

**Revue**

GRUPPO FRANCOSE DI RHEOLOGIA

Edizione

DE  
**L'INDUSTRIE  
MINÉRALE**



CAHIERS  
DU GROUPE  
FRANÇAIS  
DE RHÉOLOGIE

Tome II  
Numéro 6

15 JUIN 1972

NUMERO SPECIAL

**COLLECTIVITES MEMBRES  
DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE**

- Aquitaine-Organico, Laboratoire d'Applications de Serquigny, 27 — Serquigny.
- Bassin d'Essais des Carènes, 6, bd Victor, 75 — Paris (15').
- Bibliothèque du Centre de Documentation du C.N.R.S., quai Anatole-France, 75 — Paris (7').
- Bibliothèque de l'École Nationale Supérieure des Mines, 60, bd St-Michel, 75 — Paris (6').
- CEDOCAR, Bibliothèque Centrale, 2, av. de la Porte d'Issy, 75 — Paris (15').
- Centre d'Essais et de Recherches Techniques des Tabacs, B.P. n° 2, 45 — Fleury-les-Aubrais.
- Centre d'Etudes du Bouchet (Direction des Poudres), 91 - Vert-le-Petit.
- Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75 — Paris (13').
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 33, rue de la Baume, 75 — Paris (8').
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75 — Paris (15').
- Centre de Mathématique et Calcul de l'I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Centre de Recherches, C.E.R.C.A., 26 — Romans-sur-Isère.
- Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Centre de Recherches Routières, Fokkerdreef 21, 1960 — Sterrebeek, Belgique.
- Centre Technique du Cuir, 181, av. Jean-Jaurès, 69 — Lyon (6').
- Centre Technique des Industries Mécaniques, C.D.M., B.P. 67, 60 — Senlis.
- Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses GEDEX n° 175, 38 — Grenoble-Gare.
- Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, av. Hoche, 75 — Paris (8').
- Chemistry and Physics Library, 303 Whitmore Laboratory, Pennsylvania State University, University Park, Penn. 16 802, USA.
- Compagnie Française de Raffinage, Centre de Recherches, B.P. n° 27, 78 — Harfleur.
- Compagnie Péchiney, 23, rue Balzac, 75 — Paris (8').
- Compagnie de Raffinage Shell-Berre, Centre de Recherches, 76 — Grand Couronne.
- Compagnie de Saint-Gobain, Direction des Recherches, Laboratoires Scientifiques, 52, bd de la Villette, 75 — Paris (19').
- Département Génie Civil et Urbanisme, I.N.S.A., 20, av. Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Département Génie Civil, I.N.S.A., 20, Buttes-de-Coësmes, 35 — Rennes.
- Direction des Recherches et Moyens d'Essais, 5 bis, avenue de la Porte de Sèvres, 75 — Paris (15').
- Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de Mécanique des Sols, 92 — Châtenay-Malabry.
- Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Bibliothèque, 151, bd de l'Hôpital, 75 — Paris (13').
- Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, Département de Métallurgie, 158 bis, cours Fauriel, 42 — Saint-Etienne.
- Ecole Polytechnique, Bibliothèque, C.P. 501, Snowdon, Montréal 248, Canada.
- Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Service Documentation, 6, quai Watier, 78 — Chatou.
- Electricité de France, Service Géologique et Géotechnique, 3, rue de Messine, 75 — Paris (8').
- Electricité de France, SEPTEN, 17, av. de la Libération, 92 — Clamart.
- ESSO-Standard, S.A.F., Centre de Recherches de Mont-Saint-Aignan, 76 — Mont-Saint-Aignan.
- Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique, Route de Chauvigny, 85 — Poitiers.
- Fédération des Fabricants de Peintures, Vernis et Encres d'Imprimerie, Laboratoire des Peintures et Vernis, rue H.-Dunant, 94 — Thiais.
- Filial Biblioteki, Akademii Nauk SSSR, Baltijskaja ul. 14 Moscou A-219, U.R.S.S.
- Institut Français du Pétrole, Dir. Doc. Inf. 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92 — Rueil-Malmaison.
- Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis, 12, rue de l'Industrie, 68 — Saint-Louis.
- Institut de Mécanique des Fluides, 2, rue Camichel, 31 — Toulouse.
- Institut de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Académie Tchécoslovaque des Sciences, Vyshehradská 49, Praha 2, Nové Město, Tchécoslovaquie.
- Institut National de la Recherche Agronomique, Etoile de Choisy, 78 — Versailles.

CAHIERS  
DU  
GROUPE FRANÇAIS  
DE RHÉOLOGIE

---

Tome II — N° 6

15 Juin 1972

---

## SOMMAIRE

---

		PAGES
M. JOLY	Avant-propos .....	375
M. GUERIN	Influence de la température et de la pression sur le comportement mécanique des propergols composites .....	377
J.C. ROBINET	Les méthodes modernes d'expression de la thermo- dynamique appliquées à la représentation des systèmes viscoélastiques — II. Cinétique des comportements .....	389
K. DANG VAN et D. RADENKOVIC	Effet de la pression sur la nucléation et la pro- pagation des fissures .....	395
P. MORLIER	Influence de la pression sur le comportement rhéo- logique des roches .....	405
R. ATALLAH	Contribution à l'étude de la perte de précon- trainte par fluage-relaxation combinés dans les éléments en béton précontraint .....	414

*Photographie couverture :*

Miniplissement dans une roche sédimentaire. Le timbre-poste donne l'échelle.

---

## Avant-propos

*Ce numéro des Cahiers réunit les conférences prononcées au cours du colloque du 17 septembre 1970 sur le thème : « Influence de la température et de la pression sur le comportement rhéologique ».*

*Ce colloque est tout à fait dans la tradition de ceux du 17 mai 1966 et du 30 octobre 1968 au cours desquels furent examinés les aspects énergétiques et structuraux de la rhéologie. En effet, ce sont, pour une bonne part, des problèmes assez proches de ceux traités alors qui sont abordés dans le présent colloque, mais l'accent y est mis sur le rôle fondamental des paramètres température et pression dans le déterminisme des propriétés rhéologiques de la matière.*

*L'éventail des préoccupations y est très large puisque les sujets présentés s'étendent de la théorie mathématique de la visco-élasticité à la technologie des propergols composites. Des questions aussi diverses que l'influence de la pression sur la propagation des fissures, les effets de la compression sur les propriétés mécaniques des roches, ou la réalisation d'un viscosimètre à rotation fonctionnant sous pression très élevée, y sont successivement discutées.*

*S'il en était encore besoin, les communications rassemblées ici suffiraient à montrer l'extrême interpénétration de la rhéologie et des chapitres les plus divers de la physique. Ce n'est d'ailleurs que l'étroite collaboration des différentes disciplines qui peut permettre un progrès rapide dans la compréhension fine des phénomènes dont la matière est le siège lorsqu'elle est soumise à des sollicitations mécaniques.*

M. JOLY,

Directeur de Recherche au C.N.R.S.  
Service de Biophysique — Institut Pasteur  
28, rue du Docteur-Roux - Paris-15<sup>e</sup>

## Foreword

*The present issue of the Cahiers du Groupe français de rhéologie is made of a collection of lectures delivered at the colloquium of 17th september 1970, the topic of which was : « Influence of temperature and pressure on rheological behaviour ».*

*This colloquium quite remained in the same line as those of 17 may 1966 and 30th october 1968 which were devoted to the energetic and structural aspects of rheology. Indeed, for a large part, the studied problems were closely related to those developped before. But the main interest has been focused on the fundamental contribution of temperature and pressure to the determinism of the rheological properties of matter.*

*The range of the subjects was very wide, extending from the mathematical theory of the viscoelasticity to the technology of some propergol composites. Problems so different as the influence of pressure on the crack propagation, the effects of compression on the mechanical properties of rocks, or the design of a rotating viscometer working under very high pressure, were discussed during this colloquium.*

*The papers, collected here, show to what very large extent rheology is in a deep relation with various chapters of Physics. Moreover, only the constant collaboration between scientists working in different fields can induce rapid progresses in the fine understanding of the phenomena which occur in matter undergoing mechanical stresses.*

M. JOLY,

Directeur de Recherche au C.N.R.S.  
Service de Biophysique — Institut Pasteur  
28, rue du Docteur-Roux - Paris-15<sup>e</sup>

# Influence de la température et de la pression sur le comportement mécanique des propergols composites<sup>(\*)</sup>

par M. GUÉRIN

Ingénieur Principal de l'Armement

## RESUME

*L'auteur indique les résultats obtenus dans les épreuves de traction et de relaxation pour différents propergols composites lorsque l'on fait varier, soit la température, soit la pression. L'interprétation des résultats conduit à la conclusion : qu'à basse température, la liaison liant-charge est responsable de la variation des propriétés mécaniques du propergol, alors qu'à haute température, ce sont les propriétés du liant qui sont responsables de la variation des propriétés du propergol.*

## SUMMARY

*The variations of stress-strain and stress-relaxation curves of various composite propellants over a range of pressure and temperature conditions are discussed. The conclusion is that the bonding between the charge and the polymer is responsible for the behaviour of the propellant at low temperature while the properties of the binder itself account for the variations of the mechanical properties at high temperature.*

<sup>(\*)</sup> Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie le 17 septembre 1970.

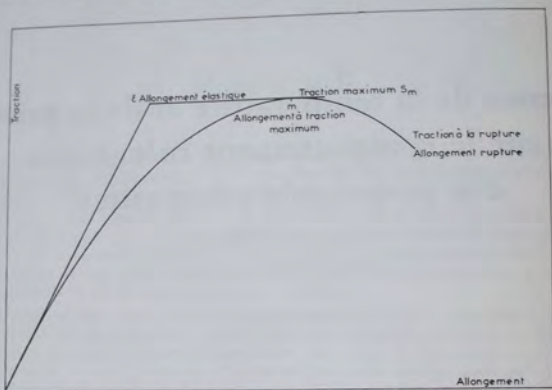


Fig. 1. — Dépouillement d'une courbe de traction

Les blocs de propergol sont soumis au cours de leur existence à un certain nombre de contraintes et pour prévoir la durée de vie d'un chargement, il est nécessaire de pouvoir calculer ces contraintes et donc de connaître les propriétés rhéologiques des propergols. Les propergols étant utilisés dans une gamme de températures étendues ( $-50^{\circ}\text{C}$ ,  $+30^{\circ}\text{C}$ ) et étant soumis, en particulier, au moment du tir, à des pressions variées ( $P$  150 bars) le Service des poudres s'est intéressé tout particulièrement à l'influence de ces deux paramètres sur le comportement du propergol.

Les propergols composites sont constitués par une dispersion de charges minérales dans une matière qui est un caoutchouc : le taux en volume de liant par rapport à l'ensemble varie de 20 à 35 %. Parmi les différentes catégories possibles de propergols composites, celles à liant polyéther polyuréthane (développé par le Service des poudres sous le nom d'isolanes) et celles à liant polybutadiène (développé par le Service des poudres sous le nom des butalanes) ont été largement développés par plusieurs pays. Les travaux dont les résultats sont donnés ci-après

ont été exécutés sur des propergols issus de ces deux familles.

Les propriétés mécaniques ont été étudiées tout particulièrement par des expériences de traction à vitesse d'allongement constante et par des expériences de relaxation. Dans tous les cas, les éprouvettes ont la forme d'haltères pour lesquels on a défini une longueur utile, par mesure directe des allongements : les allongements dans la partie médiane de l'éprouvette sont égaux au quotient de l'augmentation de l'écartement des mâchoires par la longueur utile.

## 1. EPREUVE DE TRACTION A DIFFÉRENTES TEMPÉRATURES

Sur la courbe de traction, on relève les paramètres suivants (figure 1) :

- $S_m$  : traction maximum exprimée en bar,
- $\varepsilon$  : allongement élastique maximum exprimé en %.



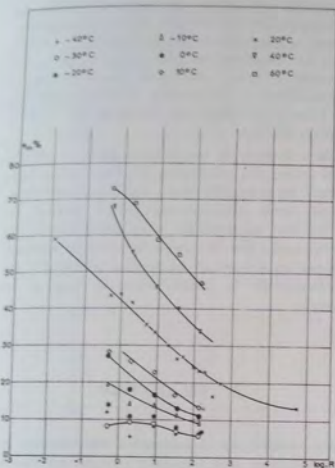


Fig. 2. — Variation de l'allongement à traction maximum en fonction de la vitesse à différentes températures.

$e_m$  : allongement à traction maximum exprimé en %.

$e_r$  : allongement à la rupture maximum exprimé en %.

$E$  : module d'Young à l'origine exprimé en bar.

L'ensemble de ces paramètres varie en fonction de la vitesse d'élongation et de la température (figures 2 et 3).

On constate de façon très générale sur les propergols de type isolane ou butalane que lorsque la température diminue, la traction maximum et le module augmentent de façon importante, alors que les différents allongements diminuent du moins à partir d'une température qui se situe vers  $0^\circ\text{C}$ . Cette température a parfois reçu le nom de température de transition, mais il faut se garder de la confondre avec la température de transition vitreuse du liant qui est beaucoup plus basse de l'ordre de  $-40^\circ\text{C}$  pour les

liants isolanes et de l'ordre de  $-90^\circ\text{C}$  pour les liants butalanes.

On a appliqué la théorie de  $WLF$  (équivalence temps température) et l'on constate que l'on peut effectivement déterminer un facteur  $a_T$  et tracer les courbes réduites en prenant pour variable  $\log Ra_T$  (figures 4-5-6-7).

Les valeurs de  $a_T$  ont été déterminées expérimentalement en superposant les courbes obtenues à différentes vitesses et différentes températures : en première approximation, les valeurs de  $a_T$  sont les mêmes pour la plupart des isolanes mais différentes de celles valables pour les butalanes : le tableau 1 (voir in fine) présente d'une part les valeurs obtenues pour  $\log a_T$  et les valeurs calculées d'après la relation de  $WLF$  pour différentes valeurs de  $T_g$  (température de transition).

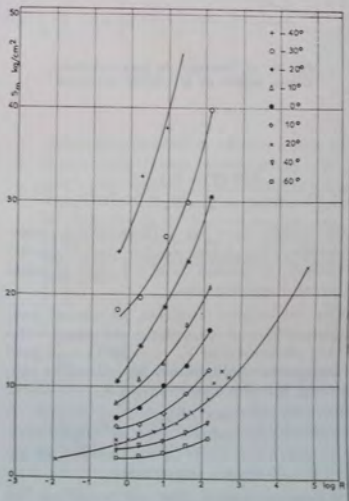


Fig. 3. — Variation de la traction maximum en fonction de la vitesse à différentes températures

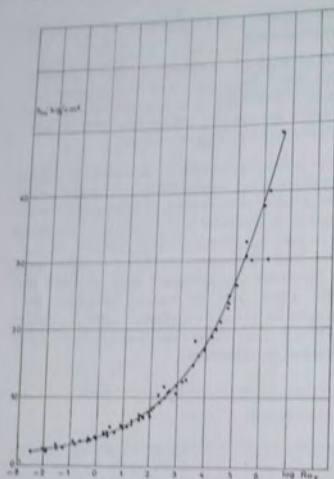


Fig. 4. — Propergol du type butalane.  
Courbe réduite de la traction maximum

$$\text{Log } a_e = \frac{-8,86 (T - T_s)}{101,6 + T - T_s}, T_s = T_0 + 50^\circ \text{C}$$

On constate donc que si l'équivalence température paraît bien vérifiée dans le cas des propergols, la relation de *WLF* pour le calcul de  $a_e$  ne s'applique pas.

Pour les isolanes classiques, on obtient pour  $T \geq -20^\circ \text{C}$ , une concordance correcte avec les valeurs obtenues pour  $T_s = -40^\circ \text{C}$ , mais pour les températures plus basses les valeurs se rapprochent de celles obtenues pour  $T_s = -60^\circ \text{C}$ .

Pour les butalanes jusqu'à  $T \geq -40^\circ \text{C}$ , la concordance est correcte avec les valeurs obtenues pour  $T_s = -60^\circ \text{C}$ , mais ensuite on observe une divergence importante.

Si l'on considère le liant des propergols isolanes, la valeur de  $T_s$  déterminée par dilatométrie linéaire est voisine de  $-40^\circ \text{C}$  et l'étude des

propriétés mécaniques du liant en fonction de la température montre que  $S_m$  et  $e_m$  augmentent quand la température diminue jusqu'à  $-40^\circ \text{C}$ , pour les températures plus basses  $S_m$  et  $e_m$  diminuent de façon très rapide quand la température diminue. Le module du liant augmente de façon très brutale au voisinage de  $-40^\circ \text{C}$  (figures 8-9-10).

Dans la zone de température ( $0^\circ \text{C}$ ,  $-40^\circ \text{C}$ ), l'évolution des propriétés du liant et du propergol est très différente; dans ces conditions, il ne paraît pas anormal que la relation de *WLF* ne s'applique pas et on peut prévoir, dès maintenant, que la compréhension du comportement du propergol nécessitera une étude approfondie de la liaison entre le liant et les charges.

## 2. RELAXATION

Les études sur la relaxation sont menées en collaboration avec l'Institut français du Caoutchouc (Professeur THURON).

### 2.1. Essais sur propergols du type isolane

- Des essais faits à  $20^\circ \text{C}$  montrent que le rapport  $S_t/S_0$  ( $S_t$  étant la contrainte résiduelle après le temps de relaxation  $t$ ) ne dépend pas de l'allongement imposé, ce qui amène à penser qu'à cette température on a une cinétique unique de relaxation.
- Les essais à différentes températures ont été faits pour un seul allongement (10 %) et l'on peut représenter les résultats sous la forme mathématique suivante :

$$S(t) = S_0 + Ct^{-n} = S_0 \left( 1 + \gamma t^{-n} \right) = S_0 \left[ 1 + \left( \frac{t}{\tau} \right)^{-n} \right]$$

Le tableau 2 donne les valeurs des différents paramètres à chaque température.

On remarque sur ce tableau que les valeurs de  $n$  présentent une discontinuité entre  $+10$  et  $-10^\circ \text{C}$ . Pour les températures  $\geq +10^\circ \text{C}$   $n$  est voisin de 0,23

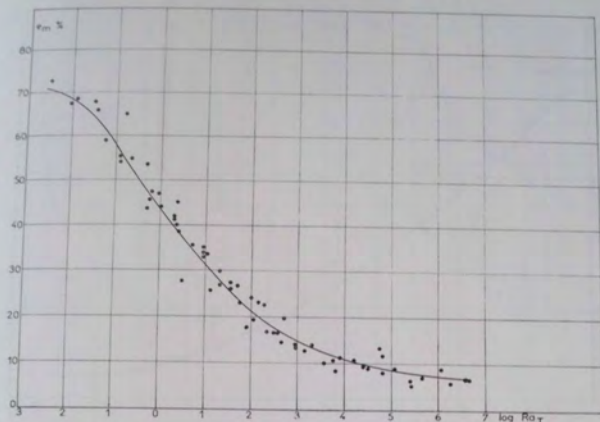


Fig. 5. — Propergol du type butalane. Courbe réduite de l'allongement à traction maximum

pour les températures  $\leq -10^\circ\text{C}$  et jusqu'à  $-40^\circ\text{C}$   $m$  est voisin de 0,35.

On remarque, d'autre part, que l'amplitude relative de la relaxation ( $S/S_c$ ) est beaucoup plus importante quand la température diminue, mais qu'il existe deux domaines où ce rapport est à peu près constant :

$$\begin{aligned} 20 < T < 40 & \quad S/S_c = 1,7 \\ -30 < T < -45 & \quad S/S_c = 4,6 \end{aligned}$$

On peut noter qu'à basse température ( $T < -30^\circ\text{C}$ ), on observe l'apparition de vacuoles sur les éprouvettes maintenues en relaxation.

Pour les isolanes, il ne paraît pas, en général, possible de tracer des courbes ré-

duites en relaxation et on peut penser qu'à haute température la relaxation met en cause uniquement le liant, alors qu'à basse température, la relaxation peut comporter la rupture de la liaison liant-charge et l'apparition de vacuoles, ce qui expliquerait l'impossibilité d'obtenir des courbes réduites.

## 2.2. Essais sur propergols du type butalane

Dans le cas des butalanes au contraire, on a constaté qu'il était possible de faire coïncider les différents isothermes et de définir des coefficients  $a_T$  en relaxation, on a obtenu les valeurs suivantes :

T	-30°C	-20°C	-10°C	0	+10°	+20°	+30°	+40°C	+60°C
log $a_T$	2,15	1,65	1,2	0,75	0,35	0	-0,3	-0,6	-1,15

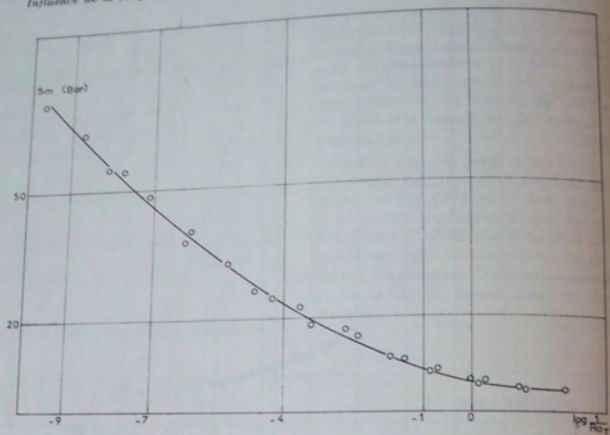


Fig. 6. — Propergol du type isolane.  
Courbe réduite de la charge maximum

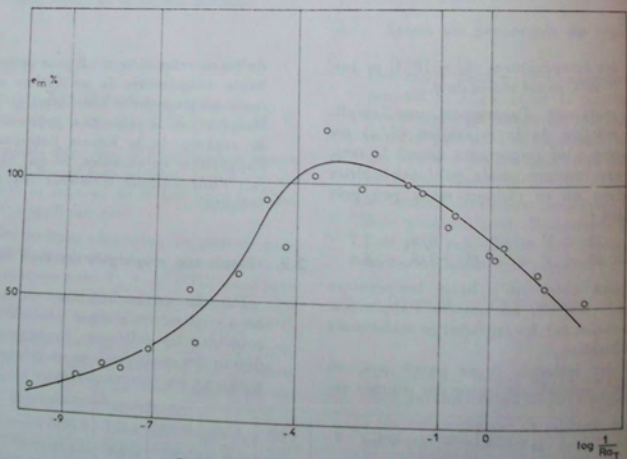


Fig. 7. — Propergol du type isolane.  
Courbe réduite de l'allongement maximum

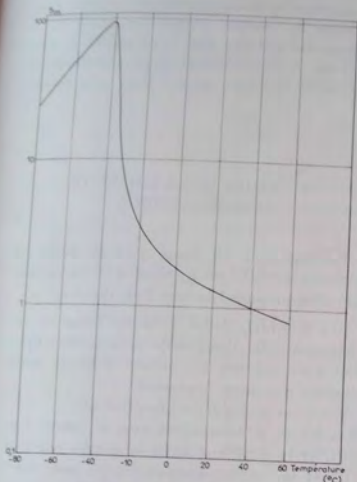


Fig. 8. — Résine polyuréthane

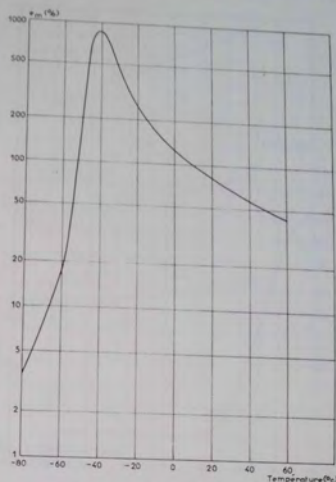


Fig. 9. — Résine polyuréthane

Ces valeurs sont égales à celles obtenues par la formule de  $WLF$  pour une température de transition de  $-95^{\circ}\text{C}$  qui se trouve dans la zone des points de transition des polybutadiènes. Il semblerait donc que dans le cas des butalanes, la relaxation (contrairement à la traction) ne mettrait en cause que le liant du propergol.

### 3. ESSAIS DE TRACTION SOUS PRESSION

Un appareil permettant d'effectuer des tractions sous pression hydrostatique a été réalisé selon le principe suivant (figure 11) :

- La pressurisation et le mouvement du piston sont assurés par de l'azote comprimé,

- un anneau dynamométrique mesure la force,
- on enregistre le mouvement du piston ce qui permet de connaître la vitesse de traction,
- on fait varier la vitesse par un régulateur de débit Sigma. On constate que lorsque la pression augmente (figures 12 et 13) :
  - . la traction maximum augmente de même que l'allongement à traction maximum.
  - . le module d'Young à l'origine reste pratiquement constant.

Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux obtenus sur un appareil très différent par R.J. FARRIS (Transactions of the Society of Rheology 12-2, 315 — 334, 1968). Ce dernier mesurant la variation de volume de l'éprouvette au cours de la traction a montré que l'effet de

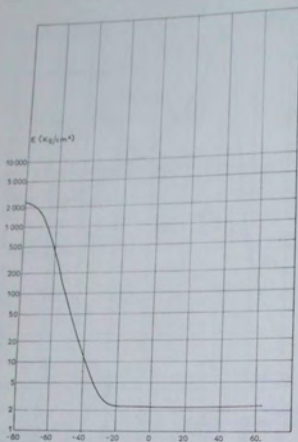


Fig. 10. — Résine polyuréthane

la pression hydrostatique est de retarder l'apparition de vacuoles autour des grains de la charge. On voit que dans le cas des essais sous pression, le comportement du propulseur dépend surtout de la liaison entre le liant et la charge.

#### 4. ETUDE DE LA LINEARITE VISCOELASTIQUE

Par une étude en fluage avec surcharge ou décharge partielle on a étudié si la viscoélasticité d'un propulseur isolane était linéaire.

Si  $\varepsilon = \sigma f(t)$ , l'effet d'une surcharge ou décharge partielle d'amplitude  $\Delta\sigma$  imposée à l'instant  $\tau$  est tel que la courbe de fluage après l'instant  $\tau$  a pour expression

$$\varepsilon = \sigma f(t) + \Delta\sigma f(t - \tau)$$

Si  $\varepsilon_0(t)$  est la déformation pour la charge  $\sigma$  et  $\varepsilon_1(t, \tau)$  la différence entre la courbe observée  $\varepsilon(t)$  et la courbe extrapolée  $\varepsilon_0(t)$  pour  $t > \tau$  on a :

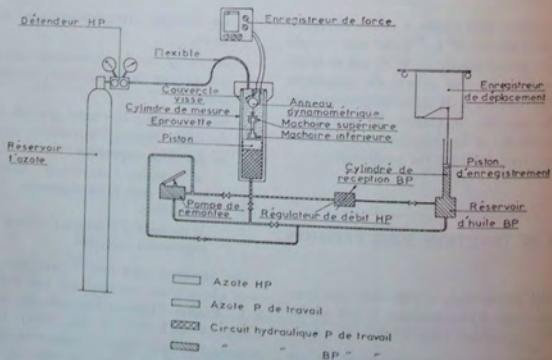


Fig. 11. — Schéma de l'appareil

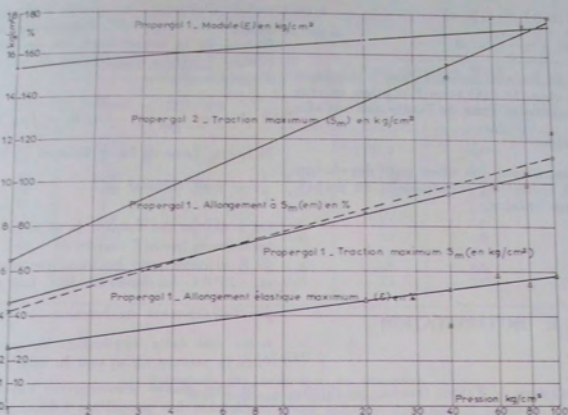


Fig. 12. — Variation des caractéristiques avec la pression hydrostatique

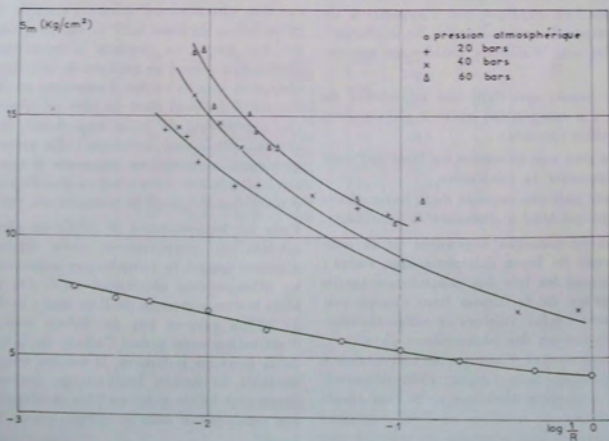


Fig. 13. — Influence de la vitesse d'élongation sur la traction maximum

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t, \tau)$$

$$\varepsilon_1(t, \tau) = \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \varepsilon_0(t - \tau)$$

Le test de linéarité consiste donc à comparer  $\varepsilon_0(t, \tau)$  et  $\varepsilon_0(t - \tau)$  : les 2 courbes doivent pouvoir se déduire l'une de l'autre par une affinité de rapport  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ .

On a montré ainsi que même pour des charges faibles (0,5 kg/cm<sup>2</sup>) la viscoélasticité du propergol n'est pas linéaire.

## 5. INTERPRETATION

Les expériences de FARRIS (mesure au dilatomètre à gaz) et celles qui ont été réalisées par le Services des poudres (mesure de la poussée d'Archimède) montrent que lorsqu'on soumet un propergol même à des allongements assez faibles (10 %), on observe une augmentation de volume que l'on explique par l'apparition de vacuoles autour de certains grains de la charge : ces vacuoles sont d'ailleurs visibles au microscope.

On peut penser que dans une expérience de traction il y a compétition entre 2 phénomènes ayant des effets opposés :

- d'une part une extension du liant qui tend à augmenter la contrainte,
- d'autre part une rupture de la liaison liant charge qui tend à diminuer la contrainte.

Ces deux phénomènes dépendent de la température mais de façon différente sans doute : le liant suivant les lois des caoutchoucs tandis que la rupture de la liaison liant charge suit probablement des lois voisines de celles des réactions chimiques ou des phénomènes physiques. On peut ainsi essayer d'interpréter l'équivalence temps-température sous l'aspect thermodynamique d'une « réaction chimique ». Si l'on considère une courbe de traction, on peut connaître (par la valeur de  $a_T$ ) la vitesse de traction qui

permet d'obtenir cette courbe à chaque température :  $\log Ra_T = C''$ . Connaissant ainsi l'influence de la température, on devrait pouvoir évaluer l'énergie d'activation de cette réaction d'après la relation

$$R = A e^{-\frac{\Delta U}{RT}} \quad \text{Log } a_T = \text{Log } A - \frac{\Delta U}{RT}$$

Si  $\text{Log } a_T$  varie de façon linéaire en fonction de

$$\frac{1}{T} \text{ on peut calculer } \Delta U.$$

On a obtenu des valeurs de 35 Kcal/mole pour les isolanes (pour  $T$  variant de  $-50$  à  $+20^\circ\text{C}$ ) et 30 Kcal/mole pour les butalanes (entre  $-60^\circ\text{C}$  et  $+20^\circ\text{C}$ ). Au-dessus de  $20^\circ\text{C}$   $\text{Log } a_T$  ne varie pas linéairement en fonction de  $\frac{1}{T}$ . On peut

noter que cette application ne peut se faire dans la mesure où  $a_T$  suit la relation de WLF.

Si l'on essaye d'interpréter l'évolution contradictoire des propriétés mécaniques du liant et du propergol en fonction de la température, on observe une certaine similitude entre les courbes  $S_m$ ,  $e_m$  ou  $S_m$ ,  $\varepsilon$  obtenues en faisant varier la température du propergol et les mêmes courbes obtenues en faisant varier le taux de réticulation du liant à  $20^\circ\text{C}$ . On peut donc penser que quand on diminue la température, on diminue la vitesse de rupture de la liaison liant-charge et que de ce fait l'ensemble se comporte comme si le liant était de plus en plus réticulé ( $S_m$  augmentant de façon importante, les allongements diminuant fortement). En première approximation, quand on augmente le taux de réticulation  $S_m \dot{\varepsilon} = C$  et c'est ce que l'on retrouve grossièrement quand la température varie.

Pour les températures  $\geq 20^\circ\text{C}$ , on observe en général un comportement assez différent.  $S_m$  diminue quand la température augmente, mais les allongements diminuent aussi. On retrouve alors le comportement du liant seul ; la variation de  $a_T$  ne permet pas de définir une énergie d'activation mais prend l'allure de la variation de  $a_T$  pour un polymère. Il semble que dans ce domaine la liaison liant-charge devienne suffisamment faible pour ne plus intervenir de façon significative dans le comportement du propergol.



TABLEAU 1  
Valeurs de log  $\sigma_T$

T	Epreuve de traction		Valeurs théoriques W L F			
	Isolanes	Butalanes	Tg = - 40°C	Tg = - 60°C	Tg = - 90°C	Tg = - 50°C
- 60	10,2	8,1		11,1	5,65	
- 50	8,1	7,05		8,1	4,4	
- 40	6,6	5,7	9,75	5,95	3,4	7,5
- 30	5,2	4,25	6,45	4,35	2,6	5,25
- 20	4	3,1	4,45	3,1	1,9	3,65
- 10	2,8	2,1	2,95	2,1	1,3	2,5
0	1,75	1,4	1,75	1,3	0,8	1,5
20	0	0	0	0	0	0
40	- 1,1	- 0,8	- 1,25	- 0,9	- 0,6	- 1
60	- 1,95	- 1,6	- 2,15	- 1,6	- 1,1	- 1,8

TABLEAU 2  
Paramètres des isothermes de relaxation  
d'un propergol de type isolane

$$S = S_e + ct^{-m} = S_e (1 + \gamma t^{-m}) = S_e \left[ 1 + \left( \frac{t}{\tau} \right)^{-m} \right]$$

$\theta$	$S_0$	m	$\sigma$	$\gamma$	$\tau$	$\frac{S_0}{S_e}$
- 45	2,54	0,413	23,7	9,35	225	4,7
- 40	2	0,392	17,5	8,75	252	4,55
- 35	1,61	0,373	13,3	8,26	287	4,6
- 30	1,26	0,359	10,2	8,1	400	4,55
- 20	1,0	0,348	5,50	5,50	135	3,5
- 10	0,84	0,345	3,16	3,76	46,5	2,7
0	0,70	0,314	1,86	2,66	22,5	2,3
10	0,58	0,235	1,11	1,91	15,7	2,1
20	0,60	0,232	0,71	1,18	2,04	1,7
30	0,58	0,232	0,69	1,19	2,12	1,7
40	0,58	0,227	0,62	1,07	1,35	1,6

# Les méthodes modernes d'expression de la thermodynamique appliquées à la représentation des systèmes viscoélastiques

## II. Cinétique des comportements<sup>(\*)</sup>

par J.-C. ROBINET

Ingénieur E.P.C.I. — Dr ès Sciences  
Chef du Groupe Application des Plastiques au CERCHAR

### RESUME

*L'expression des lois de l'équilibre thermodynamique a permis [1] grâce à l'intervention de variables internes, de représenter l'ensemble des comportements viscoélastiques liés à un phénomène comme la transition vitreuse sous une forme matricielle qui lie les déplacements aux forces. Cette représentation est ici appliquée aux comportements linéaires en étendant aux variables internes les hypothèses de la thermodynamique des systèmes irréversibles. On a pu démontrer ainsi, que même dans le cas simple d'un comportement boltzmannien, la cinétique des déplacements (cisaillement, volume, etc...) obéissait à des lois différentes. Les hypothèses simplificatrices généralement implicitement acceptées dans l'interprétation des phénomènes de transition vitreuse sont mises en évidence.*

### SUMMARY

*The expression of thermodynamic equilibrium had permitted, with the help of internal variables, to represent all the viscoelastic behaviours linked to a phenomenon, such as glass transition, in a matrix representation which binds extensive parameters to forces. This representation is here applied to linear behaviours extending the irreversible thermodynamic postulates to the internal variables. Thus we could demonstrate that even in the simple case of a linear behaviour the kinetics of the extensive parameters such as shear, volume, etc..., followed different laws. The simplifying hypothesis usually implicitly accepted in the interpretation of the glass transition stand out.*

(\*) Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie, le 17 septembre 1970.

## 1. INTRODUCTION

Dans une précédente publication [1] nous avons appliqué les méthodes modernes d'expression de la thermodynamique développées par TISZA et CALLEN [2] à l'étude du comportement viscoélastique et plus particulièrement à l'ensemble des phénomènes liés à la transition vitreuse. Nous avons montré qu'il était possible d'exprimer cet ensemble de phénomènes, sous la forme d'une relation matricielle liant un « vecteur force » au sens généralisé de la thermodynamique à un « vecteur déplacement », à condition d'envisager toutes les variables intervenant dans le comportement et en particulier des variables dites internes ou cachées, c'est-à-dire inaccessibles à l'observation. Ces variables internes sont introduites sous la forme d'un degré d'avancement de réaction et de la force conjuguée, l'affinité, selon les méthodes de DE DONDER [3].

1. STATIQUE GENERALE  
DU COMPORTEMENT  
THERMODYNAMIQUE

Si l'on considère un système homogène soumis à un ensemble de contraintes thermiques et mécaniques, la relation matricielle générale liant les forces aux déformations s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dT \\ d(-P) \\ d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = u_{ik} \begin{pmatrix} dS \\ dv \\ d\gamma_1 \\ d\gamma_2 \\ d\gamma_3 \\ d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ou les déplacements  $N_i$  sont :

$$\begin{pmatrix} dS \\ dv \\ d\gamma_1 \\ d\xi_1 \end{pmatrix} \begin{cases} \text{la déformation de cisaillement relative à la direction principale 1,} \\ \text{la variation de l'avancement de la réaction relative à la variable interne } \xi_1 \end{cases}$$

et les forces  $X_i$  sont

$$\begin{cases} dT & : \text{la variation de température,} \\ d(-P) & : \text{la variation de pression,} \\ d\sigma_i & : \text{la variation de contrainte de cisaillement relative à la direction principale } i, \\ dA_i & : \text{la variation de l'affinité relative à la variable } \xi_i. \end{cases}$$

Les éléments  $u_{ik}$  de la matrice de correspondance des forces aux déformations  $u_{ik}$  sont les dérivés secondes de l'énergie interne  $u$  par rapport aux déplacements soit :

$$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial N_i \partial N_k}$$

Nous avons montré [1] que la relation (1) peut être inversée totalement ou partiellement par rapport aux forces. Nous l'utiliserons ici sous la forme inversée par rapport aux forces accessibles, c'est-à-dire la température, la pression et les contraintes de cisaillement.

La relation (1) devient :

$$\begin{pmatrix} dS \\ dV \\ d\gamma_1 \\ d\gamma_2 \\ d\gamma_3 \\ dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G_{ik} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} dT \\ d(-P) \\ d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\xi_1 \\ d\xi_2 \\ d\xi_3 \end{pmatrix}$$

ou les termes  $G_{ik}$  de la matrice  $[G_{ik}]$  sont les dérivés secondes du potentiel thermodynamique  $G$  transformé de LEGENDRE de l'énergie interne par rapport aux forces  $T$ ,  $-P$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  et  $\sigma_3$ .  $G$  est en fait une forme généralisée au comportement thermo-mécanique de l'énergie libre de GIBBS.

$$G = u - TS + PV - \sigma_1 \gamma_1 - \sigma_2 \gamma_2 - \sigma_3 \gamma_3 + \sum_1^n A_i \xi_i$$

$$G_{ik} = \frac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial X_k}$$

La matrice  $(G_{ik})$  est symétrique. il est donc toujours possible, sans réduire la généralité de l'expression, de choisir les variables  $\xi_i$  de telle

façon que la sous matrice des  $G_{ik}$  correspondants soit diagonale. Ceci exprime que les variables internes sont indépendantes les unes

des autres [4]. Nous ferons par la suite l'hypothèse que cette diagonalisation a été faite. Dans ces conditions la relation (2) s'écrit :

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 dS & G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & \dots & G_{1n} & \dots & dT \\
 dV & G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & \dots & G_{2n} & \dots & d-P \\
 d\gamma_1 & G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & \dots & G_{3n} & \dots & d\sigma_1 \\
 d\gamma_2 & G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & \dots & G_{4n} & \dots & d\sigma_2 \\
 d\gamma_3 & G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} & G_{55} & \dots & G_{5n} & \dots & d\sigma_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 dA_i & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & d\xi_i \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 dA_i & G_{i1} & G_{i2} & G_{i3} & G_{i4} & G_{i5} & \dots & G_{in} & \dots & d\xi_i \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
 dA_n & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & d\xi_n
 \end{array} \quad (2)$$

## 2. DYNAMIQUE DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

Les relations (1) et (2) représentent l'équation d'état d'un système. Elles sont toujours valables, que le système soit à l'équilibre ou en évolution (tout au moins dans le cadre linéaire de la thermodynamique des systèmes irréversibles). Les variables extensives peuvent donc évoluer de façon instantanée ou retardée sous l'influence d'une variation du champ de contrainte. Les systèmes viscoélastiques obéissent à une évolution retardée qui peut, dans le cas où les variations des contraintes et des déformations restent faibles, être boltzmanienne. STAVERMAN A.J. et SCHWARZL P. [5] ont montré que les comportements boltzmaniens sont des comportements où les flux des variables extensives (vitesse des déplacements) sont proportionnels aux forces c'est-à-dire qu'ils entrent dans le cadre de la thermodynamique des systèmes irréversibles.

La vitesse d'évolution de la variable  $\xi_i$  soit  $d\dot{\xi}_i$  peut alors s'exprimer en fonction de l'ensemble des contraintes appliquées au système grâce à la relation linéaire :

$$d\dot{\xi}_i = \sum_n a_{in} dA_n$$

Les relations d'Onsager indiquent que  $a_{in} = a_{ni}$ , la matrice des  $a_{in}$  est donc symétrique ; elle

peut être diagonalisée et la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$d\dot{\xi}_i = a_i dA_i \quad (3)$$

C'est-à-dire que la vitesse d'évolution de la variable  $\xi_i$  est proportionnelle à l'écart de l'affinité  $dA_i$ . Le coefficient  $a_i$  qui relie une vitesse de déformation à une force peut être comparé à une viscosité.

L'écart de l'affinité  $dA_i$  peut s'exprimer en fonction des forces appliquées au système :  $dT$ ,  $d-P$ ,  $d\sigma_1$ ,  $d\sigma_2$  et  $d\sigma_3$  et de l'écart de la variable  $\xi_i$  :  $d\xi_i$ .

D'après la relation (2) que l'on suppose diagonalisée en ce qui concerne les variables  $\xi$  on a :

$$dA_i = [G_{i1}dT + G_{i2}d(-P) + G_{i3}d\sigma_1 + G_{i4}d\sigma_2 + G_{i5}d\sigma_3] + G_{in}d\xi_i$$

Nous appellerons  $X_i$  le terme entre crochets d'où :  $dA_i = X_i + G_{in}d\xi_i$

Le coefficient  $G_{in}$  relie une force à une déformation, il est donc analogue à un module ; il est ici négatif d'après la définition de DE DONDER des affinités et des degrés d'avancement de réaction.

En remplaçant  $dA_i$  dans (3) on a :

$$d\dot{\xi}_i = a_i X_i + a_i G_{in} d\xi_i \quad (4)$$

On peut écrire :

$$a_i G_{ii} = - \frac{1}{\tau_i}$$

ou  $\tau_i$  est homogène à un temps

on a en intégrant (4)

$$d\xi_i = a_i \tau_i X_i (1 - \exp(-t/\tau_i))$$

Cette relation exprime que la variable interne  $\xi_i$  évolue, après que le système ait été soumis à un système quelconque de contraintes, selon un processus de relaxation exponentiel simple dont l'amplitude dépend de la valeur des contraintes appliquées (termes  $X_i$ ) mais dont le temps de relaxation est indépendant de cette valeur.

La relation (2) permet d'exprimer la valeur des déformations du système soumis à un sys-

tème de contraintes en fonction de la valeur de ces contraintes d'une part et de la valeur des degrés d'avancement de réaction  $d\xi_i$  d'autre part.

Nous pouvons ainsi exprimer :

$$dV_{(i)} = [G_{ii} dT + G_{ii} d(-P) + G_{ii} d\sigma_1 + G_{ii} d\sigma_2 + G_{ii} d\sigma_3] + \sum_{i=6}^n G_{ii} d\xi_i$$

En appelant  $Y_i$  le terme entre crochets on a :

$$dV_{(i)} = Y_i + \sum_{i=6}^n a_i \tau_i X_i (1 - \exp(-t/\tau_i))$$

En développant  $Y_i$  et  $X_i$  on peut exprimer  $dV_{(i)}$  en fonction des forces appliquées au système

$$dV_{(i)} = \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} dT + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} d(-P) + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} d\sigma_1 + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} d\sigma_2 + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} d\sigma_3$$

Si le système est homogène et isotrope les trois derniers termes entre crochets sont identiques car  $G_{ii} = G_{ii} = G_{ii}$  et  $G_{ii} = G_{ii} = G_{ii}$  ( $6 < i < n$ ) dans de tels systèmes.

Par contre même dans de tels systèmes, les trois premiers termes sont différents et représentent en fait trois spectres distincts de temps de relaxation car  $G_{ii} \neq G_{ii} \neq G_{ii}$ .

La variation de volume consécutive à une variation échelon de température ou de pression ou encore de contrainte de cisaillement n'obéira donc pas à la même fonction de relaxation bien que le système ait un comportement boltzmannien.

On peut exprimer de la même façon pour un système homogène, isotrope  $d\gamma_i(t)$  soit :

$$d\gamma_i(t) = \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} dT + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} d(-P) + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} (d\sigma_1) + \left\{ G_{ii} + \sum_{i=6}^n G_{ii} a_i \tau_i G_{ii} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \right\} (d\sigma_2 + d\sigma_3)$$

On voit que de la même façon les déformations de cisaillement consécutives à une variation échelon de température, de pression ou de contrainte de cisaillement n'obéissent pas à la même fonction de relaxation.

Si de plus, on compare  $dV(t)$  à  $d\gamma_i(t)$  on constate que la variation de volume et la déformation de cisaillement consécutives à une même variation échelon de contrainte n'obéissent pas à une même fonction de relaxation, en effet :  $G_{22}$  est différent de  $G_{21}$ .

Nous avons montré dans une précédente publication [1] que les fonctions de relaxation étaient les mêmes à condition qu'il existe une relation entre les coefficients de la sous matrice liant les déplacements aux variables internes soit :

$$\begin{aligned} G_{11} &= k_2 G_{22} = k_2 G_{21} = k_1 G_{11} = k_1 G_{12} \quad \forall, \\ \text{ou} \quad G_{22} &= k_1 G_{21} = k_1 G_{11} = k_1 G_{12} = k_2 G_{22} \quad \forall, \end{aligned} \quad (6)$$

Dans ce cas on a en effet :

$$\begin{aligned} dV_{12} &= G_{21} dT + G_{22} d(-P) + G_{23} d\sigma_1 + d\sigma_2 + \\ & d\sigma_3 \sum_{i=6}^n G_{2i} a_i \tau_i \quad G_{11} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\gamma_i(t) &= G_{21} dT + G_{22} d(-P) + G_{23} (d\sigma_1 + \\ & G_{24} d(\sigma_2 + d\sigma_3) + \left( \frac{k_2}{k_1 k_2} dT + \frac{1}{k_1} d(-P) \right. \\ & \left. + \frac{k_2}{k_1^2} d\sigma_1 + \frac{k_2}{k_1 k_2} (d\sigma_2 + d\sigma_3) \right) \\ & \sum_{i=6}^n G_{2i} a_i \tau_i \quad G_{11} (1 - \exp(-t/\tau_i)) \end{aligned}$$

On constate ainsi que si les relations (6) sont respectées, les spectres des temps de relaxation sont identiques quelle que soit la contrainte appliquée et la déformation observée. Dans ces conditions, le comportement du système dépend de plusieurs variables internes qui déterminent le spectre des temps de relaxation mais les relations (6) expriment que chaque variable interne a un effet proportionnel sur l'ensemble des déplacements.

## CONCLUSION

Dans le cas général d'un système dépendant de plus d'une variable interne, il n'y a aucune raison a priori pour que les spectres des temps de relaxation auxquels obéissent les comportements retardés après que le système ait été soumis à une sollicitation quelconque soient comparables. Les spectres dépendent en effet, ainsi que nous venons de le montrer, d'une part du type de sollicitation appliquée (variation de température, pression, contrainte de cisaillement, etc...), d'autre part de la variable observée (déformation de volume, quantité de chaleur fournie, déformation de cisaillement, etc...). Ce n'est que dans le cas très particulier exprimé par les relations (6) où tous les comportements obéissent à la même combinaison linéaire de variables internes, que l'on a un spectre de temps de relaxation unique et que les relations de DAVIES R.O. et JONES G.O. [6] entre les coefficients thermodynamiques sont vérifiées [1].

Les variables internes peuvent représenter en fait les divers processus moléculaires qui sont à la base des comportements viscoélastiques et thermodynamiques d'un système. Ces processus moléculaires sont, dans le cas des composés macromoléculaires, des processus de changement de configuration des chaînes, qui seuls permettent de rendre compte des divers comportements retardés.

Les relations générales que nous avons écrites expriment donc que tous les comportements peuvent ne pas dépendre de la même façon des divers processus de changement de conformation des chaînes. Cette supposition pourra être examinée sur la base des théories moléculaires grâce aux méthodes d'analyse des comportements des chaînes proposées par VERDIER et STOCKMAYER [7] et développées par MONNERIE [8]. D'autre part, le faible nombre d'études expérimentales des effets directs et croisés [9], en dehors du comportement en cisaillement et des effets volume-température ne permet pas actuellement le contrôle expérimental. Notre second objectif sera donc d'apporter une contribution dans le domaine des effets directs et croisés de la pression sur le volume [10] et les déformations de cisaillement [11] en prenant particulièrement garde de rester dans le domaine du comportement boltzmannien propre au système de contrainte et déformation appliquée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C. ROBINET et R. BUVET : Cahiers du Groupe français de rhéologie 4 I 173 (1967).
- [2] H.B. CALLEN : « Thermodynamics » JOHN WILEY, New York (1961).
- [3] DE DONDER : The Affinity, Dunod, Paris (1936).
- [4] J.Z. MEIXNER : Naturforsch., 9a, 654 (1954).
- [5] A.J. STAYERMAN et P. SCHWARZL : Proc. Roy. Acad. Sci. 55, 474 (1952).
- [6] R.O. DAVIES et G.O. JONES : Advances in Phys., 2, 370 (1953).
- [7] P.H. VERDIER et W.H. STOCKMAYER : J. Chem. Phys. 36, 227 (1962).
- [8] L. MONNERIE et F. GENY : J. Chimie Phys. 66, 1691 (1969) 1698 et 1708.
- [9] A.J. KOVACS : Trans. Soc. Rhéol. 5, 285 (1961).
- [10] J.C. ROBINET et R. BUVET : Cahiers du Groupe français de rhéologie.
- [11] J.C. ROBINET et M. FAUQUET (à paraître) : Cahiers du Groupe français de rhéologie.

# Effet de la pression sur la nucléation et la propagation des fissures<sup>(\*)</sup>

par K. DANG VAN et D. RADENKOVIC

Laboratoire de Mécanique des Solides  
Ecole Polytechnique

## RESUME

*Un modèle de la nucléation des fissures de fatigue est décrit à la base de la théorie des dislocations. A partir de ce modèle et des données expérimentales un critère de fatigue possible est proposé, selon lequel la valeur du cisaillement au moment de l'endommagement dépend de la pression hydrostatique correspondante. Des résultats expérimentaux concernant la propagation des fissures indiquent qu'il y a une analogie entre les phénomènes en fatigue et en rupture, qui pourrait être utilisée dans l'étude de certains cas complexes de la fatigue.*

## SUMMARY

*A model of the mechanism of nucleation of fatigue cracks based on the theory of dislocation is described. Starting from this model and from the experimental data a possible criterion of fatigue is proposed according to which the amount of shearing stress at the moment of damage depends on the attendant hydrostatic pressure. The results of tests concerning the propagation of crack suggest an analogy between the phenomena in rupture and in fatigue, which could be used when studying some complex cases of fatigue.*

(\*) Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie, le 17 septembre 1970.



## 1. INTRODUCTION

Il est connu que l'augmentation de la pression hydrostatique entraîne une amélioration de la résistance de différents matériaux, soit envers la nucléation des microfissures de la fatigue des métaux, soit envers la propagation des macrofissures qui a un rôle essentiel dans la rupture fragile. Cependant l'appréciation précise de cet effet, en particulier lorsqu'il s'agit de la fatigue sous contrainte complexe, n'est ni simple ni généralement bien comprise.

Dans la communication présente, un modèle de la nucléation des fissures dans les grains les plus défavorablement orientés est décrit à la base de la théorie des dislocations. Par recouplement des résultats numériques obtenus à partir de ce modèle et des données expérimentales, un critère de fatigue possible est proposé selon lequel l'amplitude du cisaillement au moment de l'endommagement dépend de la pression hydrostatique correspondante. Un tel critère ne peut être qu'approximatif, mais s'avère valable au moins pour certains trajets de charge simples les plus fréquemment rencontrés dans la pratique.

Le problème de la propagation des fissures est d'une certaine manière plus compliqué, puisque le processus se situe en bordure des deux niveaux d'observation : macroscopique (théorie du milieu continu) et microscopique (structure atomique). Quelques résultats expérimentaux présentés indiquent qu'il y a une analogie entre les phénomènes correspondants en fatigue et en rupture fragile en dépit du fait que les mécanismes sont probablement très différents. Cette analogie pourrait être utilisée dans l'étude de certains cas complexes de la fatigue.

## 2. NUCLEATION DES FISSURES DE FATIGUE

Dans les problèmes de rupture fragile c'est la propagation des fissures qui est la question primordiale ; le problème de la fatigue pour des matériaux bien cristallisés et sans défaut

macroscopique est surtout l'étude de la nucléation des fissures, car en effet une fois celles-ci formées, leur propagation inéluctable entraîne en général la ruine de la pièce à plus ou moins brève échéance. Or, l'étude de la nucléation des fissures montre l'effet important de la pression hydrostatique, qui a souvent été méconnue dans les théories classiques de la fatigue.

On admet le plus souvent que la durée nécessaire à la formation des fissures de fatigue se compose de trois périodes distinctes :

1. déformation plastique et écrouissage des grains les plus défavorablement orientés,
2. nucléation des microfissures à l'intérieur des grains,
3. formation de fissures à partir de microfissures.

Nous exposons ici brièvement un modèle de nucléation de fissure de fatigue qui s'inspire du modèle d'OROWAN [1] pour la première période et de celui de YOKOBORI [2] pour la seconde. Pour les détails des calculs, on pourra se reporter à [3].

Nous nous limitons à des contraintes faibles, disons de l'ordre de grandeur de la limite d'endurance en traction répétée. Nous considérons un matériau homogène isotrope à l'échelle macroscopique, constitué de cristaux d'orientation aléatoire.

Les premiers cycles provoquent des glissements dans les grains les plus défavorablement orientés ; les déformations plastiques dans le restant de la matrice sont négligeables car le niveau des contraintes maximum atteintes est supposé faible.

Ces glissements sont dus à des mouvements de dislocations dans leur plan (défini par la ligne de dislocation et son vecteur de BURGER). Ils nécessitent des contraintes et des énergies relativement faibles. Pendant ces mouvements, le nombre de dislocations peut augmenter, entraînant un écrouissage du métal. Au bout d'un certain nombre de cycles, le glissement des dislocations dans leur plan se stabilise car elles sont gênées par les crans formés et arrêtées par les barrières constituées par d'autres systèmes de dislocations, par les impuretés et les joints des grains. La phase d'écrouissage est alors achevée et l'évolution ultérieure est due

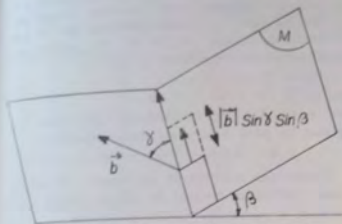


Fig. 1. — Montée par diffusion de crans

aux glissements déviés et aux montées. L'importance de la phase d'écroutissage dépend de la nature des cristaux et des impuretés.

Nous nous intéressons plus particulièrement à la montée des dislocations avec formation de lacunes, par diffusion de crans. C'est un processus lent, thermiquement activé et qui par conséquent nécessite des contraintes et des énergies moins importantes que les processus de montée directe. Un cran, lorsqu'il est formé,

$$F_M = F_{rs}(\beta) + k\sqrt{Dl} \sum \left[ \left| \sup \right| \cos(\gamma' - \gamma) \text{ ou } \left| \cos(\gamma' + \gamma) \right| \left\{ + 2 \left| \sin \gamma \sin \gamma' \right| \frac{|\sin \psi|}{1 - \nu} \right\} \right] \quad (2)$$

où  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont les angles entre les vecteurs d'orientation des lignes de dislocations et leur vecteur de BURGERS;  $D$  est le nombre de dislocations par unité de volume et  $l$  leur longueur moyenne;  $k$  est une constante. La quantité  $\sqrt{Dl}$  est fonction de l'écroutissage.

$F_{rs}(\beta)$  est la force de PIERS NABARRO dans la direction  $\beta$ .

La montée ne provoque la formation de lacunes que si le signe de la variation de volume  $dV$  correspondante est positive, soit :

$$\text{signe } dV = \text{signe } (\vec{L}, \vec{\xi}) \cdot \vec{b} > 0 \quad (3)$$

$\vec{L}$  est le vecteur d'orientation de la ligne de dislocation considéré et  $\vec{\xi}$  la direction de son déplacement.

Les lacunes ainsi formées se rassemblent sous l'effet de l'agitation thermique de façon aléa-

se propage le long de la ligne de dislocation et provoque la montée sur une distance suffisante pour que la variation de volume soit au moins égale au volume d'un défaut ponctuel (figure 1).

Pour des pressions hydrostatiques peu importantes, ce processus provoque l'augmentation de la densité de lacunes qui en coalescant mutuellement forment des fissures.

Pour que la montée puisse se produire dans un plan donné ( $M$ ) distinct du plan de glissement et faisant avec celui-ci un angle  $\beta$ , il faut que la composante sur le plan de montée de la force qui s'exerce sur la dislocation dans le plan, soit supérieure à un seuil au cours d'une partie du cycle, soit :

$$\sigma_{ij} n_i(M) b_j > F_s + F_M \quad (1)$$

où  $\vec{n}(M)$  est la normale au plan de montée,

$\vec{b}$  est le vecteur de BURGERS de la dislocation considérée,

$F_s$  est une force d'origine chimique,

$F_M$  dépend du plan de montée considéré et correspond aux actions des autres dislocations ( $\gamma'$ ) sur la dislocation ( $\gamma$ ) considérée. Une estimation de  $F_M$  a été donnée par ZARKA [4].

toire pour former des amas (ou embryos) de taille variable. Ces embryos sont instables et se redissocient, mais s'ils parviennent à atteindre une taille critique, ils pourront continuer à grandir. On les appelle alors des nucléus pour les différentier des embryos instables. On peut en effet montrer par un raisonnement analogue à celui de GRIFFITH que l'augmentation d'énergie libre  $F$ , nécessaire à la formation d'un trou (supposé sphérique) dans un solide est maximum ( $F_{rn}$ ) pour une certaine taille du trou fonction des contraintes appliquées. Lorsque le rayon du trou est supérieur à cette valeur critique, l'énergie à fournir diminue avec le rayon, et par conséquent le processus pourra évoluer spontanément.

Par un raisonnement analogue à celui de YOKOBORI, on peut retrouver qualitativement la courbe de Wöhler.

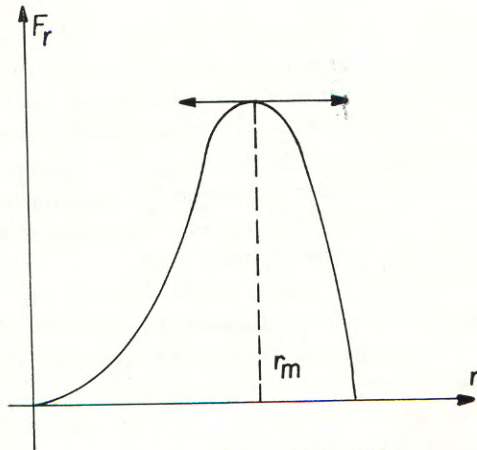


Fig. 2. — Energie libre  $F_r$  en fonction du rayon  $r$  de l'embryo

Dans la formule (1),  $\sigma_{ij} = M_{ijnk} \Sigma_{nk}$  où  $\sigma_{ij}$  représente la contrainte locale en régime établi (l'écroutissage étant terminé),  $\Sigma_{nk}$  est la contrainte macroscopique et  $M_{ijnk}$  est la tenseur d'influence que nous déterminons en généralisant le modèle d'OROWAN pour un système cristallin et un trajet de charge donné.

Pour ce faire, nous faisons les hypothèses suivantes :

- la déformation totale du grain est égale à la déformation de la matrice qui l'entoure,
- les grains et la matrice sont isotropes et ont mêmes coefficients élastiques,
- les déformations plastiques macroscopiques sont négligeables,
- un seul mécanisme de glissement est actif.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \Sigma_{ij} - 2 \mu \varepsilon_{ij}^p \\ \varepsilon_{ij}^p &= \alpha_{ij} \gamma^p \\ \sigma \tau &= \alpha_{ij} \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\varepsilon_{ij}^p$  est la déformation plastique dans le grain défavorablement orienté,

$\gamma^p$  est le glissement plastique

$\tau$  est la cission agissant sur le plan de glissement,

$\alpha_{ij}$  est la matrice définie par  $2 \alpha_{ij} = n_i m_j + m_i n_j$

$\rightarrow n$  normale au plan de glissement

$\rightarrow m$  direction du glissement.

A partir des équations (4) et en supposant un écroutissage linéaire, nous pouvons démontrer analytiquement la relation suivante qui lie les contraintes locales  $\sigma_{ij}(t)$  et les contraintes macroscopiques cycliques  $\Sigma_{ij}(t)$ .

$$\sigma_{ij}(t) = \Sigma_{ij}(t) - 2 \alpha_{ij} T_o \quad (5)$$

où  $\alpha_{ij} \Sigma_{ij}(t) = T_o + T \sin \omega t$

en particulier, le cisaillement  $\tau(t)$  dans les grains les plus défavorablement orientés est

$$\tau(t) = T(t) - T_o$$

Examinons maintenant les dangers de fatigue pour différents trajets de charge qu'on peut obtenir à partir du modèle précédent.

Nous considérons le cas d'un métal *c.f.c.* Le cas des métaux *c.c.* est plus compliqué car les plans de glissement et de montée possibles sont plus nombreux. Pour simplifier, nous faisons également l'hypothèse que pour chaque métal, un seul plan de montée intervient.

Pour un métal *c.f.c.*, les plans de glissement sont les plans (1, 1, 1). Les observations au microscope montrent que lorsqu'un cristal est suffisamment écrouti, les boules de dislocation contenues dans le cristal sont décomposées en petits segments rectilignes allongés dans des directions privilégiées correspondant aux arêtes du tétraèdre de THOMPSON. Le vecteur de BURGERS  $\vec{b}$  est dans le plan de glissement (face du tétraèdre de THOMPSON) et fait avec le vecteur directeur de la ligne de dislocation  $\vec{L}$  un angle de  $0, \pi/3$  ou  $2\pi/3$ . Sur la figure 3, nous

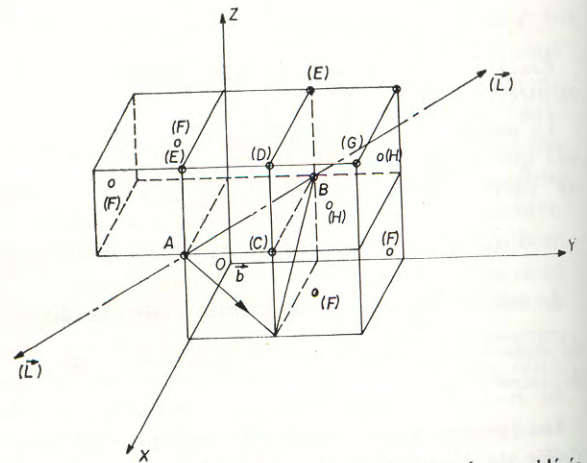


Fig. 3. — Plans de glissement et de montée considérés

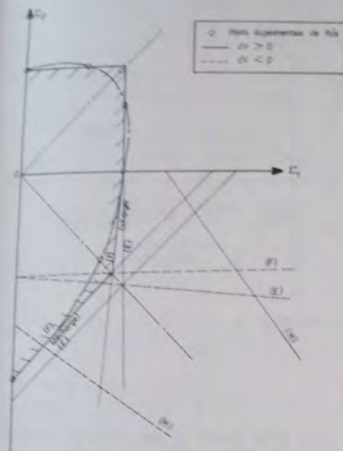


Fig. 4. — Tenue en fatigue pour des sollicitations répétées en contrainte plane

représentons les lignes de dislocations  $(\vec{L}, \vec{b})$  ou  $(\vec{L}', \vec{b})$  telles que  $(\vec{L}, \vec{b}) = \pi/3$  et  $(\vec{L}', \vec{b}) = 2\pi/3$ ; les lignes  $\vec{L}$  et  $\vec{L}'$  sont portées par l'arête  $AB$  du tétraèdre de THOMPSON.

Les plans de montée possibles, très nombreux, sont définis par  $ABX$ ,  $X$  étant une position atomique quelconque ne se trouvant pas dans le plan de glissement. Dans les exemples numériques traités, on se limite à quelques positions atomiques voisines. (Pour des positions plus lointaines, la distance de montée est plus grande et par conséquent les énergies à fournir sont plus importantes).

Les conditions de montée avec formation de lacunes sont définies par les relations (1), (2), (3) et (5). On détermine le plan de montée à partir de la tenue en fatigue pour des sollicitations répétées en contrainte plane dépendant d'un seul paramètre. Sur la figure 4  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  sont les directions des contraintes principales macroscopiques, les trajets de charge sont des

segments de droite issus de l'origine. Le domaine d'endurance est défini par le plus petit domaine enveloppe des segments de droites traduisant les relations (1 et 3) pour les différents plans de montée. (Voir figure 4). On voit que ce domaine d'endurance est défini par  $(ABF, L)$  (ou  $(ABE, L')$  qui est voisin) pour  $\Sigma_1 > |\Sigma_2|$ , l'endommagement ayant lieu pendant la charge, tandis que pour  $\Sigma_1 < |\Sigma_2|$ , il se produit pendant la décharge.

La courbe expérimentale obtenue par Ros avec de l'aluminium, s'inscrit bien à l'intérieur des segments de droites enveloppes, l'écart maximum correspond au trajet de charge tel que  $\Sigma_1 = -\Sigma_2$ .

Le plan de montée moyen étant ainsi déterminé, on peut calculer les limites d'endurance pour divers trajets de chargement (figure 5): traction ondulée autour d'une valeur moyenne, torsion ondulée, traction-torsion alternées simultanées, tube fermé soumis à des pressions internes répétées. On retrouve les diagrammes classiques de GOODMAN-SMITH pour les tractions et les torsions ondulées, ainsi que l'allure des courbes expérimentales d'endurance en traction-torsion alternées.

### 3. UN CRITERE PRATIQUE DE FATIGUE

On peut poser le problème de la tenue en fatigue sous la forme générale suivante. Dans l'espace des contraintes on considère des trajets de charge cycliques (plus ou moins réguliers) situés entièrement à l'intérieur du domaine de la rupture statique; on cherche à distinguer les trajets au cours desquels la rupture se produit après un nombre suffisant de cycles et ceux au cours desquels aucun endommagement ne survient. Pour un trajet radial, correspondant à une contrainte moyenne donnée, on appelle limite d'endurance la contrainte maximale atteinte pendant ce trajet. Pour l'ensemble des directions à partir d'une moyenne, on peut définir une surface d'endurance.

La recherche d'un critère pratique de fatigue valable pour des trajets de charge complexes est un problème très difficile pour lequel les méthodes d'étude ont été jusqu'à présent purement expérimentales.

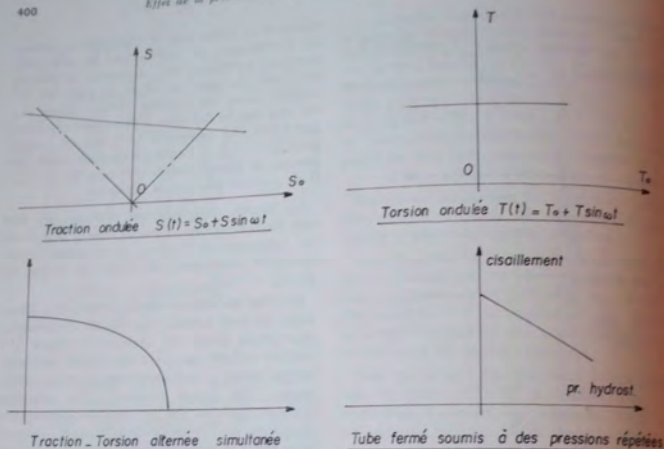


Fig. 5. — Limites d'endurance obtenues par le modèle pour les trajets de charge typique

Outre les difficultés techniques rencontrées, l'interprétation des résultats pour déduire un critère général est incertaine car la fatigue résulte de plusieurs facteurs entremêlés impossibles à séparer de façon quantitative par l'expérience. De plus, sans d'autres considérations, les formulations des critères dépendent du choix des coordonnées: certains critères présentés comme critère de fatigue en contrainte complexe, ne sont en fait valables que pour les trajets de charge pour lesquels les expériences sont faites.

Il est intéressant d'essayer de comparer les différents trajets de charge entre eux à partir des résultats prévus par le modèle.

Sur la figure 6, on a représenté dans le diagramme ( $\tau/c, p_s$ ),  $\tau$  étant le cisaillement dans le grain à l'instant  $t$ ,  $p$  la pression hydrostatique et  $k$  une constante proportionnelle à  $F_s + F_t$ , les trajets de charge correspondant à la fatigue en traction ondulée et la fatigue de tubes pulsés. On sait que dans ce dernier cas,

l'état de contrainte est équivalent à un cisaillement pur concomitant avec une pression hydrostatique.

Le domaine de fatigue en traction ondulée est limité par les deux droites  $D_1$  et  $D_2$ . Selon le modèle proposé, la montée avec formation de lacunes se produit lorsque la courbe représentative du trajet touche la droite  $D_1$ .

Pour le cas de tubes pulsés, l'endommagement se produit lorsque la courbe représentative touche la droite ( $D_2$ ).

Les droites  $D_1$  et  $D_2$  ont des pentes assez voisines l'une de l'autre et on peut les confondre avec une droite moyenne.

Ceci nous amène à proposer le critère pratique suivant :

On porte à chaque instant du cycle de charge le cisaillement agissant sur les grains les plus défavorablement orientés en fonction de la pression hydrostatique. D'après le modèle le cisaillement est approximativement égal à chaque

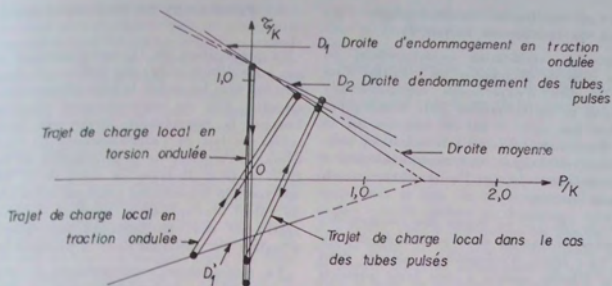


Fig. 6. — Amplitude du cisaillement local en fonction de la pression hydrostatique

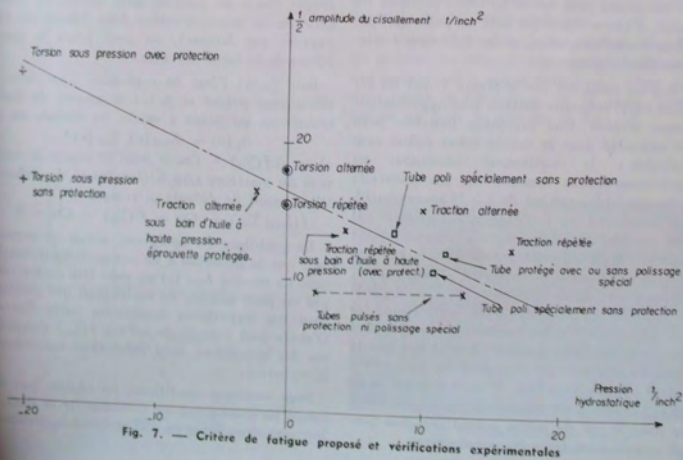


Fig. 7. — Critère de fatigue proposé et vérifications expérimentales

instant au cisaillement macroscopique  $T(t)$  diminué du cisaillement moyen  $T_0$ .

À titre de vérification expérimentale, on reporte dans ce diagramme les résultats d'un grand nombre d'expériences effectuées par CROSSLAND et collaborateurs [5]. Remarquons cependant que celles-ci ont été réalisées sur de l'acier VIBRAC, métal (c.c.) ; toutefois les comportements en fatigue sont assez analogues à ceux des métaux c.f.c. car l'acier vibrac est suffisamment ductile.

Dans la réf. [5] on donne des résultats des expériences de traction et de torsion d'échantillons à l'air libre, d'échantillons plongés dans un bain d'huile soumis à une forte pression hydrostatique, avec ou sans protection par des membranes de caoutchouc. Ils ont également expérimenté des tubes pulsés de différentes épaisseurs fermés à leurs extrémités ; on sait que l'état de contrainte qui en résulte peut être considéré comme la superposition d'un cisaillement pur avec une tension hydrostatique ; en faisant varier le rapport du rayon extérieur sur le rayon intérieur, on peut varier le rapport du cisaillement et de la tension hydrostatique. Quelques tubes ont été protégés par des gaines pour éviter les effets possibles de l'huile, d'autres tubes ont subi un polissage spécial après la fabrication, et les différents traitements thermiques.

On peut constater sur la figure 7 que les résultats expérimentaux obtenus sont approximativement alignés. Une exception toutefois peut être constatée dans le cas de tubes pulsés sans protection : le cisaillement admissible est approximativement constant sur un intervalle de tension hydrostatique de 2 à 13 tonnes/inch<sup>2</sup>. Sans pouvoir donner d'explication certaine, il nous semble toutefois que ce comportement anormal est dû à l'influence de l'huile à haute pression : influence corrosive d'une part, influence mécanique d'autre part ; l'huile pénètre dans les défauts dus à la fabrication, les agrandit et modifie les contraintes locales. Ces remarques semblent justifiées par le fait que la limite d'endurance en torsion d'un échantillon protégé soumis à un bain d'huile à haute pression (20 t/inch<sup>2</sup>) est une fois et demi plus élevé que dans le cas du même échantillon non protégé essayé dans les mêmes conditions.

#### 4. PROBLEMES DE PROPAGATION

La propagation de la macrofissure de fatigue à ses débuts se fait par réunion de fissures formées dans les grains le plus défavorablement orientés. Elle est essentiellement discontinue. Lorsque la macrofissure atteint une certaine taille, du fait de l'affaiblissement de l'échantillon, le caractère de la propagation est modifié : on peut observer en avant de la fissure une zone de déformation plastique et un schéma de calcul élastoplastique pourrait s'appliquer, alors que des considérations macroscopiques n'étaient pas apparues pour la première phase.

La macrofissure catastrophique se propage en général perpendiculairement à la direction de plus grande tension. Ce fait apparente les ruptures de fatigue aux ruptures fragiles. Pour donner une explication sur la direction de la propagation il faut tenir compte de la perturbation du champ de contraintes due à la fissure. Malgré de nombreux efforts, ce problème difficile n'a pas reçu jusqu'à présent de solution définitive.

Lorsqu'il s'agit de la rupture sous chargement monotone dans un matériau fragile ou quasi-fragile (faute de pouvoir faire mieux, on procède de la même manière dans l'étude de la rupture par fatigue), on peut poser le problème de la façon suivante.

Soit  $\Sigma_{ij}(x)$  l'état de contrainte d'un échantillon sans défaut et  $S_{ij}(x)$  le tenseur de contrainte en un point  $x$  voisin du défaut, on a

$$S_{ij}(x) = L_{ijkl}(x) \Sigma_{ab}(x)$$

alors, si  $f(\Sigma_{ij}) - Cte = 0$  est le critère de rupture du matériau sans hétérogénéité, un échantillon muni de défauts se rompra si

$$f(L_{ijkl} \Sigma_{ab}) - Cte = F(\Sigma_{ij}) - Cte = 0$$

Le problème est complexe, même en supposant que le matériau a un comportement élastique. Le tenseur  $L_{ijkl}(x)$  ne peut être caractérisé par un petit nombre de coefficients que moyennant des hypothèses restrictives particulières. D'autre part l'étude du critère  $f(\Sigma_{ij})$  s'appuie sur des hypothèses assez incertaines concernant la structure.

Sous certaines conditions, on obtient par le calcul les contraintes au voisinage de la fissure qui sont singulières en  $r^{-1/2}$ ,  $r$  étant la distance

du point considéré à l'extrémité de la fissure. On convient alors de caractériser les contraintes par les coefficients des termes singuliers principaux. Cette méthode est aujourd'hui généralement admise dans la pratique (voir par exemple ref. [6]). Des méthodes plus raffinées ont été développées, surtout pour tenir compte de la zone plastique en avant de la fissure.

L'étude cinématique de la fissuration sous chargement cyclique peut être facilitée (et surtout raccourcie) par l'analogie que l'on peut constater dans les phénomènes de propagation entre rupture fragile et la fatigue, qui apparaît déjà dans les expériences classiques de rupture par traction ou torsion. Dans les deux modes de rupture (fragile et par fatigue), on observe des effets globaux voisins :

- a) propagation de la fissure dans la direction perpendiculaire à la plus grande traction ;
- b) même influence de la pression hydrostatique — dissymétrie de résistance par rapport à la traction et la compression ;
- c) effets correspondants de la température — la résistance augmente quand la température décroît, en plus vers de très basses températures limite d'endurance et limite de rupture tendent à se confondre.

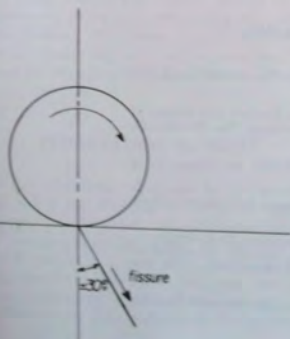


Fig. 8. — Schéma de la tache ovale

d) dans les deux cas l'effet d'échelle est sensible et la dispersion des résultats est importante.

Nous avons utilisé cette analogie dans l'étude d'un phénomène de fatigue interne très complexe du rail soumis au trafic, nommé « tache ovale ».

La fissure de fatigue est amorcée sur une inclusion située entre 8 et 16 mm de la table de roulement et se propage ensuite de préférence vers le bas du champignon. La propagation vers la surface est beaucoup plus lente et s'arrête sans y déboucher en général. Lorsque le trafic se fait dans un seul sens, le plan de fissure fait avec la verticale un angle de  $30^\circ$  dans le sens du roulement (figure 8) ; dans un mouvement alternatif de la zone la fissure se propage verticalement vers le bas.

Dans le laboratoire nous avons procédé à des essais de roulement alternés sur des barreaux en plexiglass, dont le comportement est semi-fragile. Ces barreaux, qui simulent la situation dans le champignon du rail, se composent de trois parties : une lame centrale de 5 mm d'épaisseur vissée entre deux joues latérales de 10 mm d'épaisseur chacune. Les défauts créés par le meulage sont situés à différentes profondeurs de la surface de roulement.

Les résultats d'essais confirment bien l'analogie prévue. En effet, la propagation des fissures qui se fait par à coups correspond d'une manière nette à l'évolution de la tache ovale, comme on peut le voir sur la figure 9.



Fig. 9. — Propagation des fissures dans un barreau en plexiglass



Il est à noter que dans les deux cas les fissures démarrent à partir des défauts plus profonds. La région qui est plus près de la surface, quoique siège des plus grands cisaillements, semble en quelque sorte protégée par la pression hydrostatique importante, concomitante avec le cycle des cisaillements.

Pour de différentes raisons nous n'avons pas pu pousser ces essais suffisamment loin pour en tirer des résultats quantitatifs. Toutefois les observations faites ont contribué à orienter une étude numérique appuyée sur les critères de fatigue discutés dans le paragraphe précédent.

## 5. CONCLUSIONS

*Le critère de fatigue proposé, valable pour un matériau sans défaut, souligne le rôle de la pression hydrostatique dans la fatigue et unifie d'un point de vue plus général les critères classiques valables pour des trajets spéciaux. La comparaison avec les résultats obtenus à partir du modèle montre qu'il ne peut être qu'approximatif.*

*Le modèle présenté permet de saisir les phénomènes de plus près et dans des situations encore plus compliquées dans le domaine de validité des hypothèses admises : isotropie initiale et contraintes relativement faibles lorsque l'écroutissage n'intéresse qu'un petit nombre de grains où les glissements se produisent sur un seul système. Les généralisations et les raffinements sont évidemment possibles mais ne semblent pas utiles en ce moment.*

*La présence des défauts ou agents extérieurs (expériences de Crossland) introduit des perturbations dans le champ de contraintes macroscopiques. A ce point de vue une fissure qui se propage représente justement un défaut typique. L'étude de la propagation des fissures, quoique très développée en ce moment, ne fournit pas encore des résultats satisfaisants (surtout influence de la zone plastique). Il est à noter que la pression hydrostatique (et aussi la température) joue dans la propagation des fissures en fatigue et en rupture fragile un rôle analogue.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. OROWAN. — Proc. Roy. Soc. London — A. 171 (1939), 79.
- [2] T. YOKOBORI. — Strength, Fracture and Fatigue of materials, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1965.
- [3] K. DANG VAN. — Sur la fatigue des métaux. — *A paraître.*
- [4] J. ZARKA. — Thèse de Doctorat ès Sciences — Paris, 1969.
- [5] B. CROSSLAND, J.L.M. MORRISON, J.S.C. PARRY. — Strength of thick cylinders subjected to repeated internal pressure. Proc. Inst. Mech. engrs, Vol. 174, n° 2, 1960.
- [6] H. LIEBOWITZ. — Fracture, an Advanced Treatise. Academic Press, 1968.

# Influence de la pression sur le comportement rhéologique des roches<sup>(\*)</sup>

par Pierre MORLIER

Laboratoire de Mécanique des Solides  
Ecole Polytechnique

## RESUME

*On montre comment, sous l'effet de contraintes — et de températures — de plus en plus fortes, les roches passent du comportement fragile au comportement plastique ; à partir de l'exemple d'un calcaire compact, trois domaines sont définis (fragilité, pseudo-plasticité, plasticité), le second ayant pour mécanisme principal le glissement aux joints de grains ; les frontières entre ces domaines peuvent être extrêmement bien définies dans l'espace (contraintes principales, température).*

## SUMMARY

*Under higher and higher stresses — and temperature — rock behavior changes from brittleness to ductility ; considering the example of a compact limestone, we define three different domains (brittleness, pseudo-plasticity, real plasticity), the mechanism of the second behavior being slip at grain boundaries ; the limits between these domains are very well defined in the space (principal stresses, temperature).*

## 1. PRESENTATION DU SUJET

Une des premières tâches de la Mécanique des Roches a été d'expliquer les phénomènes tectoniques et, de ce fait, on sait depuis longtemps montrer, par des essais de laboratoire — VON KARMAN, 1911, — que le comportement rhéologique des roches varie fortement avec la pression (contrainte moyenne) et la température : lorsque ces deux paramètres augmentent,

c'est-à-dire lorsque l'enfouissement de la roche in situ augmente, la roche passe de l'état fragile à l'état plastique mais ce passage se fait progressivement et différemment selon le type de roche, c'est-à-dire selon que la roche est granulaire comme un grès, poreuse comme une lave, cristallisée et compacte comme un marbre ou un granite,...

Une analyse très complète de ce changement de comportement rhéologique a été faite, en

(\*) Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie, le 17 septembre 1970.

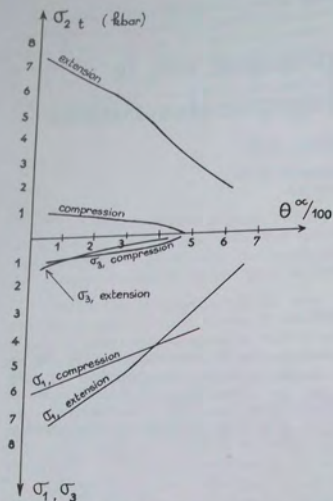


Fig. 1. — Essais de Heard sur le marbre de Solenhofen, En haut : pression de confinement de transition, En bas : contraintes principales extrêmes à la transition, en fonction de la température

1960, par HEARD [1] sur le marbre de SOLENHOFEN ; cet auteur utilise l'essai triaxial classique (voir figure 1) en compression ou en extension où la contrainte principale intermédiaire est appelée pression de confinement ; il définit une pression de confinement de transition  $\sigma_n$  telle que, à température  $\theta$  constante, pour  $\sigma_1 < \sigma_n$  la roche soit fragile ou apparemment plastique avec une déformation à la rupture inférieure à 3 %,

$\sigma_1 > \sigma_n$  la roche soit plastique, avec une déformation, sans perte de cohésion, supérieure à 5 %

Sur la figure 1 on utilise donc cette définition arbitraire pour tracer la frontière entre le

domaine fragile et le domaine plastique dans le plan  $(\sigma_1, \theta)$  pour les deux types d'essais ; on donne également les contraintes principales extrêmes  $\sigma_1(\theta)$  et  $\sigma_3(\theta)$  sur cette frontière.

Nous essayons ici d'aller plus loin que l'analyse précédente en explicitant les diverses étapes du changement de comportement rhéologique :

- étape fragile,
- étape pseudo-plastique,
- étape plastique ;

dans ce but nous avons effectué une série d'essais sur le calcaire d'HAUTEVILLE ; il s'agit d'un calcaire compact, mécaniquement isotrope, où des agrégats cryptocristallins sont noyés dans un ciment finement cristallisé. Nous avons opéré

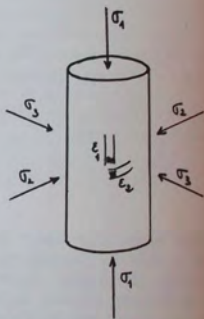
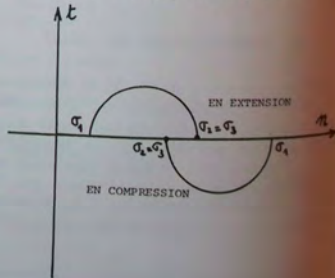


Fig. 2. — Principe des essais triaxiaux



à la température ambiante sur la roche sèche (ayant séjourné 1 mois à 105° C) avec des essais triaxiaux classiques — en compression — décrits sur la figure 2; lors des essais nous avons mesuré avec soin les déformations principales  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2 = \epsilon_3$  car notre analyse se fonde en partie sur l'évolution relative des déformations principales lorsque l'on accroît la contrainte dite différentielle ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ).

## 2. RAPPELS SUR LA FRAGILITE ET LA PLASTICITE

### 2.1. Fragilité

Pour une roche non initialement fissurée, comme le calcaire d'HAUTEVILLE, une expérience de compression avec rupture fragile donne lieu aux courbes contraintes-déformations principales de la figure 3 où l'on peut définir un certain nombre de domaines :

- de  $O$  à  $A$  : domaine élastique linéaire,
- en  $A$  : début d'une fissuration orientée parallèlement à la direction de la contrainte principale majeure, cette fissuration prend naissance le long des défauts de la roche (pores, joints de grains, fissures,...) et se manifeste sur la déformation transversale,
- de  $A$  à  $B$  : la fissuration ne se développe que si la contrainte est accrue (stabilité),
- en  $B$  : la fissuration est suffisamment développée pour se manifester sur la déformation longitudinale, c'est environ à partir de  $B$  que le volume commence à augmenter (dilatance) et que la fissuration peut se développer à charge constante (instabilité),

- $B$  est donc appelé résistance à long terme, alors que
- $C$  est la résistance pour la vitesse de chargement réalisée dans l'expérience.

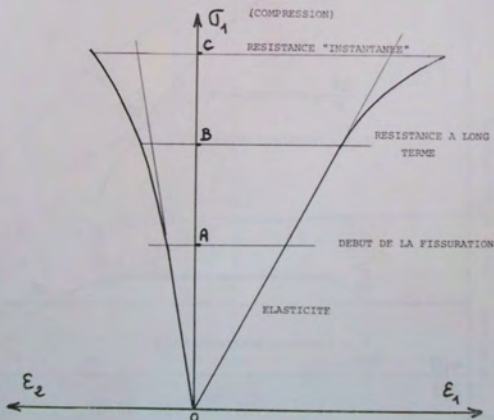


Fig. 3. — Comportement fragile

## 2.2. Plasticité

Pour un matériau plastique (métal) il y a franchissement simultané de la limite élastique sur les deux déformations principales ( $A = B$ ) ; comme le mécanisme de plasticité est un glissement intracristallin, le volume est constant lors de la déformation plastique. JAOUËL [2] a néanmoins expliqué la constatation expérimentale selon laquelle il y a légère contraction au début de la déformation plastique : seuls les cristaux

défavorablement orientés présentent des glissements et les autres cristaux sont soumis à une surpression donc créent une diminution de volume.

2.3. En résumé, nous portons sur la figure 4 les variations de volume irréversibles (ou plastiques) en fonction de la contrainte de compression pour les corps fragiles ou plastiques avec

$$\frac{\Delta V}{V} p = \frac{\Delta V}{V} \text{ total} - \frac{\Delta V}{V} \text{ élastique.}$$

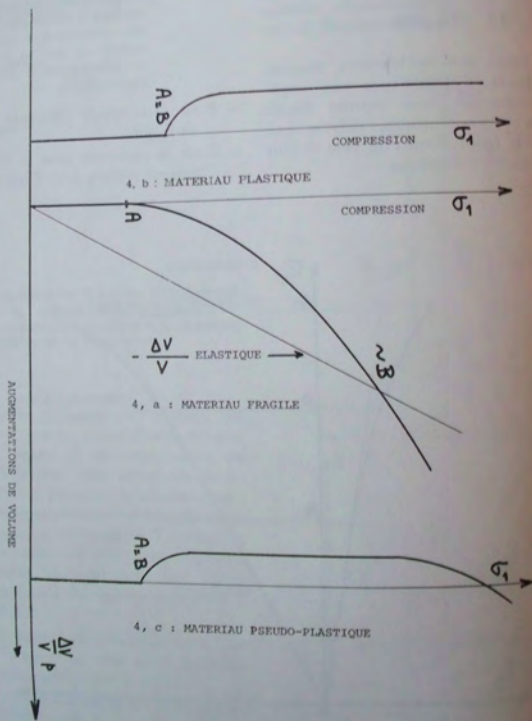


Fig. 4. — Variations de volume irréversibles

### 3. DEFINITION, SUR UN EXEMPLE, D'UNE PSEUDO-PLASTICITE

#### 3.1. Résultats expérimentaux

La figure 5 donne les résultats expérimentaux obtenus sur le calcaire d'HAUTEVILLE et montre comment les contraintes aux points A, B, C varient avec la pression de confinement ; on notera la grande dispersion des points A et B pour les faibles contraintes de confinement, la ligne continue A a par contre été obtenue avec une seule éprouvette en effectuant une série

de chargements avec pressions de confinement croissantes et en arrêtant les chargements dès que la limite A était atteinte sur la déformation transversale.

L'observation de la figure 5 permet de dire, pour ce calcaire particulier, que

— pour  $\sigma_2 = \sigma_3 < 500$  bar, la roche est *fragile* car la limite A est inférieure à la limite B, car les variations de volume irréversibles obéissent au schéma de la figure 4-a ;

— pour  $\sigma_2 = \sigma_3 > 500$  bar, et nous avons effectué nos essais jusqu'à  $\sigma_2 = \sigma_3 = 2500$  bar, la roche semble *plastique* car les deux limites A et B sont confondues, car la limite commune,

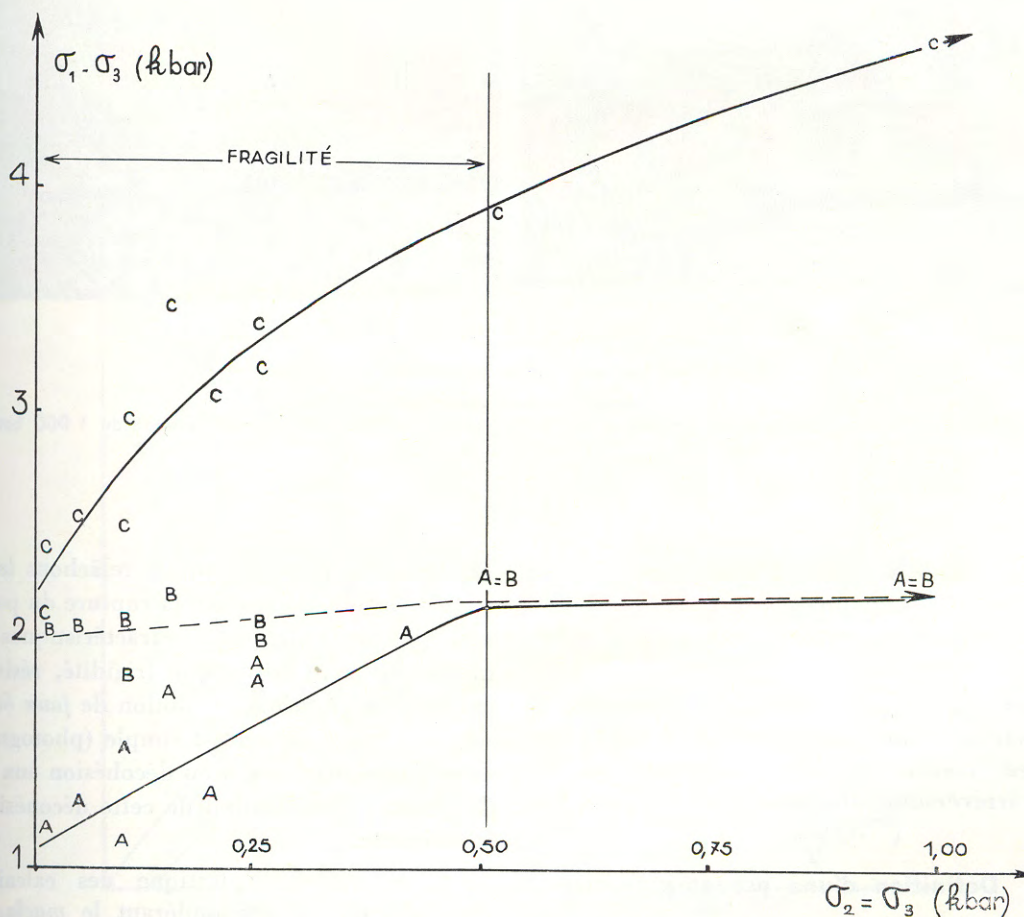
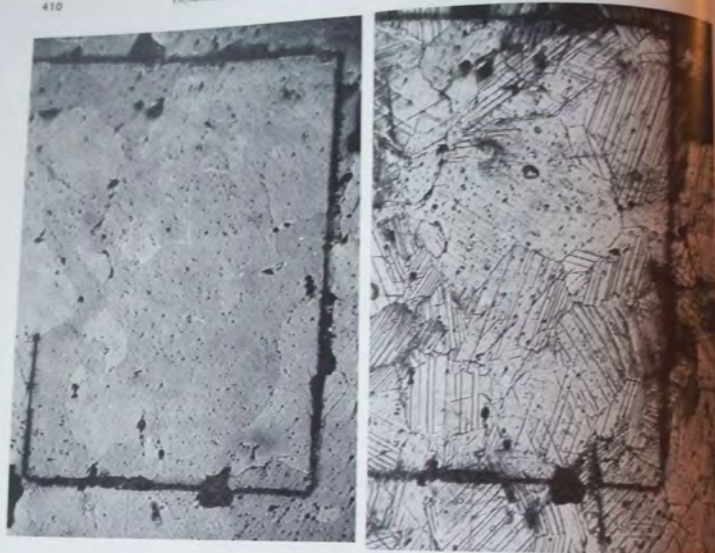


Fig. 5. — Essais triaxiaux en compression sur le calcaire d'Hauteville ; Evolution des limites A, B et C avec la pression de confinement



Grossissement x 50

Fig. 6. — Sections polies de marbre de Carrare,

A droite : avant déformation,

A gauche : après déformation plastique de 1 %, sous une pression de confinement de 1 000 bar

exprimée en  $\sigma_1 - \sigma_3$ , est indépendante de  $\sigma_1 = \sigma_3$  (loi de SCHMIDT), car enfin les variations de volume irréversibles obéissent au schéma de la figure 4-b.

Notons que dans le domaine plastique, il existe toujours, au voisinage de la rupture, une dilatance c'est-à-dire une augmentation de volume irréversible schématisée sur la figure 4-c.

### 3.2. Définition d'une pseudo-plasticité

Si, lors d'un essai dans le domaine plastique, nous chargeons une éprouvette au-delà de la

limite  $A = B$ , et si nous le relâchons les contraintes avant d'atteindre la rupture au point C, nous pouvons voir que les caractéristiques mécaniques de cette éprouvette (rigidité, résistance, densité) ont diminué — notion de *faux écrouissage* —. La cause en est simple (photographies de la figure 6) : il y a eu décohérence aux joints de grains ; l'explication de cette décohérence est la suivante.

La déformation plastique des calcaires a pour mécanisme prépondérant le *maclage* des cristaux de calcite dans les plans  $\{01\bar{2}\}$ , ce maclage étant beaucoup plus aisé que le glissement.

ment dans les plans  $\{10,1\}$  [3] ; ces maclages se font évidemment sans changement de volume et se matérialisent sur les lames minces ou sections polies, analogues aux surfaces polies de la figure 6, par des lamelles qui traversent les cristaux d'un bord à l'autre. Si nous considérons un joint de grains limitant deux grains différemment orientés dont l'un au moins est le siège de maclages, il est évident qu'il y a

discontinuité des déplacements tangentiels, donc que ce joint est soumis à un cisaillement important pouvant entraîner une rupture par glissement relatif des deux grains. Lorsque les contraintes macroscopiques sont relâchées, les deux grains s'écartent ; il y a donc un réseau de fissures intercrystallines qui explique l'abaissement des propriétés mécaniques de la roche.

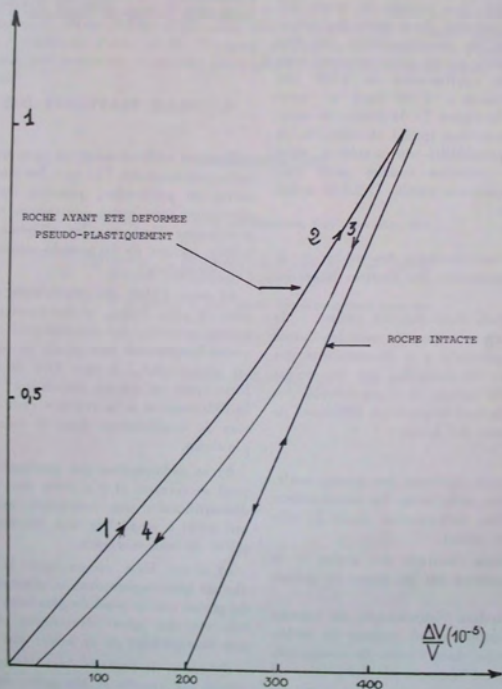


Fig. 7. — Essais de compressibilité du calcaire d'Hauteville



Lorsque la déformation plastique d'une roche se fait par glissements intercrystallins — en plus des glissements ou maclages intracrystallins — nous disons qu'il y a *pseudo-plasticité*.

Remarquons qu'il est impossible de savoir, d'après les courbes contraintes-déformations, à quel moment commencent ces glissements intercrystallins puisqu'ils se font eux aussi à volume constant ; seul un contrôle *a posteriori*, après déchargement de l'éprouvette, par des techniques variées — lames minces, ultrasons, essai de compressibilité... — permet de savoir s'il y a eu ou non glissement. Nous avons par exemple fait un essai de compressibilité sur une éprouvette déformée pseudo-plastiquement sous une pression de confinement de 2500 bar [ $(\sigma_1 - \sigma_2)$  maximum = 5100 bar] et nous avons porté sur la figure 7 : la droite de compressibilité du matériau initial et, décalée, la courbe de compressibilité du matériau ainsi déformé ; cette dernière courbe peut être décomposée en plusieurs parties (1.2.3.4) ayant pour mécanismes :

au chargement,

1. la déformation élastique des grains + la fermeture progressive des fissures intercrystallines ;
2. la déformation élastique des grains + le glissement avec frottement sur les joints des grains puisqu'il y a discontinuité des déformations tangentielles sur les joints de grains en raison de l'anisotropie des cristaux et de leur orientation différente de part et d'autre des joints ;

au retour,

3. la déformation élastique des grains seule, le frottement mobilisant les mouvements intercrystallins, déformation égale à celle du matériau initial ;
4. la déformation élastique des grains + le glissement inverse sur les joints de grains.

Notons que, malgré l'anisotropie du tenseur de contraintes auquel a été soumise la roche, celle-ci est isotrope dans l'essai de compressibilité ; il y a donc isotropie de fissuration et l'on voit bien sur la figure 6 que les joints de grains sont ouverts sans orientation préférentielle.

### 3.3. Influence du temps

Tous les mécanismes que nous venons d'évoquer — glissements intra ou intercrystallins — sont évidemment plus ou moins influencés par la vitesse de chargement ; HEARD [4] a montré par des expériences à vitesse de déformation

constante ( $10^{-4}/s < \dot{\epsilon} < 10^{-2}/s$ ) dans le domaine plastique ou pseudo-plastique que lorsque l'on tend vers des déformations infiniment petites l'écroutissage, ou le faux écroutissage, a tendance à disparaître ; la limite élastique peut donc être considérée comme la résistance à long terme.

## 4. VRAIE PLASTICITE DES ROCHES

Il existe suffisamment de preuves géologiques, ou expérimentales [1] que les roches, les calcaires en particulier, peuvent être réellement plastiques sous fortes contraintes et fortes températures ; c'est que les glissements intercrystallins, causes de la pseudo-plasticité, peuvent être empêchés :

a) sous l'effet de contraintes moyennes à plus en plus fortes, la résistance des joints de grains grandit, la discontinuité des déplacements tangentiels aux joints de grains évoquée au paragraphe 3-b peut être de plus en plus forte avant qu'il y ait glissement ; effectivement la déformation à la rupture croît avec la pression de confinement dans le domaine pseudo-plastique.

b) la déformation par maclage de la calcite peut se saturer, il y a donc une limite à cette discontinuité ; une contrainte moyenne croissante qui suffit à empêcher tout glissement intercrystallin dû aux maclages.

c) il est bien connu que la température abaisse plus rapidement la résistance des joints de grains que le seuil de plasticité des cristaux ; très vite les joints deviennent visqueux et non susceptibles de se briser par glissement.

d) enfin, la lenteur des déformations plastiques est grande et les joints de grains peuvent se recristalliser en place après avoir joué (rôle des fluides en place).

## CONCLUSION

Nous venons de montrer les variations de comportement rhéologique des roches sous l'influence des contraintes et de la température en présentant trois types de comportement bien définis, séparés par des frontières très précises ; en particulier l'étape pseudo-plastique, que l'on rencontre souvent au laboratoire, s'explique par la faiblesse des joints de grains mais aussi bien sûr par les faibles degrés de symétrie des principaux minéraux des roches.

Je remercie M. Mary pour le soin qu'il a apporté à la réalisation des essais sur le calcaire d'Hauteville, Mme Chaye-d'Albissin, du Laboratoire de Géologie Dynamique de la Faculté des Sciences de Paris, et M. Tourenq, du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, ont bien voulu me permettre d'utiliser leurs photographies de surfaces polies, je leur en suis reconnaissant.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] HEARD. — in Rock Deformation, Geol. Soc. Am. Memoir 79 (1960).
- [2] JAOUŁ. — in Deformation and Flow of Solids, IUTAM Colloquium, Madrid (1955).
- [3] D'ALBISSIN. — Les traces de déformation dans les roches calcaires. Fascicule supplémentaire de la Rev. Géogr. Phys. et Géol. Dyn. (1963).
- [4] HEARD. — Journal of Geology, 71, 2, pp. 162-195 (1963).

# Contribution à l'étude de la perte de précontrainte par fluage-relaxation combinés dans les éléments en béton précontraint<sup>(\*)</sup>

par R. ATALLAH

Docteur-Ingénieur  
Chef du Groupe « Association acier-béton »  
au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

## RESUME

La méthode du cumul des pertes, par retrait et fluage du béton et relaxation de l'acier, employée dans les spécifications techniques actuelles pour déterminer la perte totale différée de précontrainte conduit à une surestimation de cette dernière. L'application de la rhéologie à l'étude de ce problème important sur le plan pratique permet de réduire cette surestimation.

Un matériel expérimental, d'un type nouveau, pour contrôler les phénomènes de fluage pur du béton, de relaxation pure de l'acier et du fluage-relaxation combinés est présenté.

Les résultats expérimentaux donnés concernent l'influence des contraintes initiales du béton et de l'acier et du rapport de ces contraintes sur l'évolution de l'état de contrainte et de déformation des matériaux dans l'élément précontraint, l'évaluation de la surestimation de la perte de précontrainte par la méthode du cumul des pertes, la comparaison entre les phénomènes de fluage et de relaxation purs (contrainte et déformation imposées constantes) et combinés (contrainte et déformation variables).

Enfin, une confrontation entre des résultats théoriques et expérimentaux est présentée.

## SUMMARY

The method of cumulation of losses resulting from concrete creep and steel relaxation, used in present technical specifications to determine the total prestress loss, leads to an overestimation of the total loss. This overestimation can be reduced by the application of rheology to the study of this problem, which is of practical importance.

The author presents experimental equipment of a new type for checking the phenomena of pure concrete creep, pure steel relaxation, and combined creep and relaxation.

(\*) Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie le 16 décembre 1970.

The experimental results reported relate to the influence of initial stresses on the evolution with time of stress and deformation of materials in the prestressed element; the evaluation of the overestimation of prestress losses by the method of cumulation of losses; the comparison between the phenomena of pure creep and pure relaxation (constant imposed stress and deformation) and combined creep and relaxation (variable stress and deformation).

The author also gives a comparison of theoretical and practical results.

## INTRODUCTION

Un élément en béton précontraint par post-tension (figure 1) est constitué par un volume élancé de béton mis en compression sous l'effet d'une sollicitation imposée par des armatures tendues dont les extrémités s'appuient sur le béton par l'intermédiaire d'un dispositif d'ancrage. Par suite du comportement visco-élastique des deux matériaux employés, l'effort imposé par les armatures et appelé « effort de précontrainte » et la longueur entre ancrages de l'élément précontraint, obtenus à la mise en tension des armatures, décroissent au cours du temps. La diminution de l'effort de précontrainte doit être prise en considération dans le calcul des ouvrages réels pour estimer le taux de travail à terme des matériaux. Dans les règlements et recommandations techniques actuels on fait intervenir dans le calcul des pertes de précontrainte, trois phénomènes physiques distincts :

- Le fluage, ou déformation différée du béton sous contrainte constante,
- la relaxation des aciers, ou perte de tension sous allongement constant,
- le retrait du béton, phénomène physico-

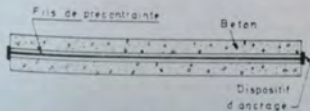


Fig. 1. — Schéma d'un élément précontraint comprimé axialement

chimique d'allure irréversible résultant des modifications lentes de la structure du ciment et de l'évaporation de l'eau non combinée.

Selon ces recommandations, la relaxation des aciers provoque directement une diminution de l'effort de précontrainte, les deux autres phénomènes dus au béton la provoquent indirectement par pertes d'allongement des aciers. La perte totale est alors estimée par le cumul des pertes séparées indiquées ci-dessus.

Or, il s'est avéré à la suite de diverses études en laboratoire et mesures directes sur ouvrages en service que ce cumul conduit à une surestimation non négligeable des pertes réelles (de l'ordre de 20 à 30 %).

Cette surestimation est due essentiellement aux causes suivantes :

- Dans l'élément précontraint, la déformation et la contrainte de chacun des deux matériaux varient simultanément en fonction du temps. Le phénomène qui se produit dans chacun d'eux ne peut donc être attribué, comme c'est le cas de la méthode du cumul, ni au fluage pur ni relaxation pure, compte tenu de la définition de ces phénomènes, mais à une combinaison entre les deux phénomènes.
- Le cumul des pertes néglige le fait important que l'élément précontraint devient un système visco-élastique en auto-équilibre dès que la précontrainte initiale est imposée c'est-à-dire que les états de contrainte et de déformation du béton et de l'acier évoluent dans le temps sans aucune intervention extérieure. Ce fait montre qu'il existe une interdépendance entre les per-

tes séparées. En effet, une relaxation de contrainte dans les fils se répercute instantanément sur la contrainte du béton créant de nouvelles conditions de fluage, de même qu'une déformation différée du béton fait varier la contrainte de l'acier et crée de nouvelles conditions de relaxation.

Le seul moyen rationnel pour étudier les pertes de précontrainte par fluage-relaxation combinés est de considérer l'élément précontraint, conformément à la réalité, comme un système en équilibre visco-élastique répondant à la fois à des « relations de comportement » et à des « conditions d'équilibre ». C'est ainsi seulement qu'on peut mettre en évidence les conséquences de l'interaction entre l'évolution propre de l'acier et du béton.

## 1. RELATIONS DE COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DU BETON ET DES ACIERS DE PRECONTRAINT

Il est déjà admis [1] [2] [3] [4] (\*) que le comportement du béton peut être considéré comme visco-élastique linéaire si l'on reste dans un domaine de contrainte inférieur à  $0,5 R_s$ ,

$$\varepsilon_s(t) = \sigma_s(0) \varphi(t) + \int_0^t \frac{d\sigma_s(\tau)}{d\tau} \cdot \varphi_s(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

$$\sigma_s(t) = \varepsilon_s(0) \cdot \psi_s(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon_s(\tau)}{d\tau} \cdot \psi_s(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

En intégrant ces relations par partie, on met en évidence les parties élastiques et visqueuses des réponses :

$$\varepsilon_s(t) = \varphi_s(0) \cdot \sigma_s(t) - \int_0^t \sigma_s(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_s(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

(\*) Les chiffres entre crochets renvoient aux références bibliographiques.

(1) La fonction échelon est la fonction de Heaviside définie comme suit :  
 $\varphi_s(t) = 0$  pour  $t < 0$ ,  $\varphi_s(t) = 1$  pour  $t \geq 0$

(2) Dans ce travail, le problème du vieillissement du béton n'est pas traité. Les relations (1) et (2) sont valables seulement pour un béton suffisamment vieux pour que ses propriétés ne varient pas au cours du temps.

où  $R_s$  est la résistance à la compression du béton à l'instant de la mise en précontrainte de l'élément. Dans ce domaine, les deux hypothèses suivantes sont généralement adoptées :

- homogénéité et isotropie statistiques,
- validité du principe de superposition de BOLTZMANN.

Rappelons brièvement les résultats, qui nous intéressent, déduits de ces hypothèses.

La proportionnalité des phénomènes de fluage et de relaxation purs, respectivement à la contrainte et à la déformation imposées, permet de définir deux fonctions temporelles  $\varphi_s(t)$  et  $\psi_s(t)$ , la première dite de retard et la deuxième de relaxation, qui sont considérées comme étant des caractéristiques propres au matériau ; elles traduisent respectivement la réponse en déformation à une fonction échelon (1) de contrainte et la réponse en contrainte à une fonction échelon de déformation.

Si, au lieu d'une contrainte  $\sigma_s$  ou d'une déformation  $\varepsilon_s$  fixes, on impose un programme de contrainte  $\sigma_s(t)$  ou de déformation  $\varepsilon_s(t)$  dépendant du temps, les réponses à ces sollicitations d'après l'application du principe de superposition de BOLTZMANN peuvent être représentées respectivement par les deux équations suivantes (2) :

$$\sigma_s(t) = \psi_s(0) \cdot z_s(t) - \int_0^t z_s(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_s(t-\tau) d\tau \quad (4)$$

$$\text{avec : } z_s(0) = \frac{\epsilon_s(0)}{\sigma_{s0}} = \frac{1}{E_{s0}} \quad \text{et } \psi_s(0) = \frac{\sigma_{s0}(0)}{\epsilon_{s0}} = E_{s0}$$

$E_{s0}$  étant le module élastique instantané du béton.

Une des relations (3) et (4) suffit pour représenter le comportement rhéologique du béton. L'équivalence de ces deux relations montre la dépendance entre la fonction de retard et de relaxation qui peut être mise en évidence facilement par l'emploi du calcul symbolique (1). En effet, à l'aide du théorème de convolution on peut écrire (3) et (4) sous la forme symbolique suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_s(P) &= P \bar{z}_s(P) \bar{\psi}_s(P) \\ \bar{\epsilon}_s(P) &= P \bar{\sigma}_s(P) \bar{\gamma}_s(P) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$P \bar{z}_s(P) \bar{\gamma}_s(P) = 1 \quad (5)$$

ou en terme réel :

$$\int_0^t z_s(\tau) \gamma_s(t-\tau) d\tau = \int_0^t \psi_s(\tau) \sigma_s(t-\tau) d\tau = t$$

La relation (5) est l'équation typique des corps de BOLTZMANN.

Examinons, à présent, le cas des aciers de précontrainte. Le comportement des métaux en général, et de ces aciers en particulier, est non linéaire.

L'étude du comportement de ces aciers, pour la majeure partie des qualités actuellement employées en France, a été effectuée au L.C.P.C. [6].

Les résultats d'essais de relaxation pure ont montré que jusqu'à un taux de contrainte initiale de l'ordre de 75 % de la résistance à la traction  $R_m$ , la linéarisation du comportement de ces aciers constitue une approximation valable et ne devrait pas conduire à une erreur

importante. Cette hypothèse sera adoptée dans la suite.

En plus, nous avons tenu compte, pour ces aciers, dans l'établissement des relations de comportement, de deux faits :

- L'existence d'un seuil de tension représenté sur la figure 2 par le point  $C_i$  ( $\sigma_{s0}$ ,  $\epsilon_{s0}$ ) en dessous duquel les phénomènes de fluage et de relaxation sont négligeables. Ce seuil est estimé de l'ordre de 50 % de la résistance à la traction  $R_m$  de l'acier.
- La plastification par écoulement des fils qui s'effectue lors de la mise en tension de l'acier. La loi contrainte-déformation instantanée passe de la courbe représentative  $OC_1 C_2$  à la courbe  $O'C_1 C_2$  ; au seuil  $C_i$  correspond alors le seuil  $C'_i$ .

Un changement de coordonnées du point  $O$  à la position  $C_i$  nous ramène au cas étudié pour

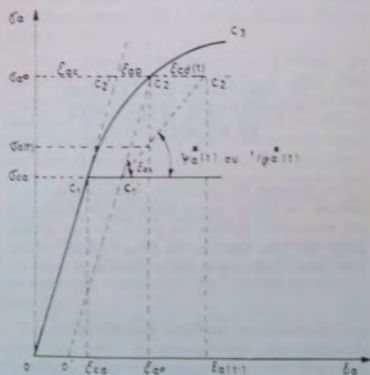


Fig. 2

(\*) Nous avons choisi d'employer dans le calcul, sans raison particulière, l'image de Laplace définie comme suit : si  $\sigma_s(t)$  est la fonction temporelle, son image est :

$$\bar{\sigma}_s(P) = \int_0^{\infty} \sigma_s(t) e^{-Pt} dt.$$

le béton, avec des fonctions de retard et de relaxation définies comme suit:

$$\varepsilon_a^* = \frac{\varepsilon_a^*(t)}{\sigma_{ca}^*} \quad \varepsilon_a(t) - (\varepsilon_{ca} + \varepsilon_{cp}) \quad (6)$$

$$\psi_a^* = \frac{\sigma_a^*(t)}{\varepsilon_{ca}^*} \quad \frac{\sigma_a(t) - \sigma_{ca}}{\varepsilon_{ca} - (\varepsilon_{ca} + \varepsilon_{cp})} \quad (7)$$

où  $\varepsilon_{ca}$  et  $\varepsilon_{cp}$  sont respectivement la déformation totale et la déformation plastique instantanées. Les relations de comportement de l'acier, semblables à celles du béton, sont alors les suivantes:

$$\sigma_a^*(t) = \varepsilon_a^*(t) \cdot \psi_a^*(0) - \int_0^t \varepsilon_a^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_a^*(t - \tau) d\tau \quad (8)$$

$$\varepsilon_a^*(t) = \sigma_a^*(t) \cdot \varphi_a^*(0) - \int_0^t \sigma_a^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_a^*(t - \tau) d\tau \quad (9)$$

avec:

$$\psi_a^*(0) = \frac{\varepsilon_a^*(0)}{\varepsilon_{ca}^*} = E_{ca} \quad \text{et} \quad \varphi_a^*(0) = \frac{\varepsilon_{ca}^*(0)}{\sigma_{ca}^*} = \frac{1}{E_{ca}}$$

$E_{ca}$  étant le module élastique instantané de l'acier.

## 2. SOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS D'EQUILIBRE ET D'EVOLUTION

Les données du problème sont la contrainte initiale de l'acier et du béton et la qualité de ces matériaux, définie du point de vue rhéologique par une fonction de retard ou de relaxation pour chacun d'eux. On cherche à déterminer

à partir de ces données, l'évolution au cours du temps et surtout les valeurs finales des contraintes et des déformations des matériaux dans l'élément précontraint qui sont les plus défavorables quant à la résistance de cet élément, aux charges qui lui sont appliquées.

Ceci s'avère possible compte tenu de ce que le nombre des relations de comportement et des conditions d'équilibre est suffisant pour trouver une solution théorique au problème. En effet, pour trouver cette solution, il suffit de résoudre le système d'équations fonctionnelles suivant, correspondant aux quatre fonctions inconnues du problème:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_{cb}} - \int_0^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_b(t - \tau) d\tau$$

$$\sigma_a^*(t) = \varepsilon_a^*(t) \cdot E_{ca} - \int_0^t \varepsilon_a^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_a^*(t - \tau) d\tau$$

$$\varepsilon_a(t) = \alpha \varepsilon_b(t) \quad (10)$$

$$\sigma_b(t) + \omega_a \sigma_a(t) = 0 \quad (11)$$

L'équation (10) exprime la proportionnalité entre la vitesse de déformation de l'acier et du béton; le facteur de proportionnalité est le rapport entre la longueur du béton  $l_b$  et de l'acier  $l_a$ . L'équation (11) exprime l'équilibre du système qui fait qu'à chaque instant la force totale de traction de l'acier est égale, en valeur absolue, à la force totale de compression supportée par le béton. Le facteur  $\omega_a$  est le pourcentage d'acier  $\frac{S_a}{S_b}$ ,  $S_a$  et  $S_b$  étant les sections totales de l'acier et du béton. Il est aussi le rapport des valeurs absolues de la contrainte du béton à celle de l'acier.

Le moyen le plus simple pour résoudre ce système d'équations est d'utiliser le calcul symbolique qui le transforme en un système d'équations algébriques facilement résoluble:

$$\bar{\varepsilon}_b(P) = P \bar{\sigma}_b(P) \bar{\varphi}_b(P)$$

$$\bar{\sigma}_a(P) = P \bar{\varepsilon}_a(P) \bar{\psi}_a^*(P) + \frac{\sigma_{ca}}{P} - (\varepsilon_{ca} + \varepsilon_{cp}) \bar{\psi}_a^*(P)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_s(P) &= x \bar{\sigma}_s(P) + \frac{\sigma_s(o)}{P} \left( \frac{1}{E_m} + \frac{x \omega_s}{E_{s\infty}} \right) + \frac{\epsilon_{sr}}{P} \\ \bar{\sigma}_s(P) + \omega_s \bar{\sigma}_s(P) &= \sigma \end{aligned}$$

La résolution par rapport à  $\bar{\sigma}_s(P)$  donne :

$$\bar{\sigma}_s(P) = \frac{\sigma_s(o) \left( \frac{1}{E_m} + \frac{x \omega_s}{E_{s\infty}} \right) + \beta \left[ \frac{1}{P \bar{\psi}_s^*(P)} - \frac{1}{E_m} \right]}{\frac{1}{P \bar{\psi}_s^*(P)} + x \omega_s + P \bar{\gamma}_s(P)} \quad \beta = \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s(o)} \quad (12)$$

Cette équation est générale ; elle est valable pour toute expression analytique susceptible de bien représenter  $\gamma_s(t)$  et  $\psi_s^*(t)$ .

Le théorème (1) de la valeur finale, correspondant à l'image de Laplace, nous permet de déduire directement de l'expression (12) la valeur asymptotique ou permanente de la contrainte de l'acier. En effet :

$$\lim_{P \rightarrow 0} P \bar{\psi}_s^*(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_s^*(t) = E_{s\infty}$$

$$\lim_{P \rightarrow 0} P \bar{\gamma}_s(P) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_s(t) = \frac{1}{E_b \infty}$$

d'où l'on déduit :

$$\sigma_s(\infty) = \sigma_s(o) \cdot \frac{1 - \beta + \frac{x \omega_s}{E_m} + \frac{\beta}{E_{s\infty}}}{\frac{1}{E_b \infty} + \frac{x \omega_s}{E_{s\infty}}} \quad (13)$$

Les modules asymptotiques de l'acier  $E_{s\infty}$  et du béton  $E_{b\infty}$  sont reliés aux valeurs finales de l'essai de fluage ou de relaxation purs (selon le cas) d'où ils sont déduits, comme d'ailleurs les pertes séparées dans la méthode du cumul ; ils peuvent donc être exprimés en fonction de ces dernières. Ainsi, on trouve :

$$E_{s\infty} = E_m \left[ 1 - \frac{\Delta \sigma_{s,r}(\infty)}{\sigma_s(o) - \sigma_{sr}} \right] \quad (14)$$

$$\frac{1}{E_{b\infty}} = \frac{1}{E_b} \left[ 1 + \frac{\Delta \sigma_{s,r}(\infty)}{x \omega_s m_s \sigma_s(o)} \right] \quad (15)$$

où :

$\Delta \sigma_{s,r}(\infty)$  est la perte finale par relaxation pure de l'acier

$\Delta \sigma_{s,r}(\infty)$  est la perte finale de tension dans l'acier par fluage pur du béton

$m_s$  est le rapport du module élastique instantané de l'acier sur celui du béton.

En remplaçant ces expressions dans (13) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_s(\infty) &= \sigma_s(o) \\ &\left[ 1 - \frac{\Delta \sigma_{s,r}(\infty)}{\sigma_s(o) - \sigma_{sr}} \right] \\ &1 + \left[ \frac{x \omega_s m_s + \frac{\Delta \sigma_{s,r}(\infty)}{\sigma_s(o)}}{\frac{1}{E_b \infty} + \frac{x \omega_s}{E_{s\infty}}} \right] \left[ 1 - \frac{\Delta \sigma_{s,r}(\infty)}{\sigma_s(o) - \sigma_{sr}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Cette expression relie les pertes séparées sous une forme qui n'est pas additive ; ainsi, elle tient compte de l'interdépendance de ces pertes.

Pour trouver l'évolution en fonction du temps de la contrainte de l'acier il suffit d'inverser la relation (12) après avoir attribué aux fonctions de retard du béton  $\gamma_s(t)$  et de relaxation des aciers  $\psi_s^*(t)$  une forme analytique, représentative de ces fonctions, dont les paramètres doivent être ajustés de sorte que les formes adoptées décrivent aussi fidèlement que possible les résultats expérimentaux.

Ces fonctions ont des valeurs définies pour  $t = 0$  ; on admettra, en plus, qu'elles tendent au cours du temps vers des valeurs asymptotiques.

En visco-élasticité linéaire, on démontre que quel que soit le groupement des éléments employés, l'amortissement de ces fonctions peut être représenté par des séries exponentielles :

(1) Ce théorème s'énonce comme suit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_s(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P \bar{\sigma}_s(P)$$



$$\left. \begin{aligned} \gamma_s(t) &= \frac{1}{E_{s,\infty}} + \left( \frac{1}{E_{s0}} - \frac{1}{E_{s,\infty}} \right) \sum_{i=1}^n M_{si} \exp. (-m_{si}t) \\ \dot{\psi}_s^*(t) &= E_{s,\infty} \\ &+ (E_{s0} - E_{s,\infty}) \sum_{i=1}^n M_{si} \exp. (-m_{si}t) \end{aligned} \right\} (17)$$

avec les relations suivantes, on peut vérifier les conditions aux limites correspondantes à  $t = 0$ .

$$\sum_{i=1}^n B_{si} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n M_{si} = 1 \quad (18)$$

Les coefficients  $m_{si}$  sont les inverses des temps de retard du béton, et  $m_{si}$  les inverses des temps de relaxation des aciers.

L'intérêt d'une telle représentation est qu'elle permet d'employer le calcul symbolique sans beaucoup de difficultés. En effet, l'image de LAPLACE de chacune des relations (17) peut être mise sous la forme d'un quotient de deux polynômes de même degré compte tenu de ce que l'acier et le béton sont doués d'élasticité instantanée :

$$\bar{\gamma}_s(P) = \frac{1}{E_{s,\infty}} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{\Pi_s^*(P)}{\Pi_{s0}^*(P)} \quad (19)$$

$$\bar{\dot{\psi}}_s^*(P) = E_{s,\infty} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{\Pi_{s,\infty}^*(P)}{\Pi_{s0}^*(P)}$$

$$A_i = \frac{(T_i - \theta_i) (T_i - \theta_2) \dots (T_i - \theta_n)}{T_i (T_i - T_1) (T_i - T_2) \dots (T_i - T_{i-1}) (T_i - T_{i+1}) \dots (T_i - T_n)} \quad (24)$$

où :

$$T_i = -\frac{1}{\xi_i} \quad \text{et} \quad \theta_i = -\frac{1}{\lambda_i}$$

### 3. REALISATIONS EXPERIMENTALES

La validité des hypothèses adoptées et des calculs exposés ci-dessus peut être vérifiée en déterminant expérimentalement les fonctions  $\gamma_s(t)$  et  $\dot{\psi}_s^*(t)$ , et en calculant à l'aide du modèle rhéologique établi les pertes par fluage-relaxation combinés pour les confronter avec le résultat direct des essais. Dans ce but, trois séries d'essais ont été exécutées :

Le degré de ces polynômes est égal au nombre de termes retenus dans les séries. La représentation des résultats expérimentaux est, évidemment, d'autant meilleure que le nombre de ces termes est plus élevé.

En remplaçant (19) dans (12) on peut mettre, également, l'expression de  $\bar{\sigma}_s(P)$  sous la forme d'un quotient de deux polynômes dont le degré  $k$  est égal au produit  $n \times l$  :

$$\bar{\sigma}_s(P) = \sigma_s(o) \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{\Pi_s^*(P)}{\Pi_s^*(P)} \quad (20)$$

Compte tenu de la nature de l'évolution de  $\sigma_s(t)$ , qui est essentiellement apériodique, il est déjà montré que les racines de ces polynômes sont toutes réelles et négatives. D'où on peut écrire :

$$\bar{\sigma}_s(P) = \frac{1}{P} \cdot \frac{(P - \lambda_1) (P - \lambda_2) \dots (P - \lambda_k)}{(P - \xi_1) (P - \xi_2) \dots (P - \xi_l)} \quad (21)$$

La méthode d'inversion de (21) est classique, on trouve :

$$\sigma_s(t) = \sigma_s(o) \cdot K(\infty) \left[ 1 - \sum_{i=1}^k A_i \exp. (-t/\tau_i) \right] \quad (22)$$

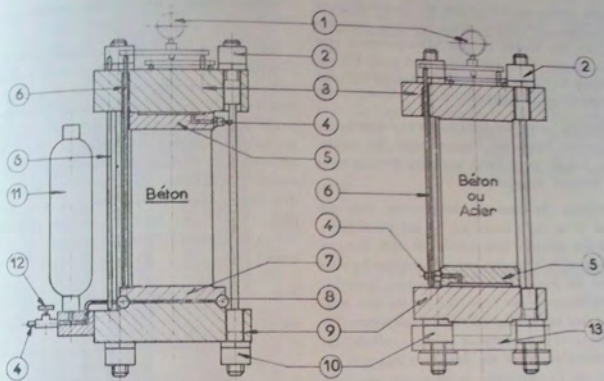
avec :

$$K(\infty) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k}{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_l} \quad (23)$$

- une série de 5 essais en relaxation pure de l'acier : paramètre variable  $\sigma_s(o)$ .
- une série de 5 essais en fluage pur du béton : paramètre variable  $\sigma_{bs}$ .
- une série de 9 essais en fluage-relaxation combinés : paramètres variables  $\sigma_s(o)$  et  $\sigma_s(o)$ .

Cela a nécessité la mise au point d'un appareil adapté à chaque type d'essais, mais les trois types ont des éléments communs.

Dans les trois versions, la force de précontrainte est appliquée par des fils d'acier tendus entre deux casques rigides séparés par une éprouvette cylindrique soit en béton dans le cas des essais de fluage du béton et de fluage-relaxation combinés, soit en acier doux dans



a) Fluage pur

b) Fluage-relaxation combinés ou relaxation acier

- 1 — Dispositif de mesure
- 2 — Erou de réglage
- 3 — Casque supérieur
- 4 — Alimentation par raccord rapide
- 5 — Cellule de charge
- 6 — Fige de mesure
- 7 — Plaque de répartition

- 8 — Vérin plat
- 9 — Casque inférieur
- 10 — Erou de blocage
- 11 — Accumulateur
- 12 — Robinet
- 13 — Vérin de mise en tension

Fig. 3. — Appareils d'essai

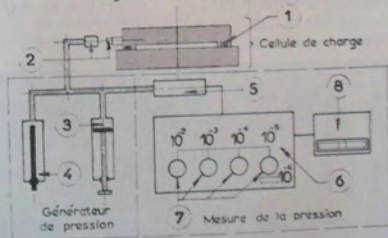


Fig. 4. — Chaîne de mesure des forces

- 1 — Joint d'étanchéité
- 2 — Raccord rapide
- 3 — Pompe à piston
- 4 — Pompe à vis
- 5 — Capteur de pression
- 6 — Pont d'extensométrie
- 7 — Bouton d'équilibrage
- 8 — Galvanomètre

le cas des essais de relaxation de l'acier (figure 3). Dans chaque version, nous sommes ramenés à mesurer des forces et des allongements soit pour déterminer leur évolution, soit pour s'assurer de leur stabilité au cours du temps suivant le type de l'essai poursuivi.

La mise au point de deux moyens de mesure, l'un pour les forces et l'autre pour les allongements, a suffi pour faire une application spéciale à chaque type d'essai.

Le système de mesure des forces, mis au point, est d'un type nouveau. Il est particulièrement bien adapté aux essais de très longue durée (coût réduit, aucun capteur ou partie sensible n'est en fonctionnement continu, possibilité de réétalonner les éléments de mesure susceptibles de subir des dérives au cours du temps, etc). Il se compose d'une cellule de charge intercalée entre un des deux casques de l'appareil et l'éprouvette supportant ainsi la force à mesurer. La cellule de charge est une plaque métallique circulaire où est creusée, sur l'une de ses faces planes, une cavité également circulaire et à surface bien définie. Ainsi, entre la cellule et le casque en contact se forme une chambre rendue étanche au moyen d'un joint d'étanchéité.

Une chaîne de mesure extérieure et commune à tous les appareils, composée des éléments montrés sur la figure 4, peut être branchée par

l'intermédiaire d'un raccord rapide sur la cellule.

La mesure de force consiste à envoyer de l'huile dans la chambre étanche et à déterminer avec précision (de l'ordre de 0,1 bar) par la méthode du zéro, la pression nécessaire pour provoquer un décrochage déterminé et très faible en valeur absolue (inférieur à  $50 \mu$ ) entre la cellule et le casque. Le décrochage provoque en réalité un faible allongement supplémentaire des fils  $\Delta l_e$  ce qui équivaut à une augmentation de  $\Delta F$  de la force  $F$  de précontrainte. L'équation d'équilibre à l'instant de la mesure s'écrit donc :

$$P S_p = F + \Delta F \text{ avec } \Delta F = \frac{\Delta l_e}{l_e} \cdot E_{in} \cdot S_e \quad (25)$$

où :

$P$  est la pression d'huile nécessaire à provoquer

$S_p$  est la surface efficace de la cellule de charge

$S_e$  est la section totale des fils

$l_e$  est la longueur des fils

$E_{in}$  est le module élastique instantané de l'acier.

On peut relier directement la force  $F$  à la mesure directe qui est le déséquilibre du pont de mesure  $\Delta(P.M.)$  par une relation linéaire :

$$F = a \cdot \Delta(P.M.) + b \quad (26)$$

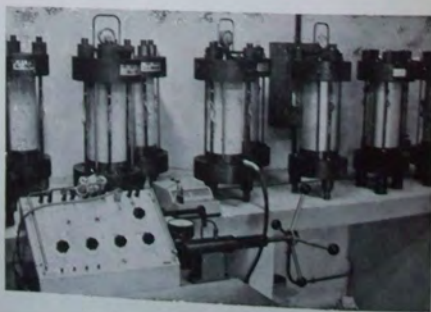


Fig. 5. — Chaîne de mesure des forces branchée sur un appareil



Fig. 6. — Appareil de fluage pur du béton

Les coefficients  $a$  et  $b$  se déterminent par un étalonnage préalable effectué à l'aide d'un dynamomètre étalon occupant la place de l'éprouvette dans l'appareil.

La figure 7 montre un exemple d'étalonnage pour deux décollages différents 25 et 50  $\mu$ . La linéarité est parfaite. La sensibilité de la mesure est de 20 kg par division de lecture sur le pont de mesure.

La mesure des allongements s'effectue au moyen de trois tiges métalliques, reliées au casque inférieur, dont le rôle est de reporter la position de ce casque à un niveau au-dessus du casque supérieur. Ainsi, la pointe du capteur tenu par une plaque reposant sur les extrémités des tiges donne une lecture moyenne de la déformation de toutes les génératrices de l'éprouvette.

Dans l'appareil de fluage pur du béton (figure 6). La force est maintenue constante à

l'aide d'un système hydraulique composé d'un accumulateur de pression branché sur un vérin plat.

L'appareil de relaxation pure de l'acier est identique à celui du fluage-relaxation combinés avec la seule différence que l'éprouvette en béton est remplacée par une autre en acier doux assez faiblement sollicitée (de l'ordre de 2 h/bar) pour que la déformation soit constante.

#### 4. RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les essais réalisés ont porté sur les matériaux suivants :

— acier :

fils de précontrainte patentés, tréfilés et vieillis, de 12 mm de diamètre. Résistance moyenne à la traction  $R_m = 153,8$  h. bar, module élastique instantané :  $E_m = 21\ 000$  h.bar

— béton :

éprouvettes cylindriques normalisées ( $D = 160$  mm et  $l_s = 320$  mm), à base de granulats dioritiques. Résistance moyenne à la compression et module élastique instantané à l'âge de mise en précontrainte :  $R_{bm} = 618$  bars,  $E_{bm} = 3\ 800$  h.bar. Age de mise en charge : 6 mois.

On présente dans ce paragraphe quelques exemples de résultats expérimentaux obtenus.

##### a) Influence du niveau de la précontrainte initiale lorsque le pourcentage d'acier $\omega_s$ est fixe

Dans ce cas, l'augmentation du niveau de la précontrainte initiale conduit à élever simultanément les valeurs de  $\sigma_s(0)$  et  $\sigma_s(t)$ , tout en maintenant ces contraintes dans le même rapport. L'influence étudiée doit donc être attribuée simultanément aux deux paramètres mentionnés ci-dessus.

Les courbes de la figure 3 confirment, conformément à notre attente, que les pertes de tension dans l'acier s'intensifient quand la précontrainte initiale augmente. Les contraintes

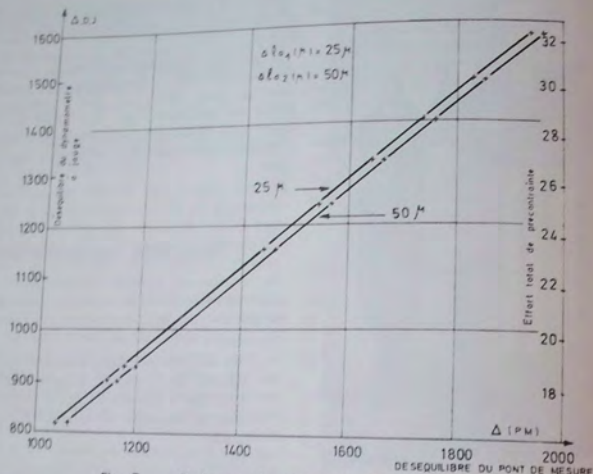


Fig. 7. — Etalonnage du système de mesure des forces pour deux décollages différents

résiduelles d'un groupe d'essais convergent donc en réduisant le gain retiré par l'élévation du taux de la précontrainte initiale. Cependant, il semble qu'au bout d'un certain temps (de l'ordre de 5 000 h) la convergence s'arrête et la vitesse de chute de tension devient indépendante de la sollicitation initiale imposée. Ceci est appuyé par le parallélisme constaté entre les courbes isochrones de la figure 8 correspondant aux valeurs élevées du temps.

Il semble de même que les déformations de l'élément précontraint dépendent peu des valeurs absolues des contraintes initiales du béton et de l'acier ; par contre, elles sont beaucoup plus influencées par le rapport de ces contraintes (ou pourcentage d'acier  $\omega_s$ ). En effet, la figure 9 montre que, malgré les variations importantes de la force initiale de précontrainte dans les trois essais représentés, les valeurs des déformations à un instant donné quelconque sont très peu différentes. Ceci peut

s'expliquer qualitativement par le fait que les déformations par fluage-relaxation combinés résultent de la superposition de deux phénomènes provoquant des effets opposés :

- une diminution de la longueur de l'éprouvette en béton sous l'effet du fluage sous contraintes décroissantes,
- une augmentation élastique de cette longueur sous l'effet de la diminution de la force de précontrainte.

L'élévation du taux de la précontrainte initiale intensifie ces deux effets simultanément et une compensation s'effectue.

#### b) Influence de la contrainte initiale du béton lorsque celle de l'acier est fixée

Dans une série d'essais où la section du béton et la contrainte initiale de l'acier sont fixées, et où le paramètre variable est le pourcentage

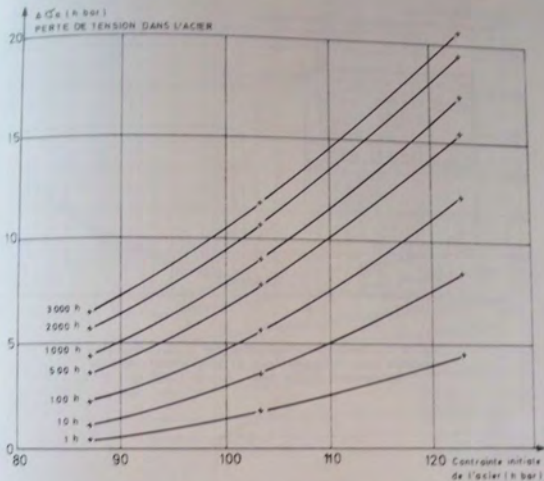


Fig. 8. — Influence du niveau de la précontrainte initiale sur la perte par fluage-relaxation combinés. Pourcentage d'acier fixé :  $\omega_s = 1,687\%$

d'acier  $\omega_s$ , on met en évidence l'influence de la contrainte initiale du béton  $\sigma_b(0)$ . Un exemple de cette influence est montré sur la figure 10. On remarque qu'elle ne s'affirme que lentement et elle est presque insignifiante aux faibles valeurs du temps. Ce qui explique que, dans nos essais, la contribution de l'acier à la perte de précontrainte est prépondérante au début

#### c) Comparaison des pertes par relaxation pure aux pertes par fluage-relaxation combinés

Cette comparaison est intéressante parce qu'elle met en évidence la contribution du béton, du fait de son comportement visco-élastique, aux pertes de précontrainte.

Sur la figure 11, on constate que les pertes par fluage-relaxation combinés sont plus élevées que les pertes par relaxation pure : l'écart entre

ces pertes, à un instant donné, dépend plus du rapport entre les contraintes dans le béton et l'acier que des valeurs absolues de ces contraintes (figure 12), tout au moins pour la durée actuelle des essais.

#### d) Surestimation des pertes par la méthode du « cumul des pertes par fluage pur et relaxation pure »

Les figures 13 et 14 montrent deux exemples de comparaison entre les pertes cumulées et les pertes par fluage-relaxation combinés. Les pertes par fluage pur du béton et relaxation pure de l'acier sont obtenues par des essais directs. Les valeurs de la contrainte fixe de l'essai de fluage pur du béton et de la déformation fixe de l'essai de relaxation pure de l'acier sont les mêmes que les valeurs initiales de la contrainte

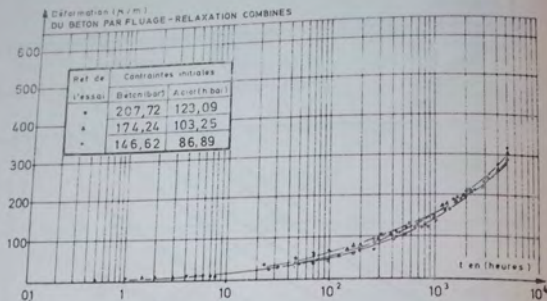


Fig. 9. — Déformation du béton par fluage-relaxation combinés pour différents taux de précontrainte initiale  
Pourcentage d'acier fixé :  $\sigma_{0a} = 1,687\%$

et de la déformation dans l'essai de fluage-relaxation combinés correspondant. Le fluage pur du béton est transformé en perte de contrainte calculée à partir de la diminution élastique de longueur des fils qu'il provoque.

La comparaison met en évidence la surestimation des pertes déterminées par la méthode du cumul. Cette surestimation augmente avec le temps et le taux de la précontrainte initiale (figure 15). Pour une durée de 3 000 h elle est de 15,5 % pour l'exemple de la figure 13 et de 28 % pour celui de la figure 14.

e) Comparaison de la valeur de relaxation à longueur constante à la valeur de relaxation à longueur décroissante

La perte de tension dans l'acier peut être décomposée en deux parties :

- Perte élastique due au raccourcissement de l'élément précontraint,
- perte visqueuse ou « relaxation à longueur décroissante ».

Dans nos essais de fluage-relaxation combinés, le raccourcissement et la perte totale sont mesurés. « La relaxation à longueur décroissante » se déduit directement de ces mesures en retranchant la perte élastique de la perte totale.

La comparaison de la « relaxation à longueur décroissante » avec la relaxation à longueur constante est faite sur la figure 16. On vérifie que la décroissance de la longueur réduit les pertes par relaxation des aciers. Cette réduction augmente avec le temps et la contrainte initiale de l'acier.

f) Comparaison des déformations du béton par fluage pur à celles par fluage-relaxation combinés

Cette comparaison confirme que la décroissance de la contrainte du béton réduit les déformations de l'éprouvette (figure 17). L'importance de la réduction constatée (39 % à 3 000 h pour le cas présenté) découle du double effet suivant : réduction de l'intensité du fluage et

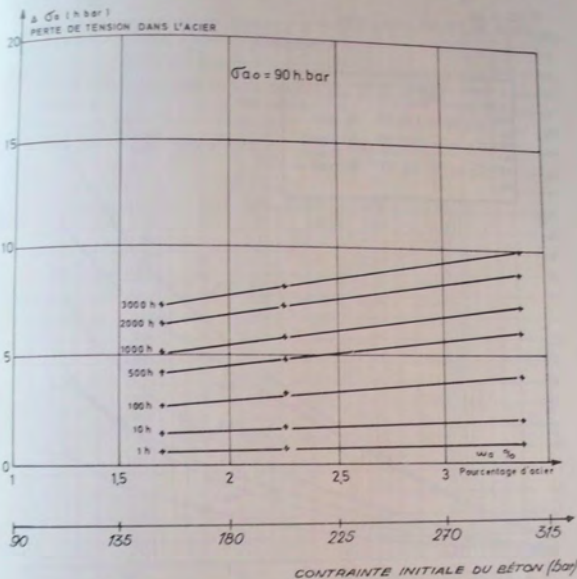


Fig. 10. — Influence du pourcentage d'acier (ou contrainte initiale du béton) sur la perte par fluage-relaxation combinés.  
 Contrainte initiale de l'acier fixé :  $\sigma_{s0} = 90 \text{ h bar}$

superposition d'une augmentation de longueur élastique.

## 5. VERIFICATION DE LA SOLUTION THEORIQUE

Dans la solution théorique l'expression de la valeur finale de la contrainte de l'acier (équation 13) a pu être obtenue sans attribuer à la fonction de retard du béton  $\varphi_b(t)$  et à la fonction de relaxation de l'acier  $\psi_s^*(t)$  une repré-

sentation analytique particulière. Il apparaît donc que cette valeur est indépendante de l'évolution des fonctions  $\varphi_b$  et  $\psi_s^*$  et par conséquent des inverses des temps de retard et de relaxation  $m_{sb}$  et  $m_{st}$  ainsi que des coefficients  $M_{sb}$  et  $M_{st}$ .

Cette constatation est utile, car elle permet de calculer la valeur de la contrainte de l'acier à un temps donné  $t_s$ , par la même formule (13), si on connaît les valeurs de  $\varphi_b$  et de  $\psi_s^*$  correspondant à  $t_s$  et, ainsi, de vérifier directement le degré de validité des hypothèses adoptées dans la solution théorique. Il suffit à ce propos de substituer aux valeurs asymptotiques em-



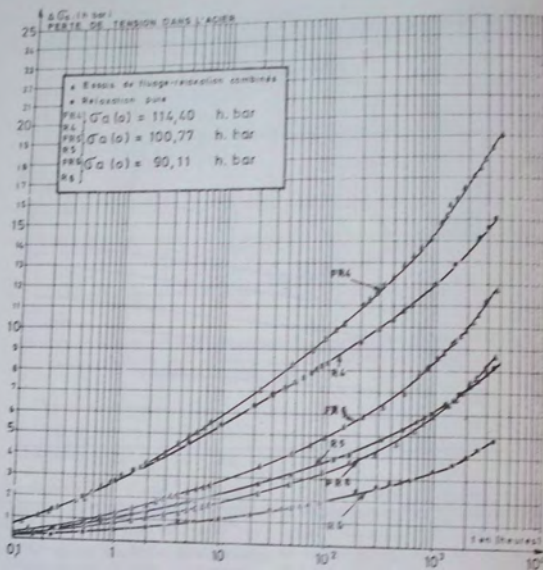


Fig. 11. — Comparaison des pertes par relaxation pure de l'acier et par fluage-relaxation combinés  
 Pourcentage employé :  $\alpha = 2,251\%$

ployées dans la formule (13) les valeurs enregistrées au temps  $t_n$ .

Ainsi, à l'aide des séries de fluage pur du béton et de relaxation pure de l'acier, nous avons déterminé, pour chacun de nos essais de fluage-relaxation combinés, les pertes séparées  $\Delta\sigma_{e,0}(t_n)$  et  $\Delta\sigma_{e,0}(t_n)$  pour différentes valeurs du temps  $t_n$ . La perte estimée par la méthode du cumul et par le modèle rhéologique au moyen de la formule (16) sont comparées à la perte effective, pour un de nos essais de fluage-relaxation combinés choisi comme exemple, dans le tableau I. On remarque la très bonne concordance entre la perte théorique

et la perte effective (expérimentale). Le tableau II, où cette même comparaison est faite pour l'ensemble de nos essais de fluage-relaxation combinés à un temps de 3 000 h, montre qu'il en est de même pour tous les essais.

A titre d'exemple, la courbe représentative de l'évolution de la contrainte de l'acier déduite théoriquement par inversion de l'équation 20 et celle de l'évolution expérimentale correspondant à l'essai FR 6 sont portées sur la figure 18.

Pour des raisons de facilité de calcul, nous n'avons utilisé que les deux premiers termes

TABLEAU I

Essai : FR9  $\sigma_a(\sigma) = 112,80$  h.bar,  $\sigma_a(\sigma) = 380,9$  bar,  $\sigma_a = 3,377$  %

Temps (heures)	$\Delta\sigma_{a,rs}$ h. bar	$\Delta\sigma_{a,ra}$ h. bar	$\Delta\sigma_{a,comai}$ h. bar	$\Delta\sigma_{a,1300}$ h. bar	$\Delta\sigma_{a,1800}$ h. bar
1	0,48	2,58	3,06	2,92	3,31
24	1,79	6,10	7,89	7,32	7,40
96	3,07	7,71	10,78	9,73	9,51
150	3,64	8,27	11,91	10,60	10,31
200	4,06	8,63	12,69	11,21	10,90
400	5,24	9,65	14,89	12,86	12,60
600	6,04	10,34	16,37	13,94	13,72
800	6,65	10,91	17,56	14,77	14,60
1 000	7,14	11,30	18,44	15,38	15,23
2 000	8,87	13,06	21,93	17,76	17,51
3 000	10,08	13,93	24,01	19,07	18,93
4 000	10,98	14,62	25,60	20,04	20,15
5 000	11,66	15,16	26,82	20,77	20,60

TABLEAU II

Pourcentage d'acier $\sigma_a$ %	Désignation de l'essai	Contraintes initiales		Comparaison des pertes à 3 000 h		
		Béton bar	Acier h. bar	$\Delta\sigma_{a,comai}$ h. bar	$\Delta\sigma_{a,1300}$ h. bar	$\Delta\sigma_{a,1800}$ h. bar
1,687 %	FR 1	146,6	86,9	6,62	6,25	6,42
	FR 2	174,2	103,2	13,10	11,82	11,63
	FR 3	207,7	123,1	23,14	20,88	20,74
2,251 %	FR 4	202,8	90,1	9,16	7,98	8,10
	FR 5	226,8	100,8	13,17	10,98	11,06
	FR 6	257,5	114,4	20,89	18,24	18,06
3,377 %	FR 7	294,9	87,3	11,39	9,05	9,21
	FR 8	326,9	96,8	15,22	11,95	12,00
	FR 9	380,9	112,8	24,01	19,07	18,93

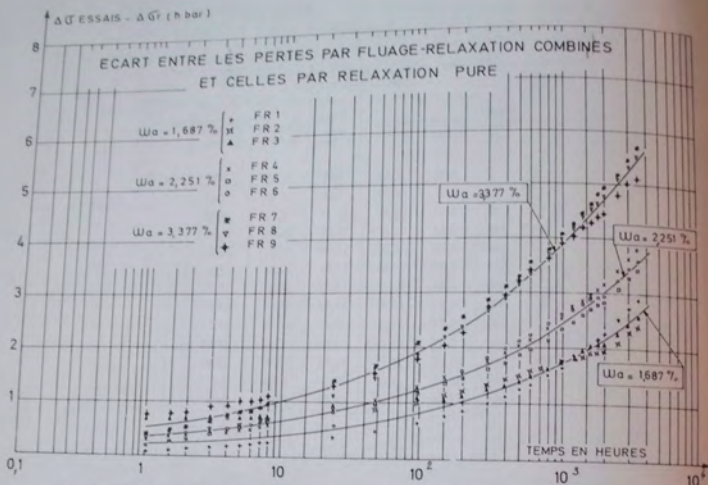


Fig. 12. — Ecart entre les pertes par fluage-relaxation combinés et celles par relaxation pure :

Désignation de l'essai	FR <sub>1</sub>	FR <sub>2</sub>	FR <sub>3</sub>	FR <sub>4</sub>	FR <sub>5</sub>	FR <sub>6</sub>	FR <sub>7</sub>	FR <sub>8</sub>	FR <sub>9</sub>
$\sigma_b$ (at) bar	146,62	174,24	207,72	202,83	226,83	257,51	294,86	326,92	380,87
$\sigma_b$ (at) h bar	86,89	103,25	123,09	90,11	100,77	114,40	87,31	96,81	112,78

des représentations analytiques (équations 17) des fonctions de retard et de relaxation. Les polynômes  $\Pi_s^*(P)$  et  $\Pi_r^*(P)$  sont alors du 4<sup>ème</sup> degré. Les caractéristiques visco-élastiques des matériaux employés, déterminées à l'aide des séries de relaxation pure de l'acier et du fluage pur du béton, ont été les suivantes :

#### ACIER

$E_{20}$	= 21 000 h.bar
$E_{\infty}$	= 11 800 h.bar
$M_{el}$	= 0,632
$M_{ol}$	= 0,368
$m_{ol}$	= $4,198 \times 10^{-4} h^{-1}$
$m_{ol}$	= $0,1187 \times 10^{-4} h^{-1}$
$\sigma_{ca}$	= 71 h.bar

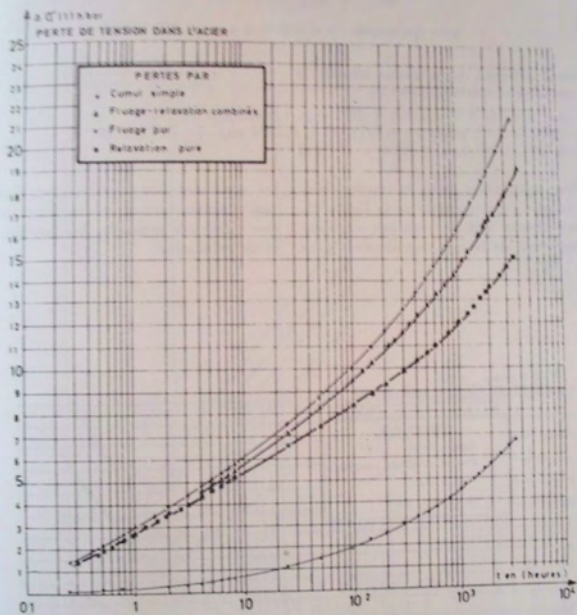


Fig. 13. — Comparaison du cumul des pertes par fluage pur du béton et relaxation pure de l'acier avec les pertes par fluage-relaxation combinés  
 $\sigma_{0a} = 2,251 \text{ } \sigma_0$ ;  $\sigma_{0a} (h) = 114,4 \text{ h} \cdot \text{bar}$ ;  $\sigma_{0b} (h) = 257,5 \text{ bar}$

## BETON

$E_{20}$	= 3 800 h.bar
$E_{\infty}$	= 1 700 h.bar
$M_{21}$	= 0,545
$M_{32}$	= 0,455
$M_{31}$	= $2,972 \times 10^{-3} h^{-1}$
$m_{32}$	= $2,71 \times 10^{-3} h^{-1}$

avec également :  $\alpha = 0,576$  et  $\omega_2 = 2,251 \times 10^{-2}$

Tout calcul effectué, nous avons obtenu la fonction temporelle suivante pour :

$$\sigma_s(t) = \sigma_s(0) \times 0,747 [ 1 + 1,853 \times 10^{-3} \exp. (-4,392 \times 10^{-3} t) + 7,755 \times 10^{-2} \exp. (-0,1175 t) + 0,2364 \exp. (-2,772 \times 10^{-4} t) + 4,337 \times 10^{-2} \exp. (-2,8 \times 10^{-2} t) ] \quad (27)$$

Un meilleur ajustement entre la courbe théorique et la courbe expérimentale de la figure 18, pourrait être obtenu soit en retenant un nombre plus important de termes exponentiels dans

les représentations analytiques, soit en adoptant d'autres formes de représentations donnant une meilleure approche des fonctions de retard et de relaxation.

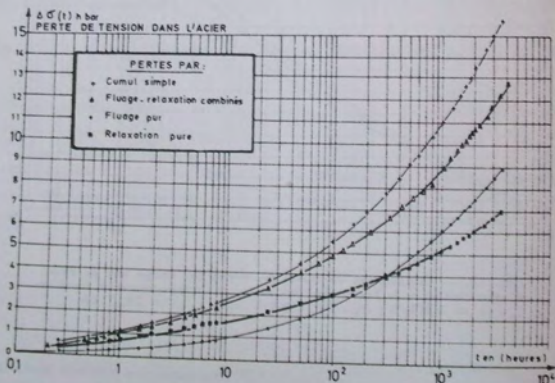


Fig. 14. — Comparaisons du cumul des pertes par fluage pur du béton et par relaxation pure de l'acier avec les pertes par fluage-relaxation combinés  
 $\sigma_{s0} = 3,377 \%$  ;  $\sigma_{s(0)} = 96,81$  h. bar ;  $\sigma_{s(\infty)} = 326,92$  bar

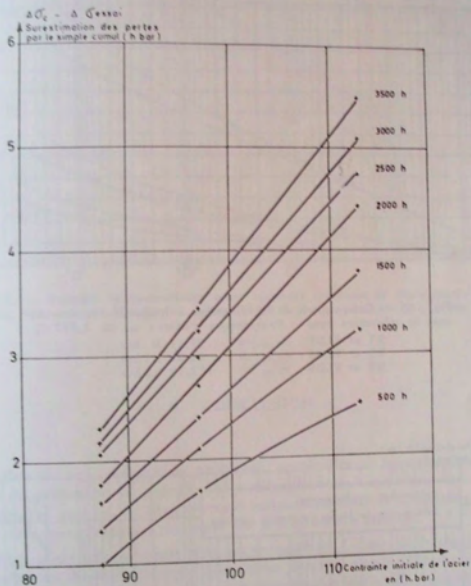


Fig. 15. — Influence du temps et de la précontrainte initiale sur la surestimation des pertes par la méthode du cumul des pertes séparées  
 Pourcentage d'acier fixé :  $\sigma_{\text{sa}} = 3,377 \%$

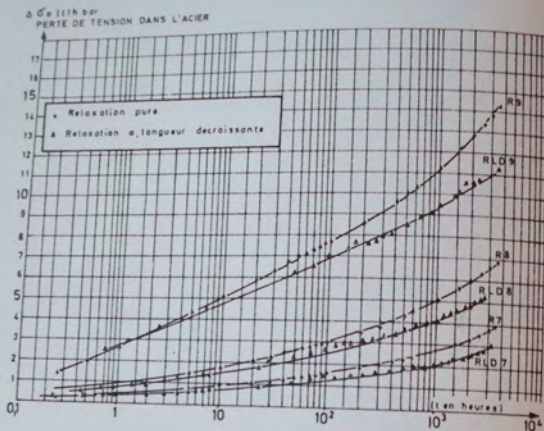


Fig. 16. — Comparaison de la relaxation à longueur décroissante avec la relaxation pure Pourcentage d'acier :  $\sigma_{R(10)} = 3,377\%$

R7 et RLD7 :  $\sigma_{R(10)} = 87,31$  h. bar

R8 et RLD8 :  $\sigma_{R(10)} = 96,81$  h. bar

R9 et RLD9 :  $\sigma_{R(10)} = 112,78$  h. bar

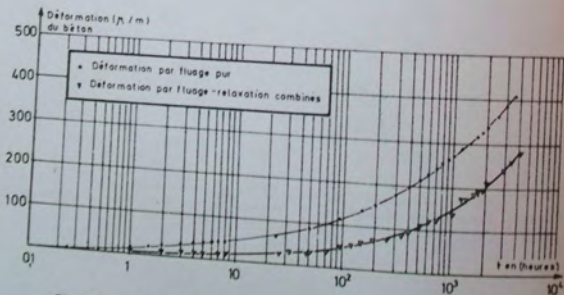


Fig. 17. — Comparaison des déformations du béton par fluage pur et par fluage-relaxation combinées

$\sigma_{R(10)} = 1,687\%$  ;  $\sigma_{R(10)} = 123,09$  h. bar ;  $\sigma_{R(10)} = 207,72$  bar

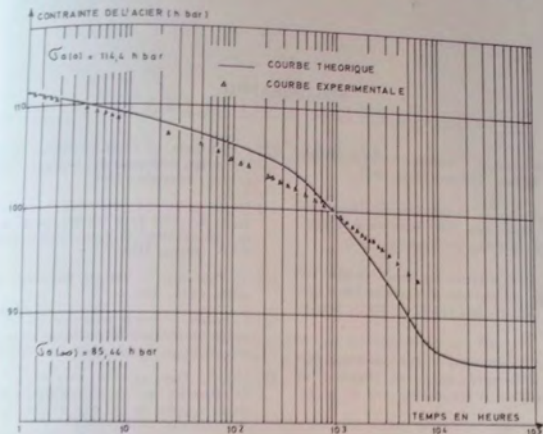


Fig. 18. — Exemple de comparaison entre résultats théorique et expérimental :  
Essais FRG  $\sigma_{0h} = 2,251\%$  ;  $\sigma_{h(10)} = 114,4$  h. bar ;  $\sigma_{h(10^5)} = 257,51$  bar

## 6. CONCLUSION

L'application de la rhéologie au problème, particulier et important sur le plan pratique, des pertes de précontrainte par fluage et relaxation des matériaux béton et acier, est la seule méthode qui permet de tenir compte rationnellement de l'interdépendance de ces matériaux dans leur contribution à la perte de précontrainte globale.

Les résultats théoriques obtenus sont encourageants. La surestimation du calcul par la méthode du cumul est éliminée presque totalement par la formule (16). Le principe de sécurité peut alors être sauvegardé simplement par l'attribution de coefficients de majoration des pertes finales élémentaires par fluage pur du béton et par relaxation pure de l'acier, intervenant dans cette formule. L'application d'une telle méthode permettrait de mieux maîtriser le coefficient de sécurité.

Cependant, il faut noter que le béton employé dans ces essais est suffisamment vieux pour que les variations dimensionnelles dues au retrait et les modifications des propriétés mécaniques (notamment le module d'élasticité instantané), puissent être négligées. Nous devons maintenant poursuivre cette étude en utilisant du béton jeune pour se rapprocher des conditions réelles d'emploi de ce matériau dans les ouvrages en béton précontraint.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N.K. AROUTIOUNIAN. — Application de la théorie du fluage. Editions Eyrolles, Paris, 1957.
- [2] Dr. Z. BYCHAWSKI. — Le problème du fluage non-linéaire du béton dans les constructions précontraintes. Bulletin Rilem n° 4, octobre 1959.
- [3] J. COURBON. — L'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint — Annales de l'ITBTP n° 242 — Février 1968.
- [4] P. KLUC and F. WITTMANN. — The correlation between creep deformation and stress relaxation in concrete. Matériaux et Construction vol. 3, n° 14, 1970.
- [5] C. CRUSSARD. — Etude rhéologique du fluage et de l'hystérésis mécanique des matériaux. Revue Métaux n° 457, Septembre 1963.
- [6] M. BRACHET. — Contribution technique sur les éléments du choix de la tension initiale des armatures de précontrainte 6<sup>e</sup> Congrès International de la F.I.P., Prague 1970.
- [7] W. NOWACKI. — Théorie du fluage. Editions Eyrolles, Paris, 1965.
- [8] F. STUSSI. — Sur la relaxation des fils d'acier. Mémoires de l'Association Internationale des ponts et charpentes — Zurich 1959, PP. 273-286.
- [9] MM. G. DAWANCE et A. CHAGNEAU. — Expériences de relaxation des contraintes dans le béton précontraint. Annales de l'ITBTP n° 120, Décembre 1957.

# TABLE DES AUTEURS DU TOME II

---

	Pages
R. ATALLAH	
Contribution à l'étude des pertes de précontrainte par fluage-relaxation combinés dans les éléments en béton précontraint	414
M. AVEROUS	
Problèmes rhéologiques posés par les essais mécaniques des textiles .....	57
D. BONSIGNOUR	
Etude des propriétés mécaniques du polyméthacrylate de méthyle par une méthode statique .....	131
P. BOULANGER, G. MAYNE, A. HERMANNE, J. KESTENS et R. VAN GEEN	
L'effet photoélastique dans le cadre de la mécanique rationnelle des milieux continus .....	313
H. BÜCKLE	
Microdureté et structure .....	188
J. BUERGUES, P. HABIB et P. MORLIER	
Critère de rupture des bétons soumis à des sollicitations triaxiales .....	347
R. COURTEL, — Le frottement et la déformation des métaux et alliages	216
K. DANG VAN et D. RADENKOVIC	
Effet de la pression sur la nucléation et la propagation des fissures .....	395
M. DAVIN	
Etudes statistiques sur la rupture en vue de l'ajustement d'un modèle non-linéaire .....	143

J.F. DELORME, J. PEREL, P. PEGUIN et P. GOBIN	
Amortissement interne dans le domaine de la déformation plastique .....	273
M. GUERIN	
Influence de la température et de la pression sur le compor- tement mécanique des propergols composites .....	377
G. GUIROY	
Etude, à l'aide de mesures diélectriques, de l'évolution de structure des polymères à l'état solide au voisinage de leur température de transition vitreuse .....	237
M. JOLY	
Avant-propos (N° 3) .....	185
M. JOLY	
Avant-propos (N° 6) .....	375
G de JOSSELIN DE JONG et A. VERRUIJT	
Etude photoélastique d'un empilement de disques .....	73
P. LE ROY et J.M. PIERRARD	
L'étude des lois de comportement viscoélastique liquide au moyen d'écoulements de révolution .....	287
J.P. MERCIER et G. GROENINCKX	
La cristallisation du poly-carbonate de bisphénol-A et l'étude des propriétés physiques du polymère cristallisé (résumé) ..	186
P. MORLIER	
Comportement mécanique des solides poreux. Domaine élas- tique des corps poreux. — Rôle de la pression de pore .....	295
P. MORLIER	
Influence de la pression sur le comportement rhéologique des roches .....	405
J.P. NOTTIN	
Relaxation diélectrique de quelques copolymères de buta- diène et d'acrylonitrile, étude en fonction de leurs compo- sitions .....	258
A. POPOFF	
Sur une méthode d'approximation des courbes rationnelles de traction .....	369

	Pages
J.C. ROBINET	
Les méthodes modernes d'expression de la thermodynamique appliquées à la représentation des systèmes viscoélastiques — II. — Cinétique des comportements .....	389
J.C. ROSSO	
Contribution à l'étude des propriétés rhéologiques des copolymères polyesters insaturés-styrolène. Influence de la température et de la réticulation. I. — Etude du fluage en traction .....	87
J.C. ROSSO	
Contribution à l'étude des propriétés rhéologiques des copolymères polyesters insaturés-styrolène. Influence de la température et de la réticulation. II. — Propriétés rhéothermiques et rhéoptiques .....	169
G. SAYEGH	
Détermination des propriétés visco-élastiques des bétons bitumeux par vibrations longitudinales .....	107
G.W. SCOTT BLAIR	
L'histoire ancienne de la rhéologie .....	127
J.F. STOLTZ, A. LARCAN et M. STOLTZ	
Etude de la relation pression-débit applicable au sang .....	163
G. VALLET et C. SMADJA	
Etude de l'influence de la morphologie sur les propriétés mécaniques dynamiques des matériaux semi-cristallins .....	263
G. VALLET, C. SMADJA, P. LISSAC et A. JOLY	
Rhéologie des polymères semi-cristallins .....	228
M. VENUAT	
Etat actuel des recherches faites au CERILH sur le fluage du béton à la température ambiante .....	355
N.P. VINH TUONG	
Sur le passage du régime harmonique au régime transitoire. Méthodes numériques et graphiques pour obtenir les fonctions de relaxation et de fluage viscoélastique à partir de courbes expérimentales .....	1
I.D. WEBER	
Etude théorique de deux types d'essais de déformation homogène. Application à la viscoélasticité non linéaire et à la plastoélasticité dans le cas de déformations finies .....	41

- Institut National des Sciences Appliquées, Bibliothèque Centrale, 20, Avenue Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Institut National des Sciences Appliquées, Département de Génie Civil, avenue de Rangueil, 31 — Toulouse.
- Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 3, rue Fernand-Hainaut, 93 — Saint-Ouen.
- Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 9, rue La Pérouse, 75 — Paris (16<sup>e</sup>).
- Institut Textile de France, 35, rue des Abondances, 92 — Boulogne.
- Institut Universitaire de Technologie de Belfort, Département Génie Mécanique, Rue Engel-Gros, 90 — Belfort.
- Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, bd Lefebvre, 75 — Paris (15<sup>e</sup>).
- Laboratoire du Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, B.P. n° 27 à 60 — Creil.
- Laboratorio de Engenharia de Angola, Caixa Postal 6 500 Luanda,\* Angola.
- Laboratoire de M. Cupcic, C.S.U., route de Laval, 72 — Le Mans.
- Laboratoire de Mécanique des Fluides, 2, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Laboratoire de Mécanique des Sols, Faculté des Sciences, Domaine Universitaire, CEDEX 83, 38 — Grenoble.
- Laboratoire de Recherches Unilever, Société Thibaud-Gibbs, 8, impasse de la Montjoie, 93 — La Plaine St-Denis.
- Linda Hall Library, Kansas City, Mo 64110 U.S.A.
- Lhomargy, S.A., 3, bd de Bellevue, 91 — Draveil.
- Messageries du Livre, 116, rue du Bac, 75 — Paris (7<sup>e</sup>).
- Mesure et Automatismes pour l'Industrie et la Recherche (MAIR), 9 bis av. de Lattre de Tassigny, 92 — Boulogne.
- Michelin et Cie, place des Carmes, 63 — Clermont-Ferrand.
- The Milton S. Eisenhower Library, Serials Department, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland 21218, U.S.A.
- Minerais et Métaux, Services Techniques, 28, rue Arthur-Rozier, 75 — Paris (19<sup>e</sup>).
- Naphthachimie, Laboratoire, B.P. n° 2, à 13 - Lavera.
- National Lending Library for Science and Technology, Walton, Boston Spa (Yorkshire), Angleterre.
- National Science Library, National Research Council, Ottawa, 7, Ont. Canada.
- Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, av. de la Division Leclerc, 92 — Châtillon.
- L'Oréal, 1, avenue Saint-Germain, 93 — Aulnay-sous-Bois.
- Orta Dogu Teknik Universitesi, Engineering Fakultesi, Ankara, Turquie.
- Pechiney-Saint-Gobain, Centre de Recherches, 12, rue des Gardinoux, 93 — Aubervilliers.
- Ponts et Chaussées, Service Documentation, B.P. 48, 69 — Bron.
- Produits Chimiques Pechiney-Saint-Gobain, 63, rue de Villiers, 92 — Neuilly-sur-Seine.
- Régie Nationale des Usines Renault, 10, avenue Emile-Zola, 92 — Billancourt.
- Rijksinstituut voor Grondmechanica, Hertogstraat 89, Brussel, Belgique.
- Sangamo Controls Limited, North Bersted, Bognor Regis, Sussex, Angleterre.
- Service ERNUTH, Direction des Etudes et Recherches, E.D.F., Centre des Renardières, 77 — Ecuellès.
- Service Etudes Physiques, Société Rhodiacéta, 45, rue Sergent-Michel-Berthet, 69 — Lyon (9<sup>e</sup>).
- Service d'Etudes sur la Séparation des Isotopes de l'Uranium, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. n° 2, 91 — Gif-sur-Yvette.
- SICPA France, B.P. n° 66, 74 — Annemasse.
- Société Anonyme Jean Lamy et Cie, 19, av. Barthélémy-Thimonnier, 69 - Caluire.
- Société Commerciale Paulstra, Laboratoire Central, Route de Pérignon-das, 28 — Châteaudun.
- Société d'Équipement Industriel Electro-Mécanique, 8, rue Polonceau, 75 — Paris (8<sup>e</sup>).
- Société Ethylène-Plastique, Centre de Recherches, B.P. n° 1, 62 — Mazingarbe.
- Société Kleber-Colombes, 49, rue Jean-Jaurès, 95 — Bezons.
- Société Minière et Métallurgique de Pararroya, 1, Bd de Vaugirard, 75 — Paris (15<sup>e</sup>).
- S.N.C.F. Direction des Installations Fixes, 42, rue de Châteaudun, 75 — Paris (9<sup>e</sup>).
- Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, Centre de Recherches de Lacq, B.P. n° 34, 64 — Lacq.
- Société Rhône-Poulenc, Atelier d'Applications de Venissieux, 11, avenue de la République, 69 — Venissieux.
- Techn. Hogeschool, Bibliotheek, Weg — en Waterbouwkunde, Oostplantsoen 25, Delft (Hollande).
- Unilever Research Laboratory, The Frythe, Welwyn, Hertfordshire, (Angleterre).