de la contrainte appliquée, sont en sur ou sous-saturation, selon que les dislocations émettent ou absorbent des lacunes lors de leur montée.

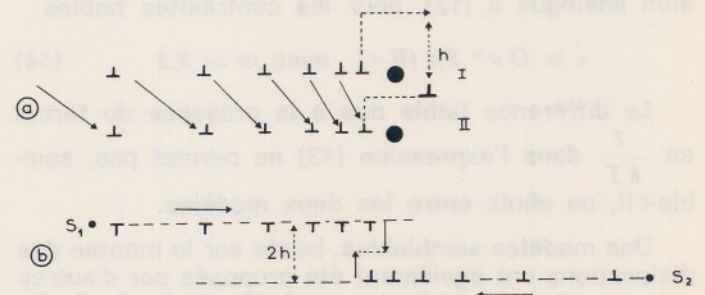


Fig. 6 a. — Modèle de Weertman (fluage restauration)
b. — Empilement de dislocation contre un obstacle

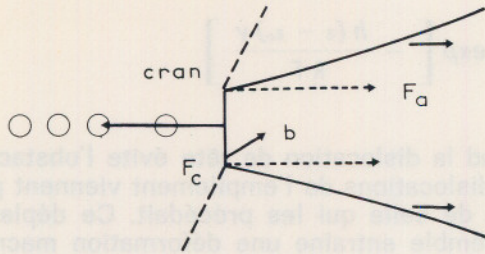


Fig. 7. — Déplacement d'un cran sur une dislocation vis

Une analyse détaillée du mécanisme schématisé fig. 6 a conduit à l'expression suivante de la vitesse de fluage stationnaire :

$$\dot{\epsilon}_s = \frac{\alpha}{N^{1/2} \mu^{7/2} b^{1/2}} \cdot \frac{D}{kT} \sigma^{2/2} \quad (13)$$

où D est le coefficient d'autodiffusion. La variation avec la température est essentiellement due au terme exponentiel du coefficient d'autodiffusion, et l'énergie d'activation apparente est l'énergie d'autodiffusion, ce qui est en bon accord avec les résultats expérimentaux.

On notera que l'augmentation de la densité des sources et du module de Coulomb de la matrice diminuant la vitesse de fluage et que la contrainte est à la puissance 4,5, ce qui est assez bien vérifié par l'expérience pour les contraintes moyennes.

3.2.2.2. Modèle de Nix et Barrett (3)

Un cran sur une dislocation vis constitue un élément de dislocation coin que ne peut suivre que par montée le déplacement de l'ensemble (fig. 7).

La création de défauts ponctuels qui en résulte s'oppose au mouvement du cran et donc au glissement de la dislocation vis.

On calculera la vitesse de fluage en écrivant l'égalité de la « force chimique » $F(c)$ associée à la sur ou sous saturation en défauts ponctuels et à la « force élastique » $F(e)$ due à la contrainte appliquée.

La solution d'un tel problème conduit à une expression analogue à (13), pour les contraintes faibles

$$\dot{\epsilon} = D \sigma^m \text{Sh}(B \sigma) \text{ avec } m \simeq 3,5 \quad (14)$$

La différence faible due à la présence du terme en $\frac{1}{kT}$ dans l'expression (13) ne permet pas, semble-t-il, un choix entre les deux modèles.

Des modèles semblables, basés sur la montée des dislocations ont également été proposés par d'autres auteurs, Hirsch et Werrington [10], Gibbs [11]. On obtient dans tous les cas des expressions du type (13) et (14).

3.2.3. MODELES DE FLUAGE VISQUEUX : FLUAGE DE HERRING-NABARRO

Un type spécial de fluage peut se produire dans les échantillons constitués de grains très fins (de l'ordre de 0,01 à 0,001 cm).

Ce fluage visqueux ou fluage de Herring-Nabarro est observé près du point de fusion et pour des contraintes faibles. Il n'est pas dû à un glissement de dislocations mais à un transport de matière par autodiffusion. Ce cas se rencontre également dans les structures où le déplacement des dislocations est difficile (oxydes, carbures) et présente de ce fait un grand intérêt pour la compréhension du comportement des matériaux réfractaires.

Soit un petit grain de dimension L soumis à une contrainte σ (fig. 8) et supposé sans dislocation.

L'énergie nécessaire pour former une lacune près d'une surface en tension est inférieure de σb^3 à l'énergie nécessaire pour former ce défaut dans un cristal non contraint.

Si C_0 est la concentration en équilibre des lacunes sous contrainte nulle, la concentration sur les faces inférieure et supérieure C est donnée par :

$$C = C_0 \exp \left(\frac{\sigma b^3}{kT} \right) \quad (15)$$

Il existe donc un gradient de concentration entre les faces sous tension et les faces latérales de l'ordre de :

$$\frac{2 C_0}{L} \left[\exp \left(\frac{\sigma b^3}{kT} \right) - 1 \right]$$

Pour les faibles contraintes et les hautes températures, il s'établit un flux lacunaire Φ

$$\Phi = \frac{D_i L^2}{\alpha b^3} \left(\frac{2 C_0}{L} \right) \left(\frac{\sigma b^3}{kT} \right) \quad (16)$$

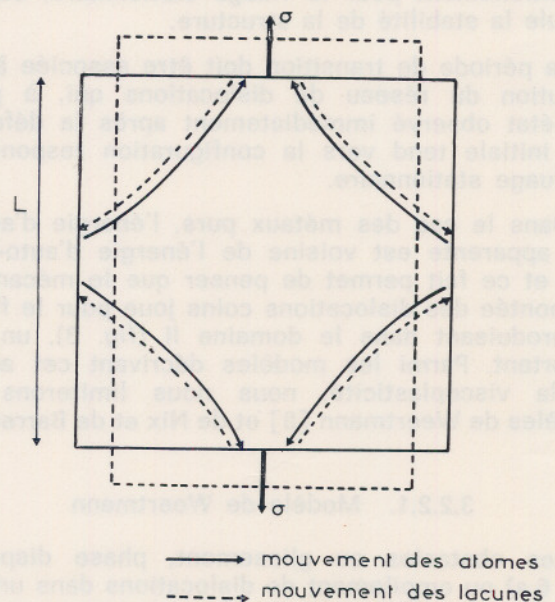


Fig. 8. — Mouvement des atomes et des lacunes à travers un grain de dimension L soumis à une contrainte σ

où D_i est le coefficient de diffusion des lacunes et α un facteur sans dimension dépendant de la forme du grain.

A ce flux de lacunes est évidemment associé un flux d'atomes dans la direction opposée. Ainsi le grain change de forme suivant le schéma de la figure 8.

La vitesse de fluage, c'est-à-dire, la vitesse de variation de la dimension du grain dans la direction de la contrainte appliquée est :

$$\dot{\epsilon} = \Phi \frac{b^3}{L^3} = \frac{2 D \sigma b^3}{\alpha L^2 k T} \quad (17)$$

où D est le coefficient d'autodiffusion comme dans les expressions (13) et (14).

La vitesse de fluage est proportionnelle à la contrainte et l'énergie d'activation est égale à celle de l'auto-diffusion, conclusions qui sont assez bien vérifiées expérimentalement.

3.2.4. FLUAGE DANS LES ALLIAGES

Les modèles précédents ont été développés dans l'approximation des métaux purs. Malgré les simplifications évidentes que cette démarche implique, il est possible de prévoir qualitativement l'effet des éléments d'alliage à partir des raisonnements précédents.

Par exemple, dans le cas du fluage restauration, la montée des dislocations constitue le mécanisme de base. Il est donc possible de prédire qualitativement l'action d'un soluté en analysant son influence sur le phénomène de montée. Dans les solutions solides diluées, cette influence peut être complexe mais d'une façon générale est favorable pour la résistance au fluage (sous réserve d'effets secondaires sur la résistance chimique), tout élément qui interagit fortement avec les dislocations (effet Cottrell ou effet Suzuki), qui diminue le coefficient d'auto-diffusion ou qui diminue l'énergie de défaut d'empilement, rendant ainsi la montée plus difficile.

Enfin, dans les solutions solides plus concentrées apparaissent les précipités qui doivent être franchis par montée (voir fig. 6 a) ou les phénomènes d'ordre.

Il est évident que les précipités doivent, pour être efficaces, être finement dispersés, être aussi stables que possible en température. Les modèles précédents peuvent être extrapolés aux alliages [4], [8].

3.3. Conclusion

Nous pouvons résumer en indiquant que les trois types de fluage que nous venons de décrire sont observés dans certaines conditions de température et contrainte. Ceci peut être représenté par le diagramme suivant [8] (figure 9).

A basse température, le fluage est dû au mouvement des dislocations dans leur plan de glissement. La vitesse de fluage est alors contrôlée par les obstacles à courte distance que peuvent rencontrer les dislocations lors du glissement.

A haute température, le mouvement des dislocations peut se faire dans le plan de glissement et perpendiculairement à ce plan. Dans ce cas, le fluage est contrôlé par la diffusion.

Bien évidemment, il n'y a pas de transition brutale entre ces mécanismes, mais quand on augmente la contrainte ou la température, le second mécanisme remplace progressivement le premier.

Remarquons enfin qu'une équation générale de fluage basée sur la cinétique de multiplication, de déplacement, de blocage des dislocations a été proposée par Li [12] et Akulov [13].

Ces auteurs obtiennent une équation de fluage qui a la forme :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 + \frac{\dot{\epsilon}_s}{a} \ln \left[1 + \frac{\dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_s}{\dot{\epsilon}_s} (1 - e^{-at}) \right] + \dot{\epsilon}_s t \quad (18)$$

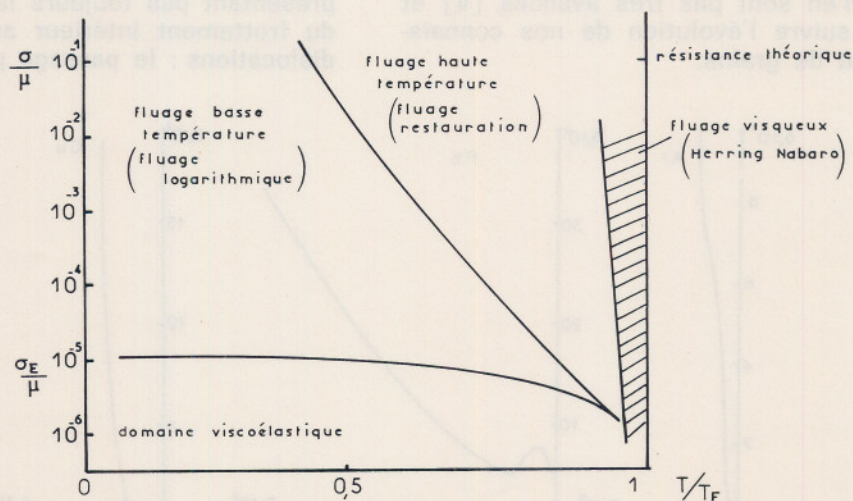


Fig. 9. — Diagramme de fluage

T = température — T_F = température de fusion — σ = contrainte appliquée
 μ = module de cisaillement — σ_E = limite élastique d'un cristal recuit.

a = constante de vitesse de multiplication des dislocations

$\dot{\varepsilon}_i$ = vitesse initiale de fluage

Selon l'ordre de grandeur de $\dot{\varepsilon}_i$, a , $\dot{\varepsilon}_s$, l'équation (18) peut se ramener aux cas particuliers du fluage logarithmique, du fluage transitoire exponentiel et du fluage stationnaire.

Pour les faibles températures de fluage, $\dot{\varepsilon}_s$ est petit, $\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_s} \gg 0$ et $at \ll 1$.

Ainsi l'équation (18) se réduit à :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\dot{\varepsilon}_s}{a} \ln \left[1 + \frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_s} at \right]$$

Cette équation a la même forme que la loi de fluage logarithmique (4), avec $\alpha = \frac{\dot{\varepsilon}_s}{a}$

$$\gamma = \frac{\dot{\varepsilon}_i a}{\dot{\varepsilon}_s}$$

Pour des températures de fluage élevées, $\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_s}$ est proche de 1 et l'équation (18) se réduit à :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_s}{a} (1 - e^{-at}) + \dot{\varepsilon}_s t \quad (19)$$

Cette équation analogue à l'équation (9) permet de décrire le fluage restauration.

Enfin, signalons que nous n'avons pas, dans cette analyse succincte envisagé le fluage localisé aux joints de grains, ou intergranulaire qui pour des métaux ou alliages à petits grains peut représenter une fraction importante de la déformation totale.

Les modèles n'en sont pas très avancés [4] et ne pourront que suivre l'évolution de nos connaissances sur le joint de grains.

4. APPLICATION

Nous allons appliquer les notions développées dans les paragraphes précédents dans deux cas extrêmes :

1° le frottement intervient associé au comportement viscoplastique des solides. Dans ce cas, les contraintes quoique supérieures à la limite élastique vraie, restent faibles (et les vitesses de sollicitations sont basses).

2° la déformation plastique à grande vitesse où, au contraire, les vitesses de sollicitations sont élevées ($> 1000 \text{ s}^{-1}$) et où, par conséquent les vitesses imposées aux dislocations sont grandes, au moins au début de l'essai.

4.1. Viscoplasticité des solides et frottement intérieur

Si l'on applique une contrainte cyclique à un solide viscoplastique, on observe une dissipation d'énergie importante que l'on caractérise par le coefficient de frottement intérieur :

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\Delta W}{W} \quad (20)$$

où ΔW est l'énergie dissipée par cycle,

W est l'énergie élastique maximale mise en jeu.

Dans ce paragraphe, nous montrerons comment des mesures de coefficient de frottement intérieur peuvent permettre l'étude de la viscoplasticité. Nous nous limiterons au cas du déplacement conservatif des défauts linéaires.

4.1.1. QUELQUES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les observations expérimentales mettent souvent en évidence un frottement intérieur dépendant fortement de l'amplitude de la contrainte, mais ne présentant pas toujours la caractéristique principale du frottement intérieur associé au désancrage des dislocations : le passage par un maximum [14].

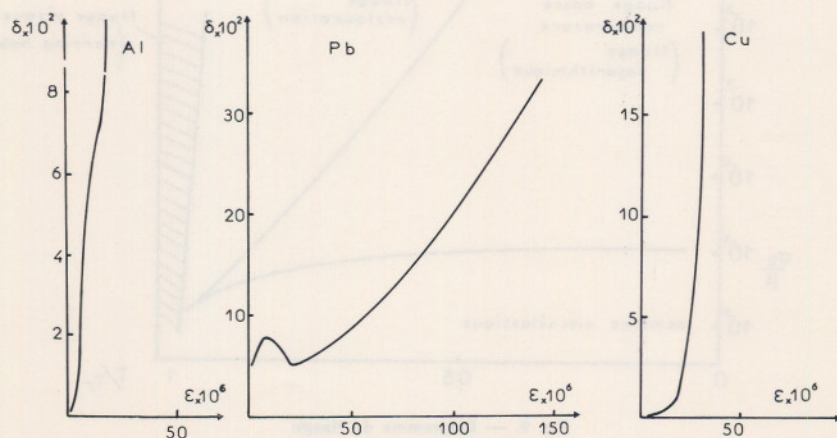


Fig. 10. — Frottement intérieur en fonction de l'amplitude de la déformation de mesure

Cette augmentation du frottement intérieur avec la contrainte ou la déformation est illustrée par les résultats réunis sur la *figure 10* et se rapportant à des métaux divers [15].

Ce type de dissipation d'énergie est bien relié à la déformation plastique, car il a été vérifié que les amplitudes de déformation de mesure dépassent la valeur critique ε_p à partir de laquelle on observe une déformation rémanente.

En outre, les courbes frottement intérieur — amplitude dépendent de la température de mesure : l'augmentation du frottement intérieur avec ε est d'autant plus rapide que la température est élevée, ce qui en accord avec l'hypothèse, d'une déformation thermiquement activée.

4.1.2. MODELES DE FROTTEMENT INTERIEUR

A ces valeurs relativement élevées de la déformation, la dissipation d'énergie peut se produire grâce à deux mécanismes :

a) si les sources de Frank et Read sont activées, il y a augmentation de la longueur de dislocation. Cela correspond à une absorption d'énergie qui se retrouve partiellement sous forme d'énergie de défaut. Ce mécanisme a été discuté par Mason [16] qui aboutit à un frottement intérieur augmentant linéairement avec la contrainte dans un domaine où apparaissent des phénomènes de fatigue.

On peut d'ailleurs vérifier que l'énergie calculée en considérant la longueur de dislocation Λ_1 créée pendant un cycle $\sigma - \varepsilon$ correspond pour une fraction non négligeable à l'énergie dissipée et mesurée au cours de ce cycle.*

$$\Delta W \text{ mesurée} \sim 6 \cdot 10^3 \text{ ergs}$$

$$\Delta W \text{ calculée} = \Lambda_1 \cdot \frac{1}{2} G b^2 = M \varepsilon_p \cdot \frac{1}{2} G b^2$$

$$\sim 1,3 \cdot 10^3 \text{ ergs}$$

ε_p = taux de déformation plastique

M = coefficient de multiplication des dislocations.
La valeur $8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2$ est communément admise pour l'aluminium.

b) lors du mouvement d'une dislocation, il y a dissipation d'énergie chaque fois que cette dislocation doit passer un obstacle situé dans le plan de glissement. Ce second mécanisme correspond au modèle développé d'abord par Friedel [17] et utilisé ensuite par Peguin et Al [18] pour interpréter le frottement intérieur dépendant de l'amplitude dans le cas de l'aluminium pur et bien recuit.

Les obstacles situés dans le plan de glissement peuvent être, comme nous l'avons vu (2.3.) très divers. Cependant le cas des matériaux bien recuits (densité de dislocations $\leq 10^6 \text{ cm/cm}^3$ avec un taux d'impuretés C_0 compris entre 10^{-6} et 10^{-4}), et sollicités autour de la température ambiante, l'essentiel de

ces obstacles est formé par les atomes d'impuretés que l'on suppose situés à l'un des autres (*fig. 1 a*). On peut alors utiliser l'expression (6) pour calculer le frottement intérieur dans l'hypothèse d'une contrainte de sollicitation carrée (un échelon de contrainte $\pm \tau_0$ pendant le temps $1/2 \nu$). La relation (20) s'écrit alors :

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\tau_0 \varepsilon_d}{\tau_0^2 / 2 G}$$

ε_d = déformation due au mouvement des dislo-

tions : $\varepsilon_d = \frac{\dot{\varepsilon}}{2 \nu}$, c'est-à-dire

$$\delta = \frac{G \dot{\varepsilon}}{2 \nu \tau_0}$$

et avec (6)

$$\delta = \frac{G \rho_D b^4 \nu_D}{2 C_0 l^2 \nu} \exp\left(-\frac{E_0}{k T}\right) \frac{1}{\tau_0} \text{sh}\left[\frac{(\tau_0 - \tau_i) \nu}{k T}\right] \quad (21)$$

La contrainte interne τ_i est due à la présence des défauts ponctuels en dehors du plan de glissement :

$$\tau_i \sim \frac{2 W_M C_0^{2/3}}{b^2}$$

— E_0 est de l'ordre de W_M (énergie d'interaction dislocation défaut ponctuel) dans le cas des solutions très diluées mais tend vers $\frac{1}{2} W_M$ pour des concentrations croissantes [17].

— l est obtenue en minimisant l'énergie de la dislocation :

l/b varie de $\left(\frac{G b^3}{2 W_M C_0^2}\right)^{1/3}$ dans le cas des solutions concentrées à $\left(\frac{2 G}{(\tau_0 - \tau_i) C_0}\right)^{1/3}$ dans le cas des solutions diluées.

Enfin, on peut évidemment comme l'a fait Peschold [19] envisager des obstacles qui seraient des arbres traversant le plan de glissement (fluage stationnaire d'un métal pur).

4.1.3. VISCOPLASTICITE DES SOLIDES ET FROTTEMENT INTERIEUR

Les deux paragraphes précédents nous ont montré :

— que le début de déformation plastique s'accompagne d'un frottement intérieur dépendant fortement de la contrainte (ce frottement intérieur est désigné par Δ_p [18])

— l'énergie mécanique absorbée à chaque cycle de contrainte est soit utilisée pour créer des dislocations (elle se retrouve alors sous forme d'énergie de ligne), soit dissipée lors du passage des obstacles par une dislocation en mouvement.

* Les valeurs numériques correspondent au cycle $\sigma - \varepsilon$ effectué sur un aluminium et présenté dans la référence [16].

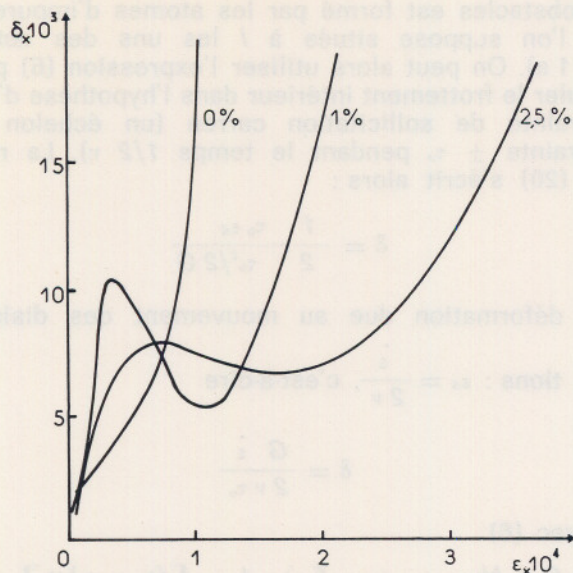


Fig. 11. — Courbes $\delta = g(\varepsilon)$ d'un alliage Al-Zn 3 % après écrouissage

Le deuxième type de modèle (Friedel, Peguin et al) implique un frottement intérieur dépendant de la fréquence et fortement de la température avec une énergie d'activation liée à l'énergie d'interaction entre dislocations mobiles et obstacles. Or, expérimentalement, la variation nette de Δ_p avec la fréquence n'a pas été observée. D'autre part, des études du Δ_p d'alliages dilués à base d'aluminium [20] entre 300 et 450° K, mettent bien en évidence un effet de l'activation thermique mais cet effet, peu important, ne semble pas lié de façon claire à la nature de l'élément dissous.

L'interprétation du Δ_p avec la simple hypothèse du passage thermiquement activé d'obstacles situés dans le plan de glissement des dislocations mobiles n'est donc vraisemblablement pas correcte ou en tout cas pas suffisante. On peut alors envisager des obstacles à longue distance, franchis de façon athermique et dont la nature est sans rapport avec l'espèce mise en solution solide. Il faut aussi considérer le premier type de modèle reposant sur l'activation des sources de Frank et Read. Dans ces conditions, il devient possible de discuter l'anomalie souvent observée sur les courbes frottement intérieur — amplitude de déformation (ou contrainte) et dont on peut voir un exemple sur la fig. 11 [19]. Cette anomalie traduit la présence de deux phénomènes conduisant à un frottement intérieur dépendant de l'amplitude et qui se superposent [18] :

a) le désancrage des dislocations à partir d'une contrainte évaluée à

$$\sigma_H \sim \frac{W_u}{b^2 L_c}$$

avec L_c longueur moyenne des arcs de dislocations entre points d'ancrage. Le solide présente alors un comportement viscoélastique ; le frottement intérieur, désigné par Δ_H , présente un maximum ($\Delta_H \sim 0,1 NL_N^3$) à une contrainte pour laquelle toutes les boucles sont désancrées.

b) l'activation des sources, ou du moins, le mouvement à grande distance des dislocations, qui apparaît à une contrainte : $\sigma_p \sim \frac{Gb}{L_N}$: le solide devient alors viscoplastique suivant l'un des mécanismes évoqués plus haut.

On peut dès lors comprendre les résultats de la figure 11 de la façon suivante :

— A l'état recuit, les défauts ponctuels sont en équilibre thermodynamique avec les dislocations, L_c est faible. Par contre, il y a peu de dislocations, mais avec des valeurs de L_N grandes. Ainsi $\sigma_p < \sigma_H$ et l'on observera que le frottement intérieur du type Δ_p car le désancrage des dislocations est obligatoirement suivi de l'activation des sources. Le solide est, dans ce cas, viscoplastique.

— Après un écrouissage faible, on modifie le réseau de dislocations : L_N diminue. De plus, les défauts ponctuels ne sont pas, immédiatement après écrouissage, en équilibre avec les dislocations : L_c est grand et l'on a cette fois $\sigma_H < \sigma_p$; on observe donc, d'abord un frottement intérieur de type Δ_H , avec un maximum bien apparent (voir courbe après écrouissage 1 %), puis le frottement intérieur Δ_p . Le solide est viscoélastique à basse contrainte, viscoplastique à contrainte élevée.

— Si l'on augmente le taux d'écrouissage, L_N est encore plus faible, σ_p augmente. Par contre, σ_H reste du même ordre. Toutefois le maximum de frottement intérieur Δ_H est moins élevé puisqu'il est de l'ordre de $0,1 NL_N^3$.*

La viscoplasticité apparaît donc à une contrainte plus élevée et à basse contrainte, le comportement viscoélastique devient moins important.

Bien entendu, pendant un maintien à la température ambiante après écrouissage, il y a retour à l'état d'équilibre des défauts ponctuels vers les dislocations et σ_H augmente.

Expérimentalement, on observe bien la disparition du comportement viscoélastique pendant le vieillissement après écrouissage.

En résumé, un solide cristallin viscoplastique sollicité par une contrainte cyclique suffisamment élevée présente un frottement intérieur fortement dépendant de l'amplitude. Il y a énergie dissipée dès que les sources de Frank et Read peuvent être activées ; cette énergie dissipée correspond, au moins pour une part, à l'énergie de défauts, mais aussi à l'énergie nécessaire pour mettre en mouvement les dislocations dans le réseau (franchissement des obstacles à courte et longue distance).

Enfin, rappelons pour terminer, qu'il existe d'autres exemples de frottement intérieur associé au comportement viscoplastique des solides : nous pouvons citer le frottement intérieur dû au mouvement des joints de grains, le frottement intérieur des

* En outre, le nombre de N de boucles augmente avec le taux d'écrouissage ; la distribution des longueurs de boucles est alors plus large ce qui pourrait expliquer l'élargissement du pic de frottement intérieur de la fig. 11.

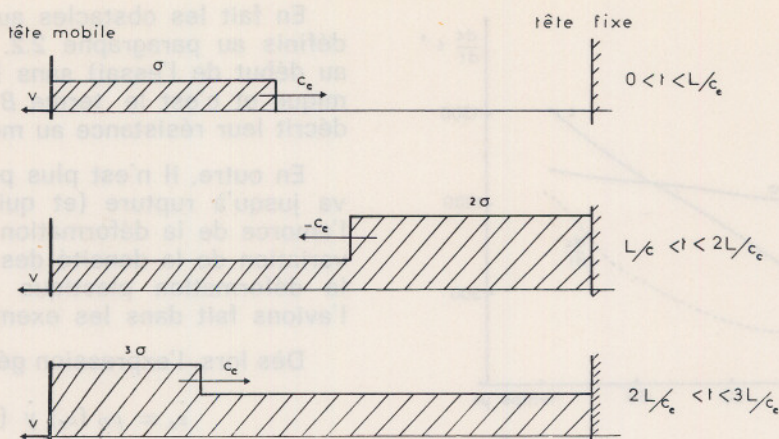


Fig. 12. — Répartition des contraintes le long d'une éprouvette de longueur L pendant la mise en charge élastique

métaux à haute température, et les phénomènes de dissipation d'énergie mis en œuvre lors du passage de la température de transition dans le cas des hauts polymères.

4.2. Essais de traction à grande vitesse

4.2.1. POSITION DU PROBLEME

Dans les essais de traction à grande vitesse, le temps d'application de la contrainte est de l'ordre de grandeur de la durée de propagation des ondes dans l'éprouvette. On ne peut donc pas admettre comme dans les essais classiques que la contrainte et la déformation sont homogènes pendant la traction.

Si l'on impose une déformation à vitesse v existante à l'extrémité mobile d'une éprouvette de longueur L grande devant son diamètre (ce qui permet de rester dans l'approximation unidimensionnelle), la contrainte associée au premier front d'ondes émis est $\sigma = \rho c_e v$ où c_e représente ici la vitesse de propagation des ondes élastiques et ρ la masse volumique du matériau.

Après un temps $\Delta t = \frac{L}{c_e}$ ($\Delta t \simeq 10 \mu s$ pour une éprouvette d'acier de 56 mm), l'onde de contrainte issue de la tête mobile est réfléchiée par le bâti de la machine et doublée (fig. 12). La contrainte qui est alors de 2σ , passé à 3σ au bout de $2\Delta t$, etc...

Si la limite élastique σ_e est atteinte après N réflexions, la mise en charge a duré $\frac{NL}{c_e}$ secondes.

Dans le cas des essais de traction classique, où la vitesse v imposée au mors mobile est faible ($N \gg 10^3$), l'éprouvette à un instant donné est soumise à une contrainte homogène* à mieux de 1 % près. Par contre, si la durée de mise en charge est de quelques μs , les écarts de contrainte pourront être de 50 % et aucune des sections de l'éprouvette

* Sauf phénomènes particuliers : bandes de Piobert-Lüders, striction...

ne sera représentative de l'ensemble de l'échantillon. Comme il est impossible d'obtenir en tout point l'évolution des variables d'état, l'interprétation des essais dynamiques nécessite l'analyse théorique des phénomènes de propagation des ondes élasto-plastiques.

4.2.2. LOI DE COMPORTEMENT MECANIQUE

Dans l'approximation unidimensionnelle, on peut écrire en l'absence de discontinuités, les équations qui relient σ la contrainte, ε la déformation relative, v la vitesse des particules à x de coordonnée de Lagrange et t le temps.

$$(a) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{équation de continuité})$$

$$(b) \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad \text{Théorème de la quantité de mouvement}$$

L'application du théorème de l'énergie dans l'hypothèse adiabatique introduisant une quatrième variable d'état (l'énergie interne par unité de masse). En fait, les conditions thermodynamiques des essais dynamiques n'étant pas connues avec précision, on préfère abandonner la 3ème équation de la mécanique pour la remplacer par une équation qui décrit le comportement mécanique moyen.

L'établissement et l'utilisation de cette loi du comportement mécanique constitue donc la clef du problème de la propagation des ondes plastiques. L'expression (22 c) proposée par Malvern [21] paraît la mieux adaptée dans le cadre d'une théorie visco-plastique :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g(\sigma, \varepsilon_p) \quad (22 c)$$

Le premier terme décrit le comportement élastique et le second un terme de fluage que l'on peut estimer à partir d'un modèle physique ; en fait :

$$g(\sigma, \varepsilon_p) \equiv \dot{\varepsilon}_p.$$

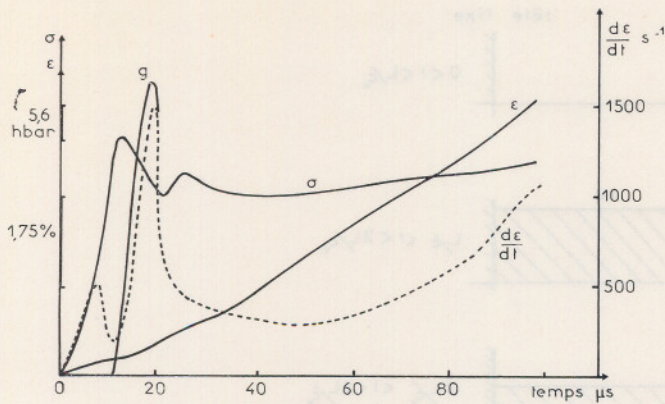


Fig. 13. — Evolution expérimentale des fonctions σ , ε , $\frac{d\varepsilon}{dt}$, avec le temps (acier ferritique à 17 % chrome recuit ; $\alpha = 50$ mm, $v = 20$ m/s)

Nous disposons donc du système 22 (a), (b), (c) qui ne possède pas de solutions analytiques, mais que l'on peut intégrer numériquement par la méthode des caractéristiques. On obtient ainsi en tout point de l'éprouvette et à chaque instant de l'essai σ , ε et v vitesse des particules [22], [23]. En particulier, on peut calculer ces valeurs dans la section d'encastrement et les comparer à celles enregistrées par des jauges de contraintes placées sur l'éprouvette elle-même (pour obtenir ε) et sur une barre dynamométrique reliant l'éprouvette au bâti de la machine (pour obtenir σ).

Nous avons représenté l'évolution expérimentale de ces valeurs en fonction du temps sur la figure 13.

L'interprétation de ces courbes nécessite l'établissement précis de $\dot{\varepsilon}_p = g(\sigma, \varepsilon)$. Compte tenu des vitesses d'impact $v \simeq 20$ ms⁻¹, la limite élastique statique est dépassée dans la section d'impact au moment du choc et l'expression (6) (paragraphe 2.3.) qui suppose une contrainte faible (juste supérieure à la contrainte interne τ_i) ne peut plus convenir.

En fait les obstacles au sens où nous les avons définis au paragraphe 2.2. sont franchis (au moins au début de l'essai) sans l'aide de l'activation thermique et c'est le terme B de l'expression (2) qui décrit leur résistance au mouvement.

En outre, il n'est plus possible dans un essai qui va jusqu'à rupture (et qui va en tout cas décrire l'amorce de la déformation plastique) de négliger la variation de la densité des dislocations au cours de la déformation plastique elle-même, comme nous l'avions fait dans les exemples précédents.

Dès lors, l'expression générale (5) s'écrit (5 bis) :

$$\dot{\varepsilon}_p = \rho_D(\varepsilon_p) \dot{\gamma}(\sigma, \varepsilon_p) \quad (5 \text{ bis})$$

où $\dot{\gamma}$ représente la vitesse moyenne de dislocations qui d'après (2) devrait s'écrire en tenant compte d'un terme d'écroissage (qui augmente les contraintes internes) H . ε_p :

$$\dot{\gamma} = \frac{(\sigma - H \varepsilon_p) b}{B} \quad (2 \text{ bis})$$

Cependant, au tout début de l'essai quand la densité des dislocations libres est faible et quand par conséquent la vitesse imposée à chacune d'elle est très élevée, il apparaît des effets relativistes associés à l'existence d'une vitesse limite v_∞ pour les dislocations [5], [24] et dont nous n'avons pas tenu compte dans l'expression (1) (2.1.). 2 bis s'écrit donc 2 ter.

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_\infty \exp \left[- \frac{D_\sigma + H \varepsilon_p}{\sigma} \right] \quad (2 \text{ ter})$$

Dès lors (5 bis) devient (5 ter)

$$\dot{\varepsilon}_p = \alpha \dot{\gamma}_\infty f(\rho_{D_0} + C \cdot \varepsilon_p^\beta) \exp \left[- \frac{D_\sigma + H \varepsilon_p}{\sigma} \right] \quad (5 \text{ ter})$$

où le terme $\rho_{D_0} + C \cdot \varepsilon_p^\beta$ représente l'évolution de la densité de dislocations avec l'écroissage, α a un coefficient d'orientation $\simeq 0,5$ et f un coefficient pris en général égal à 10^{-1} qui donne la densité de dislocations libres à partir de la densité totale.

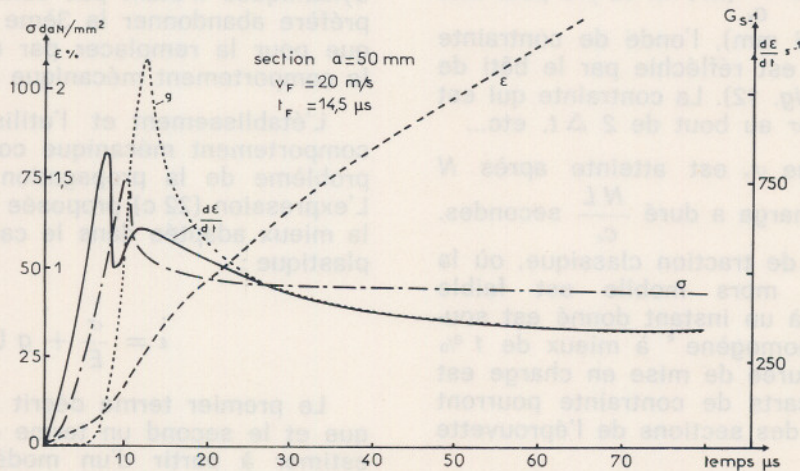


Fig. 14. — Evolutions théoriques des variables d'état - Acier à 17 % chrome recuit

Les nombreux paramètres apparaissant dans la formule 5 bis sont souvent difficiles à préciser. Botte [25] a choisi dans le cas d'un acier ferritique à 17 % de chrome recuit :

$$D\sigma = 3 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$H \simeq 3,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$$

$$C \simeq 3 \cdot 10^9 \text{ cm/cm}^3$$

$$\rho_{Do} = 1,85 \cdot 10^7 \text{ cm/cm}^3$$

$$\beta = 1$$

L'intégration du système 22 (a), (b), (c), compte tenu de (5 ter) avec les valeurs (23) donne la figure (14), relative à la section d'encastrement, sur laquelle on porte :

$$\sigma(t), \varepsilon(t), \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(t) \quad \text{et } g(t) \quad \text{(totale)}$$

On constate un accord raisonnable avec l'expérience (figure 13). En particulier :

1° Ce modèle conduit à l'existence d'un pic de contrainte élevé suivi d'une relaxation brutale, puis d'une consolidation lente induite par le terme H .

2° La déformation totale présente une accélération dans le domaine du pic de contrainte puis évolue ensuite sensiblement à vitesse constante.

4.2.3. LIMITE ELASTIQUE DYNAMIQUE

En fait l'examen soigneux de la figure (15) permet de préciser deux points :

1° La vitesse de déformation plastique $g(t)$ présente un maximum très élevé décalé par rapport au maximum de contrainte.

2° Au passage du pic de contrainte σ_p , la déformation plastique ne peut pas être considérée comme nulle puisque la fraction g n'y est pas nulle.

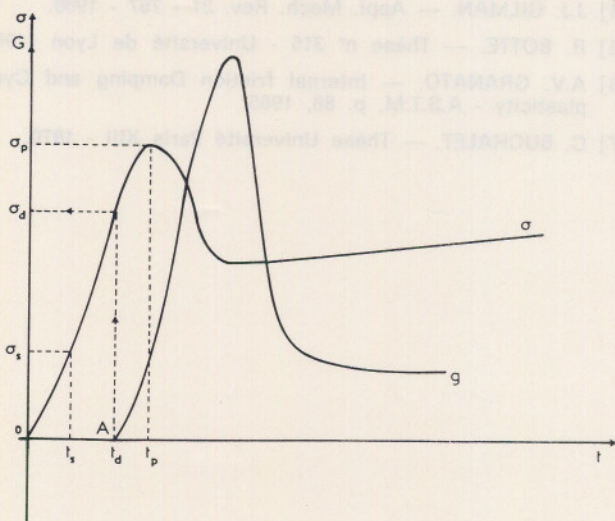


Fig. 15 - Schéma de la détermination de la limite élastique « dynamique »

La contrainte σ_p n'est donc pas la limite élastique dynamique comme on l'admet souvent. Cette limite dynamique σ_d est déterminée par l'apparition d'une valeur non nulle de g (fig. 15) que l'on peut obtenir expérimentalement à partir d'un dépouillement de diagrammes expérimentaux du type de la figure 13.

σ_d est donc inférieure à σ_p de 5 à 16 % et sa connaissance est intéressante car cette valeur qui peut être largement supérieure à la limite élastique statique ($> 2\sigma_s$), indique les conditions dans lesquelles on peut solliciter dynamiquement un matériau sans le déformer plastiquement. Il suffit pour cela de lui appliquer (à la vitesse choisie pour mesurer σ_d) une charge inférieure à σ_d pendant un temps inférieur à t_d .

4.2.4. POSSIBILITES D'AMELIORATION DE L'ANALYSE DES ESSAIS A GRANDE VITESSE

Malgré les résultats intéressants obtenus dans le cadre du modèle de Gilmann, il apparaît qu'une comparaison fine de la théorie et de l'expérience met en évidence une relaxation de la contrainte plus rapide et moins intense dans le modèle que sur les courbes expérimentales.

Il faut également souligner que la manifestation de l'écrouissage apparaît plus tardivement dans le modèle théorique que dans l'évolution expérimentale de la contrainte.

L'étude rapide des paragraphes précédents suggère diverses modifications de la fonction g :

1° Il n'est pas certain que l'effet relativiste intervienne réellement même dans les premiers instants pour les contraintes voisines de σ_p [26].

Dans ces conditions 2 (ter) peut être remplacé par 2 (bis) dont les paramètres sont mieux connus. Il est du reste possible d'améliorer cette expression, si pour les premiers instants où les vitesses sont les plus élevées, on tient compte du terme d'inertie signalé dans (1).

2° Dès que la densité de dislocations a suffisamment augmenté — après le pic de $g(t)$, qui correspond à une multiplication assez brutale — la vitesse des défauts linéaires devient faible et la contrainte appliquée assez basse pour que la coupure thermiquement activée des dislocations, décrite par une loi du type (6), fournisse un ralentissement supplémentaire et soit à l'origine d'un relèvement de la contrainte d'écoulement pendant l'écrouissage.

Il est probable que la prise en compte de ces deux remarques, alliée à un modèle plus correct de multiplication de défauts linéaires [27], permettrait un meilleur raccord entre l'expérience et la théorie et, par voie de conséquence, une meilleure prévision de caractéristiques dynamiques des solides métalliques.

CONCLUSION

La déformation viscoplastique des solides cristallins peut être, dans la plupart des cas, analysée en terme de déplacement de dislocations. En effet, le comportement visqueux de tels solides peut être dû, suivant le domaine des contraintes appliquées et des vitesses de déformation, soit, dans les cas extrêmes, à l'interaction dislocations-phonons (déformation à grande vitesse), soit, plus généralement, au franchissement thermiquement activé d'obstacles de nature et de « taille » diverses.

Une étude détaillée de la nature des obstacles sortirait du cadre de cet exposé et nous nous sommes limités à un classement suivant la « taille », c'est-à-dire, suivant la distance à laquelle la dislocation interagit sensiblement avec ces obstacles. Si la largeur de l'obstacle est de l'ordre de la distance interatomique, il peut être franchi par un déplacement conservatif thermiquement activé du défaut linéaire : c'est le domaine des essais de traction à basse température, du frottement intérieur du type Δp et du fluage logarithmique (domaine I ; fig. 3). Si la taille de l'obstacle augmente, il ne peut être franchi sous contrainte faible que par un déplacement non conservatif des défauts linéaires qui n'intervient qu'à température suffisamment élevée : c'est le domaine du fluage restauration (domaine II, fig. 3).

Bien entendu, les obstacles « larges » peuvent aussi être franchis sans activation thermique mais sous contrainte élevée : leur franchissement est alors de nature hystérétique et conduit à des caractéristiques du solide indépendantes de la température. En outre, des phénomènes athermiques peuvent également se superposer à certains comportements viscoplastiques : c'est le cas de l'activation des sources de Frank et Read lors de la mesure du frottement intérieur de type Δp .

Cette simple énumération des cas possibles montre les difficultés d'un classement strict, d'une distinction nette entre phénomène hystérétique et viscoplasticité (par suite de la distribution de « taille » d'obstacles) et de compréhension des valeurs expérimentales d'énergie d'activation apparente.

Dans ces conditions, il est nécessaire en choisissant la procédure expérimentale (température, niveau des contraintes, vitesse de sollicitation...) de favoriser l'une ou l'autre de ces manifestations.

REFERENCES

- [1] H. CONRAD. — J. of metals — July 1964 — p. 582.
- [2] P.F. GOBIN, J.F. DELORME, J. PEREZ. — Journées du G.A.M.I. 1971 (à paraître).
- [3] Y. ADDA, J. PHILIBERT, J.P. POIRIER. — Déformation plastique des métaux et alliages — Masson et Cie (1968) - p. 161.
- [4] F. GAROFALO. — Déformation et rupture par fluage - Dunod (Paris) 1968.
- [5] J. FRIEDEL. — Dislocations - Pergamon Press Oxford (1964).
- [6] R.W. CAHN. — Physical Metallurgy - North-Holland - Amsterdam (1970).
- [7] O.D. SHERBY, J.L. LYTTON and J.E. DORN. — Act. Met. 1957 - 5 - 219.
- [8] J. WEERTMAN et J.R. WEERTMAN dans Physical Metallurgy p. 1003 - North-Holland Amsterdam (1970).
- [9] W.D. NIX et C.R. BARRETT. — Act. Met. 1965 - 13 - 1247.
- [10] P.B. HIRSCH et D.H. WARRINGTON. - Phil. Mag. - 1961 - 6 - 735.
- [11] G.B. GIBBS-Phil. Mag. 13 - 317 - 1966.
- [12] J.C. LI. — Act. Met. 11 - 1269 - 1963.
- [13] N.S. AKUBOV. — Act. Met. - 12, 1195 - 1964.
- [14] J. PEREZ, P. PEGUIN, G. FANTOZZI et P.F. GOBIN. — Ann. Phys. 1970 - 5 - 303.
- [15] P. PEGUIN. — Thèse - Lyon 1966.
- [16] P. MASON. — « Resonance and relaxation in metals » - 1964 - Plenum Press - New York.
- [17] J. FRIEDEL. — Conf. Teddington Middlesex - 1963.
- [18] P. PEGUIN, J. PEREZ et P.F. GOBIN. — Trans. AIME - 239 - 438 - 1967.
- [19] P. PEGUIN, J. PEREZ et P.F. GOBIN. — Phys. St. Sol. 15 - 553 - 1966.
- [20] P. GAILLOT. — Diplôme fin d'études - Phys. Mat. I.N.S.A. 1969.
- [21] L.E. MALVERN. — J. of Appl. Mech. 18 - 203 - 1951.
- [22] R. BOTTE, D. ROUSSEAU, P. PEGUIN, P.F. GOBIN. — Brit. J.; Appl. Phys. 18 - 663-1967.
- [23] R. BOTTE, D. ROUSSEAU, P.F. GOBIN. — Brit. J. Phys. D2 - 1235 - 1969.
- [24] J.J. GILMAN. — Appl. Mech. Rev. 21 - 767 - 1968.
- [25] R. BOTTE. — Thèse n° 315 - Université de Lyon (1969).
- [26] A.V. GRANATO. — Internal friction Damping and Cyclic plasticity - A.S.T.M. p. 88, 1965.
- [27] C. BUCHALET. — Thèse Université Paris XIII - 1970.

Modèle phénoménologique unidimensionnel pour l'étude du comportement viscoplastique du polycristal en grandes déformations *

par J. ZARKA

Chargé de recherches au C.N.R.S.
Laboratoire de Mécanique des Solides
de l'Ecole Polytechnique — Paris 5°

RESUME

Un modèle phénoménologique permet d'interpréter presque tous les phénomènes viscoplastiques connus :

- ...courbes (σ , ε) à vitesse de déformation constante ;
- ...existence (éventuelle) d'une limite supérieure, d'une limite inférieure et d'un plateau ;
- ...fluage et relaxation (y compris les effets transitoires comme l'hésitation) ;
- ...loi de Norton-Hoff pour le fluage stationnaire.

SUMMARY

A phenomenological model allows to interpret almost any known viscoplastic phenomena :

- ...curves (σ , ε) at constant strain rate ;
- ...upper yield limit (eventually) ;
- ...creep and relaxation (also transitory effects such as delay time) ;
- ...Norton-Hoff's creep law.

1. INTRODUCTION

Les Mécaniciens du Solide ont, pendant très longtemps, cru en l'existence d'une relation unique entre la contrainte et la déformation, $\sigma = f(\varepsilon)$, indépendante des vitesses de chargement (élastoplasticité classique).

Au début, cette relation était obtenue expérimentalement en augmentant progressivement la

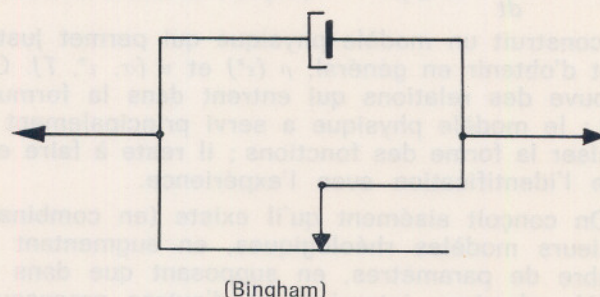
contrainte sur l'éprouvette et en attendant quelques minutes la « stabilisation » de la déformation. Ensuite, on a supposé conventionnellement que la courbe recherchée correspondait à des vitesses moyennes de déformation de l'ordre de $10^{-5}/s$ à $10^{-3}/s$ (pour cette gamme on observe, en effet, assez peu de variations sur les courbes).

Actuellement, avec le perfectionnement des machines d'essai et des appareils de mesure, cette notion de courbe-relation unique est de plus en plus repoussée (élastovisco-plasticité). Il y a d'importants écarts entre les courbes expérimentales lorsque les vitesses sont comprises entre $10^{-7}/s$ et $10^{-3}/s$. Ces écarts sont encore plus accentués lors d'expériences dynamiques (chocs : $10/s$ à $10^4/s$) ou très lentes (fluage et relaxation : $10^{-11}/s$ à $10^{-8}/s$).

Afin de représenter le comportement viscoplastique unidimensionnel des métaux, de nombreux modèles simples et satisfaisants pour quelques cas particuliers de chargement ont été proposés :

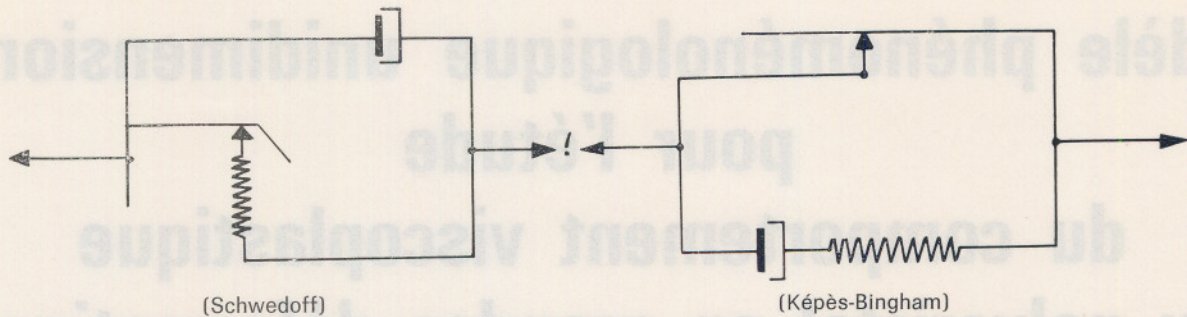
— *Modèles rhéologiques classiques :*

a) élémentaires, comme par exemple le modèle de Bingham :



* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

b) plus compliqués, comme par exemple les modèles de Schwedoff ou de Képès-Bingham :



— Modèles phénoménologiques :

On admet l'existence d'une « courbe statique » $\sigma_s = F_s(\varepsilon^p)$ et d'une « courbe dynamique » $\sigma_D = F_D(\varepsilon^p)$ qui correspondent à $\frac{d\varepsilon}{dt} \simeq 0$ et $\frac{d\varepsilon}{dt} \simeq \infty$; les vitesses intermédiaires sont obtenues par :

$$(1.1) \quad \frac{d\varepsilon^p}{dt} = g(\sigma, \varepsilon^p) \frac{d\sigma}{dt} + f(\sigma, \varepsilon^p)$$

(Cristescu-Lubliner)

où ε^p est la déformation plastique prise comme paramètre caractérisant l'écrouissage du matériau ; $(\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ avec $\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$ = déformation élastique, et E est le module d'Young).

$\frac{d\varepsilon^p}{dt}$ n'est différent de zéro que si $\sigma \geq \sigma_s = r$ $F_s(\varepsilon^p)$; F_s , F_p , g et f doivent être déterminés expérimentalement.

De telles relations ne sont pas très commodes : ε^p se rapporte à un état de référence, comment faut-il le choisir ? elles ne permettent pas de rendre compte du fluage stationnaire ou de l'hésitation au fluage ; enfin, l'identification avec les courbes expérimentales suppose que l'on a pris a priori une certaine forme pour les fonctions F_s , F_p , f et g ; quelle forme faut-il leur donner ?

— Modèles quasi physiques fondés sur le comportement des dislocations.

Si b est le module du vecteur de Burgers des dislocations, ρ la densité de dislocations mobiles par unité de surface et v leur vitesse moyenne, la vitesse de déformation plastique est :

$$(1.2) \quad \frac{d\varepsilon^p}{dt} = b \rho v \quad (\text{Taylor, Orowan, Gilman...})$$

On construit un modèle physique qui permet justement d'obtenir en général, $\rho(\varepsilon^p)$ et $v(\sigma, \varepsilon^p, T)$. On retrouve des relations qui entrent dans la formule (1.1) ; le modèle physique a servi principalement à préciser la forme des fonctions ; il reste à faire ensuite l'identification avec l'expérience.

On conçoit aisément qu'il existe (en combinant plusieurs modèles rhéologiques, en augmentant le nombre de paramètres, en supposant que dans le modèle physique interviennent d'autres processus) de nombreuses façons de retrouver une relation fonctionnelle entre la contrainte et la déformation

compatible avec les cas de chargement particuliers que l'on a considérés. (Voir par exemple, l'étude bibliographique effectuée par R. Sutterlin (1971) ou le modèle de R. Mazet (1970)).

Nous désirons quant à nous, proposer à votre intention un modèle très simple qui permet d'interpréter presque tous les phénomènes viscoplastiques des métaux connus :

- Eventail des différentes courbes à vitesse de déformation et à température constantes.
- Signification de la courbe statique.
- Existence (éventuelle) d'une limite supérieure, d'une limite inférieure et d'un plateau.
- Fluage et relaxation (y compris les effets transitoires comme l'hésitation).
- Signification de certaines relations comme la loi de Norton-Hoff pour le fluage stationnaire.

Dans ce texte, nous supposons, pour simplifier que la température (lors de chaque expérience) est maintenue constante et que la vitesse de chargement est inférieure à 10^{-2} /s (chargement quasi-statique).

— Dans une première partie, nous présenterons en bloc phénoménologiquement, les relations de comportement obtenues par notre modèle en n'indiquant que qualitativement comment il a pu être construit sur des bases physiques.

— Dans une deuxième partie, nous vérifierons que ce modèle interprète bien les phénomènes viscoplastiques imposés.

2. MODELE PHENOMENOLOGIQUE UNIDIMENSIONNEL VISCOPLASTIQUE (grandes déformations)

2.1. Description qualitative du modèle

Nous savons que le métal utilisé comme matériau des structures est un agrégat complexe de cristaux (ou grains) de nature, de forme, d'orientation et d'état interne différents. Nous savons aussi que les déformations plastiques résultent des déplacements de certains défauts (principalement les dislocations) dans les grains, ces déplacements qui sont gênés par les autres défauts ne se produisent que lorsque la contrainte dépasse le seuil limite d'élasticité ; ces déplacements sont aussi gênés par les autres grains en raison de l'incompatibilité des déformations plastiques qui y sont induites.

Lorsque les déformations sont très petites (inférieures à quelques fois la déformation limite élastique), un modèle statistique prenant en compte directement les différentes réponses et les interactions des cristaux peut être établi (A. Zaoui - 1970). Les propriétés « intercrystallines » sont alors prépondérantes.

Pour des déformations beaucoup plus importantes, l'approche ne peut être que phénoménologique (J. Zarka - 1968). En effet, un état de contrainte simple uniaxial à l'échelle macroscopique provoque à l'échelle microscopique (en raison des contraintes internes) un état de contrainte complexe et les déplacements des défauts dans de nombreux plans différents, les grains n'ont plus une distribution statistique uniforme de leur orientation (le polycristal prend une certaine texture)... Les calculs explicites deviennent ainsi inextricables. Les propriétés « intracrystallines » sont alors prépondérantes.

Globalement, pour un métal de type cubique à faces centrées, à des températures moyennes pour lesquelles nous pouvons négliger la montée des dislocations, nous pouvons dire que :

a) certaines dislocations « vis » vont se déplacer par glissement dévié pour prendre des positions plus stables ou s'annihiler avec d'autres dislocations. Cela relâche les contraintes internes et nous avons un « radoucissement ». Les glissements déviés se produisent lorsque la contrainte appliquée dépasse un certain seuil moyen macroscopique σ_1 ; ils n'entraînent que des déformations à des vitesses très faibles (généralement inférieures à $10^{-5}/s$).

b) certaines dislocations vont agir comme source de Frank-Read et donner naissance à de nombreuses autres dislocations. Cela provoque une augmentation des contraintes internes donc un « durcissement ». Lors de leur création, les boucles de dislocations ont dû s'épanouir sur une grande surface et franchir d'autres dislocations par glissement simple. De tels déplacements ne se produisent qu'à partir d'un seuil σ_2 (σ_2 est supérieur ou égal à σ_1 , puisqu'il faut exercer en plus de σ_1 des efforts supplémentaires pour permettre le franchissement des dislocations). Les vitesses de déformations qu'ils entraînent sont, en général, importantes.

Les propriétés viscoplastiques sont principalement les manifestations simultanées de cet effet

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon^p}{dt} = F(S, X) = C_2 X^{\beta+1} (\lambda S - X) \\ \frac{dX}{dt} = G(S, X) = C_1 (\lambda S - X) X \end{cases} \quad (\text{effet de radoucissement})$$

c) si $S \geq S_2$: c'est le domaine de la création des dislocations et nous avons :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon^p}{dt} = F(S, X) = \{ C_1 (S - X) + C_2 X^\beta (\lambda S - X) \} X \\ \frac{dX}{dt} = G(S, X) = \{ C_3 \overset{\uparrow}{X^{-\alpha}} (S - X) - C_1 (\lambda S - X) \} X \end{cases}$$

(effet de durcissement) (effet de radoucissement)

de durcissement et de cet effet de radoucissement. Pour quelques vitesses de déformation, l'un d'eux pourra, pendant un certain temps, l'emporter sur l'autre ; il y aura cependant toujours un équilibre entre ces deux effets.

2.2. Relations de comportement proposées

2.2.1. HYPOTHESES FONDAMENTALES

Nous supposons que :

a) un seul paramètre X , lié à la distribution des dislocations dans le polycristal, suffit à caractériser l'état du matériau ; X est pris sans dimension ;

b) les seuils σ_1 et σ_2 sont directement proportionnels à X ;

c) la vitesse de déformation viscoplastique est une fonction de la valeur actuelle de la contrainte appliquée σ et du paramètre d'état X ;

d) la variation du paramètre d'état X est, elle aussi, une fonction de σ et de X .

En posant $S = \varepsilon^* = \sigma/E$, $S_1 = \sigma_1/E$ et $S_2 = \sigma_2/E$, ces différentes hypothèses sont exprimées sous la forme :

$$(2.1) \quad \begin{cases} S_1 = X/\lambda & (\text{avec } \lambda \geq 1) \\ S_2 = X \\ \frac{d\varepsilon^p}{dt} = F(S, X) \\ \frac{dX}{dt} = G(S, X) \end{cases}$$

Nous allons expliciter F et G en distinguant deux gammes des vitesses de déformation.

2.2.2. PREMIERE GAMME DES VITESSES

$$10^{-11}/s \leq \frac{d\varepsilon}{dt} \leq 10^{-5}/s$$

Dans cette gamme l'effet de radoucissement intervient dès le début des déformations plastiques :

a) si $S \leq S_1$: c'est le domaine élastique et nous avons $F = G = 0$

b) si $S_1 \leq S \leq S_2$: c'est le domaine du glissement dévié et nous avons :

Nous pouvons encore écrire l'ensemble de ces relations sous la forme :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon^p}{dt} = \{ C_1 < S - X > + C_2 X^\beta < \lambda S - X > \} X \\ \frac{dX}{dt} = \{ C_3 X^{-\alpha} < S - X > - C_4 < \lambda S - X > \} X \end{cases}$$

avec la convention : $< y > = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ y & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$

C_1, C_2, C_3, C_4 , sont des fonctions de la température et ont pour dimension l'inverse du temps. α, β, λ peuvent dépendre (éventuellement) de la température, ils sont sans dimension. Il y a donc dans ce modèle, lorsque la température est fixée, sept constantes à déterminer expérimentalement. Une étude physique plus précise, nous permet de donner leur ordre de grandeur.

$$1 \leq \lambda \leq 2$$

Pour $T \simeq 20^\circ \text{C}$,

$$10^{+3}/s \leq C_1 \leq 10^8/s; \quad 10^{-2}/s \leq C_2 X^\beta \leq 10^3/s$$

$$1 \leq C_1 X^\alpha / C_3 \leq 150; \quad 1 \leq C_2 X^\beta / C_4 \leq 100$$

2.2.3. DEUXIEME GAMME DES VITESSES :

$$10^{-5}/s \leq \frac{d\varepsilon}{dt} \leq 10^{-2}/s$$

L'effet de radoucissement n'aura une influence que lorsque les déformations plastiques seront très importantes (supérieures à plusieurs pour cents). Au début, il peut être négligé, nous avons seulement :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon^p}{dt} \simeq \frac{C_1}{C_5} X^2 Sh \left\{ \frac{C_5 < S - X >}{X} \right\} \\ \frac{dX}{dt} \simeq \frac{C_3}{C_5} X^{-\alpha+2} Sh \left\{ \frac{C_5 < S - X >}{X} \right\} \end{cases}$$

C_5 est aussi une fonction de la température.

Remarque :

La distinction entre les deux gammes des vitesses, que nous avons faite, ne représente que la limite de validité du développement au premier ordre d'un sinus hyperbolique.

3. COURBES OBTENUES A VITESSE DE DEFORMATION CONSTANCE

Désignons par C la vitesse de déformation imposée, nous devons intégrer le système.

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^e}{dt} + \frac{d\varepsilon^p}{dt} = C = \frac{dS}{dt} + F(S, X) \\ \frac{dX}{dt} = G(S, X) \end{cases}$$

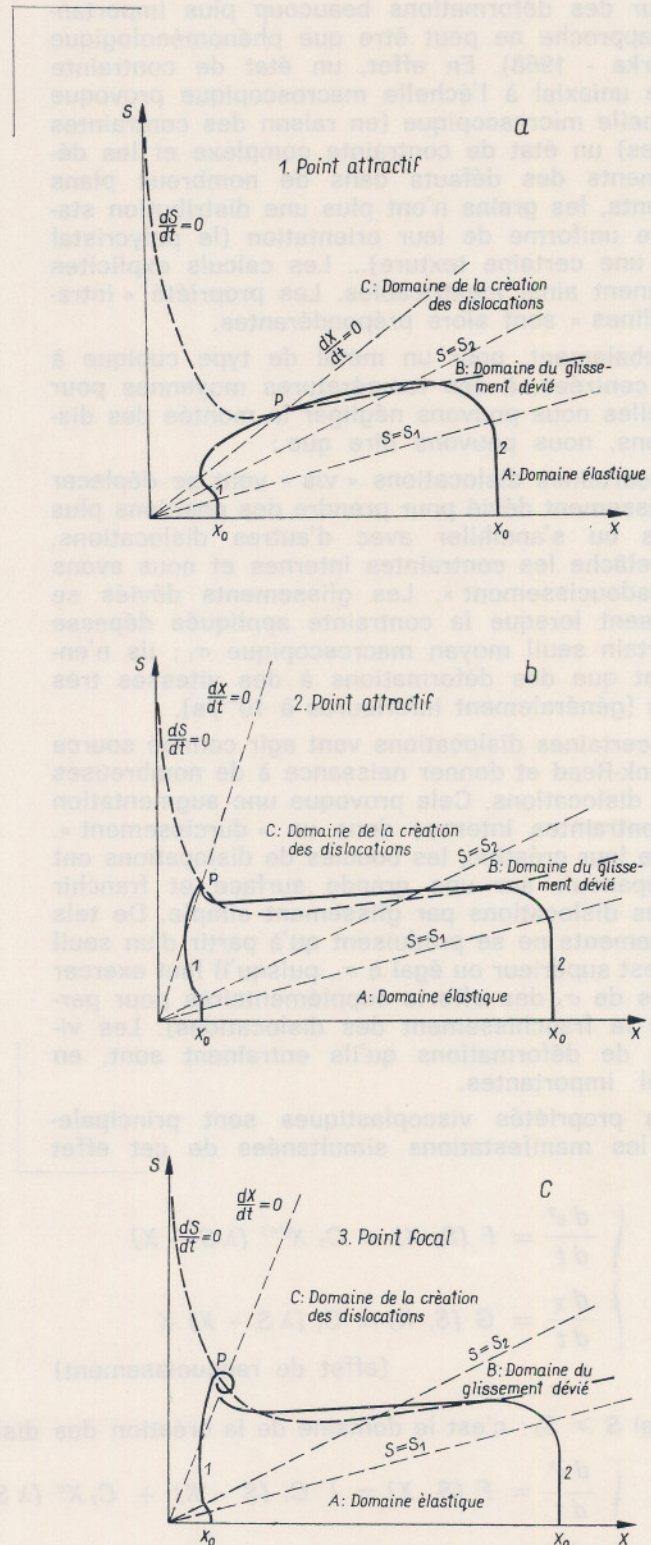


Fig. 1

ou encore :

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\varepsilon} = 1 - \frac{1}{C} F(S, X) \\ \frac{dX}{d\varepsilon} = \frac{1}{C} G(S, X) \end{cases}$$

avec pour $t = 0$ (ou $\varepsilon = 0$) :

$$X(0) = X_0 \text{ et } S(0) = 0 \left(\text{ou } \frac{X_0}{\lambda} \right)$$

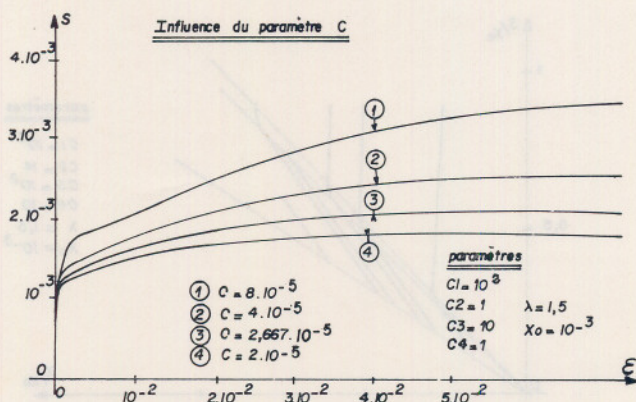
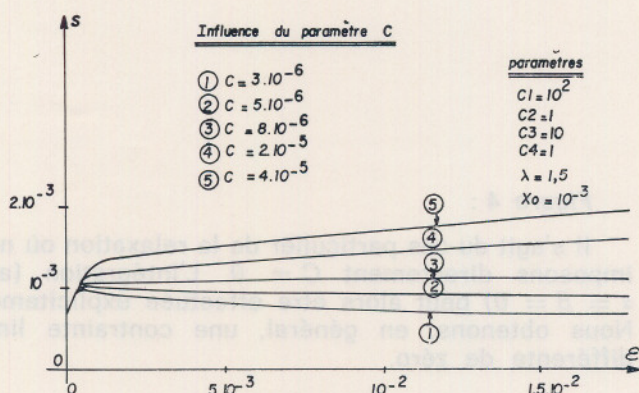
Comme nous voulons principalement indiquer l'aspect qualitatif du modèle nous supposons $\alpha = \beta = 0$.

3.1. Première gamme des vitesses

Malgré notre simplification ($\alpha = \beta = 0$) l'intégration du système (3.1) ne peut être que numérique. Mais nous pouvons en faire rapidement une étude géométrique (fig. 1). Le système possède toujours un point critique stable P (car C_3 est toujours supérieur à λC_1 et λ est supérieur ou égal à 1),

$$(3.2) \quad S_p = \sqrt{\frac{C(C_3 - C_1)^2}{(\lambda - 1)(C_3 - \lambda C_1)(C_1 C_4 + C_2 C_3)}};$$

$$X_p = \sqrt{\frac{(C_3 - \lambda C_1)C}{(\lambda - 1)(C_1 C_4 + C_2 C_3)}}$$



pour lequel : $\frac{dS}{dt} = \frac{dX}{dt} = 0$

Ce point est soit attractif, soit focal selon le signe de la quantité :

$$(3.3) \quad A' = \frac{(C_3 - C_1 + C_1 + \lambda C_2)^2}{(\lambda - 1)(C_1 C_4 + C_2 C_3)} - 8$$

(Il est attractif lorsque $A' > 0$).

Figures 2 :

Nous étudions l'influence des vitesses de déformation lorsque le point P est attractif. Nous devons remarquer que :

a) lorsque les vitesses C sont très faibles, la contrainte après avoir augmenté, diminue. Si l'on choisissait des vitesses C toujours plus faibles, la contrainte tendrait vers 0. (Le modèle n'est pas valable pour des vitesses inférieures à $10^{-11}/s$, de nombreux processus que nous avons négligés interviennent). Néanmoins, nous avons pu observer expérimentalement sur de l'aluminium pur, pour C de l'ordre de $10^{-7}/s$ et à une température proche de $40^\circ C$ un tel effet ;

b) pour des vitesses moyennes, pendant des déformations de quelques pour cents, nous obtenons un écrouissage de type linéaire ;

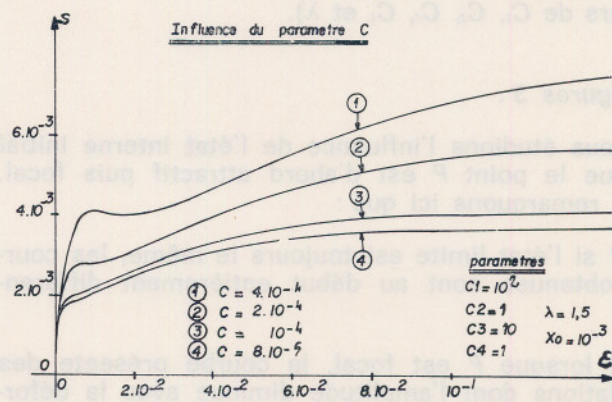
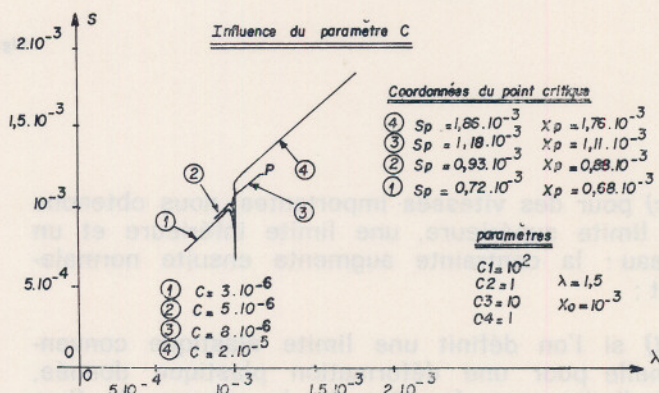


Fig. 2

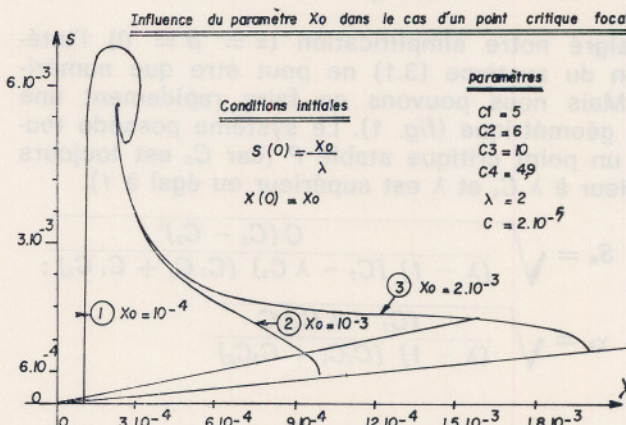
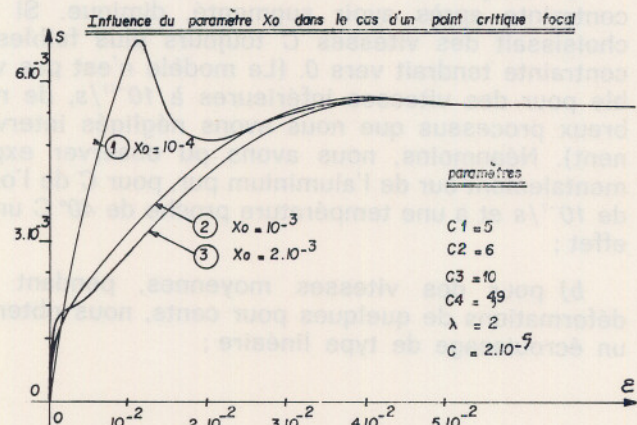
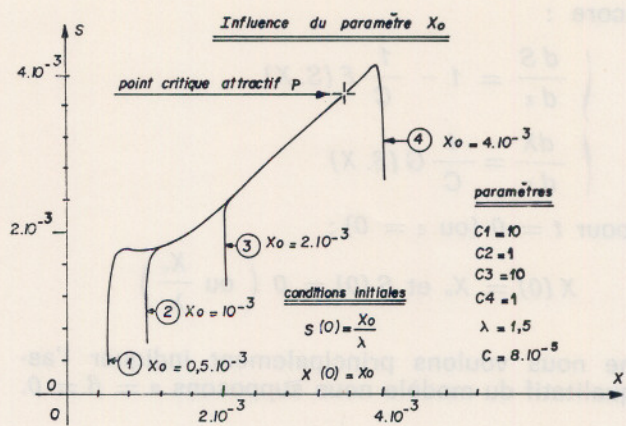
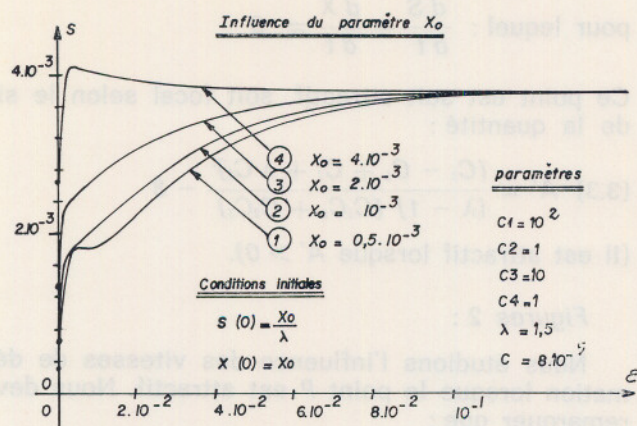


Fig. 3

c) pour des vitesses importantes, nous obtenons une limite supérieure, une limite inférieure et un plateau: la contrainte augmente ensuite normalement;

d) si l'on définit une limite élastique conventionnelle pour une déformation plastique donnée, cette limite sera fonction de la vitesse C . (Les vitesses C sont qualifiées ici d'une certaine grandeur pour un certain état interne X_0 et pour des valeurs de C_1, C_2, C_3, C_4 et λ).

Figures 3 :

Nous étudions l'influence de l'état interne initial lorsque le point P est d'abord attractif puis focal. Nous remarquons ici que :

a) si l'état limite est toujours le même, les courbes obtenues sont au début entièrement différentes ;

b) lorsque P est focal, la courbe présente des ondulations dont l'amplitude diminue avec la déformation. Cet effet a pu être observé par quelques auteurs (B. Jaoul — 1965).

Figure 4 :

Il s'agit du cas particulier de la relaxation où nous imposons directement $C = 0$. L'intégration (avec $\alpha = \beta = 0$) peut alors être effectuée explicitement. Nous obtenons, en général, une contrainte limite différente de zéro.

Etude de la relaxation $C = 0$

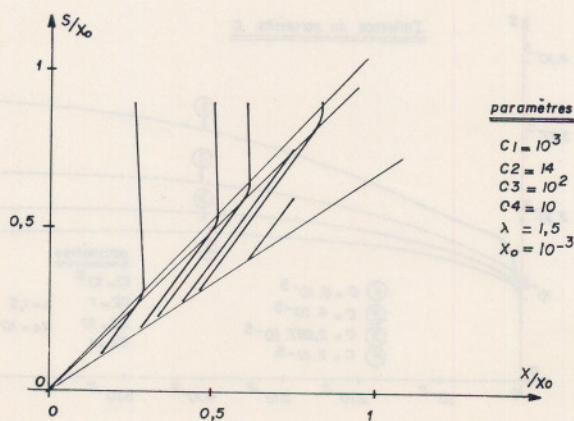


Fig. 4

3.2. Deuxième gamme des vitesses

Des relations (2.5) (lorsque $\alpha = 0$) nous déduisons :

$$(3.4) \quad \frac{d\varepsilon^p}{dt} = \frac{C_1}{C_3} \cdot \frac{dX}{dt}$$

soit :

$$\varepsilon^p = \frac{C_1}{C_3} < X - X_0 > \text{ (si } \varepsilon^p(0) = 0 \text{)}$$

Le paramètre d'état X est proportionnel à la déformation plastique qui peut alors être prise comme paramètre d'écrouissage. Nous avons l'intégrale première :

$$(3.5) \quad S = t - \frac{C_1}{C_3} < X - X_0 > = \varepsilon - \frac{C_1}{C_3} < X - X_0 >$$

Figures 5 :

L'intégration numérique montre que toutes les courbes tendent vers la courbe :

$$(3.8) \quad S \simeq \varepsilon - \frac{C_1}{C_3} < S - S_0 >$$

avec $S_0 = X_0$.

Pour certaines valeurs de C_3 et de C nous n'observons que cette courbe limite. Il s'agit de la courbe « statique » obtenue dans les expériences classiques. Lorsque α est différent de zéro, nous avons de façon analogue :

$$(4.1) \quad X \left\{ 1 + \frac{X_0}{(\lambda S_0 - X_0)} \exp. \{ - C_1 \lambda S_0 t \} \right\} = \frac{\lambda S_0 X_0}{(\lambda S_0 - X_0)} \exp. \{ - C_1 \lambda S_0 t \}$$

X décroît au cours du temps, il y a radoucissement. Cette équation reste valable tant que $S_0 \geq X$, c'est-à-dire jusqu'au temps θ pour lequel nous avons $X(\theta) = S_0$. C'est le « temps d'incubation ».

$$(4.2) \quad \theta = - \frac{1}{(C_1 \lambda S_0)} \text{Log} \frac{1}{(\lambda - 1)} \frac{(\lambda S_0 - X_0)}{X_0}$$

$$(3.7) \quad S \simeq \varepsilon - \frac{C_1}{C_3} \frac{1}{(1 + \alpha)} < S^{1+\alpha} - S_0^{1+\alpha} >$$

C'est un écrouissage de type parabolique. (La détermination expérimentale de α est par conséquent très facile à partir de la courbe « statique »).

Nous remercions M. Deat, ingénieur au département d'Informatique du C.E.N. de Saclay pour l'aide qu'il nous a apportée à la résolution du système d'équations différentielles sur un ordinateur analogique E.A.I. PACE 231 R.

4. ETUDE DU FLUAGE

4.1. Courbes obtenues lors du fluage

La contrainte est supposée constante $S = S_0$. Il faut intégrer (2.4) avec pour $t = 0$ $X(0) = X_0$ et $\varepsilon^p(0) = 0$.

Selon les valeurs de S_0 , différentes courbes peuvent être obtenues :

a) si $S_0 < \frac{X_0}{\lambda}$, il n'y a pas de fluage $\varepsilon^p = 0$

b) si $\frac{X_0}{\lambda} \leq S_0 \leq X_0$

c'est le domaine du glissement dévié ; l'intégration immédiate de la deuxième équation conduit à :

La déformation plastique est donnée dans ce domaine par :

$$(4.3) \quad \varepsilon^p = \frac{C_2}{C_1 (1 + \beta)} (X_0^{1+\beta} - X^{1+\beta})$$

La vitesse de déformation $\frac{d\varepsilon^p}{dt}$ est très faible.

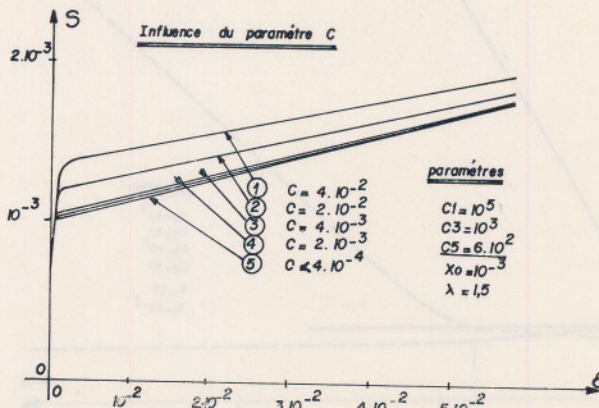
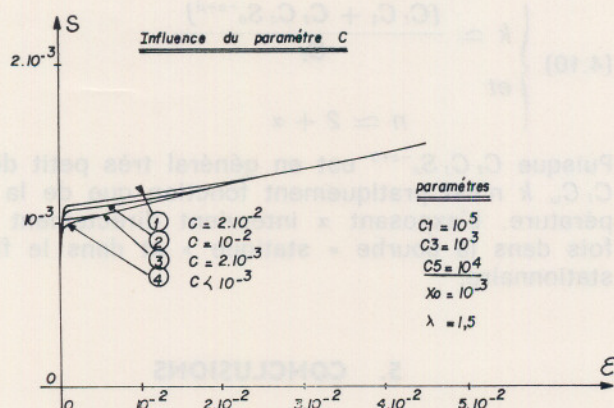


Fig. 5

c) Si $S_o \geq X_o$.

C'est le domaine de la création des dislocations ; lorsque $\alpha = \beta = 0$, l'intégration peut être effectuée explicitement. Nous avons :

$$(4.4) \quad \frac{X}{(C_3 - \lambda C_4) S_o - (C_3 - \tilde{C}_4) X} = \frac{X_o}{(C_3 - \lambda C_4) S_o - (C_3 - C_4) X_o} \exp. \{ (C_3 - \lambda C_4) S_o t \}$$

et :

$$(4.5) \quad \varepsilon^p = \frac{(C_1 + C_2)}{(C_3 - C_4)} (X - X_o) - \frac{(C_2 C_3 + C_1 C_4)}{(C_3 - C_4)^2} (\lambda - 1) S_o \left\{ \text{Log} \frac{X}{X_o} - (C_3 - \lambda C_4) S_o t \right\}$$

Le fluage obtenu tend vers un fluage stationnaire établi pour lequel :

$$(4.6) \quad \begin{cases} X = X_1(S_o) = \frac{C_3 - \lambda C_4}{C_3 - C_4} S_o \\ \text{et} \\ \frac{d\varepsilon^p}{dt} = \frac{(C_2 C_3 + C_1 C_4) (\lambda - 1) (C_3 - \lambda C_4)}{(C_3 - C_4)^2} S_o^2 \end{cases}$$

La vitesse limite ($\alpha = \beta = 0$) est proportionnelle au carré de la contrainte.

Figure 6 :

Nous avons tracé ε^p et X en fonction du temps pour deux valeurs de la contrainte S_o : $S_o = 0,833 X_o$ et $S_o = 1,1 X_o$.

Remarques :

1. Le modèle proposé ne rend pas compte du fluage limité. Ce fluage est en effet lié au fait que, lorsque les déformations sont très petites, les déformations plastiques des différents grains restent contenues (voir A. Zaoui — 1970).

2. Il rend compte, cependant, correctement de l'hésitation au fluage. Lorsque la contrainte appliquée subit en cours de fluage une brusque discontinuité à l'instant τ .

a) la contrainte actuelle est supérieure à $X(\tau)$ le fluage continue presque normalement.

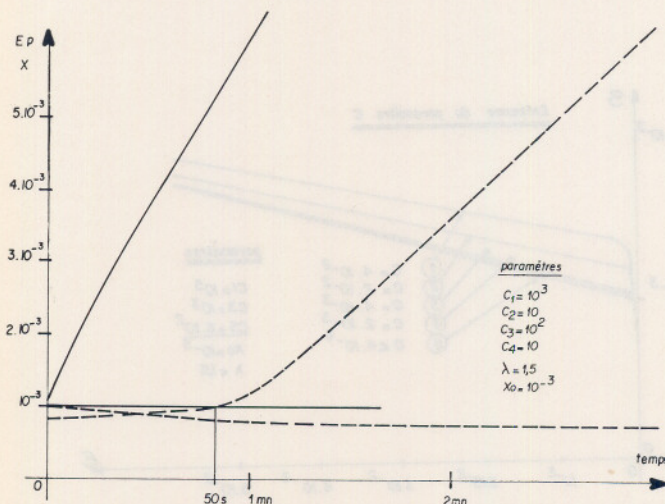


Fig. 6

b) la contrainte actuelle est comprise entre $\frac{X(\tau)}{\lambda}$

et $X(\tau)$ pendant le temps θ (formule 4.2) avec $X(\tau) = X_o$, « temps d'hésitation », la vitesse de déformation est très faible, elle redevient ensuite importante.

c) la contrainte actuelle est inférieure à $\frac{X(\tau)}{\lambda}$ le fluage s'arrête. λ peut être ainsi facilement déterminé expérimentalement.

4.2. Relation de Norton-Hoff

Considérons ici α et β différents de zéro. Nous obtenons un fluage stationnaire pour lequel :

$$(4.7) \quad \begin{cases} S_o - X_1 = \frac{C_4}{C_3} (\lambda S_o - X_1) X_1^{\alpha} \left(\left(\frac{dX}{dt} \right) X_1 = 0 \right) \\ \text{et par suite} \\ \frac{d\varepsilon^p}{dt} = \frac{(C_1 C_4 + C_2 C_3 X_1^{-\alpha+\beta})}{C_3} (\lambda S_o - X_1) X_1^{1+\alpha} \end{cases}$$

Comme la première équation de (4.7) donne toujours $S_o \simeq X_1$ nous en déduisons la formule approchée :

$$(4.8) \quad \frac{d\varepsilon^p}{dt} \simeq \frac{(C_1 C_4 + C_2 C_3 S_o^{-\alpha+\beta})}{C_3} (\lambda - 1) S_o^{2+\alpha}$$

Nous retrouvons, par conséquent, la relation de Norton-Hoff pour le fluage stationnaire :

$$(4.9) \quad \frac{d\varepsilon^p}{dt} = k S^n \text{ où}$$

$$(4.10) \quad \begin{cases} k \simeq \frac{(C_1 C_4 + C_2 C_3 S_o^{-\alpha+\beta})}{C_3} \\ \text{et} \\ n \simeq 2 + \alpha \end{cases}$$

Puisque $C_2 C_3 S_o^{-\alpha+\beta}$ est en général très petit devant $C_1 C_4$, k n'est pratiquement fonction que de la température. L'exposant α intervient directement à la fois dans la courbe « statique » et dans le fluage stationnaire.

5. CONCLUSIONS

Le modèle très simple que nous avons présenté est bien en mesure d'interpréter tous les phénomènes.

nes viscoplastiques importants. Il faut souligner que nous n'avons pas eu besoin pour cela d'introduire plus de constantes à déterminer expérimentalement que dans la plupart des modèles classiquement proposés.

La principale caractéristique du modèle est qu'il existe un paramètre qui n'est pas, en général, une fonction de la déformation plastique ϵ^p et qui définit l'état interne du matériau ou son histoire. Une extension classique au cas tridimensionnel peut être effectuée.

REFERENCES

- [1] L. BRUN et A. ZAOUI (1967). — Sur l'hésitation au fluage. Cahier du Groupe Français de Rhéologie - 1, N° 5.
- [2] J. FRIEDEL (1964). — Dislocations - Pergamon Press - Gauthier Villars.

- [3] J.J. GILMAN (1966). — Progress in the microdynamical theory of Plasticity - Proc. 5th U.S. National Congress. Applied Mechanics.
- [4] B. JAOUËL (1965). — Etude de la plasticité et applications aux métaux - Dunod.
- [5] W.G. JOHNSTON (1962). — Yield Points and Delay times in Single Crystals - Journal of Applied Physics. 33, p. 2 716.
- [6] J. LEMAITRE (1970). — Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-viscoplastiques. Publication n° 135 de l'O.N.E.R.A. - Châtillon-sous-Bagneux.
- [7] R. MAZET (1970). — Sur la détermination des caractéristiques de fluage d'un matériau hétéro-plastique à l'aide d'essais d'écrouissage isothermes - 2^e Symposium sur le fluage des structures - Göteborg (Suède).
- [8] R. SUTTERLIN. — Sur la Plasticité dynamique (A paraître).
- [9] A. ZAOUI (1970). — Thèse - Paris.
- [10] J. ZARKA (1968) (1970). — Sur la viscoplasticité des métaux - Mémoires de l'Artillerie Française - 2^e Fascicule, p. 223.

1. CHOIX DE L'ANALOGIE

Puisque le papier n'a pas d'équivalent électrique direct et qu'il faut donc le construire, il est intéressant de se demander si on peut le construire à l'aide de composants électriques analogues. Ce sont donc eux qui vont fixer le choix de l'analogie et nous de trouver la plus directe.

On présente un simulateur électronique ayant toutes les propriétés du gain — symbole de la plasticité —. Ce simulateur peut être utilisé, soit aux composants classiques, pour obtenir une analogie électronique des modèles viscoplastiques complexes (type Schvedoff).

On présente enfin quelques réponses connues de modèles types, permettant de comparer le calcul et l'analogie électrique.

ABSTRACT

An electrical simulator with all the properties of a dry friction slipper (symbol of plasticity) is shown. This simulator can be used with classical components in order to obtain an electronic analogy of complex viscoplastic models (Schvedoff's type). The validity of the simulator so obtained is tested, comparing calculated and experimental results for some classical models.

Nous disposons des équations suivantes :

mécaniques	électriques
$\sigma = E \epsilon$	$U = RI \Leftrightarrow I = GU \mid W = UI$
$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}$	$\dot{U} = R \dot{I} \Leftrightarrow \dot{I} = G \dot{U} \mid \dot{W} = U \dot{I}$
$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon}$	$U = R I + \frac{1}{C} \frac{dI}{dt} \Leftrightarrow I = G U + C \frac{dU}{dt} \mid W = U I$
$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} + \eta \dot{\epsilon}$	$\dot{U} = R \dot{I} + \frac{1}{C} \frac{dI}{dt} \Leftrightarrow \dot{I} = G \dot{U} + C \frac{dU}{dt} \mid \dot{W} = U \dot{I}$

Colloque du Groupe Français de Rhéologie, 2 décembre 1972.

Simulation électronique de modèles viscoplastiques*

par C. DUMONT et P. MORLIER

RESUME

On présente un simulateur électronique ayant toutes les propriétés du patin — symbole de la plasticité —. Ce simulateur peut être utilisé, allié aux composants classiques, pour obtenir une analogie électronique des modèles viscoplastiques complexes (type Schwedoff).

On présente enfin quelques réponses connues de modèles types, permettant de comparer le calcul et l'analogie électrique.

ABSTRACT

An electronical simulator with all the properties of a dry friction slipper (symbol of plasticity) is shown. This simulator can be used with classical components in order to obtain an electronical analogy of complex viscoplastic models (Schwedoff's type). The validity of the simulator so obtained is tested, comparing calculated and experimental results for some classical models.

Nous disposons des équations suivantes :

électriques

$$u = R i \iff i = G u \mid W = u i$$

$$u = \frac{q}{c} \rightarrow u = \frac{1}{c} \int i dt \iff i = C \dot{u} \mid W = \frac{1}{2} C u^2$$

$$u = L \frac{di}{dt} \iff i = \frac{1}{L} \int u dt \mid W = \frac{1}{2} L i^2$$

mécaniques

$$\sigma = G \epsilon \iff \epsilon = J \sigma \mid W = \frac{1}{2} J \sigma^2$$

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \iff \epsilon = \frac{1}{\eta} \int \sigma dt \mid W = \frac{1}{2} \eta \sigma^2$$

Les modèles rhéologiques constituent un moyen commode d'investigation pour l'étude du comportement de la matière ; et l'intérêt de convertir ces modèles mécaniques en modèles électriques n'est plus à démontrer. Citons les principaux avantages :

- rapidité et précision des mesures dues à la richesse des appareils de mesures électriques ;
- modifications immédiates des éléments et assemblage total des éléments électriques en fonction de paramètres quelconques ;
- réduction et compression de l'échelle des temps.

Il convient donc d'étendre cette méthode au domaine non-linéaire. Nous disposons, pour cela, dans l'arsenal des composants électroniques d'éléments directement analogues à certains éléments mécaniques non-linéaires. Malheureusement, le patin — symbole de la plasticité — n'a pas d'équivalent direct. C'est donc sur la représentation électrique de cet élément que nous porterons notre effort.

1. CHOIX DE L'ANALOGIE

Puisque le patin n'a pas d'équivalent électrique direct et qu'il faudra donc le construire, il est intéressant de se débarrasser au plus vite des éléments linéaires, directement analogues en électricité. Ce sont donc eux qui vont fixer le choix de l'analogie en vue de trouver la plus directe.

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

u = différence de potentiel en volts
 i = intensité en ampères
 R = résistance en ohms
 $G = \frac{1}{R}$ = conductance en mhos
 C = capacité en farads
 L = inductance en henrys
 q = charge électrique instantanée en Coulomb ($i = \dot{q}$)
 w = énergie en joules.

La juxtaposition de ces équations fait apparaître quatre familles analogiques possibles, résumées dans le tableau de la figure 1. L'exemple de modèle inséré dans le tableau fait apparaître par dualité des correspondances série-parallèle. Cela provient du fait que :

- Mécaniquement : deux éléments série sont soumis à la contrainte, et les déformations s'ajoutent.
- Electriquement : deux éléments série sont soumis au même courant, et les différences de potentiel s'ajoutent.

Ces propriétés s'inversent, évidemment, pour un groupement parallèle. Ce tableau suggère plusieurs réflexions :

1. Les inductances ne sont pas des composants maniables. Elles sont encombrantes, leur fourchette de réglage est très réduite, et, il est, de plus, diffi-

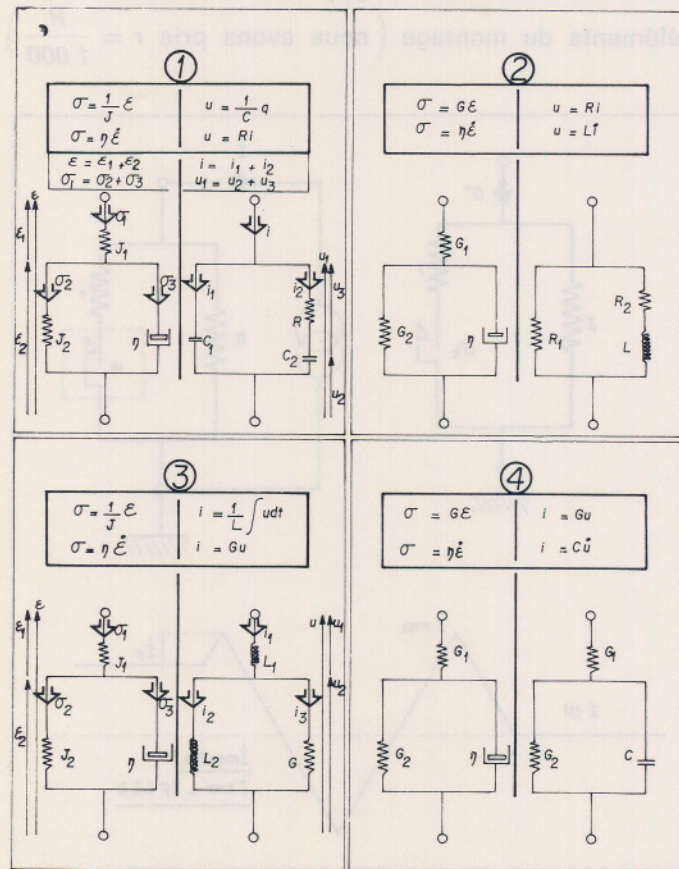


Fig. 1

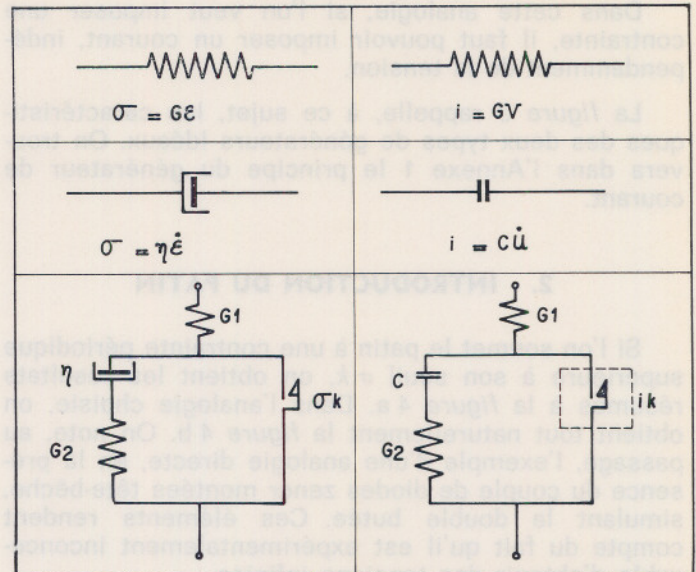


Fig. 2

cile de disposer d'inductances pures. Elles se distinguent, en effet, par des résistances et des capacités parasites inévitables. Elles sont en outre très facilement saturables. Il est donc souhaitable de les éliminer.

2. Les appareils de mesure électroniques ne savent traiter directement, en fait que des tensions et des courants. Pour toute autre grandeur électrique, les mesures ne se font qu'indirectement. Les courants mêmes sont mesurés, la plupart du temps, par conversion en tensions, à l'aide de petites résistances intercalées dans le circuit d'étude. A fortiori, il n'est pas aisé de mesurer $q = \int i dt$. Il convient donc d'abandonner l'analogie n° 1 correspondante.

Il reste donc la quatrième analogie $\sigma \leftrightarrow i$, $\varepsilon \leftrightarrow u$ qui offre l'avantage de conserver le mode de groupement mécanique, en donnant presque une similitude de symboles (figure 2).

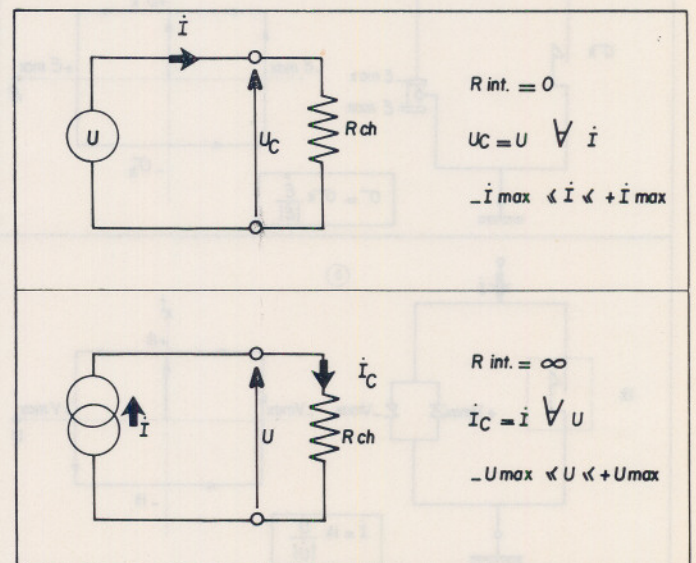


Fig. 3

Dans cette analogie, si l'on veut imposer une contrainte, il faut pouvoir imposer un courant, indépendamment de la tension.

La figure 3 rappelle, à ce sujet, les caractéristiques des deux types de générateurs idéaux. On trouvera dans l'Annexe 1 le principe du générateur de courant.

2. INTRODUCTION DU PATIN

Si l'on soumet le patin à une contrainte périodique supérieure à son seuil σ_k , on obtient les résultats résumés à la figure 4 a. Dans l'analogie choisie, on obtient tout naturellement la figure 4 b. On note, au passage, l'exemple d'une analogie directe, en la présence du couple de diodes zener montées tête-bêche, simulant la double butée. Ces éléments rendent compte du fait qu'il est expérimentalement inconcevable d'obtenir des tensions infinies.

Si l'on décrit la courbe caractéristique du patin électrique, on s'aperçoit qu'il se comporte successivement (et alternativement) comme un court-circuit, puis comme un circuit ouvert, à chaque passage du seuil i_k .

En langage électrique, on définit la résistance dynamique équivalente au patin électrique : $Rdp = \frac{dv}{di}$, qui permet de dresser le tableau de la figure 5.

3. CHOIX DU MODELE D'ETUDE

Ce tableau décrit le fonctionnement du patin électrique intrinsèque. Pour étudier son fonctionnement,

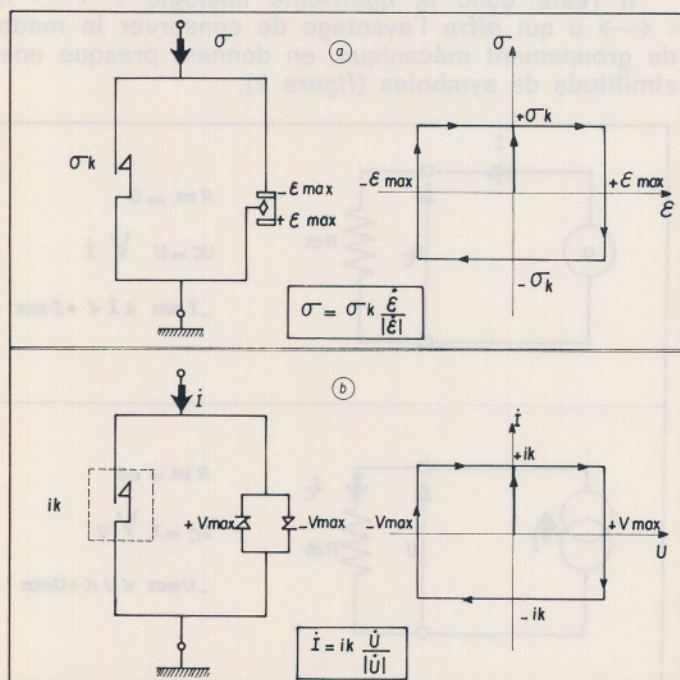


Fig. 4

I	I_p	V_p	$Rdp = \left \frac{dv}{di} \right $
0	0	0	
$I < i_k$	I	0	0
$I = i_k$	i_k	$+V_{max}$	∞
$-i_k < I < +i_k$	I	$+V_{max}$	0
$I = -i_k$	$-i_k$	$-V_{max}$	∞
$-i_k < I < +i_k$	I	$-V_{max}$	0
$I = i_k$	i_k	$+V_{max}$	∞

Fig. 5

nous l'avons délibérément inséré dans un modèle simple dont nous connaissons parfaitement la réponse à une sollicitation donnée (fig. 6).

Le modèle et la sollicitation peuvent paraître trop simples. Mais il faut bien comprendre qu'ils ne servent qu'à tester la validité du patin électrique. Il est évident que, s'il fonctionne correctement, nous sommes sûrs d'avoir la réponse exacte d'un modèle très compliqué à une sollicitation quelconque ; l'introduction d'éléments capacitifs (amortisseurs) ne posant aucune difficulté. Notons également que l'on peut rendre la résistance r négligeable vis-à-vis des autres éléments du montage (nous avons pris $r = \frac{R}{1000}$).

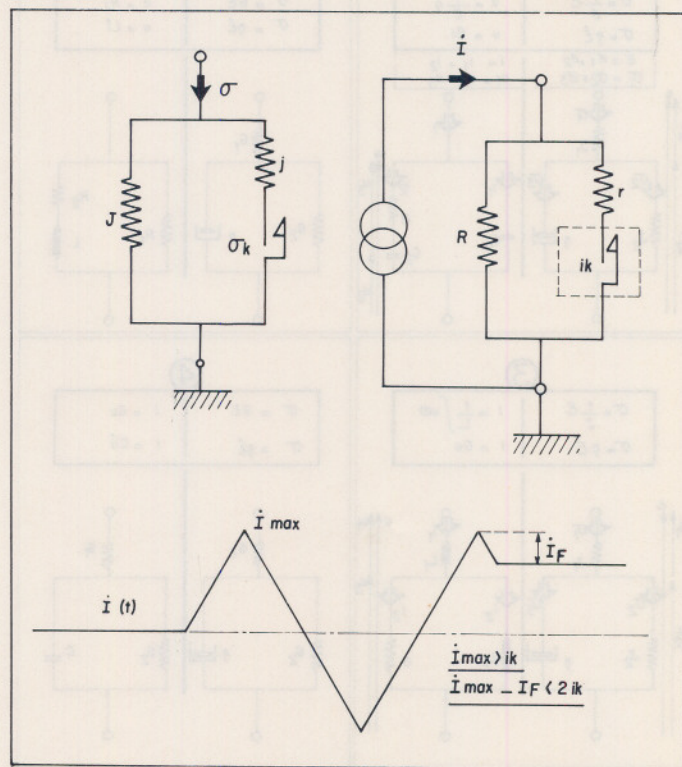


Fig. 6

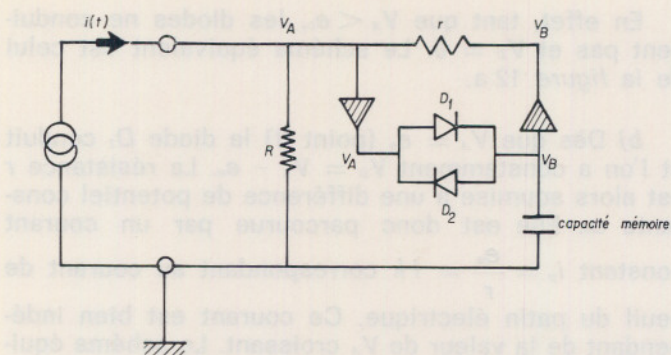


Fig. 7

4. FONCTIONNEMENT DU PATIN ELECTRIQUE

4.1. Description du schéma simplifié

Le modèle d'étude (fig. 6) dépouillé des contingences électriques se résume au schéma de la figure 7. (En particulier, les diodes zener représentant les limitations électriques ne sont plus représentées).

Pour raisonner plus simplement, on considère tous les composants comme idéaux :

a) Les triangles représentent des éléments séparateurs. Ce sont des amplificateurs opérationnels de gain unitaire, dont l'impédance d'entrée est idéalement infinie et l'impédance de sortie idéalement nulle (fig. 8).

Dire que l'impédance d'entrée est infinie signifie que ces éléments séparateurs n'interviennent pas du point de vue énergétique dans le fonctionnement du circuit. Ils se contentent de « piquer » l'information de tension pour la « répéter » sous une impédance nulle.

b) Une diode idéale possède la caractéristique de la figure 9 a. Elle se comporte comme un circuit ouvert jusqu'à sa tension de conduction e_0 , puis comme un circuit fermé pour $v \geq e_0$.

Deux diodes montées tête-bêche donnent donc la caractéristique symétrique de la figure 9 b.

La tension de conduction e_0 est nominale de 0,7 V pour des diodes au silicium. Mais insérées dans un montage approprié, on peut abaisser ce seuil à quelques micro-volts.

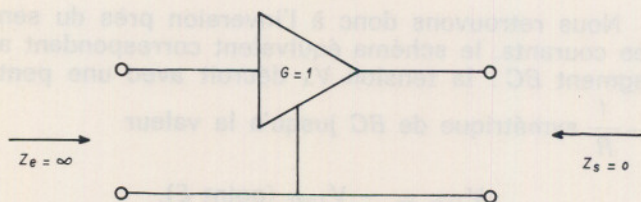


Fig. 8

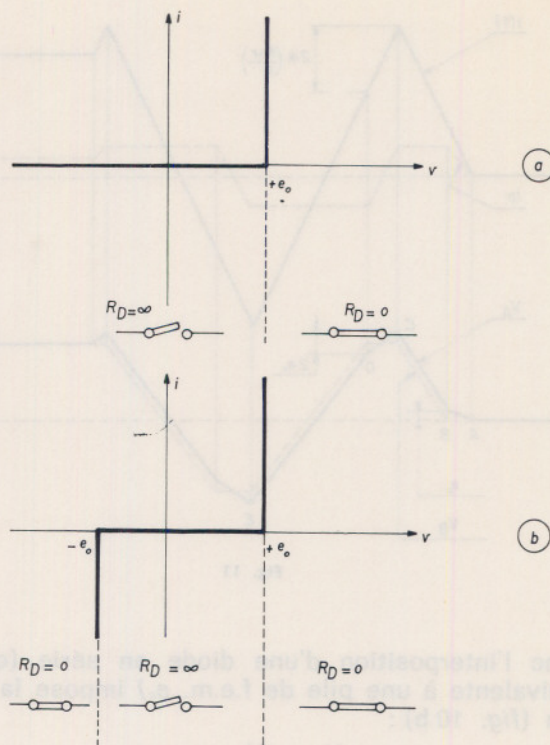


Fig. 9

c) La capacité mémoire, étant attaquée sous une impédance nulle, acquiert sa charge maximale instantanément. On voit en effet à la figure 10 a que la réponse du circuit à l'échelon de tension V_A est de la forme :

$$V_B = V_A \left(1 - \exp \frac{-t}{RC} \right)$$

si $R = 0$ (impédance du générateur)

$$V_B = V_A$$

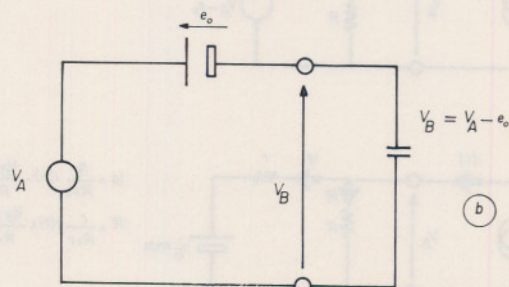
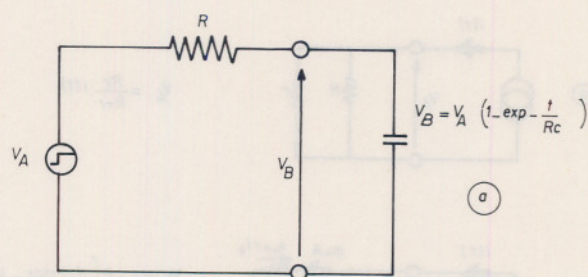


Fig. 10

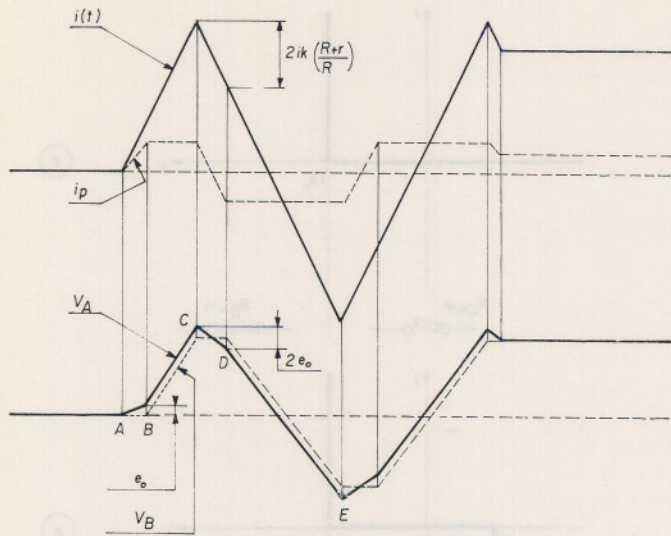


Fig. 11

Donc l'interposition d'une diode en série (qui est équivalente à une pile de f.e.m. e_o) impose la condition (fig. 10 b) :

$$V_B = V_A - e_o.$$

4.2. Analyse du fonctionnement

On impose la sollicitation en courant choisie, qui est une fonction triangulaire du temps, et l'on suit pas à pas l'évolution des tensions V_A , V_B et du courant i_p dans le patin (fig. 11).

a) Initialement $i(t) = 0$ donc $i_p = 0$ et

$$V_A = V_B = 0$$

$i(t)$ augmente et V_A augmente de $ri(t)$ (segment AB de pente $\frac{R+r}{Rr} \neq \frac{1}{r}$).

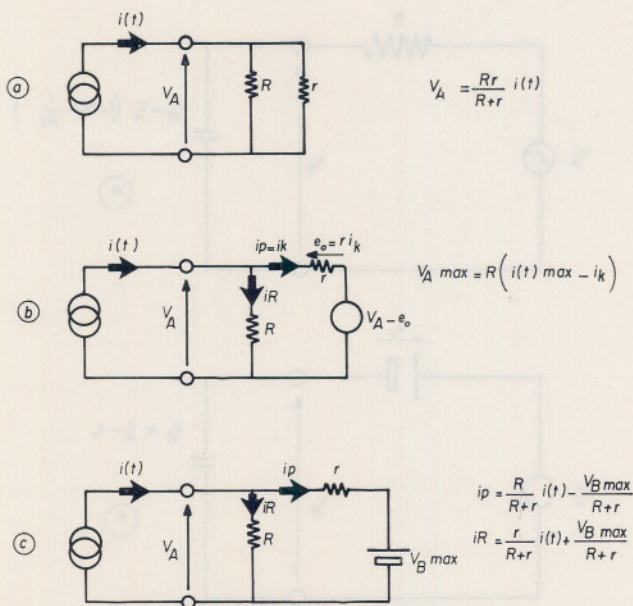


Fig. 12

En effet, tant que $V_A < e_o$, les diodes ne conduisent pas et $V_B = 0$. Le schéma équivalent est celui de la figure 12 a.

b) Dès que $V_A = e_o$ (point B) la diode D_1 conduit et l'on a constamment $V_B = V_A - e_o$. La résistance r est alors soumise à une différence de potentiel constante e_o . Elle est donc parcourue par un courant constant $i_p = \frac{e_o}{r} = i_k$ correspondant au courant de seuil du patin électrique. Ce courant est bien indépendant de la valeur de V_A croissant. Le schéma équivalent est celui de la figure 12 b.

Le patin limitant son courant à la valeur i_k , la résistance R est parcourue par un courant $i_R = i(t) - i_k$, et V_A augmente de $R(i(t) - i_k)$ jusqu'à la valeur :

$$V_{Amax} = R(i(t)_{max} - i_k) \left(\text{segment BC de pente } \frac{1}{R} \right)$$

c) $i(t)$ décroît, mais V_B conserve la valeur

$$V_{Bmax} = V_{Amax} - e_o$$

et ne pourra décroître que lorsque V_A aura atteint la valeur $V_{Bmax} - e_o$, (c'est-à-dire $V_A = V_{Amax} - 2e_o$), condition pour que la diode D_2 conduise et fasse perdre des charges à la capacité mémoire. Le schéma équivalent est celui de la figure 12 c.

Tant que le potentiel V_B reste constant (ce que l'on symbolise par une pile), r reprend son rôle de résistance et V_A décroît de $2e_o$ avec une pente symétrique du segment AB (segment CD de pente $\neq -\frac{1}{r}$).

d) Lorsque V_A atteint la valeur :

$$V_{Amax} - 2e_o \quad (\text{point D})$$

la diode D_2 conduit et nous retrouvons la condition :

$$V_B = V_A + e_o$$

quel que soit V_A décroissant. La résistance r est donc à nouveau soumise à la d.d.p. constante e_o , et le courant i_p se trouve limité au courant de seuil $-i_k = -\frac{e_o}{r}$. Le point D correspond à :

$$i(t) = i(t)_{max} - 2i_k \left(\frac{R+r}{R} \right) \quad (\text{voir Annexe 2})$$

Nous retrouvons donc à l'inversion près du sens des courants, le schéma équivalent correspondant au segment BC : la tension V_A décroît avec une pente $-\frac{1}{R}$ symétrique de BC jusqu'à la valeur

$$V_{Amin} = -V_{Amax} \quad (\text{point E}).$$

Le cycle recommence ensuite.

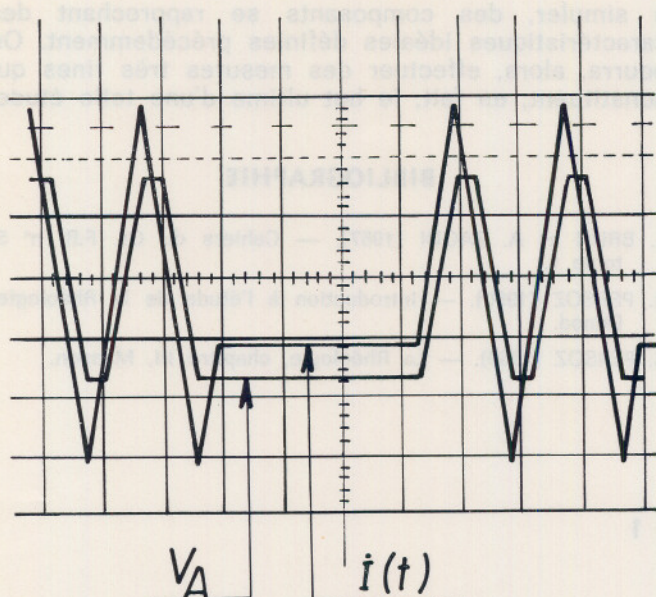


Fig. 13

e) Enfin, si le courant $i(t)$ est maintenu à une valeur i_f supérieure à $i_{(t)max} - 2 i_k \frac{R+r}{R}$, V_A reste supérieur à $V_{Amax} - 2 e_o$ et les diodes D_1 et D_2 restent bloquées : V_B conserve la dernière valeur acquise :

$$V_{Bmax} = V_{Amax} - e_o.$$

Donc :

$$V_A = V_{Bmax} \frac{R}{R+r} + i_f \frac{Rr}{R+r} \# V_{Bmax} + i_{f,r}$$

d'après le schéma équivalent C).

On remarque que pour faire varier le seuil de courant i_k on peut agir sur la valeur de la résistance r , ou sur la valeur de la tension de construction e_o . On peut d'ailleurs asservir i_k à un paramètre quelconque.

5. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Sollicitation en triangle

La figure 13 reproduit la photographie prise sur oscilloscope de la réponse V_A à la sollicitation triangulaire $i(t)$ de fréquence 3 KHz.

On peut voir que l'effet de la résistance r est rendu négligeable. Si l'on travaille à fréquence lente (autour de 3 Hz) on peut enregistrer la réponse sur un enregistreur à papier.

On obtient ainsi la figure 14 a en coordonnées Yt et la figure 14 b en coordonnées XY ($i(t)$ en Y , V_A en X). Sur ces deux figures, on remarque que les raccordements ne sont pas francs. Cela provient du fait que, pratiquement, les diodes ne présentent pas la caractéristique idéale définie plus haut (voir Annexe 3).

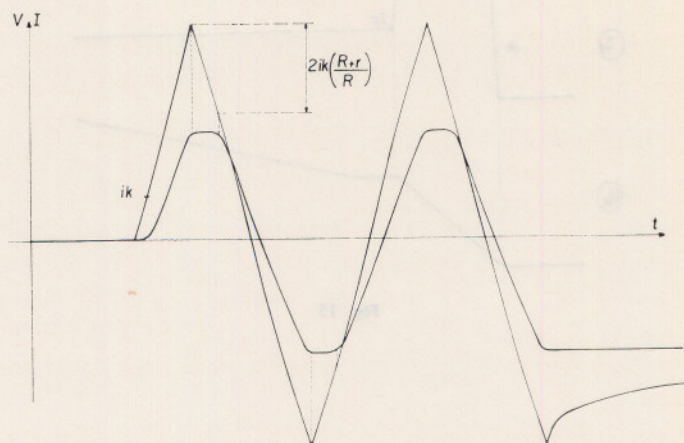


Fig. 14 a

Hésitation au fluage

Enfin, nous avons cherché à mettre en évidence le phénomène d'hésitation au fluage dans le modèle de Schwedoff, défini par MM. Brun et Zaoui, 1967.

Pour obtenir le modèle de Schwedoff, il suffit d'insérer un condensateur C en série avec la résistance R . (La résistance additionnelle en série de ce modèle peut être assimilée à la résistance totale du générateur de courant). La figure 15 donne l'aspect de la sollicitation en courant et la réponse du modèle.

On retrouve nettement le palier caractéristique du phénomène d'hésitation au fluage.

CONCLUSION

Les résultats obtenus actuellement doivent être retenus sous leur aspect qualitatif : ils permettent en effet d'affirmer la validité du patin électrique, dans l'analogie choisie. Le deuxième stade, d'ordre purement technologique, consistera à employer, ou

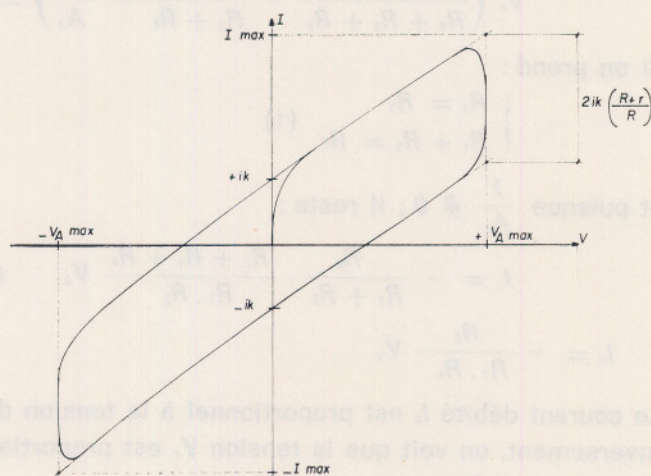


Fig. 14 b

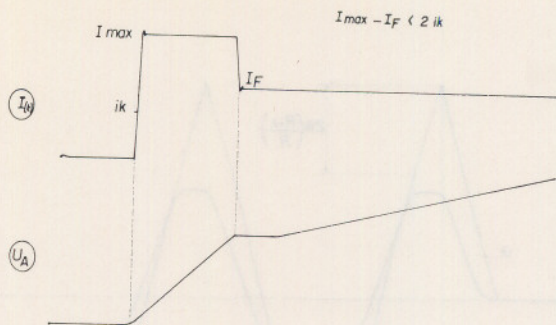


Fig. 15

à simuler, des composants se rapprochant des caractéristiques idéales définies précédemment. On pourra, alors, effectuer des mesures très fines qui constituent, en fait, le but ultime d'une telle étude.

BIBLIOGRAPHIE

- L. BRUN et A. ZAOUI (1967). — Cahiers du Gr. F.R. n° 5, tome 1.
 B. PERSOZ (1960). — Introduction à l'étude de la Rhéologie, Dunod.
 B. PERSOZ (1969). — La Rhéologie, chapitre III, Masson.

ANNEXE 1

Générateur de courant

Le schéma du générateur de courant est donné ci-contre.

On appelle :

V_g : tension de commande
 A_o : gain en boucle ouverte
 R_c : résistance de charge
 V_c : tension de sortie
 I_c : courant de sortie

On a :

$$V_s = -A_o(V_c) \text{ avec } V_c = V_A - V_B \text{ et } I_c = \frac{V_c}{R_c}$$

En appliquant le théorème de superposition, il vient :

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_g + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s - \frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5} (V_s - R_5 I_c) \\ -\frac{V_s}{A_o} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_g + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s - \frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5} V_s + \frac{R_5 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} \cdot I_c \\ V_s \left(\frac{R_5}{R_3 + R_4 + R_5} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{A_o} \right) &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_g + \frac{R_5 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} \cdot I_c \end{aligned}$$

Si on prend :

$$\begin{cases} R_1 = R_5 \\ R_3 + R_5 = R_2 \end{cases} \quad (1)$$

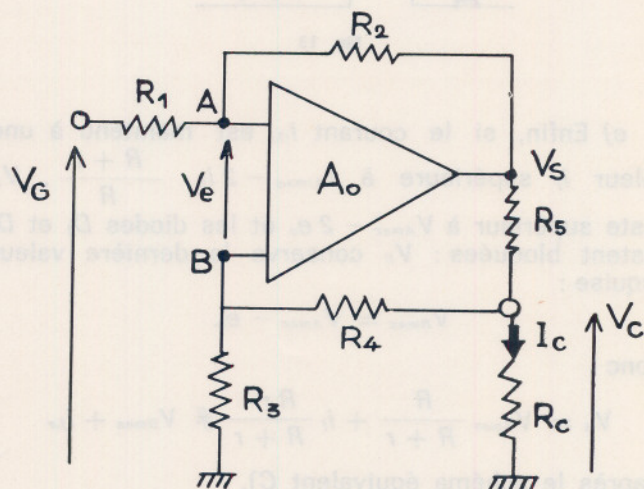
et puisque $\frac{1}{A_o} \neq 0$; il reste :

$$\begin{aligned} I_c &= -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_3 + R_4 + R_5}{R_5 \cdot R_5} V_g \quad \text{c'est-à-dire, d'après les conditions (1)} \\ I_c &= -\frac{R_2}{R_5 \cdot R_5} V_g \end{aligned}$$

Le courant débité I_c est proportionnel à la tension de commande et indépendant de la charge R_c .

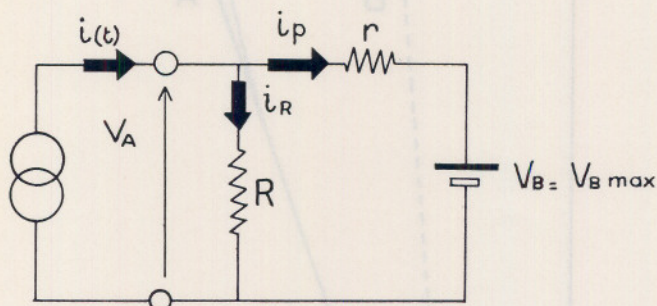
Inversement, on voit que la tension V_c est proportionnelle à la résistance de charge :

$$V_c = -\frac{R_2}{R_5 \cdot R_5} \cdot V_g \cdot R_c$$



ANNEXE 2

Transition CD



a) Pendant la transition (segment CD, bornes exclues !) le principe de superposition permet d'écrire :

$$i_p = i(t) \frac{R}{R+r} - \frac{V_{Bmax}}{R+r}$$

Soit :

$$i(t) = \frac{V_{Bmax}}{R} + i_p \left(\frac{R+r}{R} \right)$$

Comme :

$$V_{Bmax} = V_{Amax} - e_o$$

Soit :

$$V_{Bmax} = R(i(t)_{max} - ik) - rik$$

Il vient :

$$i(t) = i(t)_{max} - ik \left(\frac{R+r}{R} \right) + i_p \left(\frac{R+r}{R} \right)$$

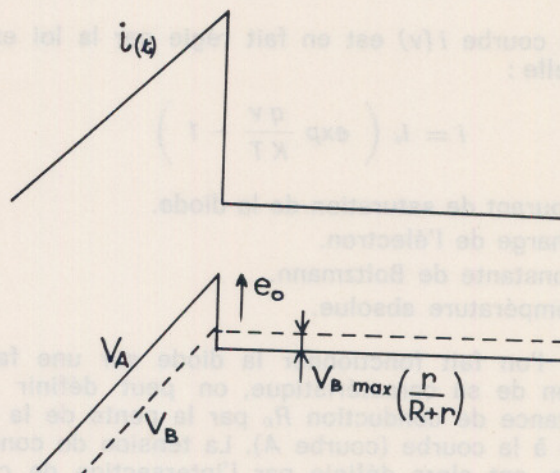
V_B décroît pour $i_p = -ik$, ce qui correspond dans l'équation précédente à :

$$i(t) = i(t)_{max} - 2ik \left(\frac{R+r}{R} \right)$$

Si $r \ll R$, on retrouve la valeur :

$$i(t) = i(t)_{max} - 2ik$$

b) Si on supprime $i(t)$ au temps $t = \frac{T}{4}$ (correspondant à $i(t)_{max}$), V_A retombe instantanément de V_{Amax} à $V_{Bmax} \left(\frac{R}{R+r} \right)$



R et r sont soumis à un courant constant :

$$i_c = \left| \frac{V_{Bmax}}{R+r} \right| < |ik|$$

Mécaniquement, la brusque diminution de V_A correspond à l'inversion de la contrainte dans le ressort en série avec le patin.

$$\text{Si } V_{Bmax} \frac{R}{R+r} < V_{Bmax} - e_o$$

$$\text{c'est-à-dire } V_{Bmax} > e_o \left(\frac{R+r}{r} \right)$$

la capacité mémoire perd des charges jusqu'à ce que les potentiels V_A et V_B s'égalisent :

$$V_A = V_B = e_o \left(\frac{R+r}{r} \right)$$

Pour cette valeur, en effet, le courant dans le patin retombe à sa valeur de seuil

$$i_p = e_o \left(\frac{R+r}{r} \right) \cdot \frac{1}{R+r}$$

$$\text{soit } i_p = \frac{e_o}{r} = ik$$

ANNEXE 3

Caractéristique de la diode semi-conductrice

La courbe $i(v)$ est en fait régie par la loi exponentielle :

$$i = i_o \left(\exp \frac{q v}{K T} - 1 \right)$$

i_o : courant de saturation de la diode.

q : charge de l'électron.

K : constante de Boltzmann.

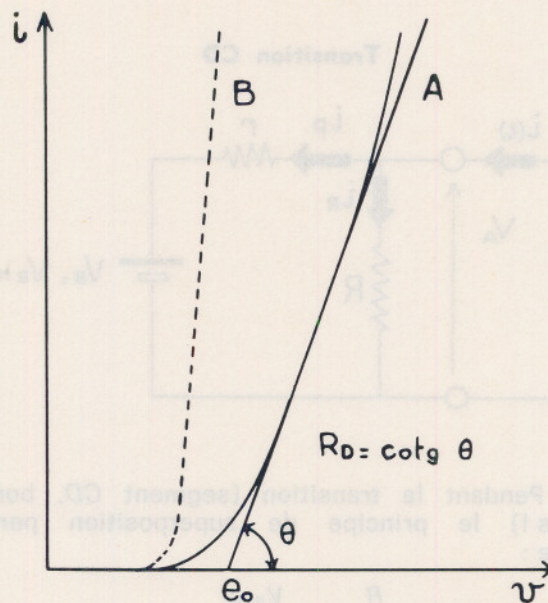
T : température absolue.

Si l'on fait fonctionner la diode sur une faible portion de sa caractéristique, on peut définir une résistance de conduction R_D par la pente de la tangente à la courbe (courbe A). La tension de conduction e_o est alors définie par l'intersection de cette droite avec l'axe des tensions.

La technologie des semi-conducteurs progressant très rapidement, il est d'ores et déjà possible de trouver des diodes à tension de coude très franche (courbe B). En outre, on peut simuler l'effet de diode idéale, mais le schéma perd en simplicité.

Remarque : c'est pour simplifier la terminologie que nous conservons l'appellation de « diode » à cet élément.

En fait, il est évident qu'il agit comme soustracteur de tension.



Les électroniciens l'utilisent pour stabiliser une tension ($v \neq e_o, \forall i$) et l'élément porte alors le nom de « régulateur de tension ».

Par contre, pour la fonction de redressement, la caractéristique idéale recherchée serait celle pour laquelle $e_o = 0$. La tension e_o (inhérente à l'élément) apparaît dans cette application comme une « tension de déchet ».

Les domaines d'application de la viscoplasticité*

par R. MAZET

Professeur à l'Université de Paris XI
Centre d'Orsay

Comme M. Mandel et M. Zarka nous l'ont exposé ce matin, la viscoplasticité trouve sa place entre la viscoélasticité (linéaire ou non linéaire) et l'élastoplasticité classique : existence d'un « seuil », donc sujet concernant plus spécialement matériaux métalliques, mortiers, bétons, etc ; prise en compte de la vitesse, et pas seulement d'un taux de croissance lié à un temps cinématique, c'est-à-dire prise en compte du temps réel.

Je voudrais seulement préciser qu'à la lumière des exposés de ce matin il ne semble pas y avoir de différence essentielle entre la viscoplasticité et le fluage qu'on a renoncé depuis une dizaine d'années à faire dépendre de la seule variable temps. Le fluage est la production d'une déformation irréversible provoquant une résistance du milieu fonction de la vitesse avec laquelle cette déformation se développe. La viscoplasticité est, si l'on veut, l'aspect phénoménologique du fluage.

La loi exprimant la relation entre cette résistance et la vitesse de la déformation plastique a revêtu des formes successives de plus en plus compliquées dont nous avons vu quelques exemples ce matin. L'une des premières proposées est celle de Bailey-Norton :

$$\sigma = E (\tau \dot{\epsilon}_p)^{\frac{1}{n}}$$

τ et n étant des fonctions spécifiques de la température T et du matériau. La plus récente est, à ma connaissance, celle de Perzyna que je n'écris pas et qui généralise celle de Seeger rappelée ce matin :

$$\sigma = \sigma_m + f \left\{ k T \log_N \frac{\nu}{\dot{\epsilon}_p} \right\}$$

(σ_m : limite élastique, k : constante de Boltzmann, ν : constante spécifique ayant les dimensions d'un temps).

Il est à noter que les états statiques étudiés en élastoplasticité classique sont à considérer en viscoplasticité comme des états asymptotiques.

Parmi les domaines d'application dont je voudrais vous parler en me plaçant exclusivement sous l'angle de la mécanique, je citerais d'abord les cas où la sollicitation subie par la structure varie très rapidement, qu'il s'agisse d'une sollicitation mécanique ou thermique : chocs avec ou sans persistance de la charge, échauffement brusque, avec application au formage par empreinte à froid ou à chaud, au dud-geonnage, au martelage, à la coupe, à la rentrée des missiles dans l'atmosphère, etc. L'un des sujets que vous avez pu apprécier ce matin appartenait à cette catégorie.

Toutefois ce n'est pas le sujet sur lequel je désire m'étendre car je pense que tout le monde est d'accord sur la nécessité de faire intervenir la rapidité d'évolution, donc la vitesse, dans de tels problèmes. Je voudrais surtout insister sur l'intérêt des considérations viscoplastiques dans les problèmes les plus courants de dimensionnement des structures.

Il n'est malheureusement pas superflu de commencer par un plaidoyer en faveur de l'introduction de la plasticité, au sens classique du mot, dans le calcul des structures. En effet, bien peu de constructeurs en France calculent leurs structures de cette façon et refusent d'abandonner la sécurité, payée très cher, du calcul strictement élastique. Alors pourquoi venir leur parler de viscoplasticité, qui n'est qu'une façon plus raffinée encore de traiter les problèmes de résistance en y admettant la possibilité d'une évolution plus ou moins lente de la déformation au cours du temps et la notion probabiliste de « durée de vie » ?

Or les règlements de construction américains et russes sont établis selon les critères de la plasticité. Des sociétés étrangères se mettent à édifier en France des bâtiments selon ces mêmes critères et les plus avisés des constructeurs français commencent à s'émouvoir de cette situation.

Je redirai donc, après d'autres, les avantages de ce nouveau point de vue : l'économie de poids, pour-

* Colloque du Groupe française de Rhéologie, 8 décembre 1971.

tant évidente, n'est pas le principal ; c'est surtout une conception rationnelle de la structure qui en fait la valeur. Tolérant une certaine plasticité, on peut concevoir une construction (un portique, par exemple) très hyperstatique utilisant des assemblages simples et des profils constants, d'où une économie de réalisation ; en outre, la sécurité est plus homogène, le calcul à rupture repose sur des bases saines et non arbitrairement rattachées à la limite élastique ; la sécurité, au lieu de reposer sur la notion empirique de « pondération des charges », peut être fondée sur la notion rationnelle de « charge de ruine » ; la déformabilité sous les charges de service, y compris le voilage et le flambement, est plus exactement prévue et la charge de ruine elle-même peut être réduite.

J'entends bien qu'il faudrait modifier les règlements. Pour ne prendre qu'un exemple, le règlement actuel relatif à une barre supportant un effort axial et des moments à ses extrémités est dicté par un souci de sécurité trop sévère et loin d'épuiser la capacité ultime de la barre.

A l'étranger, pendant ce temps, on utilise des méthodes de dimensionnement et de vérification en plasticité destinées à éviter aux constructions les charges excessives et à les mettre à l'abri des instabilités, notamment de celles qui pourraient résulter de chargements répétés.

La viscoplasticité apporte à ces méthodes, comme je l'ai dit plus haut, un raffinement supplémentaire

dont les avantages compensent l'inconvénient de calculs plus étendus. Elle permet de prévoir les progrès de l'adaptation plastique avec le temps (autrement dit : la relaxation), ainsi que l'effet de charges accidentelles durant plus ou moins longtemps, de savoir, dans ce cas, si la structure va vers un nouvel équilibre ou vers la ruine pure et simple (cas d'un pont soumis à des charges roulantes répétées) ; elle permet de suivre les déformations progressives d'une structure, sous l'effet d'un fluage très lent dû aux charges qu'elle supporte et de savoir si, à la fin de la carrière qui lui est assignée, la structure sera encore en état de remplir sa mission. En bref, il s'agit d'utiliser au mieux les propriétés ductiles des matériaux métalliques et autres et de déterminer, pour une structure donnée ayant une durée de vie donnée, sa capacité de résistance maximale.

Cet objectif exige, bien entendu, que les caractéristiques des matériaux de construction au-delà du domaine élastique soient bien connues et qu'elles soient, autant que possible, bien définies et stables. Sinon, la prévision sera seulement probabiliste et devra être couverte par une marge de sécurité plus large.

Telle est, à mon sens, la voie dans laquelle la viscoplasticité doit être développée si l'on veut qu'elle contribue à donner à la mécanique sa juste place dans les réalisations les plus modernes de notre époque. C'est d'ailleurs une tâche passionnante sortant des applications classiques et susceptible, je l'espère, de séduire nos jeunes chercheurs.

Le formage à froid des matières plastiques

par C. WIPPLER

Ecole d'Application des Hauts Polymères
67 — Strasbourg

RESUME

Depuis une dizaine d'années, un certain nombre de publications rendent compte des résultats d'essais systématiques sur le formage à froid des matières plastiques. Le but de la note est de faire le point de la situation. L'auteur rappelle, tout d'abord, les différentes techniques de formage à froid et cite leurs avantages et inconvénients. Il examine, ensuite, les propriétés que doivent présenter les polymères pour être formables.

Dans les cas les plus simples, il est possible de caractériser les déformations que subit le flan au cours du formage, par contre l'analyse des contraintes auxquelles il est soumis se révèle impossible dans l'état actuel de nos connaissances.

ABSTRACT

In the last ten years, a number of publications have described the results of systematic tests in cold forming of plastics. The purpose of this note is to take stock of the question. The author first reminds the different technics of cold forming giving their advantages and drawbacks. Then he examines the properties required for the polymers to be fit for cold forming.

In the simplest cases it is possible to characterize the deformations that the blank undergoes during forming, but the analysis of the stresses to which it is submitted reveals itself impossible in the present state of knowledge.

D'une façon très générale, la variation du module d'Young d'une matière thermoplastique amorphe et rigide en fonction de la température peut être représentée par une courbe du type reporté sur la figure 1.

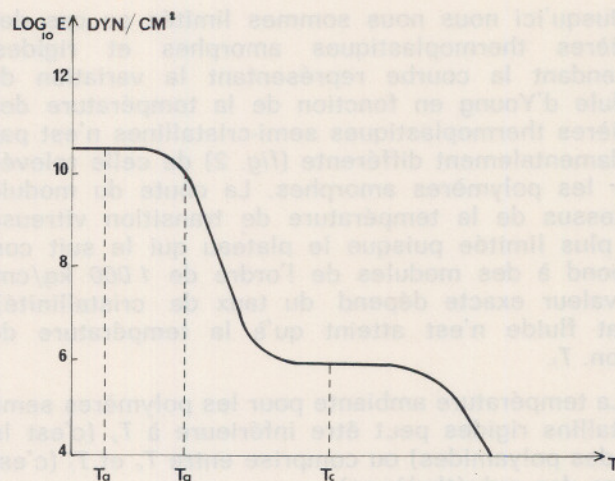


Fig. 1. — Variation du logarithme du module d'Young en fonction de la température pour une matière thermoplastique amorphe et rigide

En dessous de la température de transition vitreuse, T_g (supposée être supérieure à la température ambiante T_a) le module est de l'ordre de $30\,000\text{ kg/cm}^2$: la matière plastique est rigide. De part et d'autre d'une température, T_c supérieure à T_g , le module est de quelques kg/cm^2 . Dans ce domaine il varie peu, et le polymère se comporte comme un caoutchouc, c'est pourquoi on a coutume de désigner ce domaine sous le nom de plateau caoutchoutique. Au delà de ce plateau, les propriétés du polymère sont celles d'un fluide viscoélastique. Entre la température de transition vitreuse et le plateau caoutchoutique se situe une zone intermédiaire dans laquelle le module varie entre les deux ordres de grandeur précédents. Dans cette zone le matériau est encore viscoélastique pour les petites déformations, mais au-delà d'un certain seuil, il apparaît comme viscoplastique. C'est pourquoi cet intervalle de température est appelé habituellement domaine de viscoplasticité.

De ces considérations, il apparaît immédiatement qu'il est logique de regrouper les techniques de

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

transformation des matières plastiques en trois grandes classes.

A la première appartiennent les techniques opérant à des températures supérieures à la température du plateau caoutchoutique : le polymère est donc à l'état fluide. Les moulages par compression et par injection, l'extrusion en font partie.

Les températures de travail des techniques de la seconde classe se situent au delà de la température de transition vitreuse, mais ne dépassent pas la température du plateau caoutchoutique. C'est le domaine du formage à chaud.

La dernière classe, enfin, englobe toutes les transformations qui se font à température ambiante, ou du moins à des températures inférieures à la température de transition vitreuse. Il s'agit des techniques de formage à froid qui font l'objet de cet exposé.

Jusqu'ici nous nous sommes limités au cas des matières thermoplastiques amorphes et rigides. Cependant la courbe représentant la variation du module d'Young en fonction de la température des matières thermoplastiques semi-cristallines n'est pas fondamentalement différente (fig. 2) de celle relevée pour les polymères amorphes. La chute du module au-dessus de la température de transition vitreuse est plus limitée puisque le plateau qui le suit correspond à des modules de l'ordre de 1000 kg/cm^2 (la valeur exacte dépend du taux de cristallinité). L'état fluide n'est atteint qu'à la température de fusion, T_f .

La température ambiante pour les polymères semi-cristallins rigides peut être inférieure à T_g (c'est le cas des polyamides) ou comprise entre T_g et T_f (c'est le cas des polyéthylènes).

Quoiqu'il en soit, ces polymères peuvent être mis en œuvre par les techniques usuelles de transformation des thermoplastiques.

Alors que les méthodes de mise en œuvre des polymères à l'état fluide ou à l'état viscoplastique sont fort anciennes, il faut attendre 1960 pour voir publier les premiers résultats d'essais systématiques sur le formage à froid [1].

Depuis, un certain nombre d'articles ont paru (2 à 9). Le but de notre exposé est de faire le point de la situation, situation assez complexe à vrai dire. On s'en convaincra en lisant les objections présentées par Li et al [9] quant aux mécanismes proposés par Ueno et al [2] et Halpass [5]. Précisons d'ailleurs que nous ne souscrivons pas sans réserves à ces objections. Nous exposerons nos raisons un peu plus loin.

Les techniques de formage à froid

A l'heure actuelle, il existe plusieurs techniques de formage à froid, mais dans tous les cas le matériau de départ est une portion de feuille de matière plastique de quelques dixièmes à quelques millimètres d'épaisseur : le flan. Dans un but de simplification, nous supposerons que l'objet à réaliser est de symétrie de révolution ; il aura, par exemple, la forme d'une coupelle. Le flan est alors un disque.

La technique la plus couramment utilisée est celle de l'emboutissage sur matrice sans fond (fig. 3) (draw forming).

L'équipement se compose d'un poinçon, d'une matrice et d'un serre-flan. Le flan est pris entre la matrice et le serre-flan. Le poinçon entraîne le flan dans la matrice.

Le transformateur recherche en général un objet d'épaisseur aussi constante que possible et égale à l'épaisseur initiale du flan. Dans ces conditions la surface de l'objet final est égale à celle du flan.

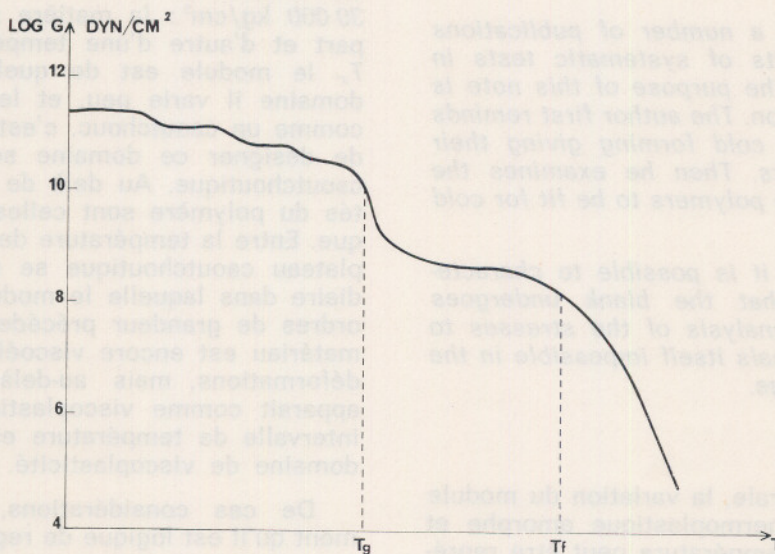


Fig. 2. — Variation du logarithme du module d'Young en fonction de la température pour une matière plastique semi-cristalline

Polymères susceptibles d'être formés à froid

Les premiers succès de formage à froid furent obtenus avec l'acétobutyrate de cellulose, le polycarbonate (malheureusement fragilisé par le formage), le poly(chlorure de vinyle) et les résines ABS. Dans ce dernier cas, il s'agit de résines à base d'une dispersion d'un élastomère (un copolymère acrylonitrile-butadiène) dans une phase vitreuse (un copolymère acrylonitrile-styrène).

Mais depuis, cette gamme s'est considérablement élargie puisque l'on a signalé que des polyoxyphénylènes, des polysulfones, des polyacétals, des résines phénoxy, des polyamides se prêtent au formage à froid.

Il n'est pas question, lorsque nous examinerons les relations entre la structure moléculaire et la formabilité, que nous considérions le cas de chacun de ces polymères. Pour la commodité de l'exposé, nous nous limiterons à la classe qui nous paraît la plus importante : celle des résines ABS.

Avantages et inconvénients des techniques de formage à froid

Si, depuis quelques années, les techniques de formage à froid ont suscité un tel engouement, c'est qu'elles présentent par rapport aux techniques de formage à chaud des avantages que nous nous proposons de résumer.

Ces avantages sont avant tout d'ordre économique. Puisqu'il n'est nécessaire ni de chauffer ni de refroidir la matière plastique transformée, des cadences de fabrication élevées sont possibles. Elles se situent entre 10 et 200 cycles par minute.

L'économie résulte également de la possibilité d'utiliser des presses mécaniques à vilebrequin, presses identiques à celles auxquelles il est fait appel pour l'emboutissage des tôles ou des cartons et meilleur marché que les presses hydrauliques.

Parce que l'épaisseur des objets emboutis est régulière, on utilise des feuilles plus minces que celles nécessitées pour le formage à chaud. De plus, la possibilité de découper les flans très serrés les uns contre les autres en réduisant les déchets ajoute au gain réalisé sur la matière. Nous devons à la vérité d'ajouter que la nécessité d'utiliser des feuilles de très haute qualité amoindrit quelque peu l'économie réalisée sur ce poste.

La régularité de l'épaisseur autorise par ailleurs l'impression de la décoration avant formage, donc sur la feuille plane. La qualité de l'impression y gagne, les cadences également. Au total, on estime que le prix d'un objet formé à froid est environ 20 % plus bas que celui d'un objet identique formé à chaud.

Bien sûr, le formage à froid ne présente pas que des avantages. Parmi les inconvénients, nous avons déjà fait allusion au nombre relativement restreint de

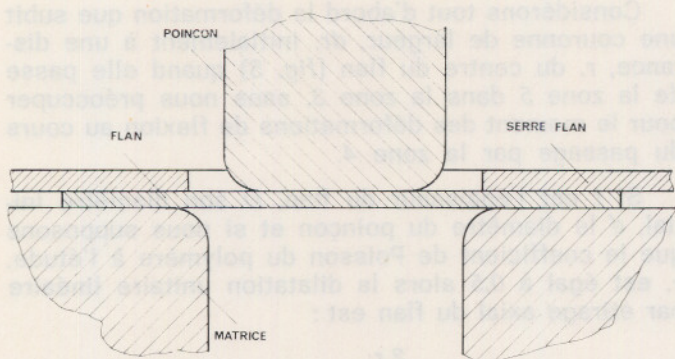


Fig. 3. — Principe de l'emboutissage

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de Li et al [9] qui supposent que les déformations se font par la seule compression tangentielle. Il en résulte une augmentation de l'épaisseur de la paroi latérale de la coupelle et la surface de l'objet final est inférieure à celle du flan.

La constance de l'épaisseur est obtenue en jouant sur différents paramètres. Il convient tout d'abord d'éviter tout amincissement du fond. C'est la raison pour laquelle la face inférieure du poinçon n'est pas parfaitement polie contrairement à toutes les autres surfaces en contact avec le flan.

Il importe ensuite, et c'est là le point principal, d'ajuster correctement la force de serrage du serre-flan. D'ailleurs, si cette force est trop faible, on observe un froissage de la paroi latérale de la coupelle. Si elle est trop forte, elle conduit à la déchirure du flan. Dans la pratique, la force de serrage est de l'ordre du dixième de celle appliquée sur le poinçon. Mais sa valeur exacte dépend de nombreux facteurs et en particulier des caractéristiques des lubrifiants utilisés (eau savonneuse, huiles minérales, émulsions aqueuses d'huiles ou de cires).

Enfin, le jeu entre poinçon et matrice est fixé à une valeur comprise entre 1,0 et 1,1 fois l'épaisseur du flan.

Il existe des variantes de cette technique d'emboutissage, ainsi la matrice sans fond peut être remplacée par une matrice avec fond, si l'on désire donner au fond de l'objet un dessin en relief. On peut aussi former l'objet contre un coussin de caoutchouc ou contre un réservoir de caoutchouc rempli d'un fluide.

Fondamentalement différent est le formage par étirage (stretch forming). L'équipement est analogue à celui utilisé pour le formage par emboutissage (fig. 3) mais la force exercée sur le serre-flan est telle qu'elle évite tout glissement du flan. Le poinçon est de préférence arrondi. Dans ces conditions le flan est soumis à un étirage multiaxial. La surface de l'objet final est supérieure à celle du flan.

Afin de ne pas trop alourdir notre exposé, nous le restreindrons au seul emboutissage sur matrice sans fond.

matières plastiques se prêtant à cette technique de transformation. Nous reviendrons un peu plus loin sur les limitations imposées à la forme des objets. Mais nous signalerons dès à présent une moins bonne stabilité dimensionnelle des objets formés à froid par rapport à ceux formés à chaud. Il a également été fait état d'une moins bonne résistance à la corrosion sous contrainte (stress craking) encore que cette résistance semble dépendre grandement de l'épaisseur de la feuille [6].

Enfin certains polymères, les résines ABS par exemple, blanchissent aux endroits de très fortes déformations que subit le flan au cours de la transvisible sur les objets teintés en blanc.

Quoiqu'il en soit, les avantages du procédé sont tels que l'on estime qu'il devrait être largement utilisé dans les années à venir dans la fabrication d'emballages et en particulier d'emballages alimentaires (y compris la vaisselle à jeter). Parmi les autres applications envisageables, citons la fabrication des coquilles de valises, d'intérieurs de réfrigérateurs et peut-être d'éléments de carrosseries automobiles.

Etude des déformations

Si nous voulons appréhender les mécanismes du formage à froid, il convient, avant tout, d'analyser les déformations que subit le flan au cours de la transformation. Pour cette étude, nous nous inspirerons fortement des travaux de Li et al [9].

Rappelons cependant que contrairement à Li et al. nous supposerons que l'épaisseur de la coupelle formée est homogène et égale à l'épaisseur initiale du flan.

Au cours de l'emboutissage de la coupelle, on peut distinguer cinq zones (fig. 4). Le fond 1 constitué par la partie centrale du flan et qui n'a subi aucune déformation, l'arrondi inférieur 2, la paroi latérale 3, l'arrondi supérieur 4 et la partie du flan 5 non encore engagée dans la matrice.

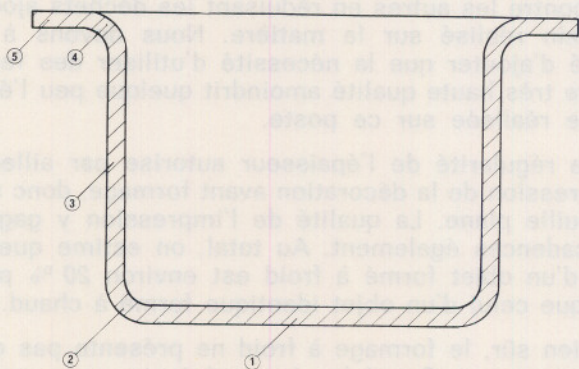


Fig. 4. — Section d'une coupelle en cours de formation

Considérons tout d'abord la déformation que subit une couronne de largeur, dr , initialement à une distance, r , du centre du flan (fig. 5) quand elle passe de la zone 5 dans la zone 3, sans nous préoccuper pour le moment des déformations de flexion au cours du passage par la zone 4.

Si t est l'épaisseur du flan, D son diamètre initial, d le diamètre du poinçon et si nous supposons que le coefficient de Poisson du polymère à l'étude, ν , est égal à 0,5 alors la dilatation unitaire linéaire par étirage axial du flan est :

$$\varepsilon_e = \frac{2r}{d} - 1 \quad (1)$$

En même temps la couronne a subi une compression unitaire tangentielle dont la valeur est donnée par

$$\varepsilon_c = 1 - \frac{d}{2r} \quad (2)$$

Portons maintenant notre attention sur la zone 4.

Si nous faisons abstraction des dilatations et compressions dues aux valeurs différentes de r (différences qui, dans les cas pratiques, restent faibles) alors la déformation unitaire linéaire radiale au cours du passage de la région 5 à la région 3 s'écrit :

$$\varepsilon_r = \frac{2x - t}{2R_o + t} \quad (3)$$

relation dans laquelle :

R_o est le rayon de courbure de l'arrondi du bord de la matrice

$R_o + x$ la distance au centre de cet arrondi de la fibre du flan dont on considère la déformation.

Remarquons que cette déformation peut être une dilatation ou une compression suivant que x est

supérieur ou inférieur à $\frac{t}{2}$.

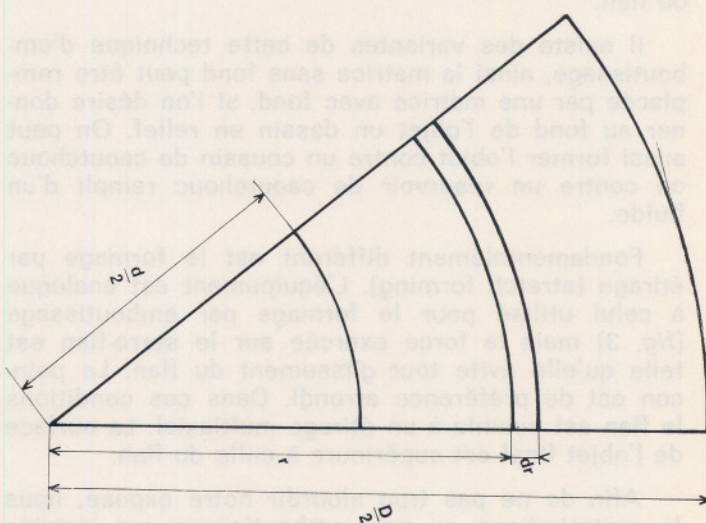


Fig. 5. — Portion d'un flan

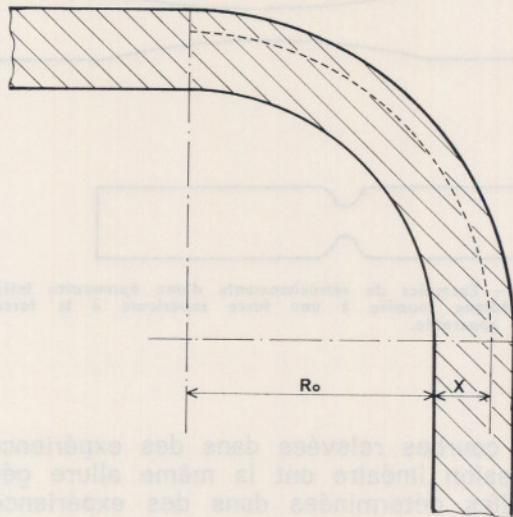


Fig. 6. — Détail de la zone « 4 » de la figure 4

La dilatation unitaire maximum est :

$$\varepsilon_{f, c, \max} = \frac{t}{2 R_o + t} \quad (4)$$

et la compression unitaire maximum :

$$\varepsilon_{f, c, \max} = - \frac{t}{2 R_o + t} \quad (5)$$

après passage de la zone 4, ces déformations disparaissent.

Il nous reste maintenant à analyser les déformations subies par le flan dans la zone 2.

Si nous désignons par R_i le rayon de courbure de l'arrondi du poinçon et si nous admettons que le jeu entre poinçon et matrice est égal à l'épaisseur t , du flan, il n'y a pas de difficulté pour calculer les déformations de la zone 2 pour n'importe quelle valeur de l'enfoncement du poinçon, en reprenant les hypothèses avancées pour l'étude de la zone 4.

Les formules (3), (4) et (5) s'appliquent également ici, il suffit, dans la zone 2, de remplacer, le cas échéant, R_o par R_i . On peut se demander si certaines parties du flan sont soumises successivement à une flexion dans un sens puis dans l'autre et cette question, nous le verrons dans le paragraphe suivant, n'est pas sans importance pratique.

Considérons le poinçon peu de temps après son impact sur le flan (fig. 8).

Soit C_o et C_i les centres des cercles de rayon R_o et R_i , soit α l'angle que fait $C_o C_i$ avec une droite parallèle au fond du poinçon. Portons notre attention sur la ligne inférieure délimitant le flan. La partie de cette ligne qui, après formage, est en flexion débute en A, s'arrête en B et a comme longueur

$$(R_i + t) \frac{\pi}{2}.$$

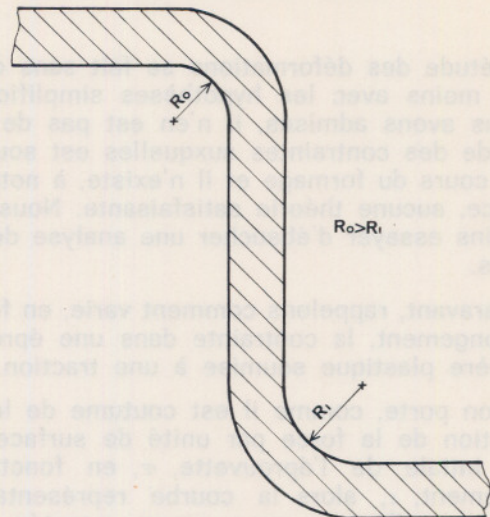


Fig. 7. — Détail de la zone « 2 » de la figure 4 au début du formage

Le segment de la ligne débutant en A et s'arrêtant en T_o au contact du cercle de centre C_o et de rayon R_o a pour longueur

$$(R_i + t) \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) + (R_o + R_i + t) \operatorname{tg} \alpha$$

Pour qu'il n'y ait pas de flexions successives en sens inverses l'une de l'autre, il suffit que

$$R_o > R_i + t$$

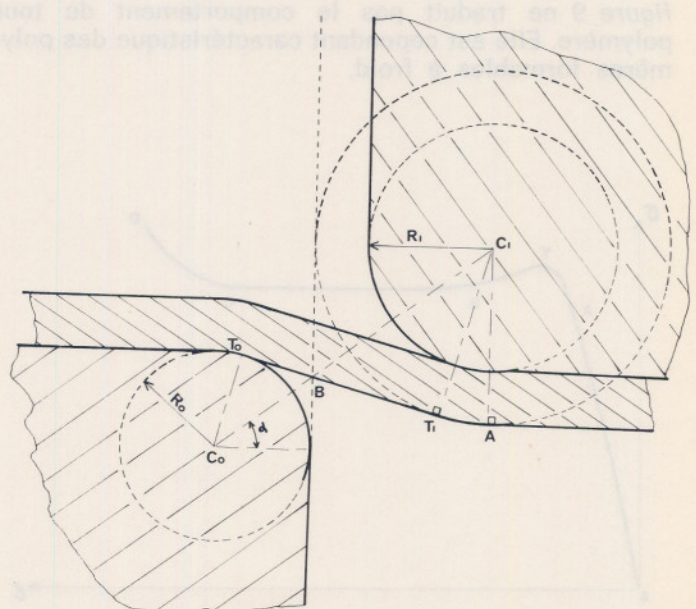


Fig. 8. — Détail des zones « 2 » et « 4 » de la figure 4 aussitôt après l'impact

Etude des contraintes

Si l'étude des déformations se fait sans difficultés, du moins avec les hypothèses simplificatrices que nous avons admises, il n'en est pas de même de l'étude des contraintes auxquelles est soumis le flan au cours du formage et il n'existe, à notre connaissance, aucune théorie satisfaisante. Nous allons néanmoins essayer d'ébaucher une analyse des phénomènes.

Auparavant, rappelons comment varie, en fonction de l'allongement, la contrainte dans une éprouvette en matière plastique soumise à une traction.

Si l'on porte, comme il est coutume de le faire, la variation de la force par unité de surface de la section initiale de l'éprouvette, σ , en fonction de l'allongement, ϵ , alors la courbe représentative a l'allure de celle que nous avons reportée sur la figure 9. Pour les faibles déformations ($< 2-3\%$), le comportement du polymère est celui d'un solide hookien (portion OA de la courbe).

Entre A et B la force passe par un maximum, Y, correspondant à la limite d'élasticité apparente (yield point). La déformation qui lui correspond est de l'ordre de 5 %. De B à C la déformation de l'éprouvette se fait sans variation de la force c'est la région de l'écoulement solide, auquel est fait appel dans le formage à froid. La déformation en C peut être de l'ordre de 400 %. Entre C et D la force augmente à nouveau jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

Si le maximum, Y, est trop prononcé, alors l'éprouvette subit un amincissement non homogène très localisé (fig. 10).

Il est reconnu que cet amincissement est préjudiciable à la formabilité à froid, tout particulièrement lorsqu'il se présente sous la forme d'un rétrécissement très localisé (fig. 10).

Il va de soi que la courbe représentée sur la figure 9 ne traduit pas le comportement de tout polymère. Elle est cependant caractéristique des polymères formables à froid.

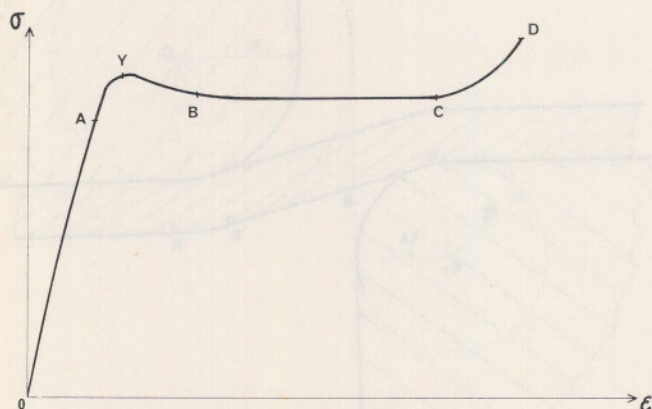


Fig. 9. — Variation de la force par unité de surface de la section initiale d'une éprouvette en fonction de l'allongement

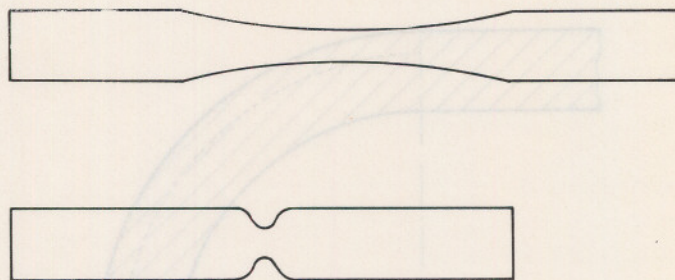


Fig. 10. — Exemples de rétrécissements d'une éprouvette initialement parallélépipédique soumise à une force supérieure à la force limite d'élasticité apparente.

Les courbes relevées dans des expériences de compression linéaire ont la même allure générale que celles déterminées dans des expériences de traction.

Le problème que nous sommes alors amené à résoudre s'énonce de la façon suivante : quelle est la force, F_t , que l'on doit appliquer sur le poinçon et quelle est la pression, p , que l'on doit exercer sur le serre-flan pour former, à partir d'un flan de diamètre D et d'épaisseur t , une coupelle d'égale épaisseur ?

Nous supposons que le poinçon s'est enfoncé d'une hauteur, h , au moment où nous examinons ce problème.

Considérons tout d'abord la région 3 (fig. 4) de la coupelle. Cette région est soumise à la force de traction F_t et aux forces de frottement des parois latérales de la coupelle sur la matrice et sur la paroi du poinçon. Si l'on admet que les pressions exercées sur ces parois, par exemple par suite de la reprise élastique dont il sera question plus loin, restent faibles, alors on peut négliger les forces de frottement et dans ces conditions F_t se transmet intégralement à la région 5 du flan.

Considérons dans cette région une couronne de largeur, dr , à une distance r du centre. Elle est soumise :

— à la force de compression

$$F_p = 2 \pi r dr \times p \quad (6)$$

due à la pression, p , exercée sur le serre-flan,

— à la force de friction, F_f , que l'on peut supposer être proportionnelle à la pression p , à la surface de frottement et au coefficient de friction μ polymère-métal, coefficient qui dépend de multiples facteurs, dont les natures du polymère, du métal et du lubrifiant :

$$F_f = 4 \mu \pi r dr . p \quad (7)$$

— à la force de traction, F'_t . F'_t est différent de F_t car il n'est plus possible, cette fois-ci de négliger les pertes dues aux frottements. Moyennant certaines hypothèses on peut cependant espérer calculer F'_t .

Il est à l'heure actuelle difficile d'établir les relations entre ces forces et les déformations. La théorie la plus apte à répondre de façon satisfaisante aux

conditions imposées est celle du corps plastique idéal. Le lecteur intéressé pourra consulter l'Encyclopédie de Physique [14] de Flügge.

L'une des difficultés, et non la moindre, provient de la non isotropie des propriétés du flan. Cependant, si la symétrie de l'objet formé, permet de supposer que le matériau reste orthotrope (à trois plans de symétrie perpendiculaires), alors le problème se simplifie quelque peu. Le tenseur des contraintes se réduit, en effet, aux trois contraintes de tension principales dirigées radialement, tangentielllement et perpendiculairement au flan.

Nous terminerons ce paragraphe par quelques considérations sur les contraintes auxquelles est soumise la zone 2 (fig. 4). C'est, en effet, une zone d'une grande importance pratique, puisque les déchirures que l'on observe, lorsqu'elles se produisent au cours du formage à froid, intéressent toujours l'angle inférieur de la coupelle.

La raison pourrait en être une dilatation unitaire linéaire particulièrement importante parce qu'il est coutume de choisir le rayon, R_i , de l'arrondi du poinçon environ deux fois plus faible que celui, R_o , de l'arrondi du bord de la matrice. (Une valeur moyenne pour R_o est de six fois l'épaisseur, t , du flan). Mais la dilatation unitaire maximale, calculée dans ces conditions d'après la formule (4), atteint à peine 15 % alors que cette dilatation pour le bord supérieur de la coupelle calculée à partir de (1) est de 100 % (en supposant que le diamètre initial du flan est le double de celui du poinçon).

L'origine de la fragilité pourrait alors être recherchée dans le fait que certaines parties de la zone 2 subissent dans un court intervalle de temps une compression suivie d'une flexion (nous l'avons signalé à la fin du paragraphe précédent) et que ces déformations pourraient donner naissance à une fracture par fatigue. On pourrait également avancer que la matière dans la zone 2 n'a pas bénéficié du renforcement par étirage et compression dont ont bénéficié les autres régions.

Nous estimons cependant que les raisons principales de la fragilité de la zone 2 sont à rechercher ailleurs et nous en proposons deux.

Au début de la transformation, le flan est soumis à l'impact du poinçon et, malgré les arrondis, malgré le jeu entre poinçon et matrice, il ne fait pas de doute que la déchirure de la zone 2 peut être une rupture par choc cisailant. Remarquons que les autres zones ne sont pas soumises à ce type de contrainte.

Par ailleurs, il est peu probable que l'hypothèse de la constance de l'épaisseur puisse être valable dans la zone 2. La matière s'y trouve, en effet, soumise à la totalité de la force de traction, F_t , et l'amincissement qu'entraîne cette traction ne peut vraisemblablement pas être compensé par les forces de compression dues aux contraintes tangentiellles.

A l'appui de cette remarque, nous citerons les résultats de Rohr et al. [7]. Ces auteurs ont relevé un amincissement des parois des coupelles dans la

zone 2 et dans cette zone seulement. Cet amincissement contribue évidemment à la fragilisation de la zone.

Il convient enfin de noter que la coupelle formée reste le siège de contraintes internes qui se manifestent au cours du démoulage par une reprise élastique conférant à l'objet une instabilité dimensionnelle.

Conditions de formabilité à froid d'un polymère

Les considérations qui viennent d'être présentées nous permettent de préciser les propriétés que doit présenter un polymère pour être formable à froid et les conditions dans lesquelles devra se faire le formage.

Il est ainsi indispensable que le polymère possède une bonne résistance au choc à froid.

Il est évident que son module de rigidité doit être élevé.

Il est tout aussi nécessaire que la valeur de la déformation au moment de la rupture par traction ou compression soit grande. Pratiquement il est possible de réduire par emboutissage le diamètre initial de 45 % en une seule opération.

Dans ces conditions la dilatation unitaire maximale par étirage (abstraction faite de la dilatation par flexion), calculée à partir de la formule (1) est :

$$\varepsilon_{e, \max} = 0,82$$

la compression unitaire tangentielle maximale est donnée par la formule (2) :

$$\varepsilon_{c, \max} = 0,45$$

Notons au passage que dans les mêmes conditions la profondeur, h , de la coupelle est :

$$h = \frac{D^2 - d^2}{4d} = 0,32 D \neq 0,6 d$$

Bien que les polymères doivent posséder un grand allongement à la rupture, ils ne doivent pas présenter le phénomène de rétrécissement localisé (necking), car il ne serait pas possible de réaliser des objets d'égale épaisseur. Signalons cependant que la tendance au rétrécissement peut être supprimée par un laminage biaxial à froid.

Moins importantes que les propriétés précédentes sont les valeurs des coefficients de friction statique et dynamique du polymère sur le métal. Elles peuvent, en effet, être ajustées par un usinage approprié des surfaces de la matrice et du poinçon et par l'utilisation de lubrifiant.

Par contre une reprise élastique aussi faible que possible est une propriété primordiale des matières plastiques formables à froid. On admet que les déformations dues à cette reprise ne doivent pas excéder quelque 5-10 %.

On doit d'ailleurs distinguer entre la reprise élastique instantanée, qui se manifeste dès le démoulage,

et la reprise élastique différée. A température ambiante, ce n'est que 24 h après le formage que l'objet formé atteint ses dimensions quasi définitives.

La reprise élastique peut être limitée par une diminution de l'épaisseur du flan, et par une prolongation du temps de séjour dans la matrice. Cette dernière solution cependant se fait au détriment des cadences de production à moins que le maintien dans une forme ne se fasse à l'extérieur de la matrice qui a servi à fabriquer l'objet.

Par contre une élévation de la température de transformation, tout en diminuant les effets de la reprise, est sans influence sur les cadences aussi longtemps qu'elle reste modérée. On perd cependant l'un des avantages essentiels du formage à froid : l'absence de tout traitement thermique. Un compromis consiste à se contenter d'opérer avec un poinçon chauffé.

Enfin, il est possible de contrôler dans une certaine mesure l'importance de la reprise élastique en ajustant la vitesse de formage. Pourtant, deux mécanismes d'effets opposés règlent l'influence de la vitesse de déformation, de sorte que si les vitesses faibles, en favorisant la disparition des contraintes par relaxation, diminuent la reprise élastique, il en est de même des vitesses élevées par suite du dégagement de chaleur par frottements internes. Compte tenu des critères de rentabilité, les vitesses de formage sont, dans la pratique, choisies entre 0,5 et 10 m/min.

Mécanisme moléculaire de formage

Nous terminerons cet exposé par quelques considérations sur le mécanisme moléculaire du formage.

On peut concevoir que ce formage est le résultat soit d'un véritable écoulement, donc d'un déplacement des molécules les unes par rapport aux autres, soit d'une déformation intramoléculaire qui n'affecte pas la position relative des molécules. Or, il se trouve que les objets formés à froid reprennent, après chauffage, la forme et les dimensions du flan à partir duquel ils ont été formés, et ceci exclut l'hypothèse d'un écoulement intermoléculaire.

Il nous reste alors à préciser la nature des déformations intramoléculaires. Nous nous limiterons aux cas des ABS et reprendrons essentiellement le raisonnement de Newman et Stressa [11]. D'après ces auteurs, le mécanisme de la déformation fait intervenir la différence entre le coefficient de Poisson de la phase élastomère et celui de la phase vitreuse. Au cours de la traction, les particules d'élastomère s'allongent sans variation du volume puisque le coefficient de Poisson des élastomères est voisin de 0,5. La phase vitreuse environnante au contraire, phase dont le coefficient de Poisson est en général de l'ordre de 0,33, subit une dilatation en volume. Cette dilatation soumet les particules élastomériques à un système de contraintes triaxiales qui renforcent leur

résistance mécanique et évite ainsi la propagation catastrophique des fissures.

La dilatation volumique de la phase vitreuse est maximum à l'équateur des particules élastomériques (environ 2,5 fois la dilatation moyenne). Au voisinage de l'équateur le volume libre augmente, ce qui se traduit par une diminution localisée de la température de transition vitreuse et par conséquent par un accroissement de la déformabilité.

Cette façon de voir est en bon accord avec les phénomènes de blanchiment observés sur les résines ABS et avec les photographies des régions déformées prises au microscope électronique par Matsuo (fig. 11). On remarquera d'ailleurs sur ces photos que les fissures qui se forment et qui se traduisent macroscopiquement par le blanchiment ne sont pas vides de toute matière, mais que les lèvres de la fissure sont reliées par des fibres. Les chaînes macromoléculaires dans ces fibres sont hautement orientées, ce qui explique qu'un simple chauffage fasse disparaître le blanchiment et redonne à l'objet les dimensions qu'il avait avant déformation.

Bien que nous ne puissions pas ici entrer dans les détails, il va de soi que la formabilité des résines ABS dépend de tous les paramètres qui définissent cette résine et, en particulier, de l'adhésivité entre les deux phases.

L'importance du volume libre est également mise en évidence par les expériences de Morbitzer et al. [8]. Ces auteurs ont montré que la formabilité à froid des résines ABS chute si on les stocke pendant 15 h à 85°C, mais que la formabilité initiale était récupérée par un simple chauffage pendant 1 h à 115°C. Ils proposent pour interpréter ces phénomènes l'explication que Retting avait avancée dans son étude de la variation de la résistance au choc des

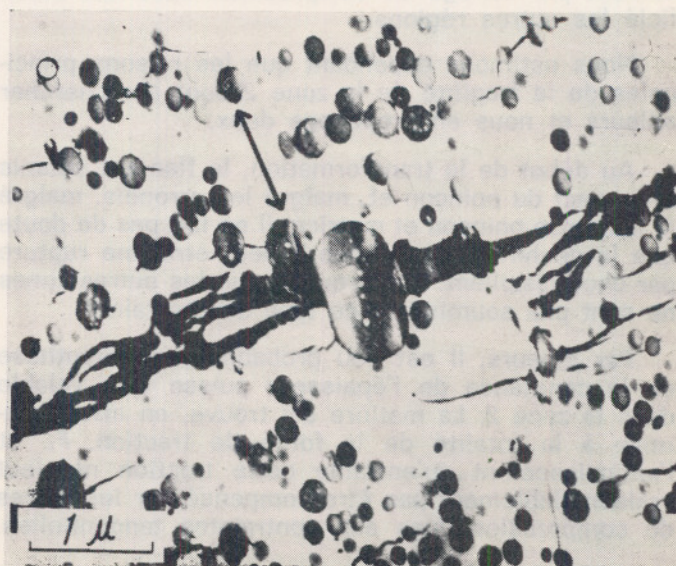


Fig. 11. — Cliché au microscope électronique d'une coupe à travers un échantillon d'ABS soumis à une contrainte dans le sens de la flèche (M. Matsuo — Polym. Eng. Sc. 1969, 9, n° 3, p. 207)

poly (chlorures de vinyle) ; cette explication est basée sur les variations du volume libre avec la température et le temps.

Signalons enfin les études comparatives de Benham et Mc Cammond [12] sur le fluage du polyméthacrylate de méthyle, du poly (chlorure de vinyle) et du polypropylène, études qui ont bien mis en évidence l'importance du coefficient de Poisson.

CONCLUSION

Arrivé au terme de cet exposé une conclusion s'impose : il n'existe pas, à l'heure actuelle, de théorie satisfaisante du formage à froid des matières plastiques. Ainsi, malgré un grand nombre d'hypothèses simplificatrices, il n'est pas possible de calculer les contraintes auxquelles est soumis le flan au cours de sa transformation. Cet échec rend impossible la caractérisation de façon tant soit peu précise des propriétés que doit posséder une matière plastique pour être formable à froid.

Par cet exposé, nous espérons néanmoins avoir réussi à montrer l'intérêt pratique et l'intérêt théorique d'une analyse plus poussée du formage à froid des polymères.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. GRUENEWALD. — *Mod. Pl.* 1960 38 137.
- [2] S. UENO, H. YAMAZAKI, T. OUE, K. ITO, M. TSUTSUI. — *Trans. Soc. Rheol.* 1966 10 627.
- [3] G.R. SMOLUK, M.B. KLAUS. — *Pl. Mod. et Elast.* 1968 20 n° 3 p. 87.
- [4] G.R. SMOLUK, M.B. KLAUS. — *Pl. Mod. et Elast.* 1968 20 n° 5 p. 80.
- [5] V.E. MALPASS. — *Appl. polym. Symp.* 1969 n° 12 19.
- [6] H. EBNETH, K. HEIDENREICH, H. RÖHR. — *Kunstst.* 1970 60 n° 1, 15.
- [7] H. RÖHR, K. HEIDENREICH, H. EBNETH. — *Kunstst.* 1970 60 n° 11, 822.
- [8] L. MORBITZER, R. HOLM, U. BRENNEISEN, K. HEIDENREICH, H. RÖHR. — *Kunstst.* 1970 60 n° 11, 861.
- [9] H.L. LI, P. KOCH, D.C. PREVORSEK, H.J. OSWALD. — *Polym. Eng. Sc.* 1971 11 n° 2, 99.
- [10] K.F. WISSBRUN. — *Polym. Eng. Sc.* 1971 11 n°, 28.
- [11] S. NEWMAN, S. STRELLA. — *J. Appl. Polym. Sc.* 1965, 9 2297.
- [12] P.P. BENHAM, D. Mc. CAMMOND. — *Plast. And Polym.* 1971 39 n° 140, 130.
- [13] H.L. LI, P. KOCH, D.C. PREVORSEK, H.J. OSWALD. — *Plastic Deformation of polymers*, Edité par A. Peterlin - Marcel Dekker Inc. N. Y. 1971 p. 227.
- [14] S. FLÜGGE. — *Encyclopedia of Physics*, Volume VI, Elasticity and Plasticity Springer Verlag 1958.
- [15] M. MATUO. — *Polymer Eng. Sc.* 1969 9 n° 3, 206.

SUMMARY

Some viscoplastic bodies and especially fresh mortars present the phenomenon of partial thixotropy: when a shearing action occurs a structural breakdown appears causing a decrease in function of time of the coefficient of plastic viscosity and of the yield value: even long periods at rest are not enough for a complete structural reorganization.

Détermination des caractéristiques rhéologiques des corps viscoplastiques à thixotropie partielle, application aux mortiers frais*

par Cl. LEGRAND

Docteur ès sciences

RESUME

Certains corps viscoplastiques et notamment les mortiers frais présentent le phénomène de thixotropie partielle : sous l'action d'un cisaillement, leur structure se dégrade en entraînant une diminution, en fonction du temps, du coefficient de viscosité plastique et du seuil de cisaillement, les temps de repos, même prolongés, ne suffisant pas à réorganiser la structure.

L'auteur montre comment on peut exploiter les résultats des mesures effectuées sur de tels corps à l'aide d'un viscosimètre à mobile tournant. Pour cela, des courbes théoriques sont comparées à des diagrammes expérimentaux afin de vérifier le bien-fondé des hypothèses simplificatrices formulées au départ. La théorie permet alors de dresser le bilan des interprétations erronées qu'on peut donner des résultats expérimentaux et de montrer que les seules caractéristiques rhéologiques accessibles sont :

— le seuil de cisaillement de la substance avant que celle-ci ait commencé à s'écouler,

— sa courbe d'écoulement lorsque sa structure est parvenue à un maximum de dégradation.

L'auteur tire alors les conséquences de cette restriction sur les mesures en rhéologie des mortiers.

SUMMARY

Some viscoplastic bodies and especially fresh mortars, present the phenomenon of partial thixotropy: when a shearing action occurs, a structural breakdown appears causing a decrease, in function of time, of the coefficient of plastic viscosity and of the yield value; even long periods at rest are not enough for a complete structural reorganization.

The author shows how to treat the results of measurements realized on such bodies with a rotating bob viscosimeter. To that end, theoretical curves are compared with experimental diagrams in order to confirm the accuracy of the simplified hypothesis put forward at the beginning of the paper. The theory allows us to draw up a list of erroneous interpretations that can be made from experimental results and to show that the only rheological characteristics we can get are :

— the yield value of the body before any flow occurs,

— its flow curve when the structural breakdown has reached its maximum state.

Then, the author draws the consequences of this restriction on measurements in rheology of mortars.

Dans tous les viscosimètres à mobile tournant, la contrainte de cisaillement τ_R et le gradient de vitesse $\dot{\epsilon}_R$ à la paroi du mobile sont calculés à partir du couple résistant qui s'oppose au mouvement de ce mobile et de sa vitesse de rotation Ω_m par la formule de Reiner-Riwlin [1].

Le couple résistant est en général mesuré par un dynamomètre intercalé entre l'axe du mobile et l'axe d'entraînement et c'est à ce dernier qu'on impose différentes vitesses de rotation Ω .

En couplant le dynamomètre à un enregistreur, on peut obtenir la variation de τ_R en fonction du temps pour chaque valeur de la vitesse d'entraînement Ω . C'est ce que nous avons fait en opérant sur des mortiers frais.

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

1. INFLUENCE DU TEMPS SUR LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT DANS LES MORTIERS FRAIS

1.1. Etude expérimentale

Pour tous les mortiers, les enregistrements sont analogues à celui de la figure 1 (d : déviation de la plume proportionnelle à τ_R).

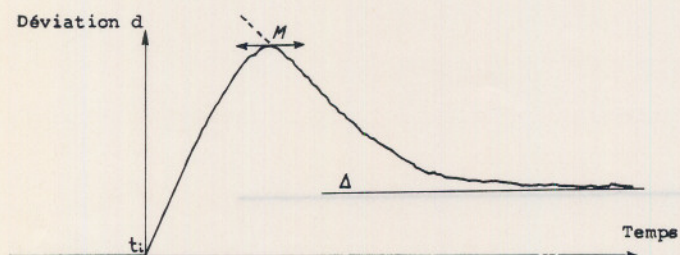


Fig. 1

La contrainte croît, puis décroît très rapidement et tend, ensuite, à se stabiliser. Le phénomène de décroissance est dû à la destruction de la structure du mélange sous l'action du cisaillement, comme l'ont déjà observé A.A. Nessim et R.L. Wajda [2]. Ces derniers ont constaté, également, que cette structure ne se reconstituait que très partiellement, même après des temps de repos assez longs; les mortiers frais au repos présentent donc le phénomène de thixotropie partielle.

Lorsque, avec un même mortier, on répète la même expérience pour des valeurs de la vitesse d'entraînement Ω de plus en plus élevées, on constate que l'asymptote Δ de la courbe enregistrée se rapproche du maximum M . Pour des valeurs de Ω suffisamment grandes, l'enregistrement prend la forme reproduite sur la figure 2. En apparence, la thixotropie a disparu, ce qui est difficilement admissible; en effet, si la structure d'une substance se détruit pour des vitesses de cisaillement faibles, il n'y a pas de raison pour qu'elle devienne stable pour des vitesses plus élevées.

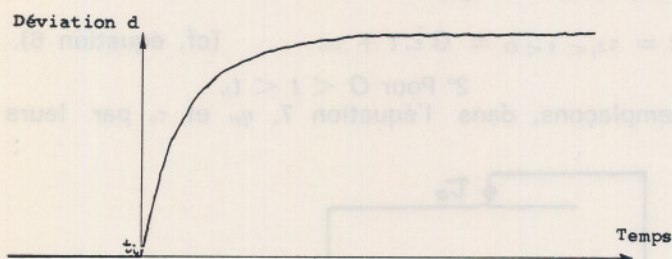


Fig. 2

1.2. Etude théorique

1.2.1. HYPOTHESES

Le comportement rhéologique des mortiers au repos est en général binghamien (3). Leur équation

d'état rhéologique est donc de la forme :

$$\tau = \tau_o + \eta_{pl} \dot{\varepsilon}$$

La thixotropie partielle se caractérise, comme nous l'avons vu, par une destruction progressive de la structure sous l'action du cisaillement. Il est logique de penser que les coefficients η_{pl} et τ_o suivent cette dégradation, c'est-à-dire qu'ils dépendent du temps suivant des lois monotones décroissantes $\eta_{pl} = \eta_{pl}(t)$ et $\tau_o = \tau_o(t)$. La connaissance de ces lois permettrait de déterminer l'équation d'état rhéologique; en effet, en remplaçant η_{pl} et τ_o par leurs expressions dans l'équation d'état rhéologique d'un corps binghamien on a :

$$\tau(t, \dot{\varepsilon}) = \tau_o(t) + \eta_{pl}(t) \dot{\varepsilon}$$

Mais ces lois sont malheureusement inconnues. Nessim et Wajda ayant observé que la destruction de la structure tendait à se stabiliser, nous avons admis que les variations de τ_o et de η_{pl} en fonction du temps pouvaient se représenter par les courbes de la figure 3. Nous avons ainsi supposé que l'instant où le mortier commence à s'écouler se situe au temps $t = 0$ et que,

$$\text{lorsque } 0 < t < t_i \begin{cases} \tau_o(t) = -\beta t + \tau_{oo} \\ \eta_{pl}(t) = -\alpha t + \eta_o \end{cases} \quad (\text{équations 1})$$

$$\text{et, lorsque } t > t_i \begin{cases} \tau_o(t) = \tau_{oo} \\ \eta_{pl}(t) = \eta_{\infty} \end{cases} \quad (\text{équations 2}).$$

Des équations précédentes, on tire :

$$t_i = \frac{\eta_o - \eta_{\infty}}{\alpha} = \frac{\tau_{oo} - \tau_o}{\beta} \quad (\text{équations 3}).$$

En vertu des hypothèses précédemment énoncées, l'équation d'état rhéologique théorique est :

$$\tau \quad 0 < t < t_i = \tau_{oo} - \beta t + (\eta_o - \alpha t) \dot{\varepsilon} \quad (\text{équation 4}).$$

$$\text{ou } \tau \quad t > t_i = \tau_{oo} + \eta_{\infty} \dot{\varepsilon} \quad (\text{équation 5}).$$

Les lois réelles $\eta_{pl} = \eta_{pl}(t)$ et $\tau_o = \tau_o(t)$ ne sont probablement pas linéaires discontinues; mais les représentations que nous leur avons données, tout en simplifiant les calculs, permettent d'expliquer les phénomènes observés lors des mesures rhéologiques des corps à thixotropie partielle, ce qui est le but recherché dans cette étude.

1.2.2. MODELE RHEOLOGIQUE

Un fluide binghamien peut être représenté par un patin et un amortisseur placés en parallèle. Le patin caractérise le seuil de cisaillement τ_o et l'amortisseur la viscosité plastique η_{pl} .

Le dynamomètre du viscosimètre peut être représenté par un ressort, de rigidité G , placé en série avec le modèle précédent (figure 4). Nous supposons, par la suite, que $G > \alpha$.

Le point A est fixe. Le point C simule l'axe du mobile; la vitesse de C simule donc le gradient de

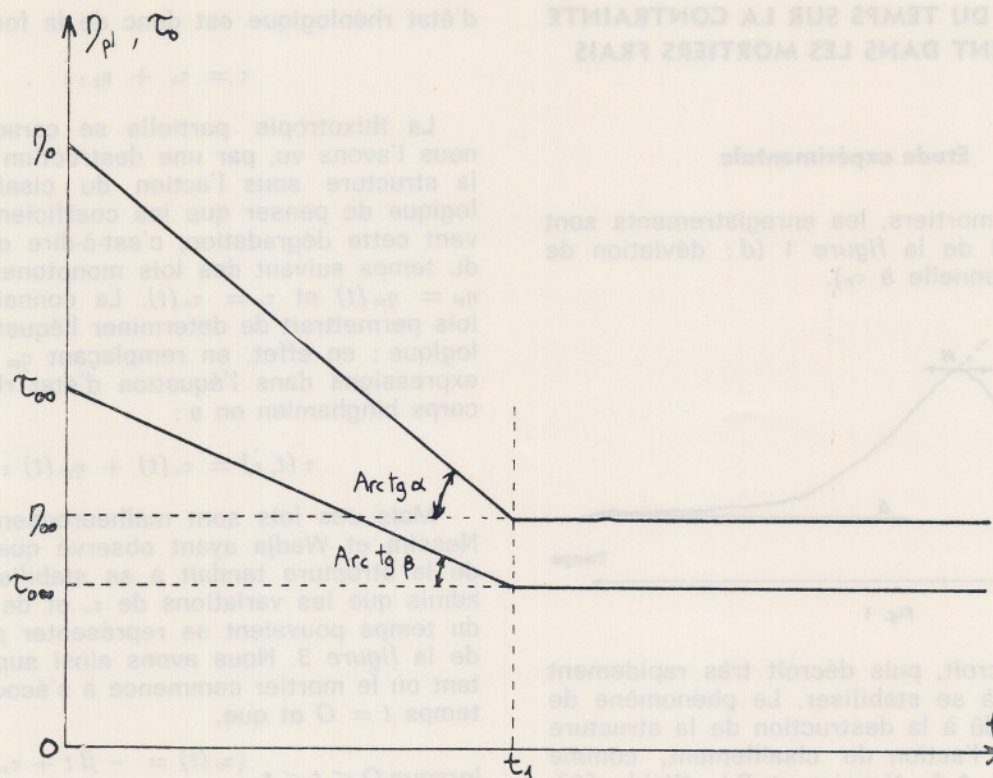


Fig. 3

vitesse $\dot{\varepsilon}_1$ dans la substance. Le point B simule l'axe d'entraînement du viscosimètre ; sa vitesse simule donc le gradient de vitesse $\dot{\varepsilon}_0$ que l'on obtiendrait en appliquant l'équation de Reiner-Riwlin ; pour une vitesse d'entraînement Ω constante, $\dot{\varepsilon}_0$ est constant.

1.2.3. EQUATION DIFFERENTIELLE DE L'EQUILIBRE

Appelons instant initial t_i le moment où on commence à exercer un couple sur l'axe d'entraînement du viscosimètre ($t_i < 0$).

Tant que la contrainte τ exercée en B est inférieure à τ_{00} , le point C est fixe. On a :

$$\tau = G \dot{\varepsilon}_0 t + \tau_{00} \quad (\text{équation 6})$$

avec $\tau = \tau_{00}$ pour $t = 0$.

Lorsque $t > 0$, on a :

$$\tau = \tau_0 + \eta_{pl} \dot{\varepsilon}_1, \text{ soit } \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\tau - \tau_0}{\eta_{pl}}$$

On a également :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\tau}{G} \quad (\text{vitesse de déformation du ressort}).$$

Par conséquent :

$$\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \frac{\tau - \tau_0}{\eta_{pl}} + \frac{\tau}{G}, \text{ soit encore} \quad (\text{équation 7}).$$

$$\frac{\tau}{G} + \frac{\tau}{\eta_{pl}} = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\tau_0}{\eta_{pl}}$$

1.2.4. EXPRESSIONS DE LA LOI $\tau = \tau(t)$

1° Pour $t_i < t < 0$,

nous avons vu que :

$$\tau = \tau_{t_i < t < 0} = G \dot{\varepsilon}_0 t + \tau_{00} \quad (\text{cf. équation 6}).$$

2° Pour $0 < t < t_1$,

remplaçons, dans l'équation 7, η_{pl} et τ_0 par leurs

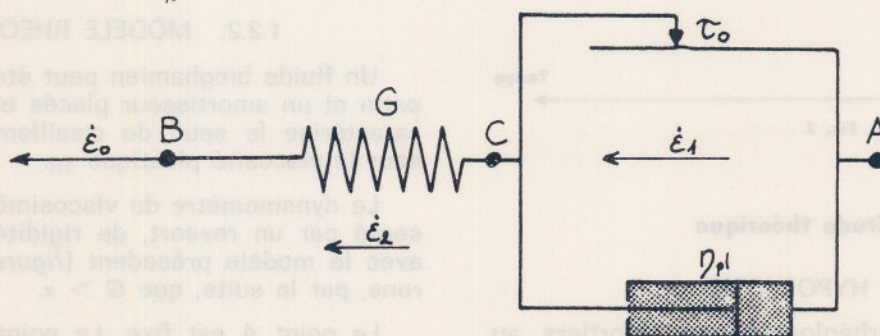


Fig. 4

expressions données par les équations 1 ; il vient :

$$\frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta_0 - \alpha t} = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\tau_{00} - \beta t}{\eta_0 - \alpha t}$$

Essayons une intégrale particulière de la forme

$\tau = A t + B$. On a :

$$t \left(-\frac{A \alpha}{G} + A + \alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta \right) \frac{A \eta_0}{G} + B - \dot{\varepsilon}_0 \eta_0 - \tau_{00} = 0,$$

$$\text{d'où } A = -\frac{G}{G - \alpha} (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta)$$

$$\text{et } B = \frac{\eta_0}{G - \alpha} (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) + \tau_{00} + \dot{\varepsilon}_0 \eta_0.$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est égale à :

$$\tau = K (\eta_0 - \alpha t)^{\frac{G}{\alpha}}, \text{ d'où :}$$

$$\tau = K (\eta_0 - \alpha t)^{\frac{G}{\alpha}} - \frac{G}{G - \alpha} (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) t$$

$$+ \frac{\eta_0}{G - \alpha} (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) + \tau_{00} + \dot{\varepsilon}_0 \eta_0.$$

Pour $t = 0$, il faut que $\tau = \tau_{00}$, soit :

$$\tau_{00} = K \eta_0^{\frac{G}{\alpha}} + \frac{\eta_0}{G - \alpha} (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) + \tau_{00}$$

+ $\dot{\varepsilon}_0 \eta_0$, soit encore :

$$K = -\eta_0^{-\frac{G}{\alpha}} \left[\dot{\varepsilon}_0 \eta_0 + \frac{\eta_0}{G - \alpha} (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) \right]$$

$$= -\eta_0^{\frac{G-\alpha}{\alpha}} \frac{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha}$$

En définitive :

$$\tau_{0 < t < t_1} = -\eta_0^{\frac{G-\alpha}{\alpha}} \frac{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} (\eta_0 - \alpha t)^{\frac{G}{\alpha}} + \frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} (\eta_0 - G t) + \tau_{00} + \dot{\varepsilon}_0 \eta_0 \quad (\text{équation 8}).$$

3° Pour $t > t_1$,

remplaçons, dans l'équation 7, η_{pl} et τ_0 par leurs expressions données par les équations 2 ; il vient :

$$\frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta_{\infty}} = \dot{\varepsilon}_0 + \frac{\tau_{0\infty}}{\eta_{\infty}}. \text{ On a, en intégrant :}$$

$$\tau = K e^{-\frac{G}{\eta_{\infty}} t} + \tau_{0\infty} + \eta_{\infty} \dot{\varepsilon}_0.$$

Pour $t = t_1$, $\tau = \tau_1$ (l'expression de τ_1 est donnée en faisant $t = t_1$ dans l'équation 8). En définitive :

$$\tau_{t > t_1} = (\tau_1 - \tau_{0\infty} - \eta_{\infty} \dot{\varepsilon}_0) e^{-\frac{G}{\eta_{\infty}} (t - t_1)} + \tau_{0\infty} + \eta_{\infty} \dot{\varepsilon}_0 \quad (\text{équation 9}).$$

1.2.5. GRAPHES DES FONCTIONS $\tau = \tau(t)$

(figures 5 et 6)

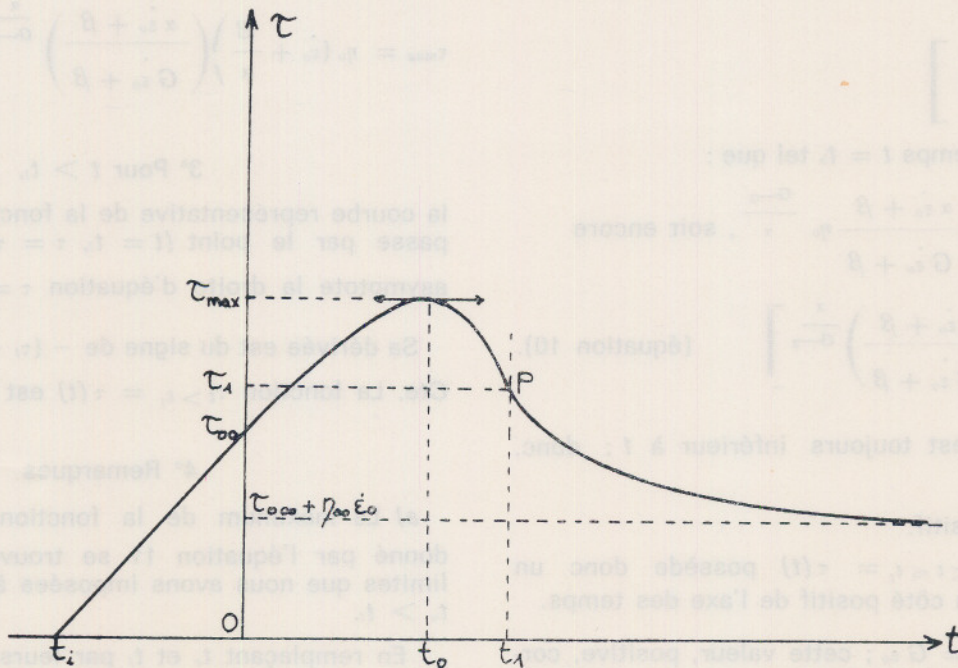


Fig. 5

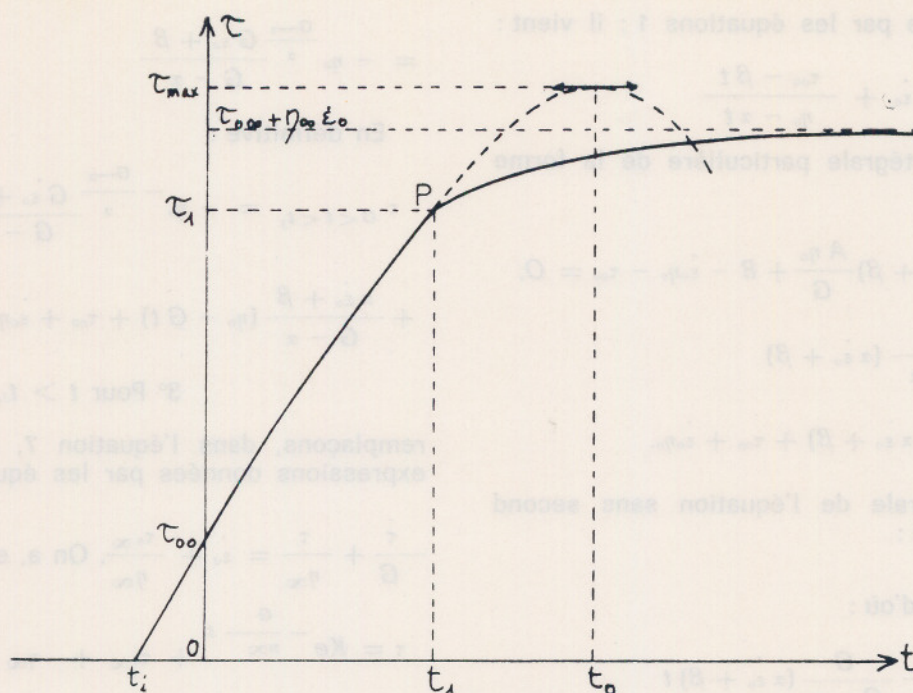


Fig. 6

1° Pour $t_i < t < 0$,

la courbe représentative de la fonction $\tau = \tau(t)$ est une droite de pente $G \dot{\varepsilon}_0$ passant par les points ($t = 0$, $\tau = \tau_{00}$) et ($t = t_i$, $\tau = 0$).

2° Pour $0 < t < t_i$,

analysons la fonction $\tau_{00} < t < t_i = \tau(t)$ donnée par l'équation 8.

$$\dot{\tau} = \frac{G}{G - \alpha} \left[\eta_0 - \frac{G - \alpha}{\alpha} (G \dot{\varepsilon}_0 + \beta) (\eta_0 - \alpha t) \frac{G - \alpha}{\alpha} - (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) \right]$$

$\dot{\tau}$ s'annule au temps $t = t_0$ tel que :

$$(\eta_0 - \alpha t_0) \frac{G - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \eta_0 \frac{G - \alpha}{\alpha}, \text{ soit encore}$$

$$t_0 = \frac{\eta_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G - \alpha}} \right] \quad (\text{équation 10}).$$

$$\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \text{ est toujours inférieur à } 1; \text{ donc,}$$

t_0 est toujours positif.

La fonction $\tau_{00} < t \leq t_i = \tau(t)$ possède donc un extremum situé du côté positif de l'axe des temps.

Pour $t = 0$, $\dot{\tau} = G \dot{\varepsilon}_0$; cette valeur, positive, correspond à la pente de la droite $\tau_{t_i} < t < 0 = \tau(t)$. Il n'y

a donc pas de discontinuité, de graphe pour $t = 0$ et la courbe est croissante entre 0 et t_0 ; l'extremum est donc un maximum.

Calculons la valeur $\tau_{max} = \tau(t_0)$. Faisons pour cela $\dot{\tau} = 0$ dans l'équation 7; il vient :

$$\tau_{max} = \eta_{pl} \dot{\varepsilon}_0 + \tau_{00}, \text{ soit}$$

$$\tau_{max} = \dot{\varepsilon}_0 (\eta_0 - \alpha t_0) + \tau_{00} - \beta t_0.$$

Remplaçons t_0 par son expression donnée par l'équation 10. On a :

$$\tau_{max} = \eta_0 \left(\dot{\varepsilon}_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G - \alpha}} - \frac{\beta \eta_0}{\alpha} + \tau_{00} \quad (\text{équation 11}).$$

3° Pour $t > t_i$,

la courbe représentative de la fonction $\tau_{t \leq t_i} = \tau(t)$ passe par le point ($t = t_i$, $\tau = \tau_i$) et admet pour asymptote la droite d'équation $\tau = \tau_{0\infty} + \eta_{\infty} \dot{\varepsilon}_0$.

Sa dérivée est du signe de $-(\tau_i - \tau_{0\infty} - \eta_{\infty} \dot{\varepsilon}_0) = Cte$. La fonction $\tau_{t > t_i} = \tau(t)$ est donc monotone.

4° Remarques

a) Le maximum de la fonction $\tau_{0 < t < t_i} = \tau(t)$, donné par l'équation 11 se trouve en dehors des limites que nous avons imposées à cette fonction si $t_0 > t_i$.

En remplaçant t_0 et t_i par leurs expressions données respectivement par les équations 10 et 3,

$t_0 < t_1$ s'écrit :

$$\frac{\eta_0}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} \right] < \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\alpha}, \text{ soit encore}$$

$$\left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} > \frac{\eta_\infty}{\eta_0}.$$

$t_0 > t_1$ s'écrit alors :

$$\left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} < \frac{\eta_\infty}{\eta_0}.$$

b) Le point d'intersection P des courbes représentatives des fonctions $\tau_{0 < t < t_1}(t)$ et $\tau_{t > t_1}(t)$ a pour coordonnées (t_1, τ_1) . La courbe $\tau_{t > t_1}(t)$ admet pour asymptote la droite d'équation $\tau = \tau_{0\infty} + \eta_\infty \dot{\varepsilon}_0$. Appelons $\Delta \tau_1$ la distance entre P et l'asymptote. On a :

$$\Delta \tau_1 = \tau_1 - (\tau_{0\infty} + \eta_\infty \dot{\varepsilon}_0).$$

On obtient τ_1 en faisant $t = t_1$ dans l'équation 8.

On a alors :

$$\Delta \tau_1 = -\eta_0 - \frac{G-\alpha}{\alpha} \frac{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} (\eta_0 - \alpha t_1)^{\frac{G}{\alpha}} + \frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} (\eta_0 - G t_1) + \tau_{00} - \tau_{0\infty} + \dot{\varepsilon}_0 (\eta_0 - \eta_\infty).$$

Or, d'après les équations 3,

$$\tau_{00} - \tau_{0\infty} = \beta t_1$$

$$\text{et } \eta_0 - \eta_\infty = \alpha t_1.$$

On a donc :

$$\Delta \tau_1 = -\eta_0 - \frac{G-\alpha}{\alpha} \frac{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} (\eta_0 - \alpha t_1)^{\frac{G}{\alpha}} + \frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 \beta}{G - \alpha} (\eta_0 - \alpha t_1).$$

Remplaçons t_1 par l'un ou l'autre de ses expressions ; il vient :

$$\Delta \tau_1 = -\eta_0 - \frac{G-\alpha}{\alpha} \frac{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} \eta_\infty^{\frac{G}{\alpha}} + \frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G - \alpha} \eta_\infty.$$

Nous aurons :

$$\Delta \tau_1 > 0 \text{ si } \eta_0^{\frac{G-\alpha}{\alpha}} (G \dot{\varepsilon}_0 + \beta) \eta_\infty^{\frac{G}{\alpha}} < (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) \eta_\infty$$

ou, ce qui revient au même, si :

$$\left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} > \frac{\eta_\infty}{\eta_0}.$$

Cela correspond à la condition $t_0 < t_1$ (cf. remarque précédente).

De même, $\Delta \tau_1 < 0$ si $t_0 > t_1$.

CONCLUSION

La fausse-thixotropie, caractérisée théoriquement par les équations 1 et 2 conduit aux trois expressions de τ en fonction de t données par les équations 6, 8 et 9.

Si $\left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} > \frac{\eta_\infty}{\eta_0}$, le graphe passe par un maximum (τ_{max}, t_0) ; il coupe la droite $t = t_1$ en un point d'ordonnée $\tau_1 > \tau_{0\infty} + \eta_\infty \dot{\varepsilon}_0$ (puisque $\Delta \tau_1 > 0$) (fig. 5).

Si $\left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} < \frac{\eta_\infty}{\eta_0}$, le graphe est toujours croissant, il coupe la droite $t = t_1$ en un point d'ordonnée $\tau_1 < \tau_{0\infty} + \eta_\infty \dot{\varepsilon}_0$ (fig. 6).

1.3. Comparaison entre l'étude expérimentale et l'étude théorique

Nous voyons que les deux types de graphes théoriques correspondent aux deux types d'enregistrements (cf. fig. 1 et 2).

$$\text{Posons } y = \left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{\alpha}{G-\alpha}} \text{ et } x = \frac{\eta_\infty}{\eta_0}.$$

Pour un mortier donné, α , β , η_∞ et η_0 sont des constantes. La figure 7 représente les lois de variation de y et de x en fonction de $\dot{\varepsilon}_0$. Nous voyons que pour $\dot{\varepsilon}_0 < \dot{\varepsilon}_0^*$, $y > x$ et pour $\dot{\varepsilon}_0 > \dot{\varepsilon}_0^*$, $y < x$; on passe donc du graphe de la figure 5 à celui de la figure 6 lorsque $\dot{\varepsilon}_0$ augmente, ce qui est en accord avec l'expérience (cf. § 1-1).

Dans un cas comme dans l'autre, il y a destruction de la structure ; un diagramme analogue à celui de la figure 2 correspond donc aussi à un corps présentant une thixotropie partielle.

2. CONSÉQUENCES SUR L'INTERPRÉTATION DES ENREGISTREMENTS

L'équation de Reiner-Riwlin donnant le gradient de vitesse $\dot{\varepsilon}_R$ correspondant à la contrainte de cisail-

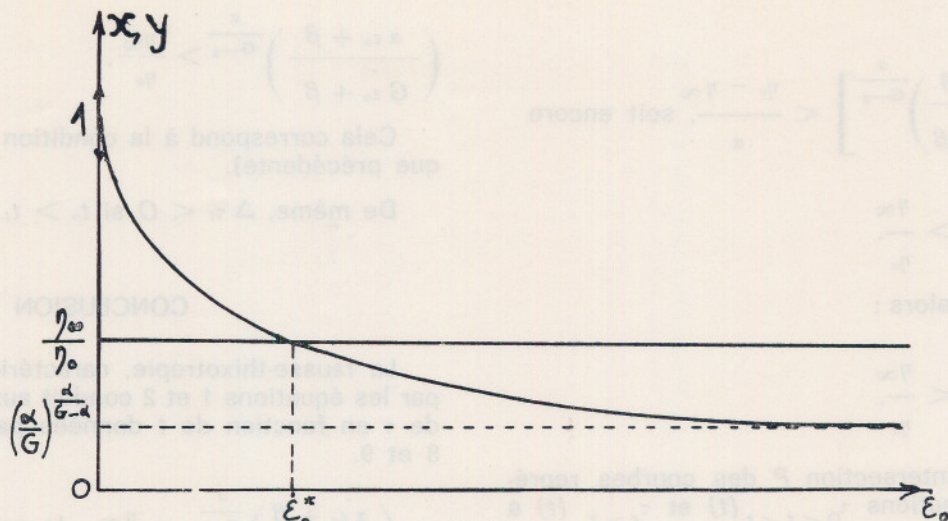


Fig. 7

lement τ_R en fonction de la vitesse d'entraînement Ω suppose que la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_2$ du dynamomètre est nulle. Dans ce cas là, le gradient de vitesse $\dot{\varepsilon}_1$ dans le mortier est égal au gradient de vitesse $\dot{\varepsilon}_0$ calculé à partir de Ω .

L'étude théorique précédente nous permet d'écrire la loi de variation de ε_2 en fonction du temps et de déterminer dans quelle mesure cette condition est respectée.

Nous savons que $\varepsilon_2 = \frac{\tau}{G}$.

Lorsque $t_i < t < 0$, $\tau = G \varepsilon_0$, soit $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$.

Lorsque $0 < t < t_i$, on a :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{G-\alpha} \left[\eta_0 \frac{G-\alpha}{\alpha} (G \dot{\varepsilon}_0 + \beta) (\eta_0 - \alpha t)^{\frac{G-\alpha}{\alpha}} - (\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta) \right] \quad (\text{équation 12}).$$

Lorsque $t > t_i$, on a :

$$\dot{\varepsilon}_2 = - \frac{\tau_i - \tau_{0\infty} - \eta_{\infty} \dot{\varepsilon}_0}{\eta_{\infty}} e^{-\frac{G}{n\alpha}(t-t_i)} \quad (\text{équation 13}).$$

Si la rigidité G du ressort était infinie, on aurait $\varepsilon_2 \equiv 0$ quel que soit t ; malheureusement, la précision d'un dynamomètre est d'autant plus grande que sa rigidité est faible; ε_2 est donc différent de zéro, comme en témoignent les graphes des fonctions données par les équations 12 et 13 (fig. 8 et 9).

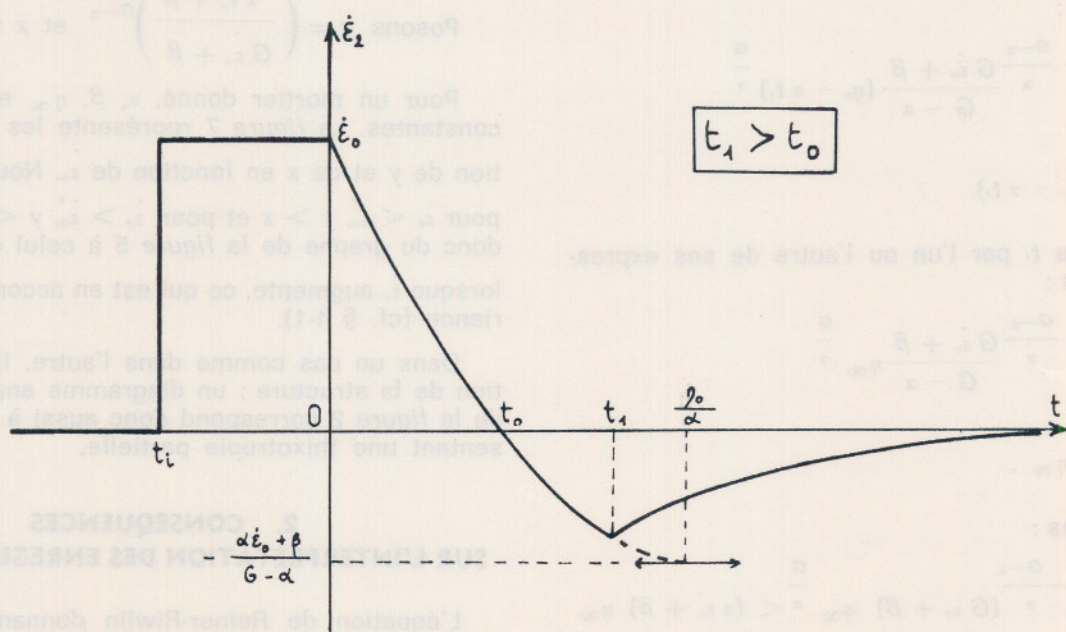


Fig. 8

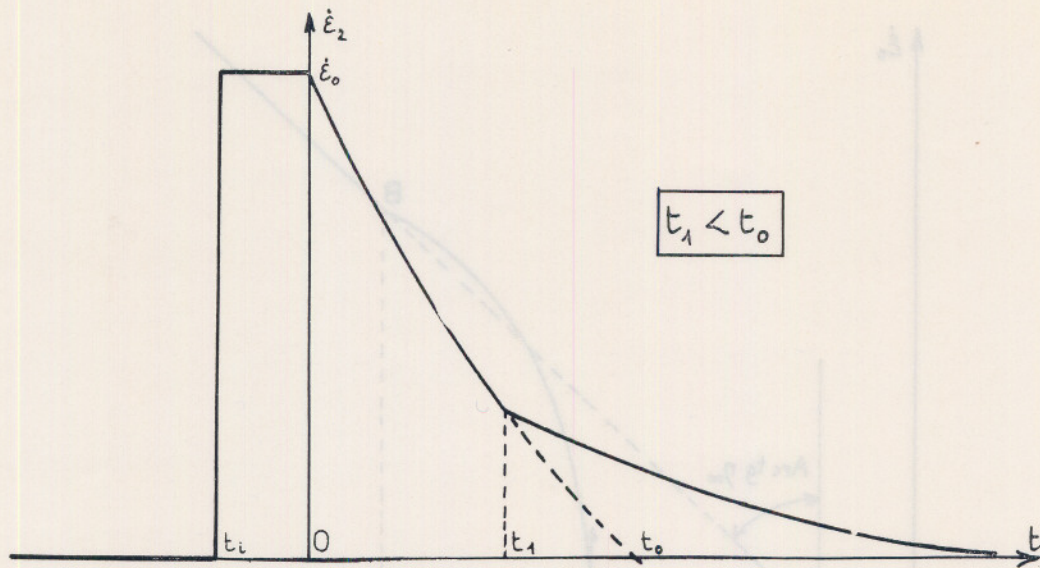


Fig. 9

L'étude théorique précédente conduit à considérer comme erronées certaines interprétations d'enregistrements de mesures effectuées sur des substances viscoplastiques présentant le phénomène de thixotropie partielle, pour les raisons que nous allons énumérer.

1° Les courbes $\tau = f(\dot{\varepsilon}_0, t)$ obtenues en calculant, à chaque instant t (sauf t_0) le gradient de vitesse $\dot{\varepsilon}_0$ à partir de Ω ne sont pas des courbes d'écoulement puisque $\dot{\varepsilon}_2$ est différent de zéro quel que soit t .

2° On n'a pas le droit d'extrapoler, comme nous l'avons fait en pointillé sur la figure 1, la courbe enregistrée jusqu'à l'instant $t = 0$ pour obtenir la contrainte initiale; nous savons, en effet, que cette courbe n'est pas monotone (cf. fig. 4).

3° Les courbes obtenues en faisant des montées et descentes continues en vitesses et en enregistrant simultanément τ ne sont pas des courbes d'écoulement, du fait même de l'existence, à tout instant, de $\dot{\varepsilon}_2$.

4° Dans certains ouvrages, on trouve, comme courbe d'écoulement de la substance vierge de tout cisaillement, la courbe $\tau = \tau_{max}(\dot{\varepsilon}_0)$; lorsque l'enregistrement ne présente plus de maximum, c'est la valeur de τ donnée par l'asymptote, soit $\tau = \tau_{0\infty} + \eta_{\infty}\dot{\varepsilon}_0$, qui est prise; ceci conduit à un graphe $\tau(\dot{\varepsilon}_0)$ semblable à la courbe d'écoulement d'un corps visco-plastique dilatant devenant binghamien seulement pour des valeurs élevées de $\dot{\varepsilon}_0$.

D'après l'équation 11 on a, en dérivant par rapport à $\dot{\varepsilon}_0$:

$$\frac{\partial \tau_{max}}{\partial \dot{\varepsilon}_0} = \eta_0 \left(\frac{\alpha \dot{\varepsilon}_0 + \beta}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta} \right)^{\frac{x}{G-x}} \frac{G \dot{\varepsilon}_0}{G \dot{\varepsilon}_0 + \beta}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{max}}{\partial \dot{\varepsilon}_0} &= 0 \text{ pour } \dot{\varepsilon}_0 = 0, \text{ soit } \tau_{max} = \tau_{00}; \text{ pour } \dot{\varepsilon}_0 > 0, \\ \frac{\partial \tau_{max}}{\partial \dot{\varepsilon}_0} &> 0. \end{aligned}$$

La fonction $\tau_{max}(\dot{\varepsilon}_0)$ passe donc par un minimum ($\tau_{max} = \tau_{00}, \dot{\varepsilon}_0 = 0$) (figure 10).

Lorsque $\tau > \tau_1$ (cf. équation 9), on a :

$\tau_{max} = \tau_{\infty} = \tau_{0\infty} + \eta_{\infty}\dot{\varepsilon}_0$. Le graphe théorique de la fonction $\tau_{max}(\dot{\varepsilon}_0)$ est bien conforme au comportement rhéologique précédemment évoqué.

Il convient de remarquer que pour $t = t_0$ (cf. fig. 8), $\dot{\varepsilon}_2 = 0$, mais que t_0 varie avec $\dot{\varepsilon}_0$ (cf. équation 10);

Chaque point de la courbe AB de la figure 10 fait donc partie d'une courbe d'écoulement, mais la courbe AB n'est pas une courbe d'écoulement.

Par contre, nous avons pu déterminer quelles caractéristiques rhéologiques nous pouvions obtenir à partir des enregistrements.

Lorsque t tend vers l'infini, $\dot{\varepsilon}_2$ tend vers 0 (cf. équation 13) et on a :

$$\tau = \tau_{\infty} = \tau_{0\infty} + \eta_{\infty}\dot{\varepsilon}_0 \quad (\text{équation 14}).$$

Lorsque $\dot{\varepsilon}_0$ tend vers 0, τ_{max} tend vers τ_{00} (cf. équation 11) et τ_{∞} tend vers $\tau_{0\infty}$.

Sur une substance viscoplastique présentant le phénomène de thixotropie partielle, les seules grandeurs que l'on puisse mesurer à l'aide de notre appareillage sont donc $\tau_{0\infty}$, τ_{00} et η_{∞} .

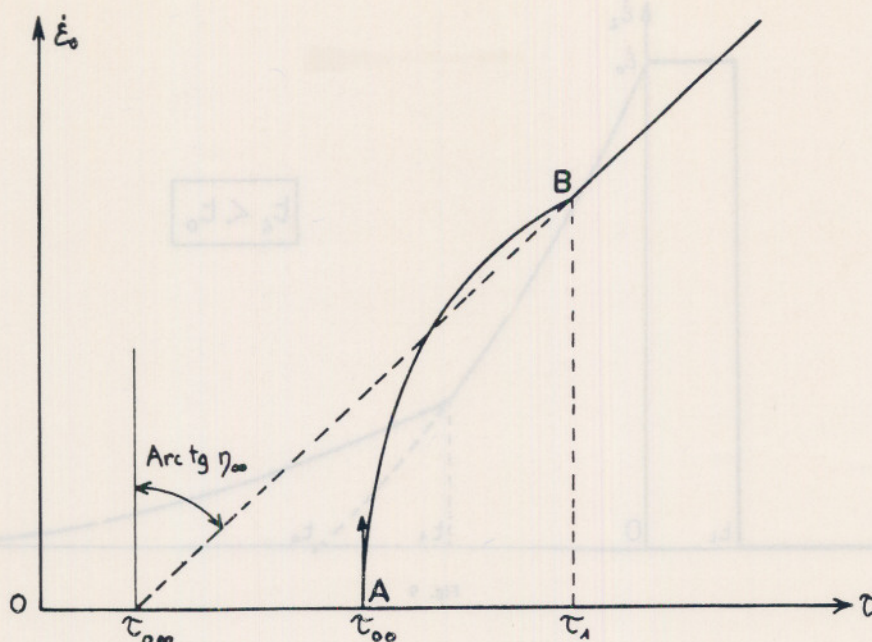


Fig. 10

3. CONCLUSION GENERALE

L'étude théorique fondée sur des hypothèses simplificatrices, montre que les seules caractéristiques correctement accessibles avec un viscosimètre à rotation sur des substances viscoplastiques à thixotropie partielle sont :

- le coefficient de viscosité plastique η_{pl} et le seuil de cisaillement τ_0 pour la substance dont la structure est parvenue au maximum de destruction,
- le seuil de cisaillement τ_{00} de la substance vierge de tout cisaillement.

Si on mesure la contrainte de cisaillement τ atteinte à un instant t , on opère sur une substance dont la structure diffère suivant les valeurs de $\dot{\epsilon}_0$; tout se passe comme si, à chaque valeur de $\dot{\epsilon}_0$, correspondait un corps différent. Les courbes d'écoulement tracées dans ces conditions ont la même forme que celles qui correspondent à un corps pseudo-plastique, mais avec un seuil de cisaillement.

On pourrait envisager de tracer la courbe d'écou-

lement d'un mortier parvenu toujours au même état de destruction de sa structure ; il faudrait, pour cela établir la loi $t = f(\dot{\epsilon}_0)$ qui donnerait, pour chaque valeur de $\dot{\epsilon}_0$, le temps au bout duquel il faudrait mesurer τ .

Nous ne pouvons déterminer cette loi que pour la structure vierge de tout cisaillement — elle devient $t = 0$ quel que soit $\dot{\epsilon}_0$ — et pour la structure ayant subi la destruction maximum — elle devient $t = \infty$ quel que soit $\dot{\epsilon}_0$.

REFERENCES

- [1] M. REINER. — Rhéologie Théorique, Dunod, Paris, 1955.
- [2] A.A. NESSIM, R.L. WAJDA. — Magazine of Concrete Research, Vol. 17, n° 51, juin 1965.
- [3] C. LEGRAND, J.C. MASO. — C.R.A.S., 266, Série A, 1968, p. 730.

Déformation plastique du carbure de tantale jusqu'à 2200°C*

par J.L. MARTIN, P. LACOUR-GAYET et P. COSTA

Office national d'études et de recherches aérospatiales
92 — Châtillon - France

RESUME

Cet article rapporte les résultats d'expériences de flexion et d'observations au microscope électronique réalisées sur de fines tôles de TaC_{1-x} . Ces observations ont mis en évidence une dissociation de dislocations dans TaC_{1-x} , l'énergie de défaut d'empilement du carbure augmentant lorsque x diminue. Les résultats des essais de flexion ont été analysés à l'aide d'une loi de vitesse de déformation du type :

$$\dot{\epsilon} = A (\sigma - \sigma_i) \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_i}{kT} V\right) \exp\left(-\frac{\Delta U}{kT}\right)$$

et interprétés à l'aide d'un modèle de glissement de dislocations contrôlé par la diffusion sous contrainte des atomes de carbone.

ABSTRACT

Bending experiments have been performed on thin sheets of TaC_{1-x} together with electron microscope observations. These observations have revealed dislocation splitting in TaC_{1-x} , the stacking fault energy of the carbide increasing when x decreases. Results of the bending tests have been analysed in terms of a strain rate law of the type :

$$\dot{\epsilon} = A (\sigma - \sigma_i) \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_i}{kT} V\right) \exp\left(-\frac{\Delta U}{kT}\right)$$

and interpreted on the basis of a model of carbon diffusion assisted glide of dislocations.

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

Cette communication a été présentée aussi (en collaboration avec Ph. Lacour-Gayet et P. Costa) au V^e Symposium International sur les Matériaux, Université de Berkeley (Californie), 13-17 septembre 1971, et déjà publiée à cette occasion.

Sur l'accommodation viscoplastique intergranulaire dans les polycristaux métalliques*

par A. ZAOUI

Chargé de recherches au C.N.R.S.
Laboratoire de Mécanique des Solides
Ecole Polytechnique — Paris 5^e

RESUME

On étudie la nature de l'accommodation intergranulaire dans les polycristaux métalliques viscoplastiques, en vue de l'évaluation des contraintes internes liées à la désorientation des grains contigus. On montre d'abord que le modèle « auto-équilibré » de Kröner suppose une accommodation purement élastique. On étudie ensuite les conséquences d'une prise en compte de la nature plastique, puis visqueuse, de cette accommodation dans les polycristaux viscoplastiques et on montre que, dans les deux cas, la relaxation des contraintes internes peut être exprimée par un facteur d'atténuation dans la formule de Kröner qui, ainsi modifiée, peut alors être utilisée comme loi d'interaction « a priori » dans un modèle statistique polycristallin.

SUMMARY

The intergranular accommodation in viscoplastic metallic polycrystals is studied, in order to evaluate the internal stresses which are linked with the orientation misfit of adjoining grains. First, the « self-consistent » Kröner's model is shown to assume a purely elastic accommodation. Then, the consequences of a taking into account of the plastic, such as the viscous nature of the accommodation of viscoplastic polycrystals are studied: in both cases, it is shown that the relaxation of internal stresses may be expressed by an attenuation factor in Kröner's formula, which, when so modified, may be used as an « a priori » interaction law for a statistical polycrystalline model.

1. INTRODUCTION

La question de l'accommodation intergranulaire dans les polycristaux se rattache au problème plus général de la détermination du comportement viscoplastique du polycristal à partir de celui du monocristal. La difficulté essentielle de ce problème réside dans l'évaluation des interactions entre les différents grains, d'orientation aléatoire : ces interactions se

traduisent par des contraintes internes, dues à l'incompatibilité de la déformation plastique de grain à grain qui découle de leur différence d'orientation. Pour évaluer ces contraintes internes, il faut rendre compte de l'accommodation intergranulaire. On peut le faire de deux façons :

— ou bien on envisage chaque grain, défini par sa position dans l'espace et son orientation, ainsi que tous les grains avoisinants, définis de la même façon, et on exprime les conditions de continuité de grain à grain, on calcule contraintes et déformations, etc. Le problème a été abordé par Lin [1] en élastoplasticité et traité par Mandel [2] en viscoplasticité ; mais les applications en sont difficiles et ne peuvent être envisagées que pour des cas très particuliers ;

— ou bien on étudie l'interaction entre un grain de caractéristiques données et l'ensemble de tous les autres grains, considéré comme une « matrice » infinie, physiquement homogène, et dont le comportement doit être déterminé par une opération de moyenne sur tous les grains, dont on se sera donné la loi statistique de distribution des orientations. On a alors à résoudre un problème « intégral » très complexe que nous aborderons plus loin. Si on veut éviter tout ou partie des difficultés qui se posent alors, il faut, à un moment ou à un autre, introduire une hypothèse simplificatrice sur le mode d'accommodation entre la matrice et l'inclusion.

On peut, par exemple, avec Lin [3] et Taylor [4], supposer que la déformation totale ε_{ij} dans l'inclusion est égale à la déformation totale macroscopique E_{ij} de la matrice, supposée homogène pour une contrainte appliquée homogène Σ_{ij} . Cela revient à adopter un mode d'accommodation « rigide », où la matrice n'est pas perturbée par la présence de l'inclusion et lui impose sa déformation, ce qui a pour effet de surévaluer les contraintes internes. On trouve :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (1)$$

où σ_{ij} est la contrainte dans l'inclusion, μ le module élastique de cisaillement de la matrice, E_{ij}^p et ε_{ij}^p les déformations plastiques macroscopique et locale. (On suppose pour cela l'isotropie élastique et l'incompressibilité de l'écoulement plastique).

On peut, au contraire, adopter un mode d'accommodation parfaitement « souple » qui revient à faire

* Colloque du Groupe français de Rhéologie, 8 décembre 1971.

disparaître les contraintes internes : $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}$.

On peut encore, avec Sachs [5], adopter un mode d'accommodation selon lequel la cisssion principale réduite τ atteint en même temps dans chaque grain la cisssion critique τ_0 . On obtient ainsi, en traction simple Σ , la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{m}{\langle m \rangle} \Sigma_{ij} \quad (2)$$

où m est un facteur d'orientation et $\langle m \rangle$ sa moyenne pour toutes les orientations

(on a $a = \langle m \rangle = \frac{\Sigma}{\tau_0}$).

Le modèle de Kröner [6] mérite un examen plus approfondi parce qu'il fait intervenir plus tardivement l'hypothèse simplificatrice sur le mode d'accommodation. Nous le prendrons pour point de départ en recherchant ses insuffisances et la manière de les corriger, du moins en partie.

2. LE MODELE DE KRÖNER

Il prend pour base le calcul exact fait par Eshelby [7] de la contrainte dans une inclusion sphérique ayant subi une déformation plastique ε_{ij}^p , située dans une matrice infinie élastique non chargée, de mêmes caractéristiques élastiques que l'inclusion. En supposant toujours, comme pour toute la suite, que l'élasticité est isotrope et que la déformation plastique se fait sans variation de volume, on trouve que la contrainte σ_{ij} dans l'inclusion est homogène et vaut :

$$\sigma_{ij} = -2\mu(1-\beta)\varepsilon_{ij}^p \quad (3)$$

où $\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)}$, ν étant le coefficient de Poisson.

Ainsi, à la déformation plastique ε_{ij}^p dans l'inclusion est associée une déformation élastique ε_{ij}^e qui assure la compatibilité de la déformation totale ε_{ij} , et qui vaut :

$$\varepsilon_{ij}^e = -(1-\beta)\varepsilon_{ij}^p \quad (4)$$

A partir de ce calcul, Kröner étudie le cas où la matrice est constituée de grains qui ont eux-mêmes subi des déformations plastiques. Soient Σ_{ij} la contrainte homogène appliquée et E_{ij}^p la déformation plastique moyenne de la matrice. En exprimant l'équilibre des contraintes sur toute section du solide, il parvient à la relation :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (5)$$

Budiansky et Wu [8] justifient ce résultat d'une autre manière, en considérant que la déformation élastique de l'inclusion est cette fois la somme de la déformation élastique moyenne E_{ij}^e et de la « déformation d'Eshelby » induite par l'écart de déformation plastique ($\varepsilon_{ij}^p - E_{ij}^p$) entre l'inclusion et la matrice ; cette déformation induite s'obtient d'après (4), et, par suite, on a :

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ij}^e - (1-\beta)(\varepsilon_{ij}^p - E_{ij}^p) \quad (6)$$

d'où, en revenant aux contraintes, la relation de Kröner [5].

On verra mieux ce que cette représentation implique quant au mode d'accommodation entre la matrice et l'inclusion en retrouvant la loi de Kröner d'une autre manière.

Considérons d'abord, avec Hashin [9], le cas où la matrice est élastique, et soumise à la déformation élastique homogène à l'infini $E_{ij}(t)$; t est un paramètre décrivant le processus de chargement, qui peut être le temps. On décompose le champ de déplacements élastiques $u_i(1)$ dans la matrice en deux parties :

$$u_i^{(1)} = E_{ij}(t) x_j + u'_i \quad (7)$$

x_j désigne la coordonnée d'espace et u'_i est le champ de déplacements élastiques que l'on observerait dans la matrice non chargée, où l'inclusion serait remplacée par une cavité, avec, comme conditions sur la surface S de cette cavité :

$$u'_{ijS} = [\varepsilon_{ij}^{(2)}(t) - E_{ij}(t)] x_j = c_{ij}^e(t) x_j \quad (8)$$

où $\varepsilon_{ij}^{(2)}(t)$ est la déformation totale homogène dans l'inclusion. La solution de Kelvin permet alors d'évaluer le vecteur contrainte sur S et donc la contrainte homogène dans l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \mu_1 \frac{3-5\nu_1}{4-5\nu_1} c_{kk}^e(t) \delta_{ij} + \mu_1 \frac{7-5\nu_1}{4-5\nu_1} c_{ij}^e(t) \quad (9)$$

Les indices (1) et (2) correspondent respectivement aux quantités dans la matrice et dans l'inclusion.

Envisageons maintenant le cas où la matrice subit une déformation plastique, homogène E_{ij}^p , et où $\varepsilon_{ij}^{(2)}(t)$ est la somme d'une déformation élastique $\varepsilon_{ij}^e(t)$ et d'une déformation plastique $\varepsilon_{ij}^p(t)$. Faisons l'hypothèse que l'accommodation entre matrice et inclusion est purement élastique — ce qui s'exprime par le fait que le champ u'_i (« champ d'interaction ») est purement élastique. On aura ainsi :

$$\begin{cases} u_i^{(1)} = (E_{ij}^e + E_{ij}^p) x_j + u'_i \\ u'_{ijS} = (\varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p - E_{ij}^e - E_{ij}^p) x_j = c_{ij} x_j \end{cases} \quad (10)$$

où c_{ij} est, comme dans le cas précédent, une déformation purement élastique. On peut alors utiliser le calcul précédent et appliquer la formule (9) en prenant pour c_{ij}^e le tenseur c_{ij} donné par (10). On retrouve alors, après quelques calculs, la formule de Kröner (5). (cf. [10]).

On voit donc que l'hypothèse implicite du modèle de Kröner est celle d'une accommodation purement élastique entre matrice et inclusion : la matrice ne relâche en partie les contraintes internes de l'inclusion qu'en se déformant élastiquement autour de celle-ci ; la déformation plastique de la matrice reste homogène. Il est clair que cette hypothèse conduit à une surestimation des contraintes internes puisqu'elles ne prennent pas en compte la relaxation viscoplastique de ces contraintes au cours de l'écoulement. On peut penser, par contre, que la loi de Kröner donne une bonne estimation des contraintes internes au début de l'écoulement, où lorsque les grains actifs sont suffisamment dispersés pour que l'on puisse considérer que chacun d'eux est entouré

d'une zone élastique. Cette conclusion est confirmée par les tentatives qui vont suivre en vue d'améliorer l'estimation des contraintes internes par une approximation plus fine du mode réel d'accommodation, qui est de nature viscoplastique.

3. PRISE EN COMPTE DU CARACTERE PLASTIQUE DE L'ACCOMMODATION

Revenons à la formule (10) et supposons maintenant que le « champ d'interaction » u'_i n'est plus purement élastique. On pourra alors décomposer c_{ij} en une partie élastique c^e_{ij} et une partie plastique c^p_{ij} , avec :

$$u'_{ijs} = (c^e_{ij} + c^p_{ij}) x_j \quad (11)$$

En reprenant le raisonnement précédent, il est facile de voir que l'on obtient maintenant (en supposant que matrice et inclusion ont les mêmes coefficients élastiques) :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - \mu \frac{7-5\nu}{4-5\nu} c^e_{ij} \quad (12)$$

où c^e_{ij} est un déviateur pur. Pour évaluer c^e_{ij} , on peut faire l'hypothèse de comportement suivante : c^e_{ij} et c_{ij} sont liés par la même relation que r^e_{ij} et r_{ij} , où r^e_{ij} et r_{ij} sont les déviateurs des déformations moyennes E^e_{ij} et E_{ij} . Si, par exemple, on peut écrire :

$$S_{ij} = 2\mu r^e_{ij} = 2\mathcal{L}(r^e_{ij} + E^p_{ij}) \quad (13)$$

où S_{ij} est le déviateur de Σ_{ij} et $\mathcal{L}$ un opérateur linéaire intégrodifférentiel indépendant de l'espace, on aura :

$$2\mu c^e_{ij} = 2\mathcal{L}(c^e_{ij} + c^p_{ij}) \quad (14)$$

Il est facile de voir que l'on aboutit à la relation d'interaction :

$$\left(2\mu + \frac{7-5\nu}{4-5\nu} \mathcal{L}\right) (\sigma_{ij} - \Sigma_{ij}) = 2\mu \frac{7-5\nu}{4-5\nu} \mathcal{L}(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}) \quad (15)$$

qui remplace la relation de Kröner (5). Au début de l'écoulement, lorsque E^p_{ij} est négligeable, $\mathcal{L}$ se comporte comme la constante μ : on retrouve alors la relation (5). Ce n'est plus vrai par la suite.

Pour avoir une idée de la façon dont les contraintes internes évoluent au cours de l'écoulement, on peut envisager une expérience de fluage en traction simple ($\Sigma_{33} = \Sigma$ seul différent de zéro), où E^p_{ij} s'écrit :

$$E^p_{ij} = E^p A_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \quad (16)$$

On peut, de façon grossière, assimiler l'opérateur $\mathcal{L}$ au module sécant $\bar{\mathcal{L}}$, donné par :

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{\mu \Sigma}{\Sigma + 3\mu E^p} \quad (17)$$

La relation (15) s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta) \frac{\Sigma}{\Sigma + 3\mu\beta E^p} (E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}) \quad (18)$$

Il apparaît ainsi que le coefficient $2\mu(1-\beta)$, qui traduisait, dans la formule de Kröner, une

accommodation purement élastique, est maintenant pondéré par une fonction de Σ et de E^p , égale à l'unité au début de l'écoulement ($E^p = 0$), mais décroissant rapidement par la suite avec E^p (pour Σ constant). Le caractère plastique de l'accommodation conduit donc à abaisser la valeur de l'amplitude des contraintes internes, telle qu'elle est donnée par la relation de Kröner.

4. PRISE EN COMPTE DU CARACTERE VISQUEUX DE L'ACCOMMODATION

En étudiant le cas d'une inclusion viscoélastique dans une matrice infinie viscoélastique constituée d'un *matériau différent*, Hashin [9] a mis en évidence la relaxation visqueuse des contraintes internes au cours de l'écoulement. En réalité, dans un polycristal, les contraintes internes ne naissent pas d'une différence de comportement entre les grains mais de leur désorientation. En conservant l'hypothèse de la viscoélasticité linéaire, qui permet de grandes simplifications de calcul, nous étudierons le problème du fluage en traction simple ($\Sigma_{33} = \Sigma$) d'un agrégat isotrope de cristaux sphériques du système cubique à faces centrées, à *un seul système de glissement* — le système principal : en admettant, pour simplifier, que la déformation se fait *sans variation de volume*, il sera ainsi possible de résoudre le « problème intégral » présenté dans l'introduction.

Dans ce problème c'est donc le comportement viscoplastique linéaire *anisotrope* du matériau qui est responsable de l'existence des contraintes internes. Par ailleurs le problème correspond au cas réel — celui de la viscoplasticité — dans l'hypothèse où les seuils d'écoulement sont négligeables par rapport aux contraintes : pour cette raison nous conserverons la notation ε^p_{ij} pour désigner la partie purement visqueuse de la déformation.

La cission principale τ et le glissement visqueux unitaire γ sont donnés par :

$$\left. \begin{array}{l} \tau = \alpha_{ij} \sigma_{ij} \\ \varepsilon^p_{ij} = \alpha_{ij} \gamma \end{array} \right\} \quad (19)$$

où α_{ij} est une matrice d'orientation qui permet de repérer le système de glissement principal. L'hypothèse de viscoélasticité linéaire conduit à introduire la fonction de fluage $J(t)$ identique pour tous les grains :

$$\gamma(t) = \int_0^t J(t-\theta) d\tau(\theta) \quad (20)$$

L'application de la transformation de Laplace-Carson permet de revenir au cas élastique, déjà

traité. On a en effet dans ce cas, pour $\nu = \frac{1}{2}$:

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 3\mu_1 [E^p_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}(t)] \quad (21)$$

E_{ij} et ε_{ij} sont les déformations totales de la matrice et de l'inclusion ; μ_1 est le module de cisaillement élastique de la matrice. On aura donc, dans le cas présent (en désignant par $h^*(p)$ l'image par la transformation de Laplace-Carson d'une fonction $h(t)$) :

$$\sigma_{ij}^* = \Sigma_{ij}^* + 3 \mu_1^* \infty [E_{ij}^*(p) - \varepsilon_{ij}^*(p)] \quad (22)$$

μ_1^* est la transformée de la fonction de relaxation de la matrice. Celle-ci peut être calculée par une opération de moyenne sur les différents grains. Soit $F(t)$ la fonction de fluage de la matrice pour la déformation purement visqueuse, S_{ij} le déviateur de la contrainte moyenne et s_{ij} celui de la contrainte locale. En exprimant que le comportement de la matrice est viscoélastique linéaire et que la déformation visqueuse macroscopique à l'infini est la moyenne des déformations visqueuses locales, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{*p} &= \alpha_{ij} \alpha_{kl} s_{kl}^* J^* \\ E_{ij}^{*p} &= \frac{1}{2} S_{ij}^* F^* \\ E_{ij}^{*p} &= \langle \varepsilon_{ij}^{*p} \rangle = \langle \alpha_{ij} \alpha_{kl} s_{kl}^* \rangle J^* \end{aligned} \quad (23)$$

On arrive alors aisément, après quelques calculs, à la relation (cf. Zaoui [10]) :

$$\sigma_{ij}^* - \Sigma_{ij}^* = \frac{6 \mu X^* J^* \sum (I^2 A_{ij} - \alpha_{33} \alpha_{ij})}{5 + 6 \mu I^2 J^* X^*} \quad (24)$$

où X^* est solution de :

$$6 \mu I^2 J^* X^{*2} + [5 - 3 \mu (5 I^2 - 1) J^*] X^* - 5 = 0 \quad (25)$$

A_{ij} est donnée par (16) et l'on a :

$$\langle \alpha_{33} \alpha_{ij} \rangle = I^2 A_{ij} \text{ avec } I^2 \neq 0,206 \quad (26)$$

On peut étudier le cas particulier simple de la viscosité newtonienne pure, où J^* s'écrit simplement :

$$J^* = \frac{1}{\eta p} \quad (27)$$

η étant le coefficient de viscosité. L'inversion des équations (24) et (25) conduit à deux équations intégrales de Volterra, qu'il est possible de résoudre numériquement. Le résultat final s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2 \mu (1 - \beta) \cdot f(E^p) \cdot (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (28)$$

où la fonction scalaire $f(E^p)$ est donnée par la

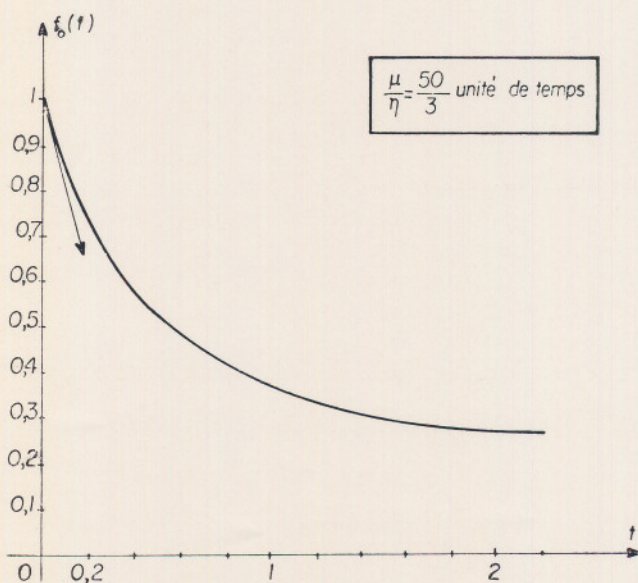


Fig. 1. — Variation de f_0 en fonction du temps à contrainte constante

figure 1. On a reporté en fait la fonction

$$f_0(t) = f[E^p(t)]$$

On aboutit de cette façon aux mêmes conclusions qu'au paragraphe précédent : la relation de Kröner est valable au tout début de l'écoulement (on a bien : $f_0(0) = 1$), mais conduit rapidement à surévaluer les contraintes internes, parce qu'elle néglige la relaxation visqueuse de ces dernières. La prise en compte de la viscosité se traduit là encore par un *facteur d'atténuation* de l'évaluation élastique ($2 \mu (1 - \beta)$), d'autant plus important que l'écoulement est plus avancé. Cependant, et comme dans le cas précédent, la proportionnalité entre les tenseurs $(\sigma_{ij} - \Sigma_{ij})$ et $(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$ est conservée.

5. CONCLUSIONS

Bien que l'étude précédente permette de préciser, de façon qualitative, de quelle façon il convient de pallier les insuffisances de la loi de Kröner, elle n'aboutit pas à une relation qui puisse la remplacer. Les différentes approximations proposées — formules (15), (18), (24) et (28) — ont surtout une fonction d'illustration. Il est clair que si une loi du niveau de généralité de celle de Kröner pouvait être formulée dans le cadre de la *viscoplasticité*, elle devrait s'exprimer sous forme d'une relation fonctionnelle et faire intervenir explicitement les *vitesse*s de déformation plastique.

Il est cependant possible de s'appuyer sur les conclusions du paragraphe précédent pour étudier un certain nombre de propriétés des polycristaux métalliques : en ne gardant que les propriétés a priori de croissance de la fonction f de la formule (28), mais en la faisant dépendre non seulement de E^p , mais aussi de la contrainte, du seuil d'écoulement, de la proportion de grains actifs..., il a été possible de déterminer la fonction f à partir d'un certain type d'expérience, puis de retrouver, à partir de là, diverses propriétés mécaniques en viscoplasticité (hésitation au fluage, influence de surcharges, de vibrations, etc...) (cf. [10], [11]). Dans tous les cas, les résultats obtenus se sont trouvés dépendre étroitement du mode choisi d'accommodation intergranulaire, et de l'évaluation qui en découle des contraintes internes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] T.H. LIN. — J. Mech. Phys. Solids, 12, 391 (1964).
- [2] J. MANDEL. — Plasticité classique et viscoplasticité. Cours au C.I.S.M. Udine (1971).
- [3] T.H. LIN. — J. Mech. Phys. Solids, 5, 143 (1957).
- [4] G.I. TAYLOR. — J. Inst. Metals, 62, 307 (1938).
- [5] G. SACHS. — Zeit. der V.D.I., 72, 734 (1928).
- [6] E. KRÖNER. — Acta Meta., 9, 155 (1961).
- [7] J.D. ESHELBY. — Proc. Roy. Soc., A 241, 376 (1957).
- [8] B. BUDIANSKY et T.T. WU. — Proc. 4th Cong. Appl. Mech, 1175 (1962).
- [9] Z. HASHIN. — Int. J. Engng. Sci., 7, 11 (1969).
- [10] A. ZAOUÏ. — Thèse (Paris - 1970). A paraître dans le « Mémorial de l'Artillerie Française ».
- [11] A. ZAOUÏ. — Exposé au Groupe Français de Rhéologie (mars 1971).