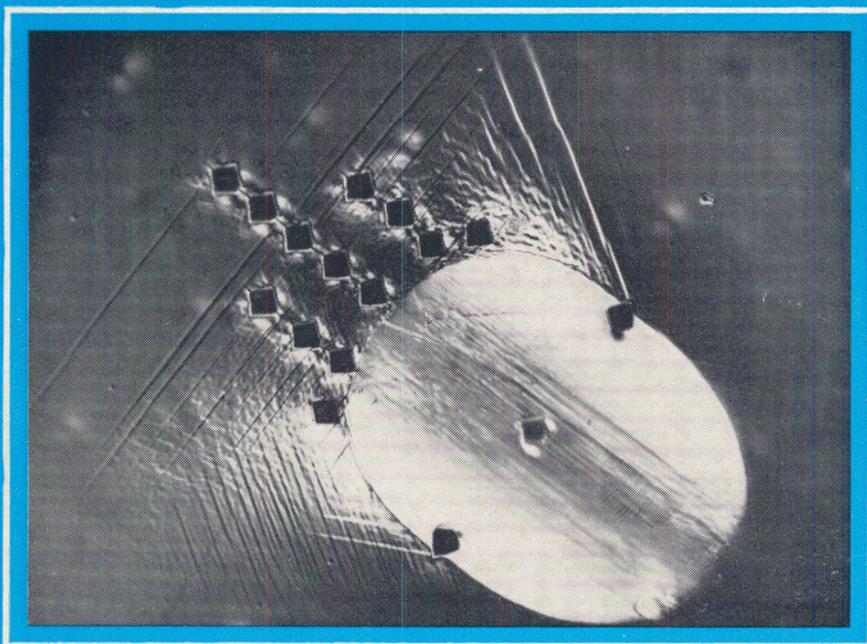


**Revue**

**DE  
L'INDUSTRIE  
MINÉRALE**



CAHIERS  
DU GROUPE  
FRANÇAIS  
DE RHÉOLOGIE

Tome II  
Numéro 5

15 JUIN 1971

NUMERO SPECIAL

CAHIERS  
DU  
GROUPE FRANÇAIS  
DE RHÉOLOGIE

Tome II — N° 5

15 Juin 1971

Edité par la Revue de l'Industrie Minérale  
19, rue du Grand-Moulin — 42 - St-Etienne

## SOMMAIRE

---

	PAGES
P. BOULANGER et G. MAYNE A. HERMANNE, J. KESTENS et R. VAN GEEN	L'effet photoélastique dans le cadre de la mécanique rationnelle des milieux continus .... 313
J. BERGUES, P. HABIB et P. MORLIER	Critère de rupture des bétons soumis à des sollicitations triaxiales ..... 347
M. VENUAT	Etat actuel des recherches faites au CERILH sur le fluage du béton à la température ambiante 355
A. POPOFF	Sur une méthode d'approximation des courbes rationnelles de traction ..... 369

*Photographie couverture :*

Trace d'un déplacement de frottement sur une face orientée (111) d'un monocristal de cuivre. Le frotteur est une bille en saphir poli de 1 mm de diamètre. Le frottement provoque, par un mécanisme de déformation plastique, l'émergence d'une protubérance (bourrelet frontal) en avant de la trace ; les empreintes de microdureté en forme de losanges, renseignent sur l'écrouissage des diverses zones soumises aux contraintes de frottement.

---

# L'effet photoélastique dans le cadre de la mécanique rationnelle des milieux continus

par P. BOULANGER et G. MAYNE

Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences  
de l'Université Libre de Bruxelles

A. HERMANNE, J. KESTENS et R. VAN GEEN

« Laboratoire d'Analyse des Contraintes » de la Faculté des Sciences Appliquées  
de l'Université Libre de Bruxelles  
et Service « Sterkteleer en Spanningsanalyse »  
de la Faculté des Sciences Appliquées  
de la Vrije Universiteit Brussel

## RESUME

Dans une première partie, nous analysons la portée et les limitations des théories cinématiques de l'effet photoélastique, ainsi que leur application à la détermination de contraintes élastiques ou non.

Dans une deuxième partie, nous établissons les équations constitutives électromécaniques d'un diélectrique viscoélastique non linéaire. La théorie est dynamique, en ce sens que l'équation de comportement est déduite des équations du mouvement, des équations de Maxwell, du premier principe de la thermodynamique et de l'inégalité de Clausius-Duhem.

Les résultats obtenus sont appliqués à l'effet photoélastique généralisé, considéré comme résultat de la perturbation produite par un champ électromagnétique faible sur un diélectrique en mouvement.

Dans une troisième partie, nous analysons les manifestations expérimentalement observables, dues à cet effet photoélastique généralisé.

L'étude de l'influence de la déformation et du mouvement du diélectrique sur la propagation des ondes électromagnétiques planes montre l'existence de biréfringence, de dichroïsme et de pouvoir rotatoire d'origine mécanique.

Nous concluons par l'examen de quelques perspectives théoriques et expérimentales dans l'étude de l'effet photoélastique généralisé.

## SUMMARY

The first part of the paper gives a review of the kinematical theory of the photoelastic effect, and its application to the experimental analysis of elastic or anelastic stresses and strains.

In the second part, the constitutive electromechanical equations are derived for a viscoelastic non-linear-dielectric. The theory is a dynamical one, in this sense that the behavior equation is derived from the equations of motion, Maxwell's equations, the first principle of thermodynamics and the Clausius-Duhem inequality.

The results are applied to the so-called « generalized photoelastic effect » considered as the effect of a perturbation due to a weak electromagnetic field (the light) on a dielectric in motion.

In the last part we analyze the measurable data, related to this generalized photoelastic effect. The study of the deformation and motion of the dissipative dielectric on the propagation of plane electromagnetic waves shows the existence of birefringence, dichroïsme and gyrotropy of mechanical origin.

## TABLE DES MATIERES

<p><b>Première Partie :</b> Les théories cinématiques de l'effet photoélastique</p> <p>1. Développement historique de la photoélasticité</p> <p style="padding-left: 20px;">A. Découverte qualitative : 1815</p> <p style="padding-left: 20px;">B. Formulation descriptive cinématique : 1841-1853</p> <p style="padding-left: 20px;">C. Formulation théorique dynamique : 1963.</p> <p>2. La photoélasticimétrie</p> <p>3. Photoviscoélasticimétrie et photoplasticimétrie</p> <p style="padding-left: 20px;">A. La photoviscoélasticimétrie</p> <p style="padding-left: 20px;">B. La photoplasticimétrie.</p> <p>4. Rhéooptique et biréfringence d'écoulement.</p>	<p><b>Deuxième Partie :</b> Une théorie dynamique de l'effet photoélastique dans un milieu continu viscoélastique et diélectrique dissipatif</p> <p>1. Hypothèses et exigences.</p> <p>2. Equations de champ et équations de comportement.</p> <p>3. Equations constitutives de couplage électromécanique.</p> <p>4. L'effet photoélastique.</p> <p style="text-align: center;"><b>Troisième Partie :</b> <b>Grandeurs observables et conclusions</b></p> <p>1. Propagation des ondes électromagnétiques</p> <p>2. Possibilités des méthodes expérimentales.</p> <p>3. Conclusions.</p> <p style="text-align: right;"><b>Bibliographie</b></p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## PREMIERE PARTIE

## LES THEORIES CINEMATIQUES DE L'EFFET PHOTOELASTIQUE

## 1. Développement historique de la photoélasticité

Trois moments importants marquent, dans l'histoire des sciences, la compréhension des origines et de la signification de l'effet photoélastique :

A. La découverte **qualitative** du phénomène est due à Sir David Brewster, en 1815 [1]. De son bref mémoire de cinq pages, nous extrayons la proposition :

« [...] *I have been led to the discovery of a remarkable property of soft transparent solids, in virtue of which they exhibit, by simple pressure, all the optical qualities of doubly polarising crystals* »

dont il est opportun de souligner le caractère prophétique. En effet, un des buts poursuivis dans la présente contribution, consiste à établir que la déformation et le mouvement d'un diélectrique conduisent à toutes les formes de manifestations optiques, classiques en optique cristalline et non pas à la **seule** biréfringence linéaire.

B. La **formulation quantitative** de lois susceptibles de régir le phénomène est donnée successivement par Neumann, en 1841 [2] et Maxwell, en 1853 [3].

Ces premières relations entre l'anisotropie optique et sa cause mécanique constituent un exemple type de théorie *cinématique* de l'effet photoélastique. Explicitons son contenu principal, en choisissant, à titre d'exemple, la théorie de Maxwell réduite à ses éléments essentiels, mais transposée en notations contemporaines.

La propagation de la lumière dans un diélectrique isotrope, linéaire, transparent, est dé-

critée, en électrodynamique classique, par les équations de Maxwell, auxquelles on adjoint l'équation du comportement électromagnétique

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1)$$

liant la polarisation diélectrique  $\vec{P}$  au champ électrique générateur  $\vec{E}$ , par une simple relation de proportionnalité, caractérisée par la susceptibilité diélectrique  $\chi$ .

L'essence de la théorie cinématique de Maxwell consiste à perturber l'équation de comportement électromagnétique (en fait, la valeur de la constante  $\chi$ ) par le tenseur des contraintes  $\bar{T}$

$$\chi \Rightarrow \chi(\bar{T}) \quad (2)$$

La susceptibilité devient un *tenseur*, du fait de l'anisotropie introduite par la déformation, qui devra se réduire au tenseur sphérique  ${}_0\chi I$  en l'absence de contraintes :

$$\chi_{ij} = {}_0\chi\delta_{ij} + f_{ij}(T_{kl}) \quad (3)$$

Le choix de la fonction  $f(T_{kl})$ , conjointement avec l'équation de comportement mécanique du matériau, déterminera le degré d'évolution du modèle photoélastique. Ainsi, dans la théorie de Maxwell, on admettra que la fonction à valeur tensorielle  $f$  est une fonction linéaire isotrope du tenseur des contraintes :

$$\chi_{ij} = {}_0\chi\delta_{ij} + \Lambda_1 T_{ij} + \Lambda_2 T_{kk} \delta_{ij} \quad (4)$$

L'équation de comportement électromagnétique (1), devient

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E^j = \varepsilon_0 ({}_0\chi\delta_{ij} + \Lambda_1 T_{ij} + \Lambda_2 T_{kk} \delta_{ij}) E^j \quad (5)$$

relation qui, une fois introduite dans les équations électromagnétiques de Maxwell, permet d'en rechercher les solutions en ondes planes. Il est bien connu qu'un milieu décrit par (5) présente de la *biréfringence linéaire*. On détermine ainsi *quantitativement* l'influence des contraintes sur la célérité des ondes lumineuses.

Si le matériau étudié est supposé élastique linéaire (hookien), nous pouvons substituer les déformations (évanouissantes)  $\varepsilon_{ij}$  aux contraintes  $T_{ij}$  dans (5), grâce à l'équation de comportement mécanique *supposée non perturbée par le passage des ondes électromagnétiques* :

$$T_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

et obtenir ainsi la formulation équivalente de Neumann.

(La notation  $\varepsilon_{ij}$  est utilisée pour les déformations évanouissantes). Dans une théorie plus élaborée, on pourra, au goût de chacun, introduire séparément ou simultanément les généralisations suivantes :

1. Introduire dans (3) une relation non linéaire entre les tenseurs  $\overline{\chi}$  et  $\overline{T}$ .
2. Considérer le matériau étudié comme anisotrope dans l'état non contraint (effet photoélastique dans les cristaux).
3. Utiliser un formalisme compatible avec l'hypothèse de déformations *finies*.
4. Modifier l'équation de comportement mécanique du milieu par exemple

$$a) \overline{T} = \overline{T}(\overline{A}) \quad (7) \text{ corps élastique}$$

$$b) \overline{T} = \overline{T}(\overline{A}, \overline{V}) \quad (8) \text{ corps viscoélastique}$$

On obtiendra comme cas particulier, en linéarisant (3) et (8) l'équation régissant le comportement d'un solide viscoélastique linéaire de Kelvin-Voigt.

$$c) \overline{T} = -p \overline{I} + \varphi \left[ \overset{t}{\underset{o}{A}}(t), V, \dots \right] \quad (9)$$

fluide de Rivlin-Ericksen

etc.

Toutes ces théories ne contiennent aucun élément essentiel nouveau par rapport à la théorie de Maxwell, et en conservent toutes les caractéristiques fondamentales, à savoir :

1. L'équation constitutive électromagnétique (qui complète les équations de Maxwell par une description du comportement du matériau) est *toujours* celle d'un *diélectrique parfait transparent, rigide, immobile*

$$\vec{P} = \varepsilon_o \overline{\chi} \vec{E} \quad (10)$$

avec  $\overline{\chi}$  *symétrique*

2. L'équation constitutive mécanique (qui complète les équations d'équilibre en décrivant le comportement du matériau en l'absence de tout champ magnétique), donnée *a priori*, n'est *jamais modifiée* par le passage des ondes lumineuses.
3. L'interaction entre la propagation de la lumière et la déformation du milieu (effet photoélastique) est obtenue par une description de la *perturbation de  $\overline{\chi}$*  par les contraintes, ou le cas échéant, d'autres variables.

Dans la mesure où la cinématique se borne à une description du mouvement, nous avons appelé ce type de théorie « théorie cinématique ».

C. La *théorie dynamique* de l'effet photoélastique dans les corps déformables, introduite dans le cas des diélectriques élastiques par R. Toupin en 1963 [4], trouve son origine dans plusieurs travaux antérieurs [5] [6].

Quelle que soit l'importance des progrès réalisés grâce à la formulation quantitative apportée par les théories de type cinématique (en particulier le développement de la photoélasticimétrie), celles-ci ne pouvaient plus s'avérer satisfaisantes au moment où l'on s'efforce de construire la mécanique rationnelle des milieux continus sur des fondements rigoureux. Elles s'avèrent insuffisantes à expliquer diverses observations expérimentales [7] à [13] et dès lors à constituer une base théorique adéquate aux méthodes photoélastiques de mesure d'états de contraintes non élastiques.

Dans la théorie *dynamique*, les équations générales valables pour tout milieu continu,

siège de phénomènes électromagnétiques, à savoir :

- les équations du mouvement (conservation de la quantité de mouvement et de son moment) ;
  - l'équation de continuité (conservation de la masse) ;
  - les équations de Maxwell ;
  - les principes de la thermodynamique
- sont complétées par un nombre adéquat d'équations de comportement.

Dans la théorie de Toupin, le continu est *diélectrique transparent et élastique* ; les variables thermodynamiques sont donc la polarisation  $\vec{P}$  et la déformation  $\bar{A}$  ; les équations de comportement sont l'énergie interne  $U$ , l'intensité électromotrice  $\vec{\mathcal{C}}$  (définie comme équilibrant le champ local et valant

$$\vec{\mathcal{C}} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (11)$$

c'est-à-dire, en fait, le champ électrique effectivement subi par une « particule » du milieu, en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$ , et la contrainte  $\bar{T}$ .

$$U = \hat{U}(\bar{A}, \vec{P}) \quad (12)$$

$$\vec{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}(\bar{A}, \vec{P}) \quad (13)$$

$$\bar{T} = \hat{T}(\bar{A}, \vec{P}) \quad (13 \text{ bis})$$

Le champ électromagnétique lié à l'onde lumineuse est faible, de telle sorte que le problème sera traité comme un calcul de perturbation autour d'un état initial de déformation finie, mais de champ électromagnétique nul. Il résultera de ce calcul de variation, une représentation de l'effet photoélastique, conforme aux lois de la mécanique rationnelle et aux principes de la thermodynamique.

Le but de cette introduction n'est pas de mettre en évidence le caractère rigoureux de la théorie dynamique, comparé aux déficiences des théories cinématiques.

Il est de souligner la signification des trois étapes essentielles intervenues dans la compréhension de l'effet photoélastique : **découverte expérimentale, formulation descriptive**

**dans la théorie cinématique, formulation analytique dans la théorie dynamique**, conforme aux exigences de la mécanique rationnelle des milieux continus.

Nous pouvons ainsi préciser la place occupée par le travail original présenté dans la deuxième partie : il s'agit, du moins à notre connaissance, de la première théorie *dynamique* de l'effet photoélastique dans un milieu continu *dissipatif*, tant du point de vue mécanique (viscosité) que électromagnétique (non transparence).

## 2. La photoélasticimétrie

Il règne une certaine confusion entre **photoélasticité** et **photoélasticimétrie**. Cette dernière est une technique d'ingénieur basée sur l'emploi de l'effet photoélastique à la détermination des contraintes élastiques. Les mesures effectuées sur un modèle réduit sont ensuite transposées au prototype, à partir de relations classiques de similitude (qui ne sont d'ailleurs pas toujours correctement explicitées, notamment lors de l'existence de forces de volume).

La photoélasticimétrie est basée sur les hypothèses suivantes :

- 1) Une théorie cinématique utilisant l'équation de comportement (4).
- 2) L'élasticité linéaire hookienne du modèle et du prototype (6) qui entraînent :
  - 1°) La coïncidence des directions principales du tenseur des susceptibilités  $\bar{\chi}$ , du tenseur des déformations évanouissantes  $\bar{\varepsilon}$ , du tenseur des contraintes  $\bar{T}$
  - 2°) La coïncidence des points de sphéricité de ces mêmes tenseurs
  - 3°) Des relations linéaires entre les valeurs principales de ces mêmes tenseurs symétriques :

$$\chi_i = {}_0\chi + A_1\sigma_i + A_2(\sigma_2 + \sigma_3) = {}_0\chi + B_1\varepsilon_i + B_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (14)$$

et deux relations similaires par permutation des indices.

4°) A l'approximation de la perturbation faible ( $n = \frac{c}{v}$ , désignant un indice de réfraction)

$$n_1 - {}_0n = \sqrt{1 + \chi_1} - \sqrt{1 + {}_0\chi} \approx \frac{1}{2}(\chi_1 - {}_0\chi) \quad (15)$$

et dès lors

$$n_1 - {}_0n = C_1\sigma_1 + C_2(\sigma_2 + \sigma_3) = K_1\varepsilon_1 + K_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (16)$$

et deux relations similaires par permutation des indices.

$C_1$  et  $C_2$  sont les constantes photoélastiques en contraintes (« stress-optical coefficients »), exprimées en d'archaïques unités  $10^{-13}$  cm<sup>2</sup>/dyne appelées « Brewster » ;  $K_1$  et  $K_2$  sont les constantes photoélastiques en déformation (« strain-optical coefficients »).

Le groupe (16) constitue les relations dites de Maxwell-Neumann, base de toute la photoélasticimétrie linéaire classique.

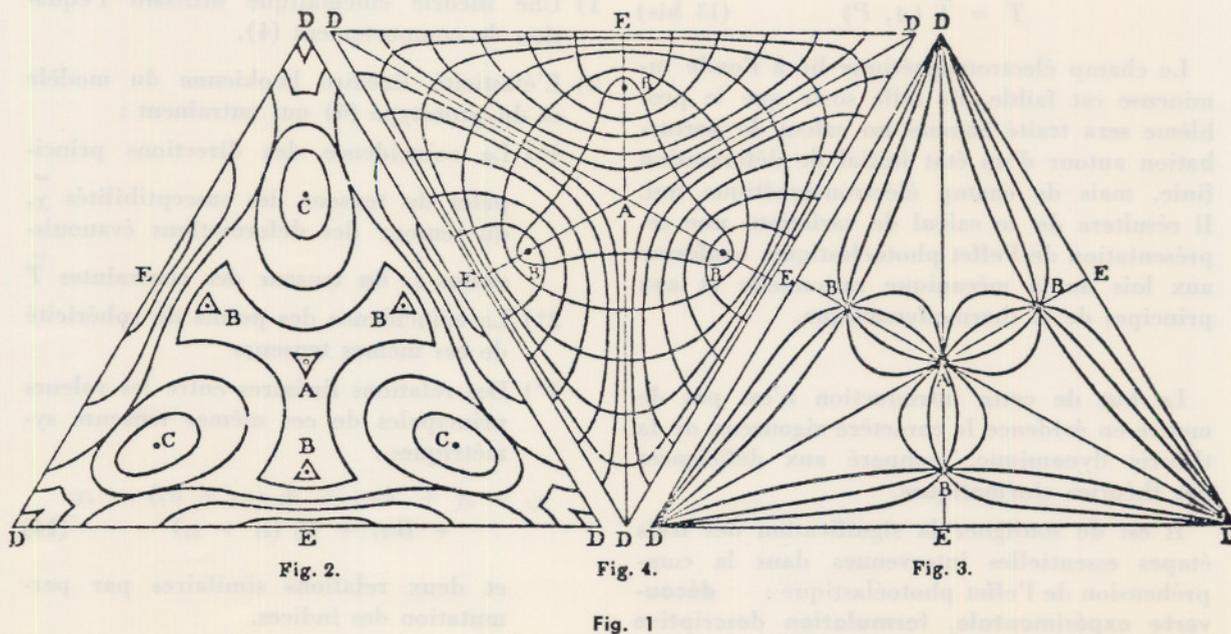
On a coutume de fixer le début de l'ère photoélasticimétrie à 1901, date à laquelle l'ingénieur des Ponts et Chaussées français,

A. Mesnager, appliqua cette technique à la détermination des efforts intérieurs dans un modèle réduit d'un pont au col de Balme [15].

L'examen de la *figure 1*, extraite de l'œuvre de Maxwell, nuance cette affirmation. On y distingue, à gauche un réseau d'« isochromes » à droite d'« isoclines », au centre de « trajectoires des contraintes principales ».

Le texte d'accompagnement est révélateur : il s'agit bel et bien de la première analyse photoélasticimétrie et le fait que les contraintes y étaient d'origine thermique, n'y change rien. La nouveauté, dans l'expérience de Mesnager ne réside pas dans la *technique* (celle-ci, aujourd'hui encore, dans la quasi-totalité des laboratoires d'analyse des contraintes, est celle illustrée à la *figure 1* : relevés expérimentaux des isochromes et isoclines, construction des enveloppes des directions principales, réalisations de calculs ou d'expériences complémentaires), mais bien dans la *finalité* de l'expérience : d'exercice académique chez Maxwell, elle prend, avec Mesnager, rang de technique de la société industrielle.

#### MR JAMES CLERK MAXWELL ON THE



Notons, au passage, que Brewster était parfaitement conscient des perspectives ouvertes par sa découverte. On lit en effet, dans le « Traité de la lumière » [14] que J.F.W. Herschel écrivit pour l'Encyclopédie métropolitaine :

« La sagacité du docteur Brewster n'a pas laissé échapper le parti que l'on pouvait tirer de sa découverte, appliquée au but important de s'assurer de la flexion et de la compression des diverses parties des ouvrages d'architecture, tels que les ponts de pierre, les constructions en bois de charpente, etc., en assemblant des modèles de verre de la même manière que les matériaux mêmes ».

Quatre ouvrages importants ont, chacun à leur époque, permis d'asseoir la photoélasticimétrie sur des bases sérieuses, en précisant les exigences d'une expérimentation correcte. La base théorique demeure la théorie cinématique.

E. Coker et L. Filon [16], en 1931, publient le premier ouvrage d'ensemble (théorie, technique expérimentale, applications). L'ouvrage fourmille d'exemples concrets, en particulier de déterminations de facteurs de concentration de contraintes qui aujourd'hui emplissent les formulaires d'ingénieurs.

H. Leboiteux et R. Boussard éditent en 1940 [17] un ouvrage de synthèse, au titre précis « Photoélasticité et Photoélasticimétrie », introduit par une saisissante préface de P. Langevin.

La photoélasticimétrie d'après-guerre est marquée par l'ouvrage de M. Frocht [18] aux bases théoriques imprécises, mais enrichi par l'apport de deux moyens expérimentaux qualitativement nouveaux : la découverte des filtres polarisants du type « polaroid » (se substituant aux prismes de Nicol et modifiant ainsi la technique d'observation), et la mise au point des résines synthétiques (transformant la technique de réalisation des modèles réduits en photoélasticimétrie bi- ou tridimensionnelle).

L'essentiel de l'état actuel de la technique photoélasticimétrique est décrit dans une contribution de T. Jessop dans « Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics » [19], tandis que l'aspect cristallographique est détaillé dans le volume XXV/1 du même ouvrage [20].

En 1963, A. Robert et E. Guillemet [21] à [26] présentent une méthode nouvelle d'observation expérimentale où certaines innovations sont liées à l'aspect tridimensionnel de l'étude (l'emploi de la lumière diffusée) d'autres à la technique d'expérimentation proprement dite. Un lecteur superficiel pourrait conclure que l'essentiel de ces méthodes nouvelles consiste à substituer une mesure électronique automatisée à la traditionnelle observation de franges d'interférence, le tout étant interprété au moyen d'une représentation géométrique commode : la sphère de Poincaré.

Le changement introduit est en réalité beaucoup plus profond et l'examen de cette question mérite une analyse plus détaillée, en rapport avec les perspectives expérimentales examinées dans la troisième partie de la présente contribution.

S'il était possible de mesurer simplement  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  et les directions principales correspondantes, les équations (16) fourniraient la solution générale du problème photoélasticimétrique. Malheureusement, les différences ( $n_1 - n_2$ ) etc., sont très faibles et dès lors difficiles à mesurer. Par contre, la mesure du déphasage entre les ondes biréfractées se propageant dans la direction 3

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} e (n_1 - n_2) \quad (17)$$

est extrêmement simple à mesurer à partir d'observations en lumière polarisée. Soustrayant l'une de l'autre les deux premières équations (16) :

$$(n_1 - n_2) = C (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (18)$$

(avec  $C = C_1 - C_2$ , dite constante photoélastique relative),

relation vade-mecum du photoélasticimétriste.

Nous limitant, pour l'exemple, et sans perte de généralité, à l'état plan de contraintes, et appelant par respect de la tradition, « biréfringence » la quantité (\*) ( $n_1 - n_2$ ), on obtient la proposition clé de la photoélasticimétrie :

(\*) La biréfringence constitue le phénomène de double réfraction et non la valeur de ( $n_1 - n_2$ ). Ce distinguo prend quelque importance lorsqu'on ne se limite plus à la seule biréfringence linéaire.

« Dans un matériau élastique linéaire hookeien (6), photoélastique linéaire (16) soumis à un état plan de contraintes et observé au moyen d'une onde lumineuse se propageant normalement à ce plan :

1. Les directions principales du tenseur des susceptibilités diélectriques et du tenseur des contraintes sont confondues
2. La « biréfringence » est proportionnelle à chaque valeur principale du déviateur (\*) des contraintes ».

Un siècle de répétitions de cette proposition, sous les formes les plus diverses, noyées dans la description de techniques et d'appareillages expérimentaux variés, a solidement ancré l'opinion suivant laquelle :

1. L'effet photoélastique (c'est-à-dire l'interaction entre la déformation du milieu et la propagation des ondes électromagnétiques) ne se manifeste que par l'apparition de *biréfringence linéaire*.
2. L'expérimentation se limite à la détermination des directions principales optiques et à la mesure de la « biréfringence » ( $n_1 - n_2$ ).

Cette opinion est à ce point répandue que de nombreuses théories cinématiques [8] [27], forment leur équation de comportement non sous la forme (3), mais sous la forme :

$$(n_1 - n_2) = f(\text{contraintes ou (et) autres variables}) \quad (19)$$

dite « formule de biréfringence ».

Or cette opinion est erronée. Nous montrons ci-après que la nature de l'effet photoélastique est bien plus complexe et plus riche en possibilités. D'autre part, les techniques expérimen-

tales actuelles (interférométrie, holographie, polarimétrie) sont devenues suffisamment raffinées pour permettre la mesure complète de  $\chi$  ou d'autres grandeurs caractéristiques de propriétés optiques plus complexes du milieu. C'est dans cette perspective qu'il faut comprendre l'effort entrepris vers une formulation rigoureuse des équations de comportement régissant l'effet photoélastique.

L'apport nouveau de la méthode Robert-Guillemet consiste à substituer à la mesure classique de la « biréfringence » incarnée par une frange d'interférence colorée, une détermination des formes propres du groupe des formes de lumière polarisée transmises par le milieu [28]. D'une manière plus générale, elle a enrichi les possibilités d'étude expérimentale de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu déformé sans préjuger a priori de l'existence du seul phénomène de biréfringence.

### 3. Photoviscoélasticimétrie et photoplasticimétrie

Le succès obtenu par la photoélasticimétrie dans la détermination des contraintes élastiques, a conduit à rechercher des généralisations permettant l'emploi de techniques expérimentales similaires en vue de la détermination de contraintes anélastiques. La difficulté d'emploi des méthodes de calcul numérique dans ce cas n'a fait que renforcer la nécessité de méthodes expérimentales adéquates.

Les deux généralisations à la fois les plus nécessaires, du point de vue technologique, et les plus naturelles, consistent à étudier l'effet photoélastique dans un solide respectivement *élasto-plastique* ou *visco-élastique*.

A première vue, les théories cinématiques offrent une voie d'approche simple à ce problème, à partir d'une modification de variables indépendantes dans l'équation descriptive (3).

#### A. La photoviscoélasticimétrie

Une contribution récente de J. Romain [29] dresse le bilan actuel des travaux en photoviscoélasticimétrie. Il résulte de cette analyse que

(\*) Décomposons le tenseur des contraintes (planes) en partie isotrope et déviateur, dans ses axes principaux

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 + \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1 + \sigma_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_1 - \sigma_2 \end{pmatrix}$$

le fondement de la technique expérimentale est, dans chaque cas, l'hypothèse cruciale et admise *a priori*, que la relation entre contraintes et biréfringence a la « même forme » (\*) que la relation entre contraintes et déformations dans un matériau viscoélastique.

Cette hypothèse se retrouve en particulier dans la première contribution sur le sujet, due à Mindlin [30] en 1949. Le problème posé y est en réalité le problème inverse posé par l'emploi de résines synthétiques en photoélasticimétrie : peut-on déterminer des contraintes dans un prototype élastique à partir de mesures sur un modèle viscoélastique ?

On retrouve la même hypothèse dans les mémoires de E. Dill [31] [32] où le tenseur  $\chi_{ij}$  est supposé univoquement déterminé par l'histoire des déformations, sous une forme linéarisée pour les petites déformations. La technique expérimentale correspondante fait l'objet d'une analyse de M. Williams et R. Arenz [33].

Cette pratique expérimentale est symptomatique des possibilités de la théorie cinématique et mérite, à ce titre, d'être résumée : on admet qu'il est possible de relever en chaque point, en fonction du temps (cas plan)

- une « biréfringence » :  $(n_1 - n_2) = f_1(x, t)$
- une « orientation des axes principaux optiques » :  $\alpha = \alpha(x, t)$

Moyennant une expérience d'étalonnage adéquate qui « détermine » les propriétés photo-viscoélastiques du matériau supposé linéaire, il devient possible de remonter, au prix de longs calculs [29], aux contraintes dans le modèle.

Le formalisme opérationnel, basé sur l'emploi de la transformation de Carson [34], d'emploi courant en viscoélasticité linéaire, peut être utilisé avec avantage en photoviscoélasticimétrie.

En fait, on admet, comme allant de soi :

- 1) que  $(n_1 - n_2)$  et  $\alpha$  sont les seules grandeurs à mesurer,

(\*) La signification donnée à cette expression ambiguë n'est jamais précisée de manière satisfaisante.

2) que les matériaux sont *a priori* Boltzmannien, tant du point de vue mécanique que optique,

3) qu'il suffit de substituer dans (3) ou plus exactement, hélas, dans (19), à la relation élastique (6), une relation viscoélastique linéaire  $\bar{T} =$  (fonction linéaire de  $\bar{A}$  et  $\bar{V}$ )

soit

$$T_{ij} = \Lambda_1 A_{kk} \delta_{ij} + \Lambda_2 A_{ij} + \Lambda_3 V_{kk} \delta_{ij} + \Lambda_4 V_{ij} \quad (20)$$

opération qui, effectivement, revient à admettre *a priori*, et comme évident, que les équations de comportement mécaniques et optiques, considérées comme distinctes, sont similaires. Quelques fois, l'approximation prend des formes plus frustes encore, qui témoignent d'une méconnaissance de la complexité du phénomène de biréfringence mécanique (est-ce une conséquence de l'apparente simplicité de la photoélasticimétrie linéaire ?). L'on rencontre fréquemment dans la littérature l'affirmation selon laquelle la biréfringence évolue « parallèlement » à la déformation. Combien de fois n'a-t-on pas affirmé que l'isocline optique observée expérimentalement coïncide « évidemment » avec l'isocline mécanique ?

Cette affirmation « It is reasonable to assume that mechanical creep strain parallels the optical creep birefringence » est répandue dans la littérature [35]. Or nous avons démontré le contraire dans des publications antérieures [7] à [12] [36].

Et pourtant ? N'est-il pas logique d'admettre le schéma de raisonnement implicitement contenu dans cette affirmation, à savoir que les mêmes mécanismes à l'échelle moléculaire — disons à titre d'exemple, l'orientation des segments moléculaires dans un haut polymère — sont responsables **et** des propriétés mécaniques **et** des propriétés optiques ? Dès lors, l'évolution dans le temps de cette orientation de segments se marquera **également** dans les deux phénomènes...

C'est oublier que d'autres mécanismes, par exemple le mouvement d'un noyau latéral benzénique, qui n'ont que des effets imperceptibles sur la déformation, peuvent avoir des effets colossaux sur les propriétés optiques.

En outre, le recours à une justification de type microrhéologique (par exemple l'existence d'une biréfringence de déformation et d'une biréfringence d'orientation [36] [37]) n'est pas un procédé admissible dans le cadre d'une théorie rigoureuse relevant de la mécanique rationnelle des milieux continus.

*Conclusion* : la théorie, de type cinématique, utilisée en photoviscoélasticimétrie est conceptuellement insatisfaisante, en particulier parce que basée sur une série d'évidences contredites par la pratique expérimentale.

### B. La photoplasticimétrie

Une très ancienne publication mise à part [38], les contributions dans ce domaine sont récentes. Le travail de synthèse le plus important dans ce domaine est dû à Javornicky [39] à [41].

Dans la seconde partie de ce texte, le comportement de type plastique est explicitement exclu du modèle original présenté. Cependant l'examen des théories cinématiques en photoplasticité est intéressant car il confirme à nouveau l'insuffisance de telles théories et constitue à cet égard un encouragement au développement de théories dynamiques adéquates.

Dans la masse des travaux en cours dans ce domaine en pleine évolution, nous retiendrons les contributions suivantes.

— L'école soviétique utilise essentiellement des substances cristallines (Ag Cl<sup>2</sup>) pour **simuler** la déformation plastique des matériaux [42] à [44].

— L'école de Munich fonde son analyse sur une **ressemblance** (et non une similitude !) entre la courbe contrainte-déformation d'un métal et celle obtenue à vitesse de sollicitation constante, pour le celluloïde et d'autres matériaux [45] à [51]. Les succès obtenus par cette méthode sont intéressants : il n'empêche que l'explicitation des bases théoriques sur lesquelles elle repose est nulle.

— L'école de Frocht [52] à [56] construit sa technique photoplasticimétrie sur un ensemble de résultats expérimentaux obtenus sur le nitrate de cellulose. Une expérience essentielle a trait à l'examen comparatif des directions principales de contrainte, de déformation

et de susceptibilité. Le résultat expérimental : « dans une expérience donnée, les directions principales optiques coïncident avec les directions principales de contrainte et **non** avec celles de déformation » constitue en fait, la base axiomatique de la méthode.

Une première conclusion s'impose : toutes les observations dites de « photoplasticité » indiquent une dépendance considérable au temps des observations qui relève davantage d'un modèle visqueux.

Mais la portée restreinte et l'insuffisance d'une théorie cinématique apparaît clairement lors de l'analyse des contributions contenant une justification théorique [57] [27] [58] [59].

Partant de l'existence de deux mécanismes microrhéologiques distincts (la déformation valencielle et l'orientation moléculaire) agissant à la fois sur la déformation et la susceptibilité, utilisant la décomposition de la déformation en partie élastique et partie plastique

$$A_{ij} = A_{ij}^{(e)} + A_{ij}^{(p)} \quad (21)$$

les auteurs utilisent une équation de comportement cinématique de type similaire à (3) mais où la variable est la déformation

$$\chi_{ij} = {}_0\chi \delta_{ij} + F(\bar{A}) \quad (22)$$

La linéarisation de (22) donne

$$\chi_{ij} = {}_0\chi \delta_{ij} + \Lambda_1^{(e)} A_{ij}^{(e)} + \Lambda_2^{(e)} A_{kk}^{(e)} \delta_{ij} + \Lambda_3^{(p)} A_{ij}^{(p)} + \Lambda_4^{(p)} A_{kk}^{(p)} \delta_{ij} \quad (23)$$

dont on peut combiner les termes de manière à obtenir une expression similaire à la loi de Neumann (4)

$$\chi_{ij} = {}_0\chi \delta_{ij} + \Lambda_1^{(e)} [A_{ij}^*] + \Lambda_2^{(e)} [A_{kk}^{**}] \delta_{ij} \quad (24)$$

$$\text{avec } A_{ij}^* = \left\{ A_{ij}^{(e)} + \frac{\Lambda_3^{(p)}}{\Lambda_1^{(e)}} A_{ij}^{(p)} \right\} \quad (25)$$

tenseur baptisé de « pseudo-déformations ».

On peut évidemment obtenir toutes les relations dérivant de relations linéaires entre tenseurs isotropes : coïncidence des directions principales, formule de « biréfringence »... etc. entre le tenseur des susceptibilités et un tenseur de « pseudo-déformations » inconnu, sans signification physique ; ni la non-linéarisation de (22) et l'emploi d'un théorème de représentation, ni le fait de déterminer quelques cons-

tantes par comparaison d'une courbe expérimentale et d'une relation de biréfringence de (24), ne modifient la conclusion que nous tirions déjà de l'analyse des travaux en photoviscoélasticimétrie : la théorie cinématique est impuissante à fournir une base théorique acceptable pour l'expérimentation actuelle.

#### 4. Une parenthèse : rhéoptique et biréfringence d'écoulement

Une biréfringence d'écoulement s'observe dans les liquides en mouvement. Une théorie cinématique du phénomène s'obtiendra en changeant de variable indépendante dans (3)

$$\chi_{ij} = {}_0\chi\delta_{ij} + \Phi_{ij}(\partial_p v_a) \quad (26)$$

La variable perturbatrice est cette fois le tenseur des gradients de vitesse. Les caractéristiques principales du phénomène, interprétées à partir de la théorie cinématique, ont fait l'objet d'un exposé de W. Philippoff [60].

Une technique similaire à la photoélasticimétrie s'est d'ailleurs développée de manière embryonnaire : elle vise à déterminer expérimentalement un champ de vitesses dans un écoulement, à partir de mesures de biréfringence.

Du point de vue fondamental, il n'existe aucune différence essentielle entre les deux phénomènes de biréfringence (photoélastique et d'écoulement) : ceci ne fait que traduire l'unité de la mécanique des milieux continus. En particulier, les insuffisances des théories cinématiques se retrouvent en biréfringence d'écoulement.

Il est cependant un aspect intéressant à rappeler : depuis longue date, le phénomène est utilisé par les physico-chimistes en vue de l'étude des structures macromoléculaires [28].

Débordant quelque peu le cadre du sujet de cette contribution, nous voyons se développer une discipline, la **rhéoptique**, qui constitue l'étude de l'interaction existant d'une part entre le mouvement et la déformation d'un milieu continu et d'autre part, le mode de propagation dans ce milieu, des ondes électromagnétiques.

Ces travaux se développent dans trois directions :

- 1°) Pour le physicien des milieux continus, les phénomènes rhéoptiques constituent un aspect de l'interaction mécanique-électromagnétique, du point de vue macroscopique, dans un milieu continu.
- 2°) Pour le physico-chimiste, l'étude des propriétés rhéoptiques des matériaux contribue à la connaissance des mécanismes microscopiques qui sont à l'origine de phénomènes macroscopiques, telle la déformation.
- 3°) Pour l'ingénieur, les propriétés rhéoptiques des matériaux conduisent à des méthodes expérimentales d'analyse expérimentale de contraintes, de déformations d'écoulement.

Le travail présenté ci-après relève de la première orientation. Nous avons rejeté, lors de la critique des théories cinématiques de l'effet photoélastique, l'injection dans la théorie de données étrangères d'origine microrhéologique. Ceci n'exclut nullement l'existence d'une forte interaction entre ces trois directions de recherche : en fait, ce sont des problèmes rencontrés en photoélasticimétrie qui ont amené l'étude de l'effet photoélastique généralisé. Les données microrhéoptique éclairent la signification de certains résultats théoriques qui, à leur tour, permettent des applications plus nombreuses, plus riches en possibilités et plus correctement interprétées.

## DEUXIEME PARTIE :

### UNE THEORIE DYNAMIQUE DE L'EFFET PHOTOELASTIQUE DANS UN MILIEU CONTINU VISCOELASTIQUE ET DIELECTRIQUE DISSIPATIF

#### 1. Hypothèses de départ et exigences vis-à-vis de la théorie

Le but poursuivi est l'établissement d'une

théorie dynamique aussi rigoureuse que possible de l'effet photoélastique dans un diélectrique viscoélastique. La méthode suivie est celle indiquée par Toupin [4], dans le cas du

diélectrique élastique, mais généralisée au diélectrique viscoélastique au sens de Coleman et Mizel [61]. Le problème de l'action d'un champ électromagnétique sur un milieu viscoélastique a été envisagé par M.J. Crochet [70] d'un point de vue général. Cette généralisation n'est pas triviale du fait de l'apport qualitativement nouveau dû à la dissipation tant mécanique qu'électromagnétique.

#### Nous exigeons de la théorie :

1°) *L'inclusion des déformations finies*, exigence pertinente si l'on veut rendre compte de l'effet photoélastique dans des caoutchoucs, des résines au voisinage ou au-delà de la température de transition, ou encore lors d'écoulements de fluides viscoélastiques. Il y aura donc lieu de distinguer variables d'Euler et de Lagrange.

2°) *La prise en considération du mouvement du milieu*, exigence justifiée si l'on désire tenir compte d'une dissipation visqueuse qui n'existe qu'à cause du mouvement du milieu. Elle est nécessaire si l'on souhaite une théorie conforme à l'électrodynamique des corps (déformables) en mouvement [62], [63], [64], mais non dégénérée aux solides rigides qui relèvent de l'optique cristalline classique et non de la mécanique rationnelle des milieux continus.

3°) *La conformité aux axiomes d'invariance et d'objectivité* classiques en mécanique rationnelle des milieux continus, condition d'une théorie rigoureuse.

4°) *L'absence de toute restriction a priori* dans la description de l'interaction électromagnétique, exigence indispensable si l'on veut substituer une théorie dynamique à la théorie cinématique dont le caractère insatisfaisant fut souligné ci-dessus. Ceci implique que l'équation du mouvement comportera des termes d'origine électromagnétique, tandis que les équations de Maxwell comprendront des termes dus au mouvement des particules.

5°) *Le refus de toute hypothèse d'origine expérimentale*, étrangère à la formulation théorique, par exemple de données microrhéologiques.

**Nous admettrons cependant les hypothèses suivantes :**

1°) *La théorie est non relativiste* du point de vue mécanique, ce qui implique que les termes en  $\frac{v^2}{c^2}$  peuvent, et doivent sous peine d'incohérence, être négligés devant 1.

2°) *Le milieu est diélectrique*, non conducteur, non magnétisé, de telle sorte que les seules charges électriques induites dans le milieu sont des charges de polarisation diélectrique [65]. Il n'est par contre pas supposé que le milieu est **transparent** : une dissipation électromagnétique est prise en considération.

3°) *Le milieu est viscoélastique isotrope*, de telle sorte que, en l'absence de champ électromagnétique et dans des conditions isothermes, l'équation de comportement prend la forme

$$\bar{T} = \bar{T}(\bar{A}, \bar{V}) \quad (27)$$

où  $\bar{T}$  est le tenseur des contraintes, symétrique (le milieu est **non polaire**)  $\bar{A}$  le tenseur des déformations,  $\bar{V}$  le tenseur des vitesses de déformation. Les phénomènes de plasticité sont donc exclus de la théorie.

4°) *Le champ électromagnétique lié aux ondes lumineuses est un champ faible*. Ceci n'implique pas qu'il soit négligeable, ce qui reviendrait à nier l'interaction électromécanique.

## 2. Equations de champ et équations de comportement

Désignons respectivement par  $x$  et  $X$  les coordonnées spatiales et les coordonnées matérielles des « particules » du milieu et considérons l'ensemble des douze fonctions des coordonnées matérielles  $X$  et du temps  $t$  :

$x = \hat{x}(X, t)$	métamorphose du milieu
$\bar{T} = \hat{T}(X, t)$	tenseur des contraintes
$u = \hat{u}(X, t)$	énergie interne par unité de masse
$\vec{f} = \hat{f}(X, t)$	force volumique d'origine mécanique

- $\theta = \hat{\theta}(X, t) > 0$  température thermodynamique
- $S = \hat{S}(X, t)$  entropie spécifique par unité de masse
- $\vec{h} = \hat{h}(X, t)$  vecteur flux de chaleur
- $s = \hat{s}(X, t)$  supplément de chaleur par unité de masse et de temps
- $\vec{E} = \hat{E}(X, t)$  champ électrique
- $\vec{B} = \hat{B}(X, t)$  champ magnétique
- $\vec{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}(X, t) = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$  intensité électromotrice ou champ vrai
- $\vec{P} = \hat{P}(X, t)$  vecteur polarisation diélectrique

Ces douze fonctions définiront un processus thermodynamique **admissible** si elles sont compatibles avec les lois générales des milieux continus et les équations constitutives caractérisant le modèle mécanique, thermique et électromagnétique.

- 1) L'équation du mouvement et la conservation de la masse.
- 2) Les équations de Maxwell.

3) L'équation du bilan d'énergie (premier principe), auquel s'ajoute dans le cas de processus irréversibles :

4) L'inégalité de Clausius-Duhem (second principe).

L'écriture de ces équations exige quelques précautions dans le cas d'un milieu déformable en mouvement et mérite quelques explications détaillées.

1°) L'équation du mouvement

$$\underbrace{\text{div } \vec{T}}_{\text{bilan des contraintes}} + \underbrace{\vec{f}}_{\text{forces de volume d'origine mécanique}} + \underbrace{\vec{f}}_{\text{forces de volume d'origine électromagnétique}} - \underbrace{\rho \frac{dv}{dt}}_{\text{forces d'inertie où } \rho = \text{masse volumique}} = 0 \quad (28)$$

La force électromagnétique, par unité de volume, est la force de Lorentz

$$\vec{f} = \rho_{EL} \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (29)$$

$$\text{où } \rho_{EL} = - \text{div } \vec{P} \quad (30)$$

en vertu de la nature purement diélectrique du milieu (hypothèse 2°).

Que vaut donc dans ces conditions la densité de courant  $\vec{j}$  ?

Celle-ci est due :

- à la variation de  $\vec{P}$  en fonction du temps,
- au mouvement des charges ( $-\text{div } \vec{P}$ ) sous l'effet du mouvement du milieu.

Mais la polarisation diélectrique est liée à la matière et, dès lors, une mesure **objective** de son taux de variation s'exprime **nécessairement** par le dérivée de Lie de  $\vec{P}$  sur le champ  $\vec{v}$  [66] [67] notée

$$\underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P} = \partial_t \vec{P} + (\text{div } \vec{P}) \vec{v} + \text{rot}(\vec{P} \times \vec{v}) \quad (31)$$

(Rappelons qu'une dérivée de Lie exprime un taux de variation dans un référentiel arbitraire figé dans le milieu, se mouvant et se déformant avec lui. On notera que (31) n'est **pas** une équation de comportement, mais bien le calcul du taux de variation de la polarisation par rapport au temps, calculé **par rapport à la**

**matière.** Il n'est donc pas licite, contrairement à ce qui se passe dans une équation constitutive [67], [68], de remplacer cette expression par une dérivée de Jaumann qui ne représente que la composante rigide d'une dérivée objective).

La seconde contribution dans  $\vec{j}$ , le courant dû au mouvement des charges étant

$$\rho_{EL} \vec{v} = (-\operatorname{div} \vec{P}) \vec{v} \quad (32)$$

il vient

$$\vec{j} = \underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P} - (\operatorname{div} \vec{P}) \vec{v} \quad (33)$$

(29) devient

$$\vec{f} = (-\operatorname{div} \vec{P}) \vec{E} + [\underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P} - (\operatorname{div} \vec{P}) \vec{v}] \times \vec{B} \quad (34)$$

qui s'écrit plus élégamment, si l'on introduit le champ vrai,

$$\vec{\mathcal{C}} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (35)$$

$$\vec{f} = (-\operatorname{div} \vec{P}) \vec{\mathcal{C}} + (\underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P} \times \vec{B}) \quad (36)$$

L'équation locale du mouvement s'écrit donc

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \operatorname{div} \vec{T} - (\operatorname{div} \vec{P}) \vec{\mathcal{C}} + \underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P} \times \vec{B} \quad (37)$$

où les deux derniers termes conditionnent l'interaction électromécanique.

$\rho$  doit satisfaire à l'équation de continuité (conservation de la masse),

$$\underset{v}{\mathcal{L}} \rho = 0 \quad [67] \quad (38)$$

2°) Les équations de Maxwell

La forme locale de celles-ci, dans la notation de Feynman [65] est

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho_{EL} \quad (39)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (40)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (41)$$

$$\varepsilon_0 c^2 \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} + \vec{j} \quad (42)$$

où  $\rho_{EL}$  est la densité de **toutes** les charges présentes,  $\vec{j}$  celle de **tous** les courants, inclus ceux et celles dus à la présence du champ électromagnétique.

En substituant (30) dans (39) et (33) dans (42), compte tenu de (31), il vient

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (43)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (44)$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \vec{P} \quad (45)$$

$$\varepsilon_0 (c^2 \operatorname{rot} \vec{B} - \partial_t \vec{E}) = \partial_t \vec{P} + \operatorname{rot} (\vec{P} \times \vec{v}) \quad (46)$$

où la dernière équation reflète l'existence de mouvement dans le milieu.

3°) Le bilan d'énergie (premier principe)

Il importe d'exprimer le bilan énergétique dans le cas d'un système à interaction mécanique et électromagnétique.

**Ce bilan est** relatif à la matière contenue dans un domaine simplement connexe  $D$  de  $E_3$  (limité par la surface fermée  $b(D)$ ) que l'on suit dans son mouvement. Le taux de variation par unité de temps de la somme de l'énergie cinétique  $T_c$  et de l'énergie interne  $U$ , doit être égal à la puissance des forces extérieures d'origine mécanique  $P_M$  augmentée du gain par unité de temps en énergie calorifique  $Q_c$  et en énergie d'origine électromagnétique  $Q_{em}$ .

$$\dot{T}_c + \dot{U} = P_M + Q_{em} + Q_c \quad (47)$$

$$T_c = \frac{1}{2} \int_D \vec{v} \cdot \vec{v} dm \quad (48) \quad U = \int_D u dm \quad (49)$$

$$P_M = \int_D \vec{r} \cdot \vec{f} dV + \int_{b(D)} \vec{r} \cdot (\vec{t} n) dS \quad (50)$$

$$Q_{em} = \int_D \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (51)$$

$$Q_c = \int_{b(D)} \vec{h} \cdot \vec{n} \, dS + \int_D s \, dm \quad (52)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire extérieur normal à  $b(D)$ . La puissance spécifique de Joule vaut

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \left( \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P} - (\text{div } \vec{P}) \vec{v} \right) (\vec{\mathcal{C}} - \vec{v} \times \vec{B}) \quad (53)$$

$$= \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P} \cdot \vec{\mathcal{C}} + \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (54)$$

où le dernier terme est la puissance des forces de Lorentz.

Introduisons dans le second membre de (47) la puissance  $P_T$  de toutes les forces extérieures agissant sur  $D$ , dont la puissance des forces de Lorentz :

$$P_T = P_M + \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} \, dV \quad (55)$$

$$\text{d'où } \dot{T}_c + \dot{U} = P_T + Q_c + \int_D \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P} \cdot \vec{\mathcal{C}} \, dV \quad (56)$$

D'autre part, compte tenu de (48) à (52), et de l'équation du mouvement (37)

$$\dot{T}_c - P_T = - \int_D \text{tr}(\vec{T} \vec{V}) \, dV \quad (57)$$

où  $\text{tr}$  désigne l'opérateur « trace »

De (56) et (57), par simple comparaison, résulte la forme locale du bilan d'énergie

$$\rho \dot{u} = \text{tr}(\vec{T} \vec{V}) + \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P} \cdot \vec{\mathcal{C}} + \text{div } \vec{h} + \rho s \quad (58)$$

Les 12 équations (37) (43) (44) (45) (46) (58) forment un système indéterminé en les inconnues du problème, qu'il y a lieu de compléter par un nombre adéquat d'équations constitutives ou équations de comportement :

$$\vec{T} = \hat{T}(\theta, \vec{g}, \vec{A}, \vec{V}, \vec{P}, \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}) \quad (59)$$

$$\vec{u} = \hat{u}(\theta, \vec{g}, \vec{A}, \vec{V}, \vec{P}, \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}) \quad (60)$$

$$S = \hat{S}(\theta, \vec{g}, \vec{A}, \vec{V}, \vec{P}, \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}) \quad (61)$$

$$\vec{h} = \hat{h}(\theta, \vec{g}, \vec{A}, \vec{V}, \vec{P}, \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}) \quad (62)$$

$$\vec{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}(\theta, \vec{g}, \vec{A}, \vec{V}, \vec{P}, \frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}) \quad (63)$$

où  $\vec{g}$  est le vecteur gradient de température.

Ces équations appellent les remarques suivantes :

- 1°) Elles dépendent a priori, des mêmes variables d'état, en vertu du principe d'équiprésence.
- 2°) La dépendance à  $\vec{V}$  traduit l'existence d'une dissipation visqueuse au point de vue mécanique (viscoélasticité).
- 3°) La dépendance à  $\frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}$  implique l'existence d'une dissipation au point de vue électromagnétique (non transparence).
- 4°) L'exclusion de la dépendance à  $\vec{P}$  et  $\frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}$ , et dès lors de (63), donne les équations constitutives d'un milieu viscoélastique classique en l'absence de champ électromagnétique.
- 5°) L'exclusion de la dépendance à  $\vec{V}$  et  $\frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}$  donne les équations constitutives du diélectrique élastique traité par Toupin. Dans des travaux antérieurs [69] [13] [71], les auteurs ont rencontré des difficultés d'interprétation de la propagation des ondes électromagnétiques dans un modèle qui n'était dissipatif que du seul point de vue électromagnétique. Les deux types de dissipation vont de pair.

- 6°) Si les quatre équations de comportement (59) à (62) sont classiques, l'équation (63) peut surprendre au premier examen. Reprenons l'équation (1) : elle constitue un cas dégénéré de (63) correspondant au diélectrique, transparent, rigide. Le mouvement du milieu introduit le concept de champ vrai  $\vec{\mathcal{C}}$  au lieu de  $\vec{E}$ , la déformabilité du milieu la dépendance en  $\vec{A}$ , sa viscosité la dépendance à  $\vec{V}$  et  $\frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}$  : l'équa-

tion (63) est ainsi reconstituée. En d'autres termes,  $\vec{P}$  est utilisée comme variable extensive, conjuguée à la grandeur dynamique  $\vec{C}$ , de manière similaire au choix de la déformation  $\bar{A}$  comme variable thermodynamique extensive conjuguée à la variable dynamique intensive  $\bar{T}$ . Cette conjugaison des variables apparaît clairement dans le bilan d'énergie (58).

- 7°) La suppression de la dépendance à  $\theta$ ,  $\vec{g}$  et de l'équation (62) définira la classe limitée des processus isothermes.

L'existence d'une dissipation énergétique liée à la viscosité implique que l'expression du second principe de la thermodynamique ne se réduit plus à une égalité identiquement satisfaite. Tout processus thermodynamique admissible doit satisfaire, outre aux équations de conservation ci-dessus, l'inégalité de Clausius-Duhem.

4° *Postulat* : le taux de production d'entropie par unité de masse est non négatif en tout **point matériel**  $X$  du milieu.

Calculons le taux de production d'entropie interne  $\gamma$ , en introduisant l'énergie libre de Helmholtz  $F = U - \theta S$ , et tenant compte de l'équation du bilan énergétique (58).

$$\rho \theta \dot{\gamma} = -\rho \dot{F} - \rho S \dot{\theta} + \text{tr} \bar{T} \bar{V} + \vec{C} \cdot \frac{\rho}{v} \vec{P} + \frac{1}{\theta} \vec{h} \cdot \vec{g} \geq 0 \quad (65)$$

ou encore, comme

$$F = \hat{F}(\theta, \vec{g}, \bar{A}, \bar{V}, \vec{P}, \frac{\rho}{v} \vec{P}) \quad (66)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \theta} + S \right) \dot{\theta} + \text{tr} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{A}} - \frac{1}{\rho} \bar{T} \right) \bar{V} \right] + \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{P}} - \vec{C} \right) \cdot \frac{\rho}{v} \vec{\pi} + \frac{\partial F}{\partial \vec{g}} \cdot \vec{g} + \text{tr} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{V}} \cdot \frac{\rho}{v} \bar{V} \right) + \text{tr} \left( \frac{\partial F}{\partial \frac{\rho}{v} \vec{P}} \cdot \frac{\rho}{v} \vec{\pi} \right) - \frac{1}{\rho \theta} \vec{h} \cdot \vec{g} \leq 0 \quad (67)$$

où  $\vec{\pi} = \frac{\vec{P}}{\rho}$  polarisation par unité de masse.

L'inégalité de Clausius-Duhem conduira à des inégalités restrictives sur les coefficients ou fonctions introduites ultérieurement dans l'étude de l'effet photoélastique.

### 3. Equations constitutives de couplage électromécanique

Le but de ce paragraphe est de déduire des expressions très générales du paragraphe précédent, les relations de comportement « contrainte-déformation-champ » qui traduiront le couplage électromécanique. Dans le cas du diélectrique élastique de Toupin, ou encore dans le cas d'un diélectrique élastique, non holonome [4] [71] cette dérivation était aisée, la relation (67) se traduisant par une égalité.

Dans le cas présent, la dérivation est basée sur un théorème, dû à G. Mayné [72] [73] et dont un résumé se trouve en *Annexe I*.

*Théorème* : en un point matériel quelconque du milieu, on peut construire au moins un processus thermodynamique admissible dans lequel la **température**, son **vecteur gradient**, le **tenseur des gradients de vitesse**, et le **vecteur polarisation** sont des fonctions arbitraires du temps.

*Corollaire* : en un point **matériel** et à un **instant**, on peut choisir arbitrairement  $\theta$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\bar{V}$  ainsi que toutes leurs dérivées par rapport au temps en ce point, à cet instant.

L'indépendance des grandeurs physiques intervenant dans l'inégalité de Clausius-Duhem n'est pas triviale dans l'hypothèse d'interactions avec un champ électromagnétique à cause de la présence des équations de Maxwell dans la définition des processus admissibles.

Introduisons une contrainte d'équilibre  $\bar{T}^{(o)}$  et une contrainte complémentaire  $\bar{T}^{(c)}$  telles que

$$\bar{T} = \bar{T}^{(o)} + \bar{T}^{(c)} \quad (68)$$

avec  $\bar{T}^{(o)} = \hat{T}(\theta, \theta, \bar{A}, 0, \dot{P}, 0)$  (69)

ne dépendant pas des taux de variation, avec la condition supplémentaire

$$\bar{T}^{(o)}(\theta, \theta, \bar{A}, 0, \dot{P}, 0) = 0 \quad (70)$$

la contrainte complémentaire est nulle à l'équilibre.

Introduisons de manière similaire

$$\vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{C}}^{(o)} + \vec{\mathcal{C}}^{(c)} \quad (71)$$

avec

$$\vec{\mathcal{C}}^{(o)} = \hat{\mathcal{C}}(\theta, \theta, \bar{A}, 0, \vec{\pi}, 0) \quad (72)$$

et

$$\vec{\mathcal{C}}^{(c)}(\theta, \theta, \bar{A}, 0, \vec{\pi}, 0) = 0 \quad (73)$$

Introduisons les expressions (68) et (71) dans l'inégalité de Clausius-Duhem. Le corollaire du théorème signalé permet de tirer parti de l'inégalité par un choix adéquat des grandeurs  $\dot{\theta}, \bar{V}, \underline{\mathcal{L}} \vec{\pi}, \vec{g}, \underline{\mathcal{L}} \bar{V}, \underline{\mathcal{L}}^{(2)} \vec{\pi}, \vec{g}$  qui peuvent être fixées arbitrairement en un point matériel et à un instant. Il en résulte que

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{g}} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{V}} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathcal{L}} \vec{\pi}} = 0$$

Le potentiel thermodynamique ne dépend ni du gradient de température, ni des taux de variation de  $\bar{A}$  ou  $\vec{\pi}$

$$F = \hat{F}(\theta, \bar{A}, \vec{\pi}) \quad (74)$$

Il ne dépend plus que de la température et des deux variables extensives : la déformation et la polarisation. Compte tenu des relations (68) à (73) on obtient

$$S = - \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (75)$$

et

$$\bar{T}^{(o)} = \rho \frac{\partial F}{\partial \bar{A}} \quad (76)$$

$$\vec{\mathcal{C}}^{(o)} = \frac{\partial F}{\partial \vec{\pi}} \quad (77)$$

qui lie les parties dites « d'équilibre » de  $\bar{T}$  et de  $\vec{\mathcal{C}}$ , au potentiel thermodynamique.

L'inégalité ne joue plus que sur les grandeurs complémentaires :

$$\text{tr}(\bar{T}^{(c)} \bar{V}) + \vec{\mathcal{C}}^{(c)} \underline{\mathcal{L}} \vec{\pi} + \frac{1}{\theta \rho} \vec{h} \cdot \vec{g} \geq 0 \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \rho \frac{\partial F(\theta, \bar{A}, \vec{\pi})}{\partial \bar{A}} + \bar{T}^{(c)}(\theta, \vec{g}, \bar{A}, \bar{V}, \vec{P}, \underline{\mathcal{L}} \vec{P}) \\ \vec{\mathcal{C}} &= \frac{\partial F(\theta, \bar{A}, \vec{\pi})}{\partial \vec{\pi}} + \vec{\mathcal{C}}^{(c)}(\theta, \vec{g}, \bar{A}, \bar{V}, \vec{\pi}, \underline{\mathcal{L}} \vec{\pi}) \end{aligned} \quad (79) \quad (80)$$

Les équations (79) (80) constituent les équations de comportement électromécanique du matériau. Elles expriment **comment** s'opère le couplage entre contraintes, déformations, champs électromagnétiques et **pourquoi** ce couplage dépend de la nature du milieu.

Les matériaux étant supposés isotropes, il est possible d'obtenir une forme explicite des équations (79) et (80), considérées en variables de Lagrange, à partir du théorème de Smith [74] sur la représentation des fonctions ten-

sorielles isotropes polynomiales [ $\vec{C}^{(e)}$  est une fonction à valeur vectorielle, fonction de deux tenseurs et de deux vecteurs]

Par souci de simplicité, on se bornera dans ce qui suit, aux processus isothermes.

#### 4. L'effet photoélastique

Dans l'étude de R.A. Toupin [4] sur le diélectrique élastique, de même que dans la généralisation aux diélectriques non holonomes [71], l'effet photoélastique résulte de la perturbation produite par un champ électromagnétique faible sur un état de déformations finies à l'équilibre mécanique et en l'absence de champ.

Dans un diélectrique viscoélastique, une perturbation à partir d'un état d'équilibre mécanique ne peut plus être envisagée, d'abord parce que l'existence de ce dernier ne peut être garantie, ensuite parce que l'on s'intéresse précisément à l'influence de la viscosité sur le comportement photoélastique.

L'état non perturbé sera caractérisé, à l'instant  $t_0$ , par

$$\begin{aligned} E^i &= B^i = P^i = 0 & \circ x &= x(X, t_0) \\ \circ v &= \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_o & &= v(X, t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \left[ 2 \left( \frac{\partial F}{\partial I_1} \right) + \circ M_1 \right] I + \left[ 2 \left( \frac{\partial F}{\partial I_5} \right) + \circ M_2 \right] A + \left[ 2 \left( \frac{\partial F}{\partial I_6} \right) + \circ M_3 \right] A^2 \\ &+ \circ M_4 V + \circ M_5 V^2 + \circ M_6 (AV + VA) + \circ M_7 (A^2V + VA^2) \\ &+ \circ M_8 (AV^2 + V^2A) + \circ M_9 (A^2V^2 + V^2A^2) + \circ M_{10} (AV - VA) + \\ &+ \circ M_{11} (A^2V - VA^2) + \circ M_{12} (V^2A - AV^2) + \circ M_{13} (A^2V^2 - V^2A^2) \\ &+ \circ M_{14} (A^2VA - AVA^2) + \circ M_{15} (V^2AV - VAV^2) + \circ M_{16} (A^2V^2A - AV^2A^2) \\ &+ \circ M_{17} (V^2A^2V - VA^2V^2) \\ \text{où } I_1 &= \pi^L \pi_L & I_5 &= \pi^K A_{KL} \pi^L & I_6 &= \pi^K A^2_{KL} \pi^L \end{aligned} \quad (82)$$

De manière analogue :

$$\bar{N} = \circ N I + \circ N_2 A + \circ N_3 A^2 + \dots \text{ etc.}$$

Les  $M_\alpha$ ,  $N_\alpha$  sont des invariants construits sur

$$\bar{A}, \bar{V}, \pi, \frac{d\pi}{dt} \quad (83)$$

de sorte que les  $\circ M_\alpha$ ,  $\circ N_\alpha$  (où l'indice zéro indi-

Designons par  $\delta_x E^i$ ,  $\delta_x B^i$ ,  $\delta_x P^i$ ,  $\delta_x x$  et  $\delta_x v$  les perturbations où les notations  $\delta_x$  et  $\delta_x$  sont utilisées pour désigner respectivement les variations lagrangiennes (à  $X$  constantes) et eulériennes (à  $x$  constantes). Nous utiliserons, dans ce qui suit, des indices majuscules pour désigner des grandeurs exprimées en variables de Lagrange et des indices minuscules pour ces mêmes grandeurs en variables d'Euler.

L'équation aux variations associée à (80) s'écrit :

$$\delta_x \vec{C}_K = \circ M_{KL} \delta_x \pi^L + \circ N_{KL} \frac{d}{dt} (\delta_x \pi^L) \quad (81)$$

On observera que cette équation, qui traduit en fait une linéarisation pour champ faible de l'équation de comportement (80), relie uniquement des grandeurs qui sont matérielles : le champ vrai  $\vec{C}$  la polarisation matérielle  $\vec{\pi}$  et sa dérivée totale par rapport au temps.

Les tenseurs  $\circ M_{KL}$  et  $\circ N_{KL}$ , en général **non symétriques**, sont définis grâce aux théorèmes de représentation :

que une quantité calculée dans l'état non perturbé sont des invariants de  $\bar{A}$  et de  $\bar{V}$ . Notons que  $\circ M_\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3$ ) s'annulent avec  $\bar{V}$ . Cherchons à exprimer l'équation (81) en variables d'Euler

$$\delta_x \vec{C}_i = \circ M_{ij} \delta_x \pi^j + \circ N_{ij} \frac{d}{dt} (\delta_x \pi^j) \quad (84)$$

puisque, en variables d'Euler, un taux de variation objectif se traduit par une dérivée de Lie. Repassons à la variable P (polarisation par unité de volume), compte tenu de

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{v} \rho &= 0 && \text{(équation de continuité)} \\ \delta_x \rho &= 0 \\ \delta_x \mathcal{C}_i &= \frac{1}{\rho} {}_oM_{ij} \delta_x P^j + {}_oN_{ij} \frac{\mathcal{L}}{v} (\delta_x P^j) \end{aligned}$$

Comme d'autre part

$$\delta_x \mathcal{C}_i = \delta_x \mathcal{C}_i + \left( \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial x^k} \right) \delta_x x^k$$

mais que

$$\left( \frac{\partial \mathcal{C}_i}{\partial x^k} \right) = 0,$$

d'où  $\delta_x \mathcal{C}_i = \delta_x \mathcal{C}_i = \delta_x E_i + ({}^o\vec{v} \times \delta_x \vec{B})_i$   
et l'équation finale

$$\delta_x E_i + ({}^o\vec{v} \times \delta_x \vec{B})_i = \frac{1}{\rho} {}_oM_{ij} \delta_x P^j + \frac{1}{\rho} {}_oN_{ij} \frac{\mathcal{L}}{v} (\delta_x P^j) \tag{85}$$

où les tenseurs  ${}_oM_{ij}$  et  ${}_oN_{ij}$  sont, en général, non symétriques.

Dans cette équation, les variations  $\delta_x \vec{E}$ ,  $\delta_x \vec{B}$ ,  $\delta_x \vec{P}$  sont le champ électromagnétique et la polarisation proprement dits, puisque la perturbation par le champ faible s'effectue ici au voisinage d'une position initiale caractérisée par un champ électromagnétique nul.

[Il en serait autrement si l'on voulait étudier par exemple l'effet Kerr : dans ce cas, l'état initial comporterait un champ électrique  $E_o$ ].

Eclairons la portée de (85) par quelques comparaisons et par l'examen de cas particuliers :

1°) Comparons au diélectrique transparent rigide, caractérisé par

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \chi^{-1} \vec{P} \tag{1}$$

Nous voyons que (85) substitue au champ  $\vec{E}$ , le champ vrai  $\vec{\mathcal{C}}$ , que nous pouvons assimiler au champ  $\vec{E}$  (dans la notation habituelle de l'électrodynamique des milieux en mouvement) sur la particule : cet effet est visiblement lié au mouvement du milieu.

2°) Comparons au diélectrique rigide immobile, cette fois non transparent, c'est-à-dire présentant de l'absorption électromagnétique

$$\vec{E} = \vec{a} \vec{P} + \vec{b} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{86}$$

où  $a$  et  $b$  sont deux tenseurs, en général non symétriques et liés à la structure cristalline du diélectrique [20] [75].

Nous constatons, par comparaison de (85) et (86), une structure similaire, mais une nouvelle influence du mouvement, traduite

par la transformation de  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  en une dérivée de Lie de la polarisation.

L'équation (86) décrit un cristal biréfringent, gyrotrope et dichroïque, dans le cas général. De manière hâtive, on pourrait en conclure que l'équation (85) traduit le fait que la déformation peut induire dans un milieu dissipatif diélectrique les mêmes phénomènes : double réfraction, absorption anisotrope, pouvoir rotatoire. Le raisonnement est trop simpliste, et sous-estime l'importance des termes en  $\frac{\mathcal{L}}{v} \vec{P}$  à la fois dans l'équation de comportement et dans les équations de Maxwell. Ce point fera l'objet de la troisième partie du texte.

3°) En l'absence de viscosité mécanique mais dans ce cas à l'équilibre (82) et (83) montrent que  ${}_oM_{ij}$  et  ${}_oN_{ij}$  deviennent symétriques, fonctions de  $\vec{A}$  seul. Les effets liés à la partie antisymétrique de  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  sont imputables à la viscosité.

4°) Si, en outre, nous supposons qu'il n'y a pas de viscosité électromagnétique, nous retrouvons

$$\delta_x \vec{E} = \frac{1}{\rho} \bar{M} \delta_x \vec{P} \quad (87)$$

avec  $\bar{M}$  fonction de  $\bar{A}$  seul : c'est le modèle de diélectrique *déformable* élastique con-

sidéré par R.A. Toupin et qui contient le diélectrique *rigide* (1) de la théorie cinématique comme cas particulier.

Les équations (85) constituent une généralisation considérable des équations Maxwell-Neumann, régissant la photoélasticité classique.

### TROISIEME PARTIE

#### GRANDEURS OBSERVABLES ET CONCLUSIONS

##### 1. Propagation des ondes électromagnétiques

Nous pourrions caractériser physiquement ce modèle du diélectrique viscoélastique en y étudiant la propagation des ondes électromagnétiques. Si l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques planes dans un diélectrique rigide anisotrope, au repos, est relativement classique [9] il n'en va pas de même pour les diélectriques déformables en mouvement. Pour ceux-ci, les équations de Maxwell se compliquent en raison de la présence dans (46) du terme  $rot(\vec{P} \times \vec{v})$ . Le caractère très général de l'équation (85) augmente encore la difficulté. L'étude détaillée de ce problème ardu fera l'objet d'une publication distincte [73].

Il existe au moins deux méthodes pour étudier la possibilité de propagation d'ondes électromagnétiques dans le milieu.

— La première consiste à introduire dans les équations de Maxwell, dûment complétées par une équation constitutive, des ondes planes

$$\vec{a} = \vec{a}_0 e^{i(k \vec{n} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Le système d'équations algébriques homogènes ainsi obtenu n'a de solution non triviale que si son déterminant caractéristique s'annule : c'est l'équation de Fresnel, dont les racines donnent les célérités et les états de polarisation possibles.

— La seconde consiste à étudier l'onde comme une surface de discontinuité, soit pour une

fonction, soit pour ses dérivés. Cette technique, inaugurée par Hadamard [62], conduit à une formulation « en sauts » des équations de Maxwell.

Notons qu'il n'existe pas d'ondes d'Hadamard au sens classique, (champs continus mais discontinuités dans les dérivées premières ou d'ordre supérieur) comme il n'en existe d'ailleurs pas pour le modèle de Navier-Stokes utilisé pour décrire les fluides visqueux. Une généralisation de la théorie d'Hadamard permet cependant semble-t-il, d'obtenir des conclusions identiques à celles obtenues à partir de l'examen d'ondes planes [73].

Nous adopterons ici cette dernière méthode. On notera que l'étude est faite localement ou, de manière équivalente, on supposera que l'état de déformation est homogène.

Introduisons un système d'ondes planes pour  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}$ .

Pour le champ électromagnétique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega \left( \frac{n}{c} \vec{s} \cdot \vec{x} - t \right)} \quad (88)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega \left( \frac{n}{c} \vec{s} \cdot \vec{x} - t \right)} \quad (89)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction,

$\vec{s}$  le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  est une grandeur locale et dès lors en variables d'Euler

$$E^l = E_o^l e^{i\omega \left( \frac{n \rightarrow}{c} s x - t \right)} \quad (90)$$

$$B^l = B_o^l e^{i\omega \left( \frac{n \rightarrow}{c} s x - t \right)} \quad (91)$$

Pour la polarisation, il y a lieu de tenir compte de la nature matérielle de celle-ci et dès lors en coordonnées de Lagrange cette fois

$$P^l = P_o^l e^{i\omega \left( \frac{n \rightarrow}{c} s x - t \right)} \quad (92)$$

avec  $\vec{x} = \vec{x}(X, t)$

La dérivée de Lie de  $\vec{P}$ , présente dans l'équation de comportement (ainsi que dans l'équation de Maxwell (46) du fait de (33), se réduit, en coordonnées de Lagrange, à une dérivée partielle ordinaire

$$\frac{\rho}{v} P^K = \frac{\partial P^K}{\partial t} = P^K i\omega \left( \frac{n \rightarrow}{c} s v - 1 \right) \quad (93)$$

La transformation de (92) en coordonnées d'Euler donne dès lors

$$P^l = {}_o(x^l, L) P_o^l e^{i\omega \left( \frac{n \rightarrow}{c} s x - t \right)} \quad (94)$$

[Notons que rien n'empêche d'écrire une équation en coordonnées d'Euler, pour  $\vec{P}$ , similaire à (91), à condition d'annuler, lors du calcul de la dérivée de la polarisation, la dérivée de Lie de l'amplitude de la polarisation, exprimant aussi le caractère matériel de cette dernière. Si l'on procède autrement, le système d'équations algébriques obtenu est incohérent :

$$\begin{matrix} v \\ \text{(célérité dans} \\ \text{le milieu en} \\ \text{mouvement)} \end{matrix} = \begin{matrix} v_o \\ \text{(célérité dans} \\ \text{le milieu au} \\ \text{repos)} \end{matrix} \pm \begin{matrix} u \\ \text{(vitesse} \\ \text{du} \\ \text{milieu)} \end{matrix} \left( 1 - \frac{1}{n_o^2} \right) \quad (96)$$

L'expérience reprise avec des franges d'Young, fut ensuite recommencée en 1878 avec des dispositifs différents par Michelson et Morley et enfin par Zeeman, en 1920, cette fois sur des solides en mouvement.

Dans notre cas, ces effets d'entraînement existent de même, mais généralisés par l'existence d'un gradient de vitesse.

l'incohérence ne provient en ce cas, que d'une faute vis-à-vis de la physique des milieux continus]

L'équation de comportement (85) s'écrit dès lors

$$\vec{E}_o + \vec{v} \times \vec{B}_o = \vec{M} \vec{P}_o - i\omega \left( 1 - \frac{n \rightarrow}{c} s v \right) \vec{N} \vec{P}_o \quad (95)$$

qui conjointement avec les équations de Maxwell conduit à l'équation aux indices, ou équation de Fresnel. Celle-ci est du 9° degré, mais comporte des termes en  $\frac{v^2}{c^2}$  qu'il est nécessaire d'écarter, vu le cadre non relativiste de la théorie, du point de vue mécanique. Ces termes écartés, l'équation devient du 5° degré. L'étude de la signification des divers effets rencontrés fait l'objet d'un mémoire exhaustif de Boulanger [75] dont nous ne reproduisons ici que les éléments essentiels et dont un résumé figure en Annexe II.

Outre les effets classiques dus à la déformation, l'analyse montre des effets nouveaux d'une part liés au mouvement du milieu, d'autre part liés à la dissipation dans le milieu.

1° Effets d'entraînement (dragging) liés au mouvement.

Les effets observés sont la généralisation de l'effet d'entraînement observé en 1859 par Fizeau [77]. Les effets d'entraînement, lorsque l'eau est en mouvement, provoquent un déplacement des franges d'interférence obtenues en  $\Lambda$ , grâce au semi-miroir. Fizeau obtint ainsi la relation.

Lorsqu'on dégénère les résultats obtenus au cas  $\vec{M}$  sphérique et  $\vec{N}$  nul (diélectrique rigide en mouvement), on retrouve effectivement le cas classique de Fizeau, tel qu'il fut traité par Truesdell [62].

Les effets d'entraînement sont plus simples

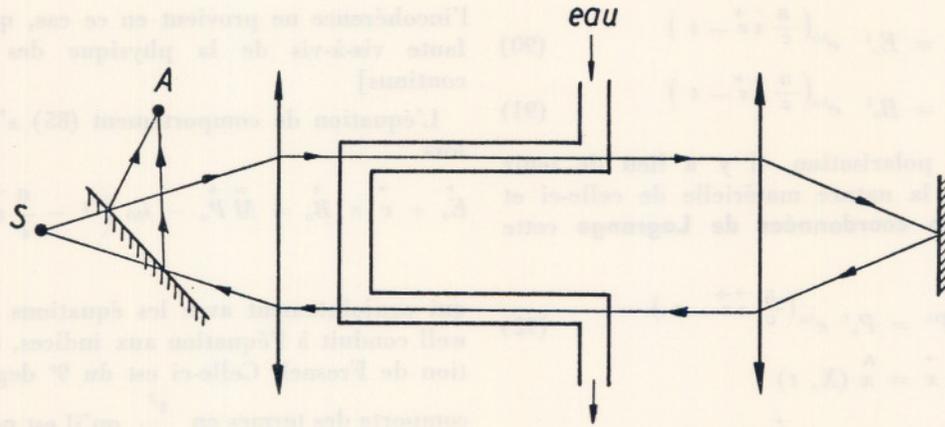


Fig. 2

à analyser dans le cas où  $\bar{N} = 0$  (absence de viscosité), auquel cas l'équation de Fresnel se réduit au 4<sup>e</sup> degré. La classique équation bicarrée se brise en une relation générale du quatrième degré, ce phénomène n'étant que la généralisation du  $\pm$  de la relation (96).

### 2°) Effets de viscosité.

On les obtient aisément en faisant l'hypothèse, à ce stade,  $\frac{v}{c} \approx 0$

ce qui revient à éliminer les effets d'entraînement. P. Boulanger a établi une classification très complète dans ce cas, qui indique l'existence dans le cas général de biréfringence, de pouvoir rotatoire et d'absorption, c'est-à-dire de biréfringence **elliptique** + **dichroïsme**.

De manière très résumée :

- 1) Le phénomène de dichroïsme n'est absent que si  $\bar{M}$  est symétrique et  $\bar{N}$  antisymétrique
  - a) si  $\bar{N} \neq 0$ , il y a biréfringence elliptique. Elle peut devenir circulaire et donner naissance à du pouvoir rotatoire dans certains cas particuliers.
  - b) Si  $\bar{N} = 0$ , il y a biréfringence ordinaire et possibilité de monoréfringence.

- 2) Dans tous les autres cas, il y a dichroïsme avec biréfringence elliptique. Certains cas particuliers peuvent donner lieu à du pouvoir rotatoire. La biréfringence linéaire existe pour certains modèles où  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$  sont symétriques.

Ces effets nouveaux, déduits théoriquement dans le cadre de la mécanique des milieux continus, constituent l'**effet photoélastique généralisé**.

Dans le cas de l'équation complète du 5<sup>e</sup> degré, on montre que l'une de ses racines est à rejeter si l'on désire rester en concordance avec l'hypothèse  $\frac{v^3}{c^2} \ll 1$ . Ce fait est dû à la présence

d'un facteur  $\frac{v}{c}$  dans le seul coefficient du terme du cinquième degré (la propriété est aisée à établir dans le cas particulier où l'on étudie une propagation dans la direction de la vitesse matérielle).

Les conclusions sont donc identiques en dépit de la complexité des calculs dans le cas général : l'équation aux indices possède quatre racines, en général complexes (ce qui traduit l'existence de dichroïsme et/ou de gyrotropie) et distinctes (ce qui traduit le dédoublement dû à l'entraînement).

Cette analyse est corroborée de manière fort claire par la transformation dans des axes en-

traînés avec la vitesse  $\vec{v}$  [76]. L'application des relations de transformation classiques en électrodynamique des milieux en mouvement donne, à l'approximation  $\frac{v^2}{c^2} \approx 0$  :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (97)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (98)$$

$$\vec{k}' = \vec{k} - \omega \frac{\vec{v}}{c^2} \quad (99)$$

$$\omega' = \omega - \vec{v} \cdot \vec{k} = \omega \left( 1 - n \frac{\vec{v} \cdot \vec{s.v.}}{c} \right) \quad (100)$$

(Effet Doppler)

(où les grandeurs primées sont les grandeurs calculées dans des axes entraînés).

donne l'équation constitutive

$$\vec{E}'_o = \bar{M} \vec{P}' - i \omega' \bar{N} \vec{P}' \quad (101)$$

Celle-ci, injectée dans les équations de Maxwell, donne un système dont le déterminant caractéristique (c'est-à-dire l'équation aux indices) est une *équation bicarrée*. Dans les axes entraînés seuls sont présents les effets dus à la déformation et à la viscosité (biréfringence, absorption, gyrotropie) : le dédoublement de célérité, lié à l'entraînement a disparu comme il se doit.

Nous pouvons dès lors formuler la conclusion générale :

« Dans un diélectrique dissipatif tant du point de vue mécanique (viscosité) qu'électromagnétique (non transparence), la déformation et le mouvement du milieu induisent un effet photoélastique généralisé, composé de biréfringence, de dichroïsme et de pouvoir rotatoire, auquel se superposent des effets d'entraînement généralisant l'effet Fizeau. »

## 2. Possibilités des méthodes expérimentales

Le travail expérimental peut être envisagé en deux étapes. Dans la première, on s'assure de l'existence des phénomènes nouveaux mis en

évidence par la théorie. En particulier, la déformation introduit-elle une absorption anisotrope ?

Ce travail est engagé dans plusieurs laboratoires notamment à l'école Supérieure de Physique et Chimie de la ville de Paris [78] [79] où la finalité de la recherche est cependant différente, puisqu'il s'agit de physique de l'état solide. L'ensemble de données recueillies permet d'affirmer avec certitude que le dichroïsme d'origine mécanique est observable et observé.

Dans une étape ultérieure, le problème est posé de manière quantitative. Le problème **direct** est alors celui-ci : étant donné la déformation et le mouvement d'un milieu continu dont l'**expérimentateur** estime qu'il pourrait être décrit par le modèle étudié ci-dessus, on se propose de mesurer l'effet photoélastique généralisé, c'est-à-dire, déterminer les composantes de  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$  (82) (83).

Le problème **inverse** consiste à rechercher le maximum d'informations sur la déformation et le mouvement du milieu, à partir de la connaissance de  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$  et d'un ensemble de mesures expérimentales : ceci constitue, en quelque sorte, une photoélasticimétrie généralisée.

Des travaux en ce sens sont engagés en particulier à l'Université Libre de Bruxelles — Vrije Universiteit Brussel [80]. On sait [20] que l'action d'un cristal biréfringent, dichroïque et gyrotrope, sur une onde électromagnétique polarisée, se traduit par une transformation linéaire appliquée à un vecteur décrivant l'état de polarisation de l'onde. Cette solution matricielle est une forme particulière du formalisme introduit en 1941 par R. Jones dans le calcul des systèmes optiques [81]. L'onde incidente polarisée *quelconque* (et non plus rectiligne ou circulaire comme en photoélasticimétrie élémentaire), et dont l'**expérimentateur est maître**, sera caractérisée par le vecteur  $\vec{U}_o$  (à deux composantes complexes dans le formalisme de Jones, à quatre composantes réelles dans le formalisme de Stokes-Mueller [82] [83] et Perrin-Chandrasekhar [84] [85]) l'onde émergente par le vecteur  $\vec{U}$ , **mesuré par l'expérimentateur**, l'action du milieu étant dé-

crité par la matrice de transformation  $\bar{C}$ , dont les composantes sont, dans notre cas, des fonctions de tenseurs photoélastiques  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$

$$\vec{U} = \bar{C} \vec{U}_0 \quad (102)$$

En optique conservative, la relation (102) exprime les propriétés de la construction dite « de la sphère de Poincaré » et dont l'emploi se généralise en photoélasticimétrie classique [21] [25].

La détermination de la matrice  $\bar{C}$  est un problème qui n'est pas encore entièrement résolu, dans le cas où sont présents à la fois dichroïsme, pouvoir rotatoire et biréfringence. Plus précisément, l'extraction hors de  $\bar{C}$  des contributions respectives dues à ces divers effets, nécessaire si l'on se propose de déterminer les tenseurs  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$ , est un problème ardu, en particulier à cause de la nécessité de mesures absolues de phase et d'énergie. L'emploi des opérateurs matriciels de Jones [86] couplé à l'emploi d'un ordinateur [80] semble pouvoir conduire à la solution de ce problème.

On peut se poser le problème suivant : existe-t-il des états de polarisation privilégiés pour

l'onde incidente  $\vec{U}_0$ , compte tenu des propriétés du milieu ? Dans le cas de la photoélasticité plane, la réponse est positive et correspond à la genèse de l'isocline : une onde polarisée rectiligne suivant une des directions principales se propage sans altération. Elle constitue une *forme propre* de la matrice  $\bar{C}$ , c'est-à-dire une forme transformée en elle-même par l'application de  $\bar{C}$ .

Dans le cas de la photoélasticité généralisée analysée ici, les formes propres sont cette fois des formes de lumière polarisée *elliptique* non orthogonales. L'expérience permet de les déterminer.

NOTE : Au stade actuel, il est nécessaire en vue des applications, de faire des approximations (linéaires, quadratiques...) sur (82) et (83). La théorie complète précise non seulement la portée de ces approximations, mais en outre, donne des conditions restrictives dues à (67). De telles restrictions, présentes ici du fait que la théorie dynamique est déduite de la thermodynamique et donc conforme à celle-ci, sont totalement absentes des théories cinématiques.

### 3. Conclusions

Comparons une théorie cinématique [87] [88] à notre théorie **dynamique** dans le cas d'un milieu viscoélastique (processus isothermes)

#### Théorie cinématique

1°) *Equations de Maxwell*

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = - \text{div } \vec{P}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \partial_t \vec{B}$$

$$\varepsilon_0 (c^2 \text{rot } \vec{B} - \partial_t \vec{E}) = \rho \vec{P} - (\text{div } \vec{P}) \vec{v}$$

#### Théorie dynamique

1°) *Equations de Maxwell*

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = - \text{div } \vec{P}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \partial_t \vec{B}$$

$$\varepsilon_0 (c^2 \text{rot } \vec{B} - \partial_t \vec{E}) = \frac{\rho}{v} \vec{P} - (\text{div } \vec{P}) \vec{v}$$

Les équations sont identiques

## 2°) Equation du mouvement

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\bar{T}}$$

$\bar{\bar{T}}$  symétrique

## 2°) Equation du mouvement

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \operatorname{div} \bar{\bar{T}} - (\operatorname{div} \vec{P}) + \underline{\underline{L}} \vec{P} \times \vec{B}$$

$\bar{\bar{T}}$  symétrique

La théorie cinématique néglige les forces d'origine électromagnétique. Seule la théorie dynamique permettra d'obtenir le champ des déplacements additionnels dû au champ électromagnétique. La prise en considération de cet effet est utile à deux égards : d'abord il permet de préciser le mode d'action de l'effet photoélastique (toute mesure implique interaction) ; d'autre part le développement des Lasers permet d'envisager des champs électromagnétiques suffisamment intenses pour provoquer des déformations mesurables.

## 3°) Bilan d'énergie et inégalité de Clausius-Duhem

non pris en considération

## 3°) Bilan d'énergie et inégalité de Clausius-Duhem

$$\rho \dot{u} = \operatorname{tr} (\bar{\bar{T}} \bar{\bar{V}}) + \underline{\underline{L}} \vec{P} \cdot \vec{\mathcal{C}} + \rho s \quad (58)$$

$$\text{et } \gamma \geq 0 \quad (67)$$

Les restrictions traduites par l'inégalité de Clausius-Duhem ne peuvent apparaître dans la théorie cinématique, celle-ci ignorant les lois de la thermodynamique.

## 4°) Equations de comportement

$$\bar{\bar{T}} = \hat{\bar{T}} [\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{V}}, \vec{P}, \underline{\underline{L}} \vec{P}]$$

$$\vec{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}} [\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{V}}, \vec{P}, \underline{\underline{L}} \vec{P}]$$

Approximations

$$\text{a./ } \underline{\underline{L}} \vec{P} \approx \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

b./ La dépendance à  $\vec{P}$  de l'équation de comportement mécanique peut être négligée.

## 4°) Equations de comportement

$$\bar{\bar{T}} = \hat{\bar{T}} [\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{V}}, \vec{P}, \underline{\underline{L}} \vec{P}]$$

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}} [\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{V}}, \vec{P}, \underline{\underline{L}} \vec{P}]$$

$$S = \hat{S} [\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{V}}, \vec{P}, \underline{\underline{L}} \vec{P}]$$

$$U = \hat{U} [\bar{\bar{A}}, \bar{\bar{V}}, \vec{P}, \underline{\underline{L}} \vec{P}]$$

Pas d'approximations correspondantes ;

Dans la théorie cinématique, l'approximation a./ revient à annuler le mouvement. Il en résulte que les effets d'entraînement disparaissent. D'autre part, annuler le mouvement équivaut à considérer un milieu en équilibre, où les effets de viscosité sont absents : la contradiction est évidente. L'approximation b./ est typique de la théorie cinématique et élimine a priori un aspect du phénomène d'interaction.

Dans la théorie dynamique, aucune approximation similaire n'est introduite a priori. Les équations de comportement supplémentaires résultent de la volonté de prendre en considération les lois de la thermodynamique.

## 5°) Equations de couplage électromécanique

$$\vec{\mathcal{C}} = \overset{\wedge}{\mathcal{C}}(\bar{A}, \bar{V}, \vec{P}, \underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P})$$

est linéarisée en

$$\vec{E} = \bar{\chi}^{-1} \vec{P}$$

avec

$$\bar{\chi} = \overset{\wedge}{\chi}(\bar{A}, \bar{V})$$

L'équation de comportement mécanique est supposée inaltérée

$$\bar{T} = \overset{\wedge}{T}(\bar{A}, \bar{V})$$

## 5°) Equations de couplage électromécanique

La référence aux principes de la thermodynamique permet de décomposer  $\bar{T}$  et  $\vec{\mathcal{C}}$  en une partie dite « d'équilibre » dépendant de la seule énergie libre  $F = \overset{\wedge}{F}(\bar{A}, \vec{P})$  et une partie complémentaire liée à la viscosité.

$$\bar{T} = \varphi_v \frac{\partial F(\bar{A}, \vec{\pi})}{\partial \bar{A}} + \bar{T}^{(c)}(\bar{A}, \bar{V}, \vec{\pi}, \underset{v}{\mathcal{L}} \vec{\pi})$$

$$\vec{\mathcal{C}} = \frac{\partial F(\bar{A}, \vec{\pi})}{\partial \vec{\pi}} + \vec{\mathcal{C}}^{(c)}(\bar{A}, \bar{V}, \vec{\pi}, \underset{v}{\mathcal{L}} \vec{\pi})$$

**De fait, en dépit de ses prémisses apparemment très générales, la théorie cinématique postule que le seul effet à envisager est une biréfringence caractérisée par le seul tenseur symétrique a priori des susceptibilités, perturbé par l'existence de  $\bar{A}$  et  $\bar{V}$ .**

## 6°) Effet photoélastique

se réduit à

$$\vec{E} = \bar{\chi}^{-1}(\bar{A}, \bar{V}) \vec{P}$$

postulé a priori

La représentation de  $\bar{\chi}$ , tenseur symétrique de deux tenseurs symétriques est triviale.

## 6°) Effet photoélastique

$$(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \bar{M} \vec{P} + \bar{N} \underset{v}{\mathcal{L}} \vec{P}$$

se déduit de la théorie

La représentation de  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$ , en général non symétriques, est obtenue dans le cadre de la théorie.

**L'équation de comportement cinématique élimine a priori les effets d'entraînement et de non transparence.**

## 7°) Propagation des ondes lumineuses

Biréfringence classique.

La seule grandeur observable est la différence des indices principaux.

Conclusions :

**Effet photoviscoélastique classique (mais non linéaire).**

## 7°) Propagation des ondes lumineuses

Biréfringence elliptique, dichroïsme et effets d'entraînement.

Conclusions :

**Effet photoélastique généralisé.**

**Effet Fizeau généralisé.**

Des objections de divers ordres peuvent être adressées à la théorie dynamique.

### 1. Traite-t-elle d'effets observables ?

Nous répondrons à cela :

— D'abord que Fizeau a mis en évidence les effets en  $\frac{v}{c}$  qui portent son nom en 1859, soit un demi-siècle avant que la formulation théorique en fut élaborée dans le cadre de l'électrodynamique des milieux en mouvement, en particulier par Minkowski. Fizeau ne disposait certainement pas d'appareillage ayant la sensibilité de ceux disponibles aujourd'hui, et les vitesses de son milieu n'était certainement pas supersoniques !

— Ensuite, qu'il est admis qu'on peut mesurer à l'heure actuelle des variations d'indice de  $10^{-6}$  [89] et des dichroïsmes extrêmement faibles [78]. Sans même devoir préjuger du perfectionnement futur des moyens expérimentaux de l'optique (dont on peut prévoir qu'il sera considérable), on peut affirmer que les effets d'entraînement et de photoélasticité généralisée sont **observables**.

Ceci ne fait qu'exprimer l'extrême sensibilité des méthodes optiques d'observation, où l'éta- lon de mesure est la longueur d'onde de la lumière.

### 2. Est-elle perfectible et susceptible de généralisation ?

Les développements suivants peuvent, entre autres, être apportés à la théorie :

- a. Introduire les effets de *température* et dès lors un couplage thermique en plus.
- b. Traiter la théorie dans le cadre général de la *relativité restreinte* en unifiant les groupes d'invariance de la partie mécanique et électromagnétique.
- c. Appliquer la théorie aux matériaux *anisotropes*.
- d. Généraliser la théorie à des milieux conducteurs ou faiblement conducteurs.
- e. Généraliser le modèle mécanique, par exemple par l'introduction de formulations non holonomes au sens de Sedov [90].
- f. Envisager la magnétisation du milieu.

### 3. Est-elle utile ?

Nous pourrions répondre que la découverte par Brewster de l'effet photoélastique n'était pas guidée par des considérations d'utilité. De manière plus précise, on peut indiquer **à quoi pourrait servir la théorie** : par exemple à jeter les bases d'une photoélasticimétrie généralisée plus riche en possibilités d'application, ou encore à mieux éclairer des recherches sur les mécanismes microscopiques d'interaction, ou encore à préciser la portée d'une approximation ou la raison d'une erreur d'interprétation.

Le mécanicien des milieux continus peut aussi indiquer **à quoi sert une théorie** : sa tâche est de mettre de la rigueur et de la rationalité là où le développement simultané de l'expérimentation, de la théorie et des applications introduit inévitablement de la confusion, des approximations incertaines, des contradictions.

### REMERCIEMENTS

L'ensemble de ce travail est le résultat d'un travail collectif des auteurs dans le cadre d'un séminaire de travail hebdomadaire, consacré à la mécanique rationnelle des milieux continus.

Les auteurs remercient le professeur M. ROY, ancien président de l'Académie des Sciences de Paris, d'avoir bien voulu présenter deux notes relatives à cette étude, aux comptes rendus de l'Académie. Ils le remercient aussi d'avoir attiré leur attention sur la signification de l'hypothèse de « transparence » introduite dans des travaux antérieurs, et de les avoir encouragés à poursuivre ces recherches.

Le Fonds de la Recherche Fondamentale Collective Belge a accordé son soutien financier à cette étude.

## ANNEXE I

## Théorème

EN UN POINT MATÉRIEL, ON PEUT CONSTRUIRE AU MOINS UN PROCESSUS THERMODYNAMIQUE ADMISSIBLE DANS LEQUEL LA TEMPÉRATURE  $\theta$ , SON GRADIENT  $\vec{g}$ , LE TENSEUR GRADIENT DE VITESSE ET LE VECTEUR POLARISATION  $\vec{P}$  SONT DES FONCTIONS ARBITRAIRES DU TEMPS EN CE POINT.

Considérons un processus de déformation admettant un point fixe que nous prenons pour origine de coordonnées cartésiennes. Il faut montrer qu'on peut satisfaire les équations générales de la mécanique des milieux continus, les équations de Maxwell, les équations constitutives en choisissant arbitrairement  $v_i j$ ;  $\theta$ ;  $\vec{g}$ ;  $\vec{P}$  à l'origine.

Les équations de la mécanique définissent les fonctions  $\vec{f}$  et  $\vec{s}$  du processus tandis que les équations constitutives donnent  $\vec{t}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{h}$ . L'équation constitutive relative à  $\vec{C}$  permet d'éliminer  $\vec{E}$  dans les équations de Maxwell

$$\vec{E} = \vec{C}(\theta, \vec{g}, \vec{A}, \vec{V}, \vec{P}, \vec{L}, \vec{P}) - \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{B}) = \text{div} \vec{C} + \frac{1}{\epsilon_0} \text{div} \vec{P} \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t \vec{B} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = -\text{rot} \vec{C} \quad (3)$$

$$c^2 \text{rot} \vec{B} + \partial_t(\vec{v} \times \vec{B}) = \partial_t \vec{C} + \frac{1}{\epsilon_0} [\partial_t \vec{P} + \text{rot}(\vec{P} \times \vec{v})] \quad (4)$$

Développons  $\theta$ ,  $v^i$ ,  $P^i$ ,  $B^i$  et  $C^i$  en série de Mac Laurin :

$$v_i = {}_0v_{i,j} x^j + \frac{1}{2} {}_0v_{i,jk} x^j x^k + \dots \text{ etc} \quad (5)$$

que l'on introduit dans ce système différentiel. Il en résulte une suite de systèmes différentiels correspondant aux termes d'ordre 0, 1, 2, ... en  $x$ .

Pour le système d'ordre 0, on obtient

$$\epsilon_{ijk} {}_0v_{j,i} {}_0B_k = {}_0C_{l,i} + \frac{1}{\epsilon_0} {}_0P_{l,i} \quad (1.0)$$

$${}_0B_{i,i} = 0 \quad (2.0)$$

$${}_0\dot{B}_i + {}_0v_{k,k} {}_0B_i - {}_0B_k {}_0v_{i,k} = -\epsilon_{ilk} {}_0C_{k,l} \quad (3.0)$$

$$c^2 \epsilon_{ijk} {}_0B_{k,j} = {}_0C^i + \frac{1}{\epsilon_0} {}_0\dot{P}_i + \frac{1}{\epsilon_0} {}_0v_{k,k} {}_0P_i - \frac{1}{\epsilon_0} {}_0P_k {}_0v_{i,k} \quad (4.0)$$

Le système d'ordre 1 s'écrit :

$$\epsilon_{ijk} {}_0v_{j,il} {}_0B_k + \epsilon_{ijk} {}_0v_{j,i} {}_0B_{k,l} + \epsilon_{ijk} {}_0v_{j,l} {}_0B_{k,i} = {}_0C^i_{i,il} + \frac{1}{\epsilon_0} {}_0P_{i,il} \quad (1.1)$$

$${}_0B_{i,ik} = 0 \quad (2.1)$$

$${}_0\dot{B}_{i,j} + {}_0v_{k,kj} {}_0B_i + {}_0v_{k,k} {}_0B_{i,j} - {}_0B_k {}_0v^v_{i,kj} - {}_0v_{i,k} {}_0B_{k,j} + {}_0B_{i,k} {}_0v_{k,j} = -\epsilon_{ilk} {}_0C^i_{k,lj} \quad (3.1)$$

$$c^2 \epsilon_{ijk} {}_0B_{k,jl} + \epsilon_{ijk} {}_0B_k - {}_0v^v_{j,l} + \epsilon_{ijk} {}_0v_{j,l} {}_0\dot{B}_k = {}_0C^i_{i,l} + \frac{1}{\epsilon_0} [{}_0\dot{P}_{i,l} - {}_0P_{k,k} {}_0v_{i,l} + {}_0v_{k,k} {}_0P_{i,l} + {}_0P_i {}_0v_{k,kl} - {}_0P_k {}_0v_{i,kl} - {}_0v_{i,k} {}_0P_{k,l} + {}_0v_{k,l} {}_0P_{i,k}] \quad (4.1)$$

Il faut voir si on peut déterminer  ${}_0B_i$ ,  ${}_0B_{i,j}$  alors que  ${}_0\theta$ ,  ${}_0\theta_{,i}$ ,  ${}_0v_{i,j}$  et  ${}_0P_i$  sont choisis arbitrairement. Les relations (1.0) et (3.0) constituent un système de 4 équations à 3 inconnues  ${}_0B_k$  de sorte que  ${}_0P_{i,j}$ ,  ${}_0C^i_{k,l}$  et  ${}_0v_{i,k}$  sont liées par une relation.

Pour la détermination des 9 fonctions  ${}_0B_{i,j}$  on dispose de 16 équations (2.0), (4.0), (1.1) et (3.1) d'où l'existence de 7 relations entre  ${}_0C^i_{k,lj}$ ,  ${}_0C^i_{k,lj}$ ,  ${}_0v_{k,lj}$ .

En résumé,  ${}_0\theta$ ,  ${}_0\theta_{,i}$ ,  ${}_0v_{i,j}$ ,  ${}_0P_i$  peuvent être choisies fonctions arbitraires du temps mais leurs gradients d'ordre supérieur dépendent de ce choix.

## Corollaire

En un point matériel  $O$  et à un instant donné  $t^*$ , on peut choisir arbitrairement  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{V}$ , de même que  $\vec{A}$  et toutes leurs dérivées par rapport au temps en ce point à cet instant.

Au point  $O$ ,  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{g}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{V}$  sont des fonctions du temps que l'on peut choisir arbitrairement. A un instant  $t^*$ , on peut donc choisir arbitrairement non seulement ces grandeurs mais leurs dérivées par rapport au temps.

De plus, au point  $O$

$${}_0V_{ji} = {}_0\left(\frac{\mathcal{L} A_{ij}}{v}\right) = {}_0\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}\right) + {}_0A_{kj} {}_0v_{k,i} + {}_0A_{ik} {}_0v_{k,j} \quad (6)$$

$${}_0V_{ji} = \frac{d_0 A_{ij}}{dt} + {}_0A_{kj} {}_0v_{k,i} + {}_0A_{ik} {}_0v_{k,j} \quad (7)$$

et en vertu du théorème de Cauchy,  ${}_0A_{ij}$  peut être choisi arbitrairement à l'instant  $t^*$ .

ANNEXE II

PROPAGATION DES ONDES  
DANS LE CAS OU LES EFFETS D'ENTRAÎNEMENT SONT NEGLIGES

$$\left( \frac{v}{c} \text{ négligeable devant } 1 \right)$$

Nous recherchons des solutions du type

$$\vec{E} = \vec{e} e^{i w \left( t - \frac{n}{c} \vec{s} \cdot \vec{x} \right)} \quad \vec{B} = \vec{b} e^{i w \left( t - \frac{n}{c} \vec{s} \cdot \vec{x} \right)} \quad \vec{P} = \vec{p} e^{i w \left( t - \frac{n}{c} \vec{s} \cdot \vec{x} \right)}$$

(où  $\vec{s}$  est un vecteur unité normal au plan d'onde et  $n = n^+ + i n^-$  est un nombre complexe, généralisant l'indice de réfraction en présence d'absorption) au système formé par les équations de Maxwell et l'équation constitutive. On rejettera des solutions où  $n^+ n^- > 0$  qui représenteraient des ondes amplifiées (on considère de telles solutions comme n'ayant pas de sens physique). Le système d'équations écrit en termes de  $\vec{e}, \vec{b}, \vec{p}$  est (après avoir négligé  $\frac{v}{c}$  devant 1) :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{s} \cdot \vec{d} = 0 \\ \vec{n} \vec{s} \times \vec{e} = c \vec{b} \\ \vec{n} \vec{s} \times \vec{e} = - \frac{1}{\epsilon_0 c} \vec{d} \\ \vec{s} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{e} = \vec{M}(\vec{A}, \vec{V}) \vec{p} + i \omega \vec{N}(\vec{A}, \vec{V}) \vec{p} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{MAXWELL} \\ \text{ou } \vec{d} = \epsilon_0 \vec{e} + \vec{p} \end{array}$$

(équation constitutive)

où  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  sont deux tenseurs réels non nécessairement symétriques. On peut toujours écrire cette équation constitutive sous la forme

$$\vec{e} = \vec{a} \vec{d} - i \vec{\Gamma} \times \vec{d} \quad \text{ou } \vec{a} = \vec{a}^+ + i \vec{a}^-$$

est un tenseur complexe symétrique et où  $\vec{\Gamma}$  est un vecteur complexe.

Pour étudier ce système d'équations, nous choisissons un référentiel particulier : l'axe 3 dirigé suivant  $z$ , 1 et 2 situés dans le plan perpendiculaire de manière à former un référentiel cartésien dextrogyre.

Le système sera compatible si  $n$  satisfait à

$$\left( a_{11} - \frac{1}{\epsilon_0 n^2} \right) \left( a_{22} - \frac{1}{\epsilon_0 n^2} \right) - (a_{12} + i \Gamma_3) (a_{21} - \Gamma_3) = 0$$

A chacune des solutions pour  $n$  correspond une solution déterminée à un facteur près pour  $d_2/d_1$ . Ce sont les solutions de l'équation

$$(a_{12} + i \Gamma_3) d_2^2 + (a_{11} - a_{22}) d_1 d_2 - (a_{21} - i \Gamma_3) d_1^2 = 0$$

Ceci nous permet de déterminer quels sont les états de polarisation transmis et les indices de réfraction-absorption correspondant étant donné  $\vec{a}$  et  $\vec{\Gamma}$ . Cela conduit à la discussion suivante:

- 1°)  $\vec{a}$  réel,  $\vec{\Gamma}$  réel  
 ( $\vec{M}$  symétrique,  $\vec{N}$  antisymétrique)  
 pas d'absorption
  - 1)  $\vec{\Gamma} = 0$  ( $\vec{N} = 0$ ) biréfringence linéaire ( $\perp$ ) (\*)  
 si  $\vec{a}$  sphérique, réfraction ordinaire (\*\*),
  - 2)  $\vec{\Gamma} \neq 0$  ( $\vec{N} \neq 0$ ) biréfringence elliptique ( $\perp$ )  
 si  $\vec{a}$  sphérique, biréfringence circulaire (donc pouvoir rotatoire).

Le cas où  $\vec{a}$  est réel et  $\vec{\Gamma}$  complexe n'a pas de sens physique.

- 2°)  $\vec{a}$  complexe  
 absorption

A/  $\vec{a}^+$  et  $\vec{a}^-$  ont mêmes directions principales secondaires dans tout plan, c'est-à-dire qu'il existe 3 nombres  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que  $\alpha \vec{a}^+ + \beta \vec{a}^- + \gamma \vec{\Gamma} = 0$  (\*\*\*)

(\*) Cela signifie que les états de polarisation transmis sont orthogonaux.  
 (\*\*) Tous les états de polarisation sont transmis avec le même indice de réfraction.  
 (\*\*\*)  $\alpha$  ou  $\beta$  peut être nul, c'est-à-dire que ce cas contient les cas où  $\vec{a}^+$  est sphérique et où  $\vec{a}^-$  est sphérique.

- 1)  $\vec{\Gamma} = 0$  ( $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  symétriques)  
biréfringence linéaire ( $\perp$ ) et dichroïsme,  
si  $a$  et  $a$  sphériques réfraction ordinaire et absorption.

- 2)  $\vec{\Gamma} \neq 0$

- a)  $\alpha \vec{\Gamma}^+ + \beta \vec{\Gamma}^- = 0$  biréfringence elliptique ( $\perp$ ) et dichroïsme.  
b)  $\beta \vec{\Gamma}^+ - \alpha \vec{\Gamma}^- = 0$  suivant les directions de propagation : biréfringence rectiligne et dichroïsme ou biréfringence elliptique (\*) et dichroïsme.  
c) autre  $\vec{\Gamma}$  biréfringence elliptique et dichroïsme si  $a$  et  $a$  sphériques, biréfringence circulaire (donc pouvoir rotatoire) et dichroïsme.

$B/a$  et  $a$  n'ont (en général) pas mêmes directions principales secondaires biréfringence elliptique et dichroïsme (quel que soit  $\vec{\Gamma}$ ).

REMARQUE : dans chacun des cas envisagés, les types de propagation d'ondes indiqués sont ceux qui se produisent pour presque toutes les directions de propagation. Dans chacun des cas, il peut cependant y avoir des directions particulières pour lesquelles on a un comportement différent.

Exemple : même si  $a$  n'est pas sphérique, il se peut qu'il y ait des directions  $\vec{s}$  telles que  $a_{11}^+ - a_{22}^+ = 0$ .

On aura pour cette direction le même résultat que dans le cas  $a$  sphérique.

Pour ces directions particulières, on sera ramené (comme on le voit dans cet exemple) au comportement général dans un autre cas. Cette classification permet donc également de trouver facilement les comportements pour ces directions de propagation particulières.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BREWSTER. — On the effects of simple pressure in producing that species of crystallisation which forms two oppositely polarised images. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1815, S. 60/64.
- [2] F.E. NEUMANN. — Über die Gesetze der Doppelbrechung der Lichtes in komprimierten und ungleichförmig erwärmten unkristallinen Körpern. *Abh. Akad. Berlin*, 1841, Part (ii) S 1/254. *Aun. Phys. II Bd 54*, 1841, S 449/476.
- [3] J.C. MAXWELL. — On the equilibrium of elastic solids. *Trans. roy. Soc., Edinb.* Bd 20 1853, S 87/120.
- [4] R.A. TOUPIN. — A dynamical theory of elastic dielectrics. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 1, 101-126, 1963.
- [5] R.A. TOUPIN. — The Elastic Dielectric. *J. Rat. J. Rat. Mech. Anal.* 5, 849-916, 1956.
- [6] R. RIVLIN ET R.A. TOUPIN. — *Arch. Rat. Mech. Anal.* 7, 1961.
- [7] M. VANDAELE-DOSSCHE, R. VAN GEEN. — La biréfringence mécanique en lumière ultra-violette et ses applications. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, 5<sup>e</sup> série, Tome L, pp 125-141, 1964, 2.
- [8] A. NOBLET, G. SYLIN, M. VANDAELE-DOSSCHE, R. VAN GEEN. — La biréfringence mécanique différée de signe négatif et sa représentation analogique. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, 5<sup>e</sup> série, Tome L, pp 534-561, 1964, 5.
- [9] R. VAN GEEN. — Contribution à l'étude du mécanisme de la biréfringence mécanique. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*, 5<sup>e</sup> série, Tome L, pp 869-892, 1964 8.
- [10] R. VAN GEEN. — Non-coïncidence des singularités mécaniques et optiques. *CR Acad Sc Paris*, T. 258, pp. 5.164-5.166, 1964.
- [11] R. VAN GEEN. — Deux phénomènes dus à la non-linéarité des relations contraintes-biréfringence. *CR Acad Sc Paris*, T. 259, pp. 999-1001, 3 août 1964.
- [12] R. VAN GEEN. — A fundamental Problem in Photoelasticity : chromatic dispersion of isoclinics and its two causes. *Proceedings of the fifth Conference on photoelasticity*. PLZEN 16-17 may 1967, Strojnický Casopis XIX, 4, 1968, Tchécoslovaquie.
- [13] G. MAYNE ET R. VAN GEEN. — Signification et perspectives d'une théorie rigoureuse de l'effet photoélastique. Publication du Séminaire de Mécanique de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université Libre de Bruxelles, 1969.

(\*) Les deux ellipses sont les mêmes, mais parcourues dans les deux sens différents.

- [14] J.F.W. HERSCHEL. — « *Traité de la Lumière* ». Traduction de A. Quetelet, Directeur de l'Observatoire de Bruxelles, 1828, IV<sup>e</sup> partie, § XII, Note 1090.
- [15] A. MESNAGER. — Mesure des efforts intérieurs dans les solides et applications. *Int. Ass. Test. Mat.*, Budapest, 1901.
- [16] E.G. COKER et L.N. FILON. — A treatise on Photoelasticity. Cambridge University Press, 1931.
- [17] H. LE BOITEUX et R. BOUSSARD. — Elasticité et Photoélasticimétrie. Paris, Hermann et Cie, 1940.
- [18] M.M. FROCHT. — Photoelasticity, vol. I et II, New-York, John Wiley. London Chapman and Hall, 1949.
- [19] H.T. JESSOP. — Photoelasticity. *Handbuch der Physik*, Band VI, Encyclopedia of Physics, Vol. VI. Springer Verlag, 1958.
- [20] G. RAMACHANDRAN et S. RAMASESHAN. — Kristallographie Beugung, Cristal optics, Diffraction. *Handbuch der Physik*, Band XXV/I, Encyclopedia of Physics Vol. XXV/I. Springer Verlag 1961.
- [21] A. ROBERT, E. GUILLEMET. — Nouvelle méthode d'utilisation de la lumière diffusée en photoélasticimétrie à trois dimensions. *Revue Française de Mécanique*, 5-6 et 7-8, 1963.
- [22] A. ROBERT, E. GUILLEMET. — New Scattered light method in three-dimensional Photoelasticity. *British Journal of Applied Physics*, 15, 1964.
- [23] A. ROBERT. — New methods in Photoelasticity. *Exp. Mechanics*, 6, 1966.
- [24] R. MARK. — A simple Geometric method for Analyzing Polarisation states in photoelasticity. *A.I.A.A. Jnl.* 2, 1, 1969.
- [25] A. ROBERT, J. VERNET. — Application à la photoélasticimétrie de nouveaux procédés automatiques de détermination des axes et du déphasage d'un milieu biréfringent. *Annales du 3ème Congrès International Européen d'Analyse des Contraintes*, Berlin, 1966.
- [26] A. ROBERT. — New methods in photoelasticity. *Exper. Mechanics*, 7, 5, 1967.
- [27] T. TOKUOKA et M. MIYAKAWA. — Birefringent Formula in Elastic-Plastic Deformation Region of High Polymer Solids. *Proceedings of the Fourteenth Japan National Congress for Applied Mechanics*, 1964.
- [28] M. VANDAELE-DOSSCHE et R. VAN GEEN. — Cinq Leçons de Photoélasticité tridimensionnelle. *Séminaire d'Analyse des Contraintes*, n° 8, 1969. Laboratoire d'Analyse des Contraintes, Université Libre de Bruxelles.
- [29] J.E. ROMAIN. — Introduction théorique à la photoélasticimétrie. *Centre de Recherches Routières*. Rapport de Recherche n° 143-JER, 1967.
- [30] R.D. MINDLIN. — A Mathematical Theory of Photoviscoelasticity. *J. Appl. Mech.*, 20, 1949.
- [31] E.M. DILL. — On Phenomenological Rheo-Optic Constitutive Relations. *J. Polymer Science*, C, n° 5, 1964.
- [32] E.H. DILL and C. FOWLKES. — Photoviscoelasticity. *University of Washington*. Department of Aeronautics, Report 65-1, 1965.
- [33] M.L. WILLIAMS and R.J. ARENZ. — The Engineering Analysis of linear Photoviscoelastic Materials. *Exp. Mech.*, 9, 1964.
- [34] J. MANDEL. — Introduction à l'étude de la rhéologie. B. PERSOZ. — Dunod, 1960 et E.H. LEE. — Stress Analysis in Viscoelastic Bodies. *Quart Appl. Math.* 13, 1955.
- [34] C. AMBA-RAO. — Stress strain Time Birefringence Relations on Photoelastic Plastics with Creep, p. 75 and p. 79 dans « *Rheo-Optics of Polymers* ». *Journal of Polymer Sciences : Part C Polymer Symposia* n° 5 edited by R.S. Stein, 192 p., 1964. Interscience Publishers, J. Wiley et Son.
- [36] R. VAN GEEN. — Contribution à l'étude de l'Effet Photoélastique. Dissertation présentée pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences Physiques, Fascicules I et II. Presses Universitaires de Bruxelles, 1965.
- [37] J. JAVORNICKY. — On the double nature of Birefringence in Plastics. *P.S.E.S.A.*, volume XX, n° 2, 1963.
- [38] L.N.G. FILON and H.T. JESSOP. — On stress optical effect in transparent solid strained beyond the elastic limit. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, Series A, vol. 223. 1923.
- [39] J. JAVORNICKY. — Photoplastische versuche am verkstoff zelluloid. *Abh. der Deut. Akad. der Wissen zu Berlin*. Akademie Verlag Berlin, 1962, p. 63.
- [40] J. JAVORNICKY. — Beitrag zur analyse der doppelbrechung in der photoplastizitat. *Zeitung fur Angew. Physik*, volume 14, n° 3, 1962, pp 152-157.
- [41] J. JAVORNICKY. — Ouvrage de synthèse sur la Photoplasticité. En tchèque. Sous presse.
- [42] S.I. KUBKIN, S.I. DOBROVOLSKI and B.B. BOIKO. — Photoplasticity (russian). *White Russian Academy of Science of Minsk*, 1957.
- [43] M.P. SHABKOLSKAYA and V.E. KOCHNOV. — The application of silver chloride to the study of the processes of plastic deformations by means of photoelasticity. Russian. Photoelastic Method for Stress Analysis. Leningrad University, 1960.

- [44] A.V. STEPANOV. — Crystalline substances as model materials in optical methods for the study of stressed states. Russian. Photoelastic Method for Stress Analysis. Leningrad University, 1960, pp 259-263.
- [45] E. MONCH. — Die dispersion der doppelbrechung bei zelluloid als plastizitätsmass in der spannungsoptik. Z. Angew. Phys. vol 6, 1954, pp 371-375.
- [46] E. MONCH. — Die dispersion der doppelbrechung als mass für die plastizität bei spannungsoptischen versuchen. Forsch. Ing. Wes., vol. 21, 1955, pp 20-25.
- [47] E. MONCH. — Der heutige stand der photoplastizität. Schweiz Arch. Angew. Wiss., vol. 25, 1959, pp 174-180.
- [48] E. MONCH and R. JIRA. — Studie zur photoplastizität von celluloid am rohr unter innendruck. Z. Angew. Phys. vol. 7, 1955, pp. 450-453.
- [49] R. JIRA. — Das mechanische und optische verhalten von zelluloid bei zweiachsiger beanspruchung und der nachweis seiner eignung für ein photoplastisches verfahren. Konstruktion, vol. 9, 1957, pp. 438-449.
- [50] E. MONCH and R. LORECK. — A study of the accuracy and limits of application of plane photoelastic experiments. International Symposium on Photoelasticity. Pergamon Press, New-York, 1963, p. 169.
- [51] R. HILTSCHER. — Theorie und anwendung der spannungsoptik im elastoplastischen gebiet. Z. Ver. Dtsch. Ing., vol. 97, n° 2, 1955, pp 49-58.
- [52] M.M. FROCHT and R.A. THOMSON. — Studies in photoplasticity. Proc. Third U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1958, pp 533-540.
- [53] M.M. FROCHT and R.A. THOMSON. — Experiments in mechanical and optical coincidence in photoplasticity. Exp. Mech., vol. 1, n° 2, 1961, pp 43-47.
- [54] M.M. FROCHT and Y.E. CHENG. — On the meaning of isoclinic parameters in cellulose Nitrate. J. Appl. Mech., 1962.
- [55] R.A. THOMSON and M.M. FROCHT. — Further work on plane elastoplastic stress distributions. International Symposium on Photoelasticity. Pergamon Press, New-York, 1963, p 185.
- [56] M.M. FROCHT and Y.F. CHENG. — An experimental study of the laws of double refraction in the plastic state in cellulose nitrate. Foundations for three-dimensional photoplasticity. International Symposium on Photoelasticity, Pergamon Press, New-York, 1963, p. 195.
- [57] S.E.A. BAYOUMI and K.E. FRANKLE. — Fundamental relations in photoplasticity. Brit. J. Appl. Phys., vol. 4, 1953, pp 306-310.
- [58] T. TOKUOKA. — Theoretical investigation of birefringence deformation relations in photo-elastoplasticity. Int. Jl. Solids and Structures, vol. 1, 1965.
- [59] T. TOKUOKA. — Mechanical foundations of birefringence of photoelastoplastic media. Int. Jl. Solids and Structures, vol. 2, 1966.
- [60] W. PHILIPPOFF. — The Present State of Rheo-Optics of Polymer Solutions. Proceedings of the Vth Congress on Rheology. Kyoto, 1968.
- [61] B.D. COLEMAN et V.J. MIZEL. — J. Chem. Phys. 40, 1964, p. 1116.
- [62] C. TRUESDELL, R.A. TOUPIN. — Principles of classical Mechanics and field Theory. Handbuch der Physik Band III/1, p. 683, Springer Verlag, 1960.
- [63] L. LANDAU et E. LIFCHITZ. — Electrodynamique des Milieux Continus. Moscou, 1969.
- [64] H. WEYL. — Space, Time and Matter. Dover, 1922.
- [65] R.P. FEYNMANN, R.B. LEIGHTON, M. SANDS. — The Feynman Lectures on Physics. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
- [66] G. MAYNE et R. VAN GEEN. — Introduction en mécanique des milieux continus de la dérivée au sens de Lie. Séminaire de mécanique de la Faculté des Sciences Appliquées. Université Libre de Bruxelles, 1967-1968.
- [67] G. MAYNE et R. VAN GEEN. — Sur la définition du taux de variation de contrainte et ses applications en rhéologie. Extrait des Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, numéro 6, tome I, avril 1968.
- [68] J. MANDEL. — Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tomes I et II. Gauthier, Villars, Paris, 1966.
- [69] G. MAYNE et R. VAN GEEN. — Intrinsic Formulation of Rheooptical constitutive equations. Communication présentée au Vème Congrès de Rhéologie. A paraître dans les Actes du Congrès. Kyoto, Japan, octobre 1968.
- [70] M.J. CROCHET. — « On electromagnetic Effects in deformable Media » (doctorat de philosophie en engineering) University of California, Berkeley 1966.
- [71] G. MAYNE et R. VAN GEEN. — Sur un modèle de diélectrique photoélastique non holonome présentant un tenseur de susceptibilité non symétrique. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 466-469, février 1969.

- [72] P. BOULANGER, J. KESTENS, G. MAYNE, R. VAN GEEN. — Sur un modèle simple de diélectrique dissipatif tant au point de vue mécanique qu'électromagnétique et sur l'effet photoélastique généralisé qu'il présente. C.R., Acad., Sc. Paris, t 270 p. 794-797, mars 1970.
- [73] G. MAYNE et collaborateurs. — A paraître dans le Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique.
- [74] G.I. SMITH. — Arch. Rat. Mech., Anal., 18, 1965, p. 282.
- [75] P. BOULANGER. — Mémoire de Licence. Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles, 1970.
- [76] E. BERGSTRAND. — Détermination of the velocity of Light. Handbuch der Physik XXIV, 1956.
- [77] J. DURAN, M. BILLARDON, S. PAUTHIER-CAMIER, J. FERRE. — Appareil de mesure du dichroïsme linéaire. Application à l'étude du dichroïsme linéaire sous contrainte. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, pp 1172-1175, 1969.
- [79] J. DURAN. — Dichroïsme linéaire sous contrainte de matrices cubiques à centres anisotropes. C.R. Acad. Sc. Paris, séance du 4 août 1969.
- [80] A. HERMANNE. — Programme de Recherche au Fonds de la Recherche Fondamentale Collective Belge, 1969-1970.
- [81] R.C. JONES. — Journal Opt. Soc. Amer. 31, 488, 500, 1941.
- [82] C.G. STOKES. — Trans. Cambridge Phil. Soc. 9, 1852.
- [83] H. MUELLER. — Journal Opt. Soc. Amer. 38, 661, 1948.
- [84] F. PERRIN. — Journal Chim. Phys. 10, 1942.
- [85] S. CHANDRASEKHAR. — Radiative Transfer. Londres, 1950.
- [86] R. JONES. — Journal Opt. Soc. Amer ; 38, 671, 1948.
- [87] T. TOKUOKA. — Department of Aeronautical Engineering. Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto. A Mathematical Theory of Birefringence of Viscoelastic Media. Journal of the Physical Society of Japan. Volume 23, n° 2, August, 1967.
- [88] T. TOKUOKA. — Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University, Japan. Mechanical Foundations of Birefringence of Elastic Media and Viscous Media. Int. Journal Engng.Sci. Vol. 4, pp 23-40. Pergamon Press 1966, Printed in Great Britain.
- [89] J.C. CANIT, D. BERGER, M. BILLARDON. — Mesure de variations d'indice par polarimétrie. Optica Acta, vol. 13, n° 3, 1966.
- [90] L.I. SEDOW. — Some problems of designing new models of continuum Media.. Proc. 11<sup>th</sup> Intl. Congr. Applied Mech. (Munich 1964), 1965.

# Critère de rupture des bétons soumis à des sollicitations triaxiales<sup>(\*)</sup>

par

J. BERGUES

Licencié ès Sc. — Diplômé du CHEBAP

P. HABIB

Ing. E.P. — Dr. ès Sc.

et P. MORLIER

Ing. E.M.P. — Dr. ès Sc.

Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique

## RESUME

*Après avoir exposé les principes généraux de la rupture, les auteurs présentent les résultats obtenus sur un béton soumis à des sollicitations triaxiales.*

*Il se dégage principalement de cette série d'essais que le comportement à la rupture du béton dépend de sa teneur en eau, de la contrainte moyenne appliquée et de la durée du chargement.*

## SUMMARY

*After some introductory remarks about failure in general and about the criterion of failure for the concrete in particular, experiments with concrete specimens submitted to loading with three different principal stresses are described.*

*The results of the tests show mainly that the behaviour of the concrete in rupture depends on water content, on mean normal stress and on the rate of testing.*

### I — REMARQUES SUR LA RUPTURE EN GENERAL ET LA RUPTURE DU BETON EN PARTICULIER

Avant d'examiner le critère de rupture des bétons soumis à des contraintes triaxiales, il est indispensable de dire quelques mots de la rupture en général.

On peut définir la rupture comme la limite du domaine de la rhéologie, et ce qui est important, ce sont les phénomènes physiques et rhéologiques qui se produisent lorsque l'on approche de la rupture. L'intérêt d'une telle étude est évident : faire travailler la matière au mieux de ses possibilités est un optimum économique recherché et toute apparition de discontinuité, fissure, cassure, cavitation est un phénomène nocif qui doit être proscrit.

(\*) Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie le 13 mai 1970.

Pour l'ingénieur, le risque de rupture est relié à l'existence d'un seuil de contrainte à ne pas dépasser ; si ce seuil est dépassé dans un ouvrage, il y a de fortes chances que la structure entière soit ruinée. Et qu'importe si l'on se trouve en présence d'un amas de poutrelles métalliques tordues ou devant un tas de débris en mille morceaux : l'ouvrage est entièrement à reconstruire.

Pour le physicien, la notion de seuil n'est pas suffisante, car on constate l'existence de ruptures avec séparation des morceaux, et de ruptures sans séparation. Il faut reconnaître que nous ne savons pas grand-chose sur l'origine de ces deux types de phénomènes. En particulier, nous ne savons pratiquement pas prévoir pour un matériau nouveau, en fonction des caractéristiques mécaniques classiques, si la rupture se produira ou non avec séparation. Nous sommes contraints à une attitude de naturalistes, c'est-à-dire que nous observons et nous enregistrons ce qui se produit au cours des expériences de rupture, mais la théorie reste entièrement à faire.

Nous savons cependant un certain nombre de choses : le passage de la rupture de type fragile à la rupture ductile est favorisé par l'augmentation de la pression moyenne, par l'augmentation de la température, par la diminution de la vitesse de déformation. Nous savons que la rupture ductile correspond généralement à des glissements dans des cristaux, ou dans des amas, notamment pour les matériaux de type pulvérulent. Nous savons que la rupture fragile se fait à partir de défauts qui peuvent être des fissures, des pores ou des inclusions et que cet aspect aléatoire introduit de la dispersion dans les résultats et un effet d'échelle : ceci rapproche fragilité et fatigue, mais cet ensemble de faits ne constitue nullement une théorie.

La rupture du béton sous contrainte triaxiale présente les deux aspects : en traction, en compression simple, la rupture est fragile avec séparation en morceaux ; si la contrainte moyenne croît, le mode de rupture change et l'on voit apparaître la ductilité.

Dans une étude antérieure, MORLIER (1969) a présenté un modèle permettant d'interpréter les dégradations de type fragile qui apparaissent dans les roches. Les fissures, les pores ou

les inclusions sont des germes à partir desquels se développe une nouvelle fissuration ; ce schéma sera utilisé ici pour l'interprétation du comportement du béton. Le développement de la fissuration dans les bétons est confirmé par les bruits que l'on entend au cours du chargement, par la modification de la perméabilité à l'air à l'approche de la rupture, par la diminution de la vitesse de propagation des ondes sonores, tous ces phénomènes étant liés à la création d'un certain nombre de fissures. La baisse de résistance en compression simple d'un échantillon de béton qui a été soumis à des contraintes élevées mais sans engendrer de séparation en morceaux, montre un phénomène qui correspond lui aussi à l'apparition de certaines fissures (LAUNAY et AS 1970). Sous contrainte moyenne croissante, les fissures sont fermées et les actions de contact entre les lèvres de la fissure rétablissent une continuité mécanique, notamment pour la transmission des contraintes ; on constate alors une diminution de la dispersion ainsi que la disparition de l'effet d'échelle (HABIB et VOUILLE, 1966) et c'est ce phénomène qui nous a permis d'étudier la résistance du béton soumis à des sollicitations triaxiales sur des échantillons de petite dimension ; les glissements susceptibles de se produire apparaissent vraisemblablement dans le liant, peut-être aussi dans certains cas au sein des agrégats. Le passage d'un mécanisme de rupture à l'autre est progressif, les dégradations de la matière obéissent à deux mécanismes différents et cette étude a un caractère général en ce sens que les ruptures par glissement et par fissuration se produisent peu ou beaucoup dans un certain nombre d'autres matériaux : les roches, les céramiques, etc...

La connaissance du critère de rupture des bétons soumis à des contraintes triaxiales est importante dans les structures actuelles. Tant que l'on construisait des poteaux et des poutres, les phénomènes principaux étaient la compression simple et la flexion. Aux nœuds des poteaux et des poutres, pour les voiles minces et les coques, les sollicitations sont déjà un peu plus complexes. Avec le développement des structures en béton précontraint, que ce soient les ponts, les poutres et surtout les caissons épais utilisés pour les réacteurs nucléaires, la connaissance du critère devient tout

à fait indispensable, car les trois contraintes principales auxquelles la matière est soumise sont nettement différentes dans un volume important. L'intérêt de connaître le critère de rupture paraît ainsi très évident. Peut-être même trop évident d'ailleurs, car en fait, ce qui intéresse l'ingénieur, c'est la charge de service. Or, on passe de la charge de rupture à la charge de service par l'intermédiaire d'un coefficient de sécurité qui est par exemple de l'ordre de  $\frac{28}{100}$  pour la rupture en compression simple du béton. Ce coefficient a un caractère probabiliste et il a été établi à la suite d'une longue expérience des constructeurs. Que se passe-t-il en condition triaxiale ? Il est bien évident que nous manquons à l'heure actuelle de l'expérience permettant de fixer le coefficient de sécurité, c'est-à-dire de définir la charge de service à partir de la charge de rupture. En supposant que cela soit réalisé, il ne faut pas oublier encore qu'un certain nombre d'autres phénomènes peuvent intervenir et créer des limitations de la charge de service autres que celle apportée par la rupture. C'est le cas de la résistance ultime (charge limite que peut supporter un matériau sous une sollicitation de très longue durée), du fluage, de la fatigue. Les seuls résultats de rupture qui seront présentés ici ne peuvent donc pas être considérés comme réglant entièrement ce problème.

## II — REPRESENTATION DU CRITERE

Pour les essais triaxiaux où deux contraintes principales sont égales, il a été longtemps en usage en France et en Europe d'utiliser la représentation de la courbe intrinsèque, ou enveloppe des cercles de Mohr d'équilibre ultime. Cette représentation est implicitement basée sur l'hypothèse de la non influence de la contrainte principale intermédiaire et trop liée à un schéma d'interprétation théorique pour que ce soit la seule utilisée ici. Une autre représentation couramment utilisée, et notamment aux Etats-Unis, est celle qui indique la valeur du déviateur de rupture  $\sigma_1 - \sigma_3$  en fonction de la pression de confinement  $\sigma_3$ . C'est une représentation extrêmement commode pour un expérimentateur, car elle permet de montrer aisément

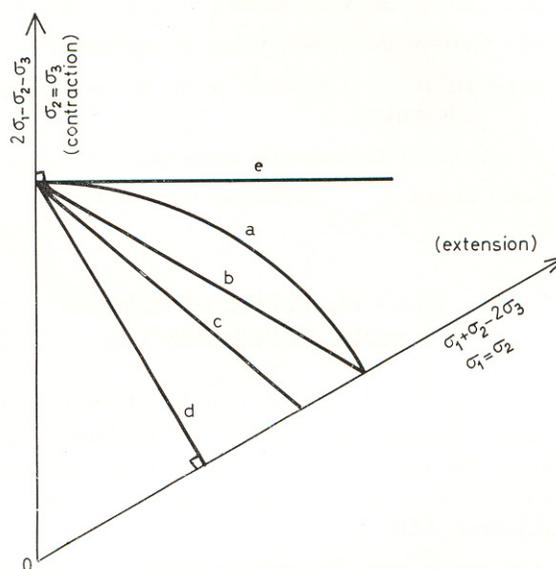


Fig. 1. — Représentation des différents critères

- a = Von Misès
- b = Tresca
- c = Coulomb
- d = Traction maximale
- e = Compression maximale

ment les résultats obtenus ; par contre, elle est frappée d'une certaine impuissance pour tenter la moindre esquisse d'interprétation théorique. La meilleure méthode consiste à tracer dans l'espace des contraintes ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) une surface dont chaque point correspond à un équilibre de rupture, et cette surface sera appelée critère. Pour représenter cette surface, on utilise généralement des sections planes : sections par des plans parallèles aux axes de coordonnées, sections par des plans formant un faisceau s'appuyant sur l'un des axes, enfin section par des plans perpendiculaires à la droite  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Cette dernière représentation est particulièrement commode, surtout si l'on indique dans les plans de coupe, la trace des axes de coordonnées, complétant ainsi le tétraèdre de sommet O. La surface représentative du critère possède trois plans de symétrie et un axe ternaire si la matière est isotrope ; il suffira d'en représenter 1/6 avec la trace des projections des axes de coordonnées. Sur la figure 1, un certain nombre de coupes ont été indiquées, elles correspondent à des interprétations théoriques :

- (a) Critère de Von Misès ;
- (b) Critère de Tresca pour les métaux ;
- (c) Critère de Coulomb pour les matériaux pulvérulents ;
- (d) Critère de traction maximale ;
- (e) Critère de compression maximale.

### III — MATERIEL UTILISÉ ET MODE EXPERIMENTAL

L'étude a été faite en collaboration avec le C.E.A. (Groupe de Travail de la Sûreté des Piles) sur un micro-béton à agrégats de porphyre, image de celui utilisé pour la centrale nucléaire EDF 3.

Les essais ont été effectués sur des éprouvettes tubulaires de 36 mm de diamètre extérieur et de 26 mm de diamètre intérieur ; elles étaient constituées par un béton où la dimension maximale des agrégats était de 8 mm. Les éprouvettes ont été soumises à la pression d'un liquide pour le confinement, à une charge axiale et à une torsion au moyen du dispositif expérimental indiqué sur la figure 2. Les

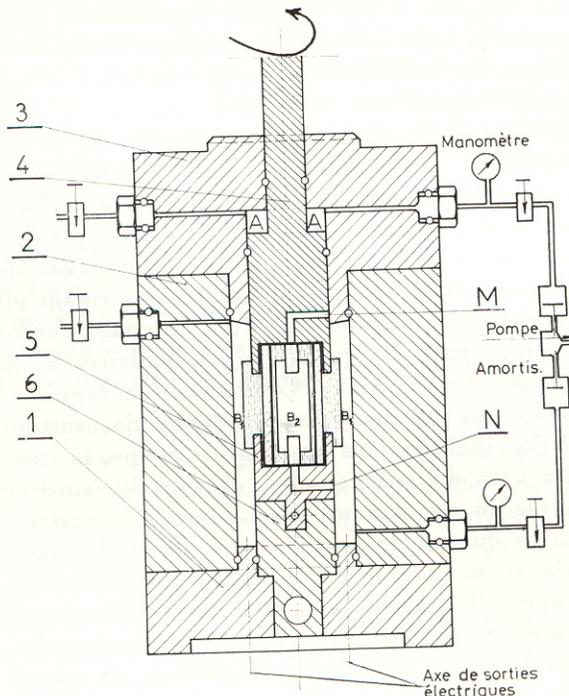


Fig. 2. — Corps de cellule

éprouvettes étaient gainées intérieurement et extérieurement par une membrane en matière plastique de façon que les contraintes s'exercent effectivement sur le squelette minéral (BERGUES et AS 1970).

Pour provoquer la rupture des éprouvettes, le mode opératoire a été principalement le suivant. On imposait progressivement une pression uniforme autour de l'échantillon en augmentant simultanément la charge axiale et la pression de confinement : c'est-à-dire que le point représentatif du chargement décrivait d'abord un segment sur la droite  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Ensuite, en agissant simultanément sur la charge axiale et sur le couple de torsion, on imposait un chargement tel que les directions principales des contraintes restaient fixes dans l'espace. Le choix de ce trajet de chargement est en relation avec le modèle décrit par MORLIER (1969) : en effet, si une première fissuration commence à se développer sous l'effet d'une charge d'orientation donnée, il est bien évident que l'on doit maintenir cette orientation lorsque le système de contrainte évolue et ne pas permettre une rotation des contraintes principales par rapport à la direction de propagation des fissures. Cette question soulève d'ailleurs un problème théorique important, celui de la définition de la surface représentative du critère. Prenons par exemple un trajet de chargement très simple, le chargement radial : les trois contraintes principales restent proportionnelles et leurs directions sont fixes. Nous savons, par les essais de fatigue, que si l'on crée un système de sollicitations cycliques sur un chargement radial, la rupture finit par se produire pour une charge bien inférieure à celle que l'on peut atteindre par un chargement monotone jusqu'à rupture. Il s'agit là pourtant d'un cas particulièrement simple puisque le point représentatif du chargement reste toujours sur le segment de droite qui joint l'origine  $O$  de l'espace des contraintes à un point  $M$  de la surface représentant le critère. Il n'est donc absolument pas évident que l'on atteigne le même point  $M$  si les trajets de chargement sont distincts et a fortiori si les contraintes principales changent de direction en cours de chargement.

On voit ainsi qu'il faut associer le critère de rupture à un trajet de chargement défini, au minimum, dans un espace à six dimensions (amplitude des contraintes principales et direction), et que pour explorer le critère, il faut se limiter à ne faire varier le trajet de chargement que par un seul paramètre ; cette condition expérimentale est essentielle à la définition correcte de la surface de rupture.

La pratique montre cependant que ce souci n'est pas très grave, tout au moins tant que les trajets de chargement ne sont pas nettement distincts et dans la mesure de la précision des essais. Nous n'avons fait dans ce domaine qu'un nombre extrêmement limité de trajets différents ; il semble néanmoins que pour des trajets où les contraintes varient d'une façon monotone, ou presque monotone, c'est-à-dire pour lesquels la décroissance de l'une d'entre elles soit relativement peu importante, on puisse expérimentalement obtenir une surface représentative du critère telle qu'à la dispersion près des résultats d'essais, il ne soit pas possible de faire une différenciation des modes de chargement. Ce résultat expérimental appar-

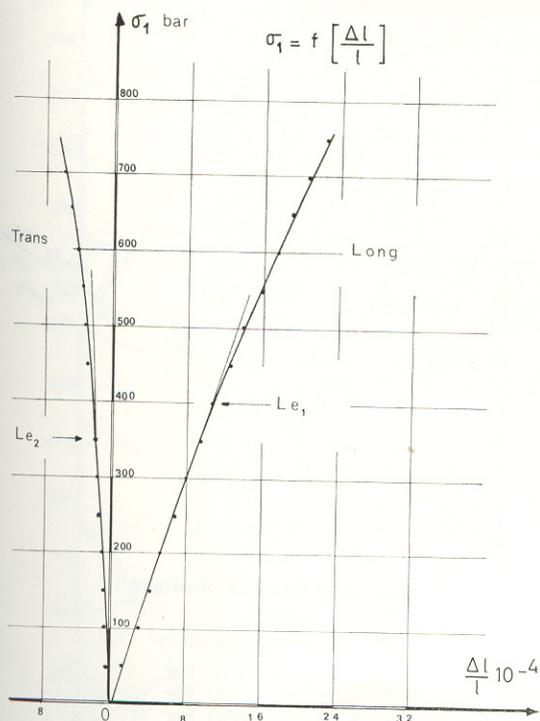


Fig. 3. — Compression simple béton sec  
Courbes « efforts-déformations »

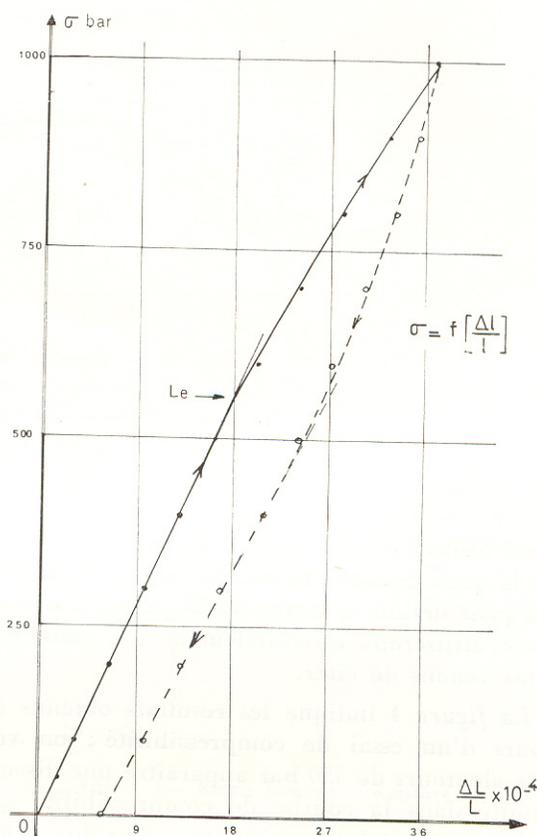


Fig. 4. — Compressibilité béton sec

te une certaine simplification, mais il ne peut en aucun cas être considéré comme généralisable à des trajets particulièrement excentriques.

#### IV — RESULTATS DES ESSAIS

Le critère de rupture est déterminé à partir d'un certain nombre d'éléments relevés sur les courbes efforts-déformations. La figure 3 représente le comportement d'un béton en compression simple, et l'on peut distinguer sur les diagrammes une limite élastique correspondant aux déformations transversales. Ce comportement est tout à fait analogue à celui qu'on observe sur les minéraux rocheux, et tout comme en mécanique des roches, on peut définir un ou plusieurs critères par le franchissement de ces limites de linéarité. On peut

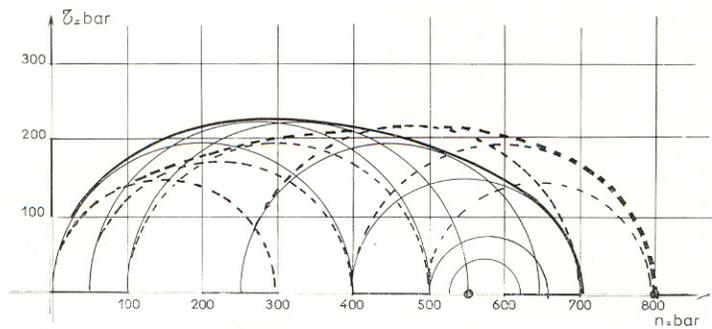


Fig. 5. — Courbes intrinsèques (limite élastique)

----- béton saturé  
 ———— béton sec

aussi utiliser comme critère de rupture la charge la plus grande atteinte au cours de l'essai. On peut définir d'autres seuils physiques, mais nous utiliserons essentiellement ici, ceux que nous venons de citer.

La figure 4 indique les résultats obtenus au cours d'un essai de compressibilité ; on voit aux alentours de 550 bar apparaître une discontinuité dans la courbe de compressibilité qui auparavant était linéaire et réversible ; au-delà de ce chargement apparaissent des déformations permanentes qui ne s'effacent plus après le retour à la pression atmosphérique. La limite élastique ainsi déterminée représente manifestement une rupture, et en réalité des dégradations irréversibles se sont produites à l'intérieur du matériau. On voit sur cet exemple que la notion de coefficient de sécurité dont nous avons parlé précédemment est particulièrement délicate à établir : dans le cas du chargement hydrostatique, rien n'empêche de faire travailler le matériau à une contrainte hydrostatique très élevée, supérieure à la limite élastique, c'est-à-dire très au-delà de la limite de « rupture ».

La figure 5 représente les courbes intrinsèques relatives à la limite élastique d'un béton sec et du même béton saturé ; chacune de ces courbes est fermée et entoure l'origine ; on voit sur la partie droite de la figure que certains cercles ne rencontrent pas l'enveloppe, ce qui met en évidence l'existence d'un point enveloppe qui correspond à la limite élastique en compression hydrostatique ; cette limite est

plus élevée pour les bétons saturés que pour les bétons secs, car l'eau interstitielle se met en pression sous l'effet des contraintes extérieures.

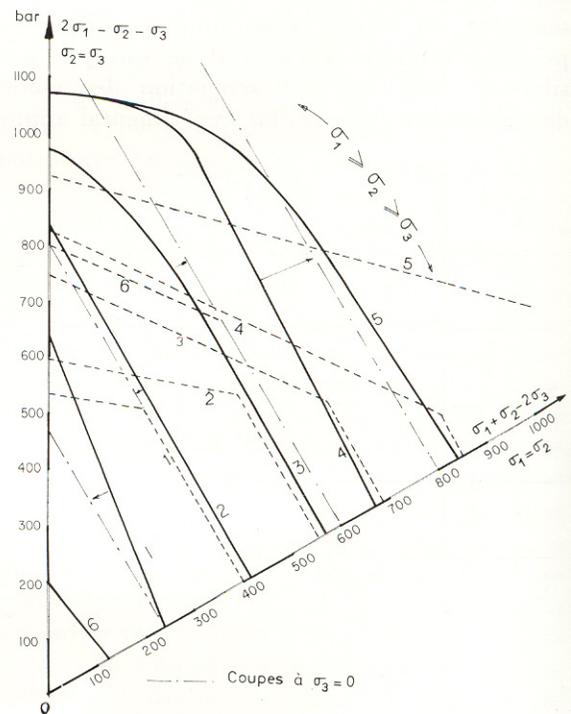


Fig. 6. — Limite élastique

——— béton sec  
 ----- béton saturé

1.  $3 \sigma_m = 240$  bar  
 2.  $3 \sigma_m = 400$  bar  
 3.  $3 \sigma_m = 600$  bar  
 4.  $3 \sigma_m = 800$  bar  
 5.  $3 \sigma_m = 1\ 200$  bar  
 6.  $3 \sigma_m = 1\ 600$  bar

La figure 6 est relative aux limites élastiques d'un béton sec et saturé, elle représente les intersections des surfaces représentant le critère par des plans perpendiculaires à la droite  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ; chaque courbe représente une contrainte moyenne constante. Comme pour les courbes intrinsèques, on remarque que les deux surfaces sont fermées; on remarquera toutefois que le béton sec et le béton saturé ont des critères très différents surtout dans le domaine des compressions et ceci met en évidence le rôle important de la pression interstitielle à l'intérieur des pores d'un béton.

Les figures 7 et 8 indiquent, avec le mode de présentation de la figure 6, les critères de rupture d'un béton sec et d'un béton saturé. Une première analyse de ces deux familles de courbes montre que l'allure du critère de rupture d'un béton reste le même, quel que le degré de saturation du matériau. Pour une contrainte moyenne donnée, la courbe est perpendiculaire à l'axe des extensions ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ), c'est-à-dire que la rupture y suit un critère de traction maximale; la courbe s'infléchit ensuite vers l'axe des compressions

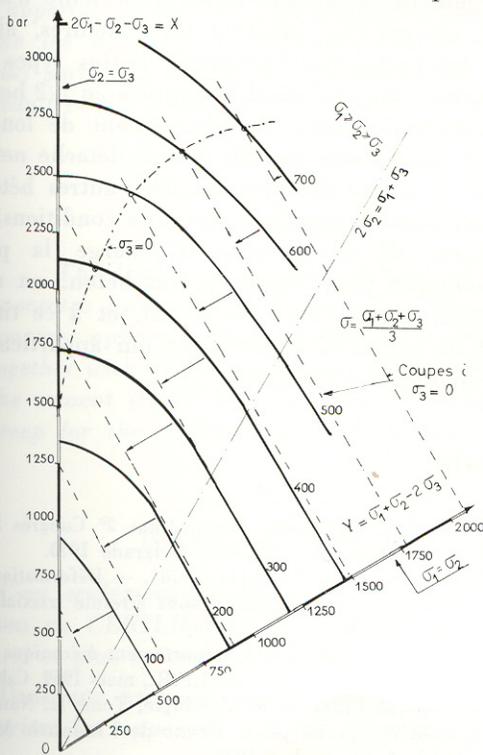


Fig. 7. — Béton sec - Rupture  
Intersection par des plans à  $\sigma_m = \text{constant}$

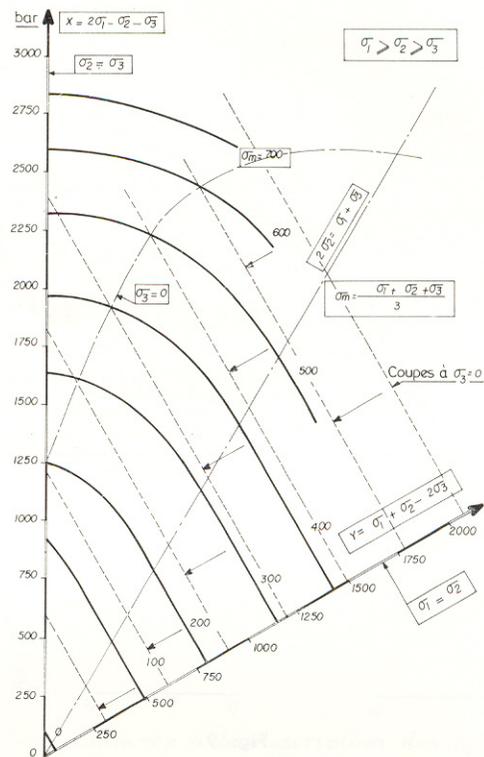


Fig. 8. — Béton humide - Rupture  
Intersection par des plans à  $\sigma_m = \text{constant}$

( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) qu'elle rencontre suivant un angle aigu lorsque la contrainte moyenne est faible et normalement lorsque celle-ci est grande. En comparant les deux figures, on peut remarquer une différence entre les deux bétons: les courbes relatives aux bétons secs sont légèrement décalées vers le haut, les bétons secs étant, en quelque sorte, plus résistants.

Il est important de savoir comment le critère de rupture varie avec les conditions d'essais et avec la nature du béton. Nous avons donc étudié successivement:

- un béton sec (figure 7),
- le même béton humide (figure 8),
- le même béton sec et chaud ( $50^\circ \text{C}$ ),
- le même béton humide et chaud ( $50^\circ \text{C}$ ),
- le même béton chargé lentement,
- un deuxième béton avec une composition très différente de celle du premier.

Les résultats obtenus sont très importants dans la mesure où ils permettent une comparaison des différents critères de rupture.

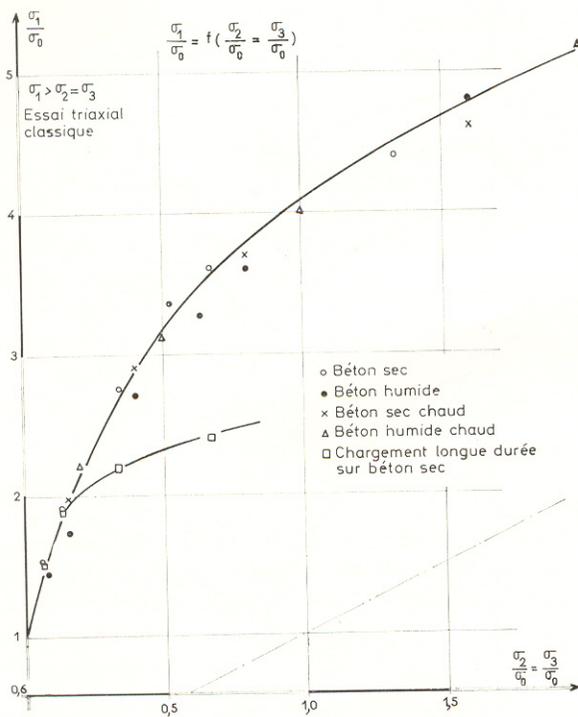


Fig. 9

Le résultat suivant a été obtenu et il paraît extrêmement intéressant : si l'on rapporte chacune des contraintes à la valeur de la résistance à la compression simple  $\sigma_0$ , c'est-à-dire si l'on se place dans les coordonnées réduites  $\frac{\sigma_1}{\sigma_0}$ ,  $\frac{\sigma_2}{\sigma_0}$ ,  $\frac{\sigma_3}{\sigma_0}$  les différentes surfaces des critères de rupture sont pratiquement superposables. Ce résultat est difficile à transcrire avec le mode de représentation des figures 6, 7 et 8 : si les surfaces sont voisines, on risque d'avoir des courbes très proches et peut-être même emmê-

lées. Aussi nous utiliserons la représentation  $\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = f\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{\sigma_3}{\sigma_0}\right)$  dont nous avons déjà parlé plus haut, mais en coordonnées réduites. On constate sur cette courbe (figure 9) que les différents bétons permettent d'établir une courbe unique telle que le lissage soit tout à fait satisfaisant et que les écarts des points expérimentaux soient dans la limite de la dispersion des essais. Pour ces bétons, indiquons les valeurs de la résistance à la compression simple  $\sigma_0$  :

béton sec	750 bar
béton humide	615 bar
béton sec 50° C	620 bar
béton humide 50° C	500 bar
béton sec, longue durée	730 bar

L'écart maximal entre les différentes valeurs de la résistance à la compression simple étant de l'ordre de 50 %, on voit que l'utilisation de coordonnées réduites donne un résultat extrêmement satisfaisant. En particulier, on constate pour le chargement de longue durée sur les bétons secs, une différence assez notable à partir d'une certaine pression de confinement. Le chargement de longue durée représente ici un essai de rupture effectué en 8 heures, alors que les essais sur les quatre autres types de matériaux engendraient la rupture en 1/2 heure approximativement. Le chargement de longue durée donne une courbe qui se détache nettement de la courbe moyenne des autres bétons et ceci montre que dans certaines conditions, la rupture, définie comme la charge la plus grande que peut supporter un béton, est une fonction de la durée de l'essai, et à ce titre, c'est un phénomène physique qui appartient à la rhéologie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGUES, HABIB, MORLIER (1970). — Etude du comportement mécanique du béton soumis à des contraintes triaxiales. Annales de l'I.T.B.T.P. Février 1970. Association Scientifique de la Précontrainte.
- [2] HABIB et VOUILLE (1966). — Sur la disparition de l'effet d'échelle aux hautes pressions. C.R. Ac. Sc. tome 262, 21 mars.
- [3] KAWAMOTO, TOMIKA, AKIMOTO (1970). — Characteristics of Deformation of Rock-Like Materials in Triaxial Compression. Proceedings 2<sup>e</sup> Congrès Soc. Int. Mécanique des Roches, Belgrade 1970.
- [4] LAUNAY, GACHON, POITEVIN (1970). — Déformation et résistance ultime du béton sous étreinte triaxiale. Annales I.T.B.T.P. mai 1970.
- [5] MORLIER P. (1969). — Comportement mécanique des solides poreux. Exposé au G.F.R., mars 1969. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, Tome II, Numéro 4, numéro spécial de la Revue de l'Industrie Minière du 15 décembre 1970.

# Etat actuel des recherches faites au CERILH sur le fluage du béton à la température ambiante<sup>(\*)</sup>

par M. VENUAT

Ing. ETP. Docteur es-Sciences  
Chef du Service Technologie au CERILH

## RESUME

*L'exposé comporte deux parties. La première est consacrée à la description des appareils (souvent originaux) qui ont été construits et utilisés pour l'étude du fluage. Il s'agit d'appareil de mesure du fluage en compression, en flexion, en traction, en torsion, ainsi que les appareils d'empreinte. La deuxième partie expose les résultats obtenus en insistant plus particulièrement sur l'influence du facteur ciment (nature, finesse, dosage). L'auteur en déduit certaines lois du fluage pour le matériau étudié (mortier et béton).*

## SUMMARY

*The lecture is divided in two parts. The first part deals with the description of the apparatus (often original) that has been fabricated and used for the study of creep. This concerns apparatus for measuring creep in compression, bending, tensile, torsion conditions together with « squeeze » apparatus the second part gives the results notably the influence of the cement (type, fineness, proportioning). The author was able to give some laws governing creep for the material studied (mortar and concrete).*

## INTRODUCTION

*C'est seulement depuis 1967 que nous étudions au CERILH les déformations du béton durci et plus spécialement le fluage.*

*Dans une première partie de cet exposé, je décrirai les appareils utilisés dont la plupart*

*sont des appareils originaux fabriqués et mis au point spécialement en vue d'effectuer nos recherches. Il s'agit essentiellement d'appareils destinés au fluage en traction pure, en flexion et en torsion (les appareils de compression existaient déjà), ainsi que des appareils d'empreinte. Dans une deuxième partie, je donnerai*

<sup>(\*)</sup> Conférence présentée à l'Assemblée Générale du Groupe Français de Rhéologie, 16 décembre 1970.

les résultats déjà obtenus et leurs interprétations. Vous verrez que c'est surtout le facteur ciment qui a été étudié — puisque j'appartiens au Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques — Les autres facteurs tels que la nature des granulats, la dimension des pièces... sont étudiés plus spécialement par d'autres laboratoires comme le CEBTP ou le LCPC. Je donnerai enfin, en conclusion, les grands principes permettant de prévoir et de réduire le fluage du béton dans le temps.

## PREMIERE PARTIE

### 1.1. Quelques principes

On sait qu'après prise, un béton mis dans l'air prend du retrait appelé retrait hydraulique parce que ce retrait est dû à un départ d'eau. Ce même béton placé dans l'eau aurait des variations dimensionnelles très faibles. Si le béton est soumis à l'action d'une charge, il se déforme instantanément. Si la charge subsiste, il continue à se déformer dans le temps. Ce

fluage a lieu, que le béton soit dans l'air ou dans l'eau, mais dans l'air, le phénomène est à la fois plus complexe et son amplitude est plus grande. Lorsque la charge est annulée, le béton présente une déformation instantanée de retour, puis une déformation très lente de retour appelée recouvrance (il subsiste une déformation permanente plus ou moins importante). Cela est illustré par la figure 1.

Ce phénomène de fluage existe pour toutes les natures de sollicitation : compression, traction, torsion ou la combinaison de ces effets. Le fluage n'est d'ailleurs pas une propriété réservée au seul béton : tous les matériaux s'écoulent plus ou moins vite sous charge.

L'étude du fluage du béton ou, si l'on veut, l'étude de la rhéologie du béton durci est importante à considérer car les déformations lentes sous charges sont plusieurs fois supérieures à la déformation instantanée et même plusieurs fois supérieures au retrait hydraulique du béton. L'intérêt des études dans ce domaine s'est accru au cours des deux dernières décennies du fait de la construction d'éléments de plus en plus minces, travaillant à des taux

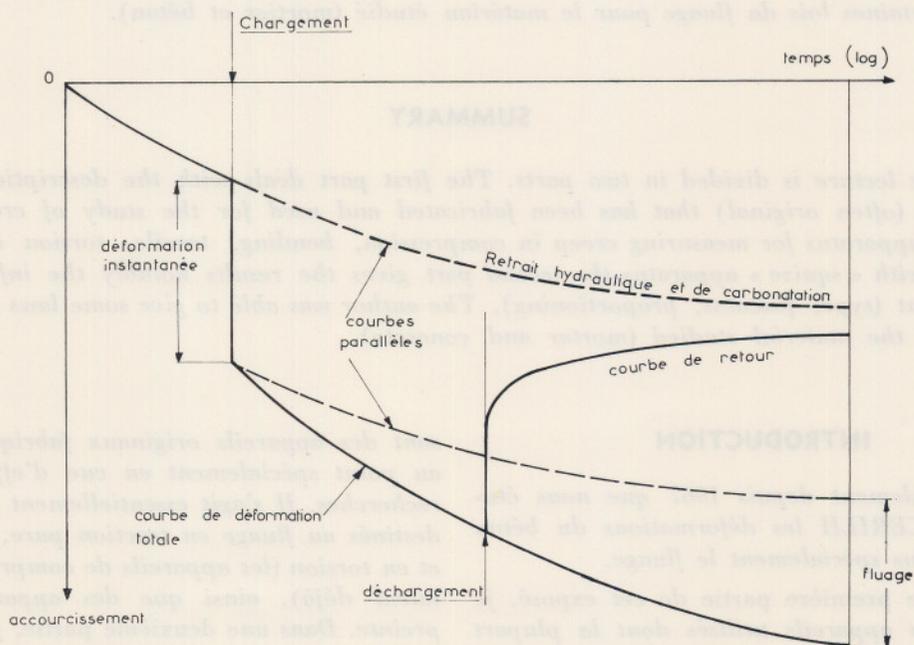


Fig. 1. — Schéma des phénomènes de fluage et de retrait Conservation dans l'air

de contrainte élevés et surtout du fait du développement du béton précontraint. Le fluage provoque :

- le raccourcissement des pièces comprimées, d'où des décollements d'enduit, des fissurations de cloisons et des éléments de remplissage,

- l'augmentation des flèches des poutres, des arcs et des poutrelles dans le bâtiment et dans les ouvrages d'art.

Le fluage a des inconvénients encore plus marqués dans le cas du béton précontraint, du fait de la baisse de tension qu'il provoque dans les câbles et dont il faut tenir compte dans les calculs.

Mais l'étude du fluage du béton n'est pas simple, car le béton est un matériau en perpétuelle évolution :

- l'hydratation du ciment se continue longtemps, les résistances mécaniques augmentent ou se modifient de même que les modules de déformation ;

- la carbonatation progressive modifie son comportement ;

- les expansifs éventuels des ciments peuvent provoquer des contraintes internes ;

- le béton absorbe ou laisse partir de l'eau... D'ailleurs, si les phénomènes de déformation sous charge du béton n'étaient pas complexes, il n'y aurait sans doute pas eu les quelques 1 000 articles écrits sur ce sujet depuis le début du siècle, c'est-à-dire depuis que WOOLSON semble-t-il observa le premier ce phénomène vers 1905. En 1957, M. L'HERMITE, spécialiste français bien connu pour ses nombreuses recherches sur le fluage, avait fait le point dans un article fondamental très détaillé et intitulé « Que savons-nous de la déformation plastique et du fluage du béton ? ».

### 1.2. Milieux d'expérimentation et choix des matériaux

La plupart des éprouvettes ont été conservées après démoulage (c'est-à-dire 24 h après leur confection) dans de grandes salles régulées où l'humidité relative est de 50 % et la température de 20° C. Pour certains essais limités, d'autres éprouvettes ont été placées dans d'au-

tres ambiances : salles à 5° et 40° C avec une humidité relative de 50 %, salle de carbonatation, ou encore dans des bacs remplis d'eau à 20° C.

Ces essais ont été effectués sur pâte pure de consistance normale, sur mortier 1/3 normalisé et sur béton 0/20 mm dosé le plus souvent à 350 kg de ciment/m<sup>3</sup>.

### 1.3. Appareils de compression mono-axial

Les appareils utilisés sont d'un modèle classique mis au point et fabriqués par le CEBTP (figure 2). Les bâtis que nous utilisons permettent de monter jusqu'à une pression de 300 bars avec des prismes de 7 × 7 × 28 cm (le chargement est effectué par pression d'huile réglable au moyen d'un volant et d'un manomètre indiquant la pression exercée).

Un déformètre à billes permet d'effectuer régulièrement les mesures grâce à 2 billes de 6 mm distantes de 20 cm et positionnées sur les

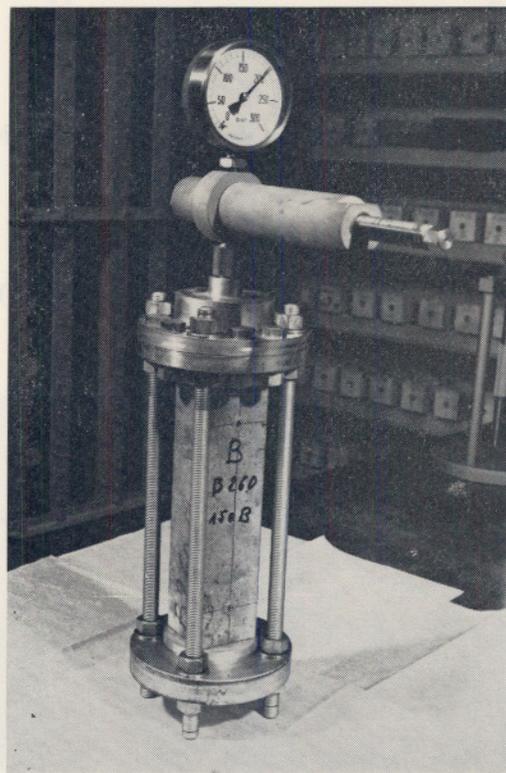


Fig. 2

2 faces opposées de l'éprouvette. La précision des mesures est de  $\pm 5$  microns. Le principal inconvénient de ces appareils, par ailleurs bien au point, est la nécessité de rétablir périodiquement, du fait du fluage, la valeur de la contrainte choisie. Cette opération est surtout fréquente dans les premiers jours qui suivent la mise en charge.

#### 1.4. Appareil de flexion

Cet appareil est très simple (figure 3). La charge totale est appliquée directement au centre d'une éprouvette de 120 cm reposant sur 2 appuis distants de 100 cm. Les éprouvettes essayées sont prismatiques et ont une section de  $5 \times 10$  cm. Le comparateur mécanique utilisé est gradué de 10 en 10 microns. La contrainte en traction-flexion est égale à :

$$TF = \frac{3}{2} \frac{Pl}{bh^2}$$

(compte tenu des caractéristiques de l'appareil, on aurait ici  $TF \text{ kgf/cm}^2 = \frac{3}{5} P \text{ (kg)}$ )

La flèche au centre est donnée par la formule:

$$f = \frac{Pl^3}{48 EI}$$

$$\left( \text{ici, tout calcul fait } f_{(cm)} = 200 \frac{P \text{ (kg)}}{E \text{ (kgf/cm}^2)} \right)$$

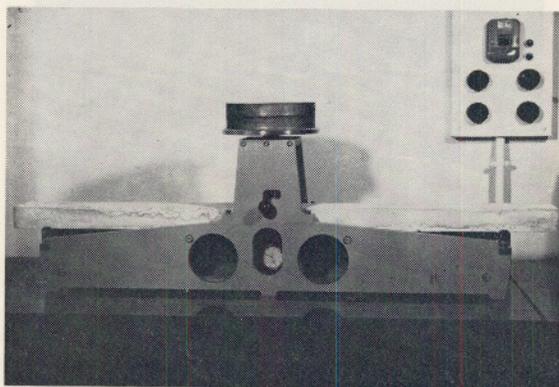


Fig. 3

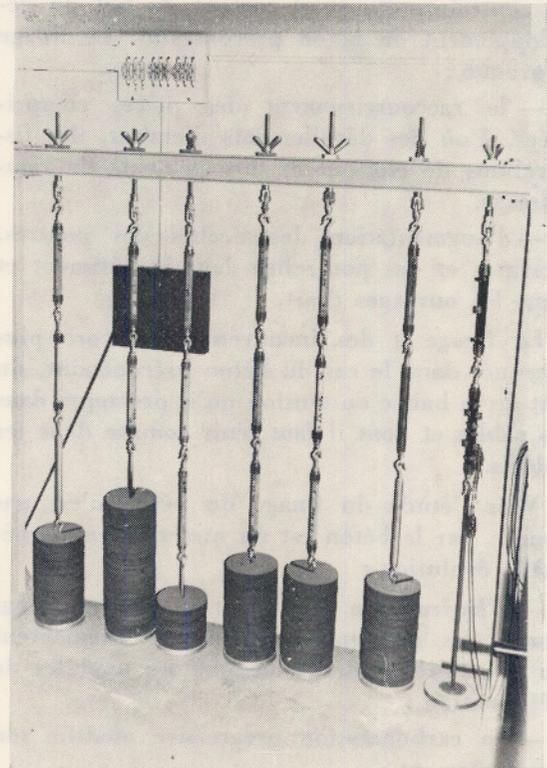


Fig. 4

avec

$P$  : charge appliquée au centre (kg)

$l$  : distance entre appuis (cm)

$b$  : 10 cm       $h$  = 5 cm

$E$  : module de déformation

$I$  : moment d'inertie

Cet appareil a comme inconvénient d'utiliser des éprouvettes de grande dimension, par contre il est peu coûteux à construire. Les mesures sont faciles à effectuer et précises.

#### 1.5. Appareil de traction

Il comporte un bâti rigide recevant 6 à 8 chapelets de 2 ou 3 éprouvettes (figure 4). Des poids situés à la partie inférieure permettent d'exercer sur chaque éprouvette une contrainte constante. Les essais sont effectués sur prismes de  $2 \times 2 \times 28$  cm (en pâte pure ou en mortier) recevant sur une face deux billes de me-

sure de  $\varnothing$  6 mm collées à une distance de 20 cm et selon la même technique que celle utilisée avec les éprouvettes de compression. Les premières mesures ont été effectuées avec un comparateur au micron. Malheureusement, la pratique nous a montré qu'étant donné les très faibles déformations, ces comparateurs mécaniques n'étaient pas assez précis. C'est pourquoi nous avons dû choisir la solution des cordes vibrantes. On a maintenant pour effectuer nos mesures une malette COYNE et l'on opère avec des extensomètres acoustiques, grâce à des cordes vibrantes placées sur les éprouvettes. La lecture est immédiate par affichage numérique des fréquences de vibration. La précision est multipliée par 25 par rapport au comparateur mécanique le plus précis utilisé précédemment.

### 1.6. Appareil de torsion

Comme il a été construit, cet appareil permet l'étude d'éprouvettes cylindriques de 5 cm de diamètre et de 30 cm de long, en pâte pure, mortier ou micro-béton (figure 5). Une extrémité de l'éprouvette est bloquée tandis que l'on peut exercer sur l'autre extrémité un couple de torsion allant jusqu'à 12 kgm, soit une contrainte de torsion de 49 kgf/cm<sup>2</sup>. Sur les éprouvettes, sont fixées à 15,6 cm de distance, 2 bagues munies de tiges s'appuyant sur deux comparateurs au micron. L'appareil comporte également d'autres comparateurs (un à chaque extrémité) permettant la mesure du retrait axial de l'éprouvette. La vérification se fait avec une éprouvette cylindrique en acier. Il permet éga-

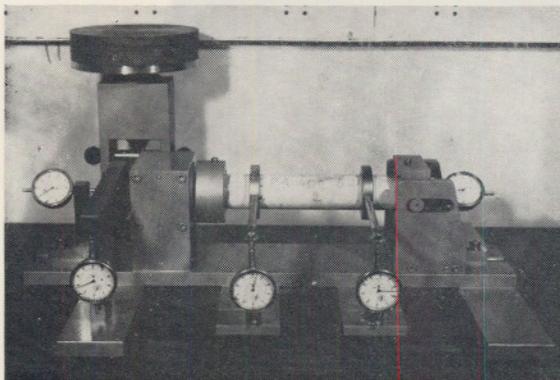


Fig. 5

lement de rompre en torsion les éprouvettes, mais il n'a pas été fabriqué pour cet usage. Rappelons les formules classiques utilisées variables lorsque l'on reste dans le domaine élastique :

$$\text{contrainte de torsion} \quad \sigma = \frac{M}{\left(\frac{I}{r}\right)}$$

avec  $M$  : moment de torsion,  
 $I$  : moment d'inertie,  
 $r$  : rayon (ici  $r = 2,5$  cm).

Compte tenu des caractéristiques de l'appareil, on a :

$$\sigma \text{ (kgf/cm}^2\text{)} = 0,815 \text{ (cm}^{-2}\text{)}. P \text{ (kg)}$$

angle de torsion

$$\Delta \theta = \frac{Ml}{G.I} = \frac{C_2 - C_1}{l}$$

avec

- $l = 15,6$  cm  $l' = 20$  cm (par construction),
- $G$  = module d'élasticité transversal,
- $C_2$  = déformation lue au comparateur  $C_2$  le plus proche de l'extrémité sollicitée,
- $C_1$  = déformation lue au comparateur  $C_1$  le plus proche de l'extrémité fixe.

Pour cet appareil, on a :

$$\Delta \theta \text{ (radian)} = 5.10^{-6} (C_2 - C_1)$$

(la mesure  $C_2 - C_1$  représente en réalité la tangente de l'angle  $\Delta \theta$  et non la mesure de l'arc ; l'erreur commise est très faible et bien inférieure à la dispersion propre des essais).

### 1.7. Appareil d'empreinte

L'appareil que nous avons fabriqué permet la mesure de l'enfoncement et de l'empreinte superficielle sous charge d'une bille d'acier (ou d'une autre forme de plots), dans une éprouvette de pâte pure. Il comporte :

— un bâti rigide recevant l'éprouvette (nous employons des éprouvettes tronconiques de 4 cm de haut, 8 et 9 cm de diamètre utilisées pour d'autres essais),

— un dispositif d'appui de la charge formant empreinte et fixé sur un bras de levier,

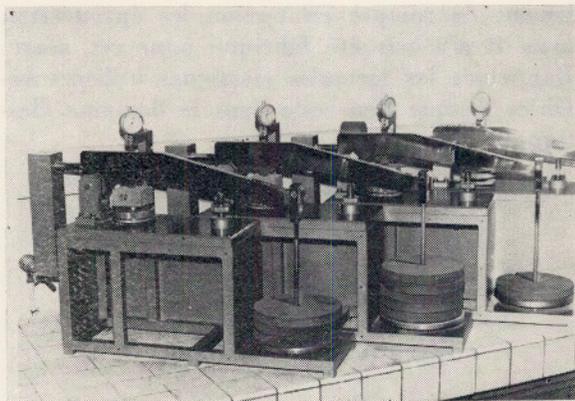


Fig. 6

— un bras de levier et un plateau de chargement.

On peut disposer de 60 kg, ce qui correspond sur l'appareil à une force de cisaillement de 300 kg au droit de l'empreinte (généralement une bille d'acier de 10 mm de diamètre). Un comparateur au micron permet d'avoir directement l'enfoncement de la bille. Après déchargement,

on peut également vérifier l'enfoncement final à l'aide de la mesure du diamètre de l'empreinte (figure 6). Ce type d'appareil reproduirait assez bien ce qui se passerait dans le cas d'une contrainte bi-axiale. Nous avons modifié cet appareil afin d'effectuer des essais non pas seulement avec 1 plot mais avec 2 plots, et cela afin d'essayer de se rapprocher d'un essai de contrainte tri-axial. On utilise à cet effet une éprouvette de 4 cm de haut de  $8 \times 8$  cm de base et comprenant 2 alvéoles recevant des plots d'aciers de 10 mm de diamètre terminés par des embouts hémisphériques. La distance entre plots est par exemple de 5 mm : c'est l'épaisseur de la pâte qui sera sollicitée. On mesure le rapprochement dans le temps de ces 2 plots soumis à une charge constante.

C'est grâce à cet ensemble d'appareils dont la plupart ont été mis au point ces 2 dernières années au CERILH que nous avons effectué nos essais de fluage. La photographie de la figure 7 montre d'ailleurs une des salles où l'on voit certains appareils décrits.

Nous aborderons dans la deuxième partie de cet exposé les résultats déjà obtenus.

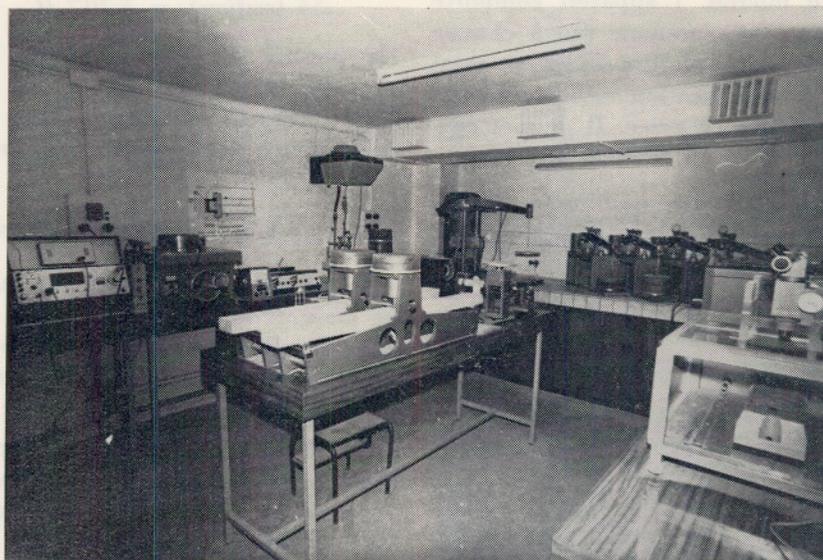


Fig. 7

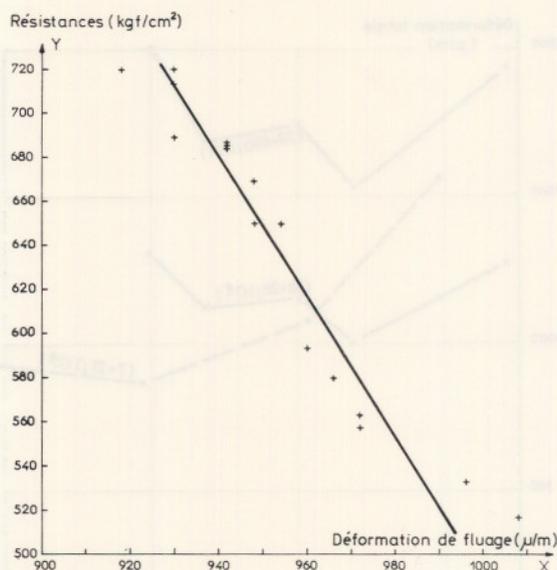


Fig. 8. — Relation résistances mécaniques - fluage en compression

Eprouvettes en béton 0/20 mm : 7 × 7 × 28 cm  
 Conservation : 28 jours dans l'eau puis 28 jours dans l'air à 50 % d'H.R. et 20° C sous une pression de 100 kgf/cm<sup>2</sup>.

## DEUXIEME PARTIE

### 2.1. Résultats obtenus en compression

#### 2.1.1. FLUAGE EN COMPRESSION ET RÉSISTANCES MÉCANIQUES

Je présenterai tout de suite un résultat important. On a trouvé une très bonne corrélation entre les valeurs du fluage et les résistances mécaniques au même âge et sur les mêmes éprouvettes. La figure 8 donne un exemple des résultats obtenus après 28 jours de chargement sous 100 kgf/cm<sup>2</sup> (essais sur béton 0/20 mm conservé 28 jours). Le coefficient de corrélation linéaire *r* de PEARSON :

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

a été trouvé égal à 0,96, ce qui indique que la corrélation est très forte. L'équation de la droite de regression serait ici

$$y \text{ (R. méca)} = - 2,76 x \text{ (fluage)} + 3 270$$

### 2.1.2. INFLUENCE DU CIMENT

#### Nature du ciment

Six ciments broyés à la même finesse ont servi à confectionner des éprouvettes en béton chargées à 0 (témoin de retrait) 50 et 150 kgf/cm<sup>2</sup> après 28 jours de durcissement préalable dans l'eau. Les résultats jusqu'à 1 an des retraits et des fluages dans l'air (et à 150 kgf/cm<sup>2</sup>) sont donnés sur la figure 9. Les conclusions suivantes peuvent en être tirées :

1 — Le fluage total (retrait compris) est à peu près proportionnel au logarithme du temps (nous avons toujours trouvé cette relation).

La formule la plus souvent mentionnée pour rendre compte du fluage visco-élastique est

$$\varepsilon(t) = k(1 - e^{-at})$$

Nous avons essayé sans succès d'appliquer cette formule à nos résultats en compression. A moins d'utiliser une formule très compliquée, on a trouvé jusqu'à présent que c'était encore

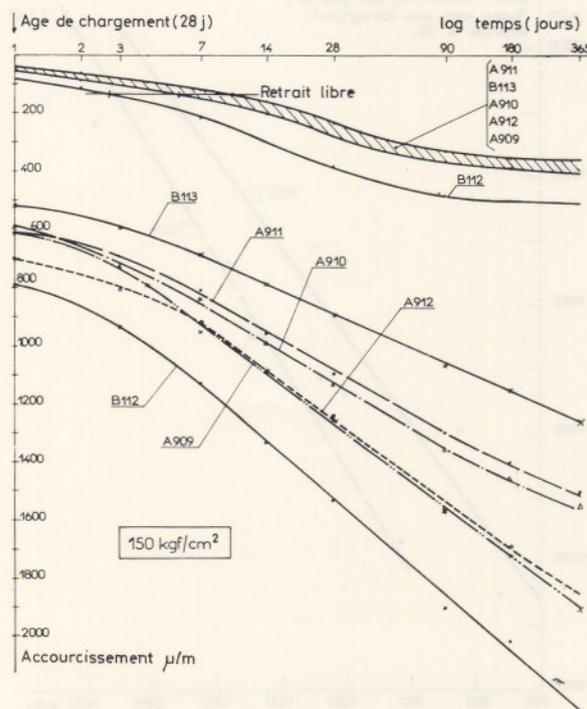


Fig. 9. — Fluage comparé de différents ciments  
 Béton 0/15 mm - 350 kg de ciment/m<sup>3</sup>  
 Eprouvettes de 7 × 7 × 28 cm

le logarithme du temps (au moins entre 1 et 365 jours) qui donnait avec nos matériaux la meilleure approximation de la progression du fluage dans le temps.

2 — Les retraits libres (mis à part le cas du ciment B 112) sont très proches les uns des autres. Par contre les fluages sont très différents d'un ciment à l'autre (ils varient presque du simple au double).

3 — Il semble, mais il faudrait le confirmer, que les ciments donnant le minimum de fluage seraient ceux à faible teneur en  $C_3A$  et à forte teneur en  $C_3S$  ainsi qu'une faible teneur en alcalis.

4 — On a trouvé un classement analogue entre :

— les fluages sur éprouvettes de  $7 \times 7 \times 28$  cm en béton après 6 mois et 1 an de chargement et

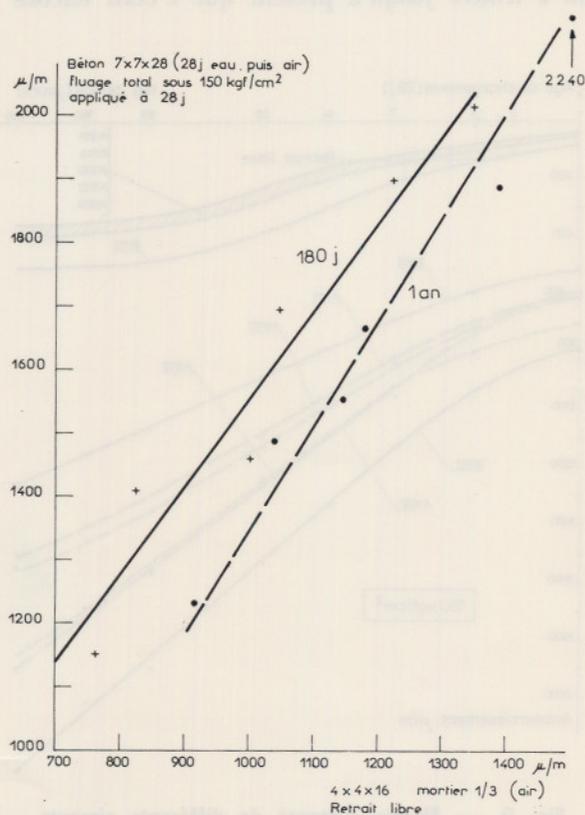


Fig. 10. — Corrélation retrait libre/fluage à 180 jours et 1 an

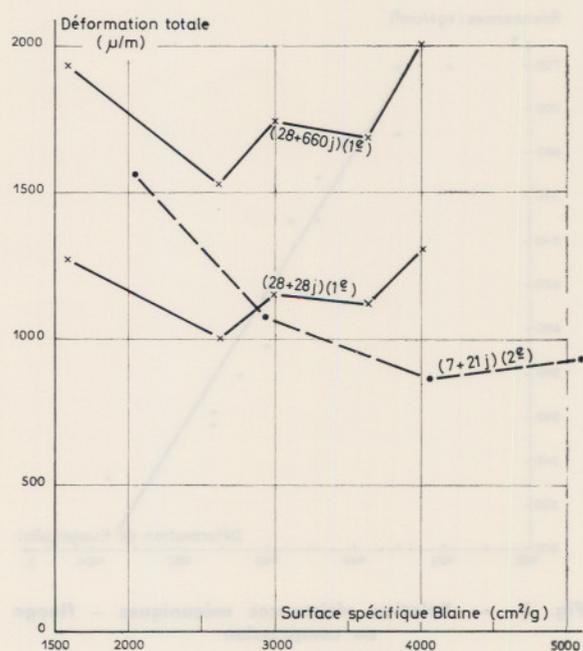


Fig. 11. — Déformations totales en fonction de la finesse (études n<sup>os</sup> 1 et 2 sur la finesse)

— les retraits libres sur prismes de  $4 \times 4 \times 16$  cm en mortier  $1/3$  aux mêmes âges malgré les différences de dimension d'éprouvettes et de matériaux (figure 10).

#### Finesse du ciment

Des études ont été faites en faisant varier la finesse du ciment de 1 500 à 5 000  $\text{cm}^2/\text{g}$ . La figure 11 donne les déformations totales obtenues jusqu'à près de 2 ans et pour une contrainte de compression de  $150 \text{ kgf}/\text{cm}^2$ . Il semble y avoir un fluage minimum pour une certaine finesse de mouture. Cela se conçoit bien car les ciments grossiers, qui ont des résistances mécaniques plus faibles, se déforment plus, surtout aux premiers âges. Par contre les ciments fins demandent plus d'eau de gâchage et leurs résistances mécaniques plafonnent plus vite. Ils ont de plus un retrait hydraulique un peu plus élevé. On comprend alors qu'après un temps de chargement assez long, ils puissent avoir une déformation totale (y compris le retrait hydraulique qui s'y trouve intégré), un peu plus forte.

*Essais comparés pâte pure/béton*

Des essais limités ont été faits sur pâte pure et sur béton mis en charge sous 150 kgf/cm<sup>2</sup> après 28 jours de conservation initiale dans l'eau.

Les éprouvettes ont été conservées dans l'air ou dans l'eau. Les constatations suivantes ont pu être faites :

*dans l'eau* : le fluage à 1 an est presque 3 fois plus élevé sur pâte que sur béton ; cela s'expliquerait par le fait que c'est surtout la pâte qui flue ;

*dans l'air* : le fluage est par rapport à la conservation dans l'eau de 2 à 3 fois plus élevé aussi bien pour la pâte pure que pour le béton.

A la vue de ces résultats, on peut prévoir qu'il existe un certain dosage en ciment, donc en pâte pure, donnant le fluage minimum. En effet, le fluage est un phénomène complexe tenant compte d'un certain nombre de facteurs variant dans un sens favorable ou défavorable :

— le fluage intrinsèque augmente avec le volume de pâte pure (mais on ne peut pas faire un béton sans pâte pure qui aurait des vides et aucune résistance) ;

— le fluage diminue lorsque les résistances mécaniques augmentent (celles-ci augmentent elles-mêmes en fonction du dosage en pâte pure, mais la progression cesse d'être linéaire au-delà d'un certain dosage) ;

— le retrait hydraulique augmente en fonction du volume absolu de pâte pure.

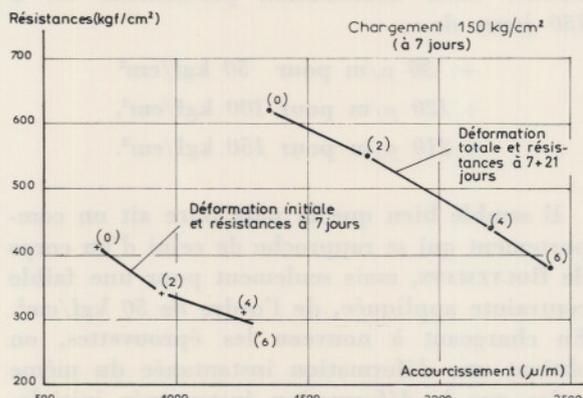


Fig. 12. — Corrélation résistances/accourcissement Influence de l'air occlus (%)

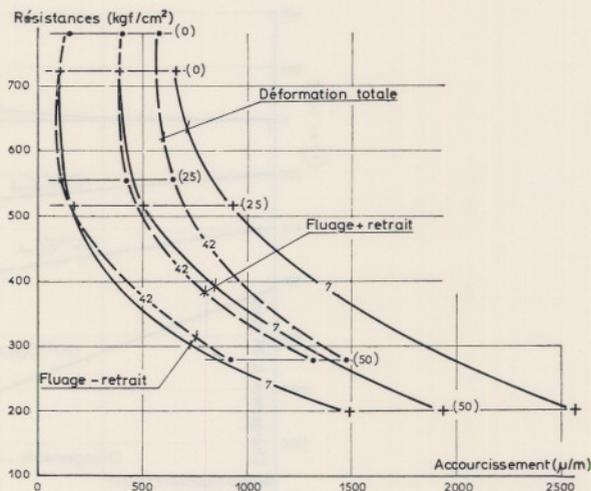


Fig. 13. — Corrélation résistance/accourcissement Mélange CPA + chaux

éprouvettes 7 × 7 × 28 cm  
 béton 0/15 mm  
 350 kg/m<sup>3</sup>  
 eau 7 j puis air  
 ou eau 42 j puis air  
 chargement : 50 kgf/cm<sup>2</sup>  
 0 % de chaux  
 25 % » »  
 50 % » »

*Autres essais*

Bien d'autres résultats ont été obtenus, en ce qui concerne l'ajout de constituants secondaires (comme les laitiers de haut fourneau et les centres volantes), ou l'ajout d'accélérateurs ou d'entraîneurs d'air. Le détail des résultats intéressés surtout les spécialistes des liants hydrauliques. On peut cependant retenir que ces ajouts modifient le fluage dans la mesure où ils modifient les résistances mécaniques (exemple de l'influence de l'air occlus, figure 12).

Je parlerai cependant des mélanges ciment-chaux grasse qui nous ont permis de préciser la relation qui existe entre les résistances mécaniques et le fluage, et dont les résultats nous ont montré qu'à résistances mécaniques égales, les déformations étaient d'autant plus importantes que les éprouvettes étaient plus jeunes et mises en charge plus tôt. La figure 13 indique la relation qui existe entre les déformations

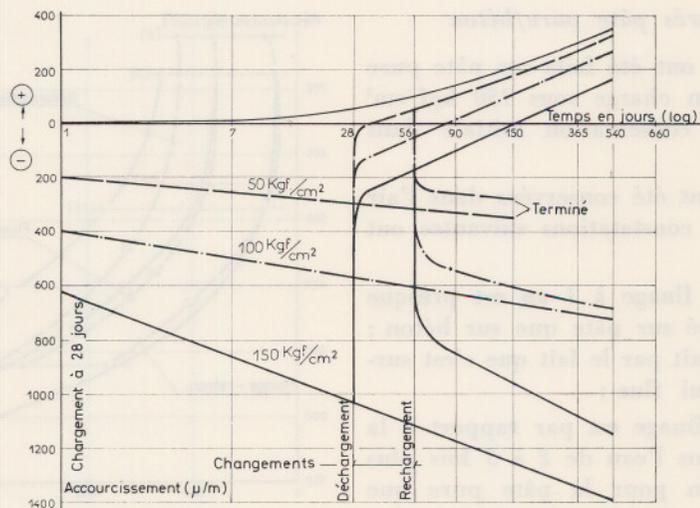


Fig. 14. — Courbe de fluage et de relaxation  
 (1<sup>er</sup> chargement à 28 jours)  
 7 × 7 × 28 cm — Eau à 20° C — Pâte pure

$\varepsilon(t)$  après 28 jours de chargement et les résistances mécaniques correspondantes  $R$ . Cette relation est de la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{K}{R^n} \text{ (où } K \text{ et } n \text{ sont des paramètres}$$

variables avec la nature du liant et les conditions opératoires). Ici on trouverait :

$$\varepsilon(t) = \frac{K}{R^{2,16}}$$

Je mentionnerai (pour terminer l'examen de certains résultats obtenus en fluage par compression uni-axiale) nos essais de chargement et de déchargement sur éprouvettes de pâte pure. Elles ont toutes été conservées 28 jours dans l'eau puis ont été contraintes sous 0 (témoin), 50, 100 et 150 kgf/cm<sup>2</sup>. Certaines d'entre elles ont été déchargées après 28 jours puis laissées sans charge ou rechargées après à nouveau 28 jours (dans chaque cas, il existe toujours un témoin chargé). Cet essai avait pour but de connaître l'allure des courbes de retour et la valeur des déformations résiduelles et de voir si dans ce cas, le corps étudié peut être assimilé à un corps de BOLTZMANN.

Les résultats obtenus sont donnés sur la figure 14.

On constate à nouveau que :

- la déformation instantanée sous charge est proportionnelle à la charge appliquée,
- le fluage est proportionnel au logarithme du temps.

Après déchargement, très rapidement le matériau regonfle de la valeur de la déformation instantanée, mais il ne rattrape pas le témoin non chargé ; il subsiste à 150 jours une déformation permanente qui est d'autant plus importante que la contrainte appliquée a été plus élevée. Cette déformation permanente est à 150 jours de :

$$\begin{aligned} &+ 30 \mu/m \text{ pour } 50 \text{ kgf/cm}^2 \\ &+ 120 \mu/m \text{ pour } 100 \text{ kgf/cm}^2, \\ &+ 210 \mu/m \text{ pour } 150 \text{ kgf/cm}^2. \end{aligned}$$

Il semble bien que la pâte pure ait un comportement qui se rapproche de celui d'un corps de BOLTZMANN, mais seulement pour une faible contrainte appliquée, de l'ordre de 50 kgf/cm<sup>2</sup>. En chargeant à nouveau les éprouvettes, on obtient une déformation instantanée du même ordre que la déformation instantanée initiale, mais par contre le fluage est long à rattraper le fluage du témoins (il ne le rattrapera peut-être

jamais dans le cas de  $150 \text{ kgf/cm}^2$ . Les pentes de courbes sont analogues au 2<sup>e</sup> et au 1<sup>er</sup> chargement à la dispersion près des résultats.

*Remarque*

On peut encore améliorer les mesures et réduire les dispersions :

— en sélectionnant un lot d'éprouvettes au moment du démoulage et grâce à 2 critères non destructifs :

. le poids,

. la vitesse du son (les vitesses du son donnent des indications très précises et une très bonne corrélation avec les résistances mécaniques, surtout aux premiers âges, au démoulage en particulier),

— en étalonnant périodiquement et rapidement les manomètres sans avoir à décharger les éprouvettes.

**2.2. Résultats obtenus en traction pure**

Des essais ont été faits sur éprouvettes de  $2 \times 2 \times 28 \text{ cm}$  en mortier 1/3 après 28 j de conservation préalable dans l'eau. Ces éprouvettes, mises ensuite dans l'air à 50 % d'humidité relative, ont été chargées sous des contraintes de 10, 20 et 30  $\text{kgf/cm}^2$ . Les résultats de la figure 15 montrent que les déformations totales progressent d'abord en fonction du logarithme du temps puis tendent à se stabiliser. Le fluage seul (obtenu par différence entre la déformation totale et le retrait hydraulique libre) progresse régulièrement dans le temps : il est proportionnel à la charge appliquée. Les déformations instantanées au chargement (temps 0, non représenté sur le graphique) sont respectivement de + 30 + 55 et + 75  $\mu/\text{m}$  pour des contraintes de 10, 20 et 30  $\text{kgf/cm}^2$ . A la dispersion près des résultats, la déformation instantanée est à peu près proportionnelle à la charge appliquée.

On a montré d'autre part que le fluage en traction proprement dit est d'autant plus faible que le ciment a de plus fortes résistances mécaniques. Une corrélation très nette apparaît entre les résistances en compression (à 28 j) et le

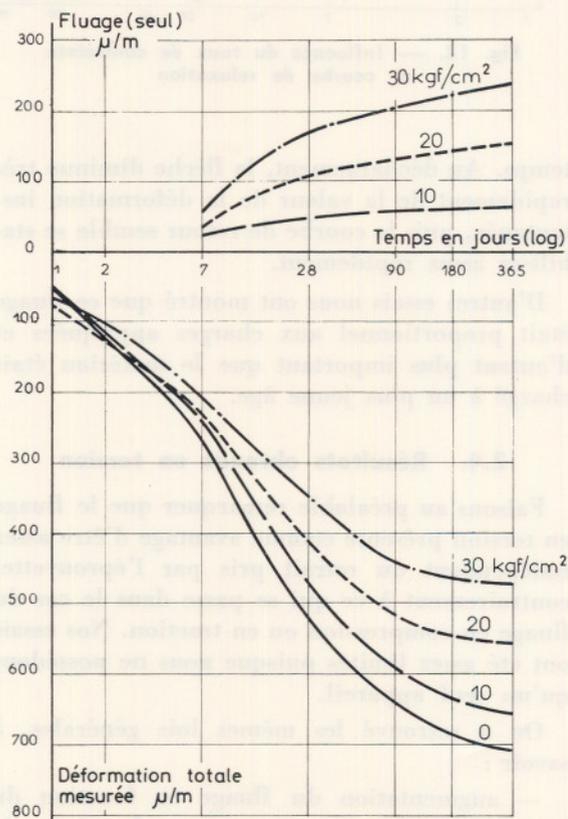


Fig. 15. — Influence du taux de chargement sur le fluage en traction pure  
Mortier 1/3 Afnor

Résistance en compression à 28 jours ( $\text{kgf/cm}^2$ )

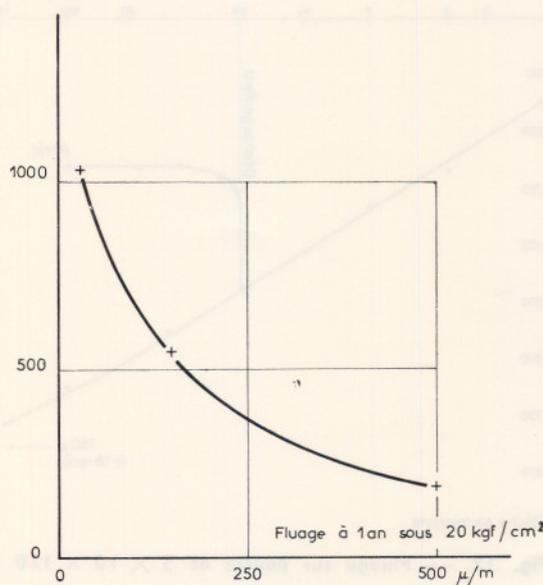


Fig. 16. — Relation résistance en compression et fluage en traction

fluage à 1 an (la corrélation ne serait pas bonne dans le cas de la résistance en traction par flexion). C'est ce que montre la figure 16 : la corrélation est bien ici mise en évidence car on a opéré avec des ciments ayant des caractéristiques très différentes.

On remarque que le fluage à 1 an est de l'ordre de  $250 \mu/m$  en compression pour une contrainte de  $50 \text{ kgf/cm}^2$ . On peut donc en conclure, au moins en première approximation, que le fluage spécifique proprement dit est du même ordre de grandeur en compression qu'en traction. Cela est une conclusion à la fois pratique et théorique importante. (Nous nous proposons de reprendre ces essais).

### 2.3. Résultats obtenus en flexion

J'ai sélectionné parmi nos résultats celui relatif aux essais effectués sur prismes de mortier chargés après 28 jours sous  $15 \text{ kgf/cm}^2$  (poids central de 25 kg). Une éprouvette est restée chargée, l'autre a été déchargée après 28 jours et l'on a tracé la courbe de recouvrance, une autre éprouvette témoin a servi à mesurer le retrait libre. La figure 17 montre que le fluage en flexion progresse également linéairement en fonction du logarithme du

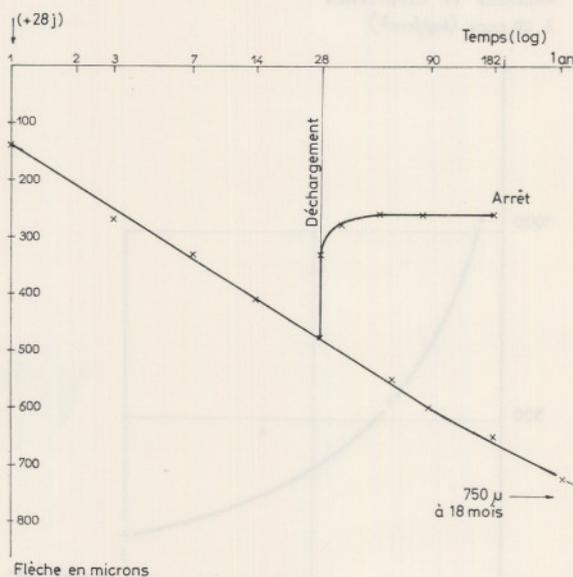


Fig. 17. — Fluage sur poutre de  $5 \times 10 \times 120 \text{ cm}$  mortier 1/3 Afnor (distance entre appuis : 100 cm chargement : 25 kg)

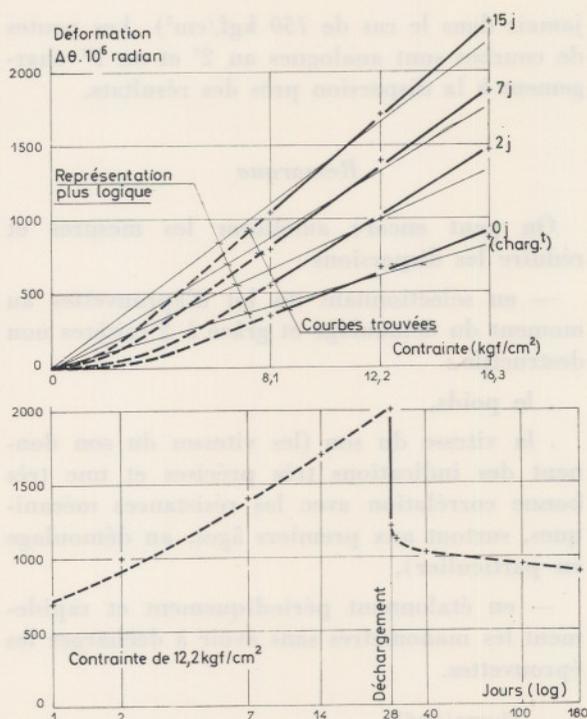


Fig. 18. — Influence du taux de contrainte et courbe de relaxation

temps. Au déchargement, la flèche diminue très rapidement de la valeur de la déformation instantanée, puis la courbe de retour semble se stabiliser assez rapidement.

D'autres essais nous ont montré que ce fluage était proportionnel aux charges appliquées et d'autant plus important que le matériau était chargé à un plus jeune âge.

### 2.4. Résultats obtenus en torsion

Faisons au préalable remarquer que le fluage en torsion présente comme avantage d'être assez indépendant du retrait pris par l'éprouvette, contrairement à ce qui se passe dans le cas du fluage en compression ou en traction. Nos essais ont été assez limités puisque nous ne possédons qu'un seul appareil.

On a retrouvé les mêmes lois générales, à savoir :

— augmentation du fluage en fonction du logarithme du temps ou en fonction de  $K(1 - e^{-\alpha t})$ ,  $K$  et  $\alpha$  étant des paramètres variables suivant la nature du matériau et les condi-

tions de conservation (cette dernière formule s'est montré dans ce cas satisfaisante),

— proportionnalité du fluage en torsion et des contraintes appliquées lorsque celles-ci ne sont pas trop élevées,

— proportionnalité entre le fluage en torsion et les résistances mécaniques.

La figure 18 donne un exemple de résultats obtenus. On voit :

1) la proportionnalité torsion/contraintes appliquées,

2) la courbe de déchargement (après 28 jours). Dès que la charge est enlevée, l'éprouvette reprend très rapidement pratiquement la valeur de la déformation initiale instantanée (comme dans le cas de la relaxation d'éprouvettes sollicitées en compression).

### 2.5. Résultats obtenus avec les appareils d'empreinte sous charge

Les conclusions sont les suivantes (essais effectués sur pâte pure).

Les déformations sont instantanées lors de la mise en charge et elles progressent ensuite lentement.

Les déformations totales sont d'autant plus élevées que le matériau a une plus faible résis-

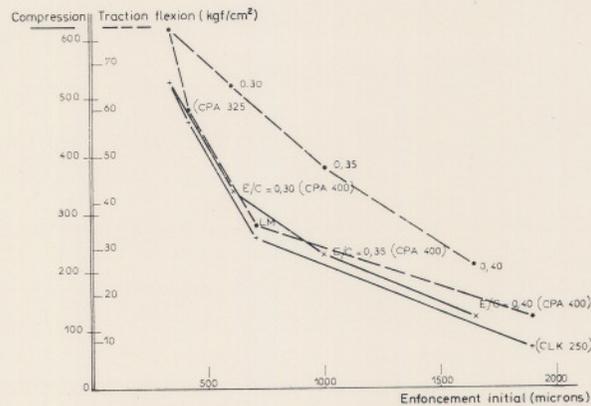


Fig. 19. — Essai d'empreinte sous charge  
Chargement : 150 kg à 24 h (bille de 10 mm)  
Pâte pure  
Corrélation enfoncement/résistances

tance mécanique, c'est-à-dire que les déformations sont d'autant plus fortes :

— que le ciment essayé a de plus faibles résistances,

— que le rapport  $E/C$  est plus élevé (les déformations sont multipliées par 3 en passant d'un  $E/C = 0,25$  à un  $E/C = 0,40$ ),

— que le matériau est sollicité à un plus jeune âge.

Une illustration de ceci est donnée sur la figure 19.

### 3. CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Nos études vont se poursuivre et dureront sans doute encore pendant de nombreuses années.

L'ensemble de ces résultats présentés forme un tout cohérent. Bien qu'il n'ait pas été possible de trouver une formule générale simple tenant compte des paramètres principaux, le sens des variations observées et les ordres de grandeur donnés devraient être utiles aux praticiens. Dans l'état actuel des recherches, il vaut mieux se servir de graphiques plutôt que de formules empiriques pour évaluer le fluage.

Les appareils élaborés et les problèmes soulevés par certains points de ces recherches permettront d'une part la poursuite de nos propres recherches et d'autre part celles d'autres expérimentateurs en vue d'une meilleure connaissance de tous ces problèmes complexes.

Il resterait également à préciser comment évolue :

— le fluage en fonction du rapport :  $\frac{\text{contrainte appliquée}}{\text{résistance du matériau}}$

— le fluage d'un béton sollicité non seulement par des contraintes mono-axiales, mais également par des contraintes bi et tri-axiales,

— le coefficient de Poisson.

Nous nous proposons d'étudier dans l'avenir tous ces problèmes.

# Sur une méthode d'approximation des courbes rationnelles de traction

par A. POPOFF

Ex-Ingénieur de Recherches à l'ONERA (1)

## RESUME

L'auteur étudie la relation entre la contrainte et la déformation résultant d'un essai de traction simple mené jusqu'à la plastification. Il propose une expression analytique qui concorde avec l'expérience.

## SUMMARY

The author examines the relationship between stress and strain resulting from a simple tension test taken to a plastic state. He proposes an analytical expression consistent with the experiment.

## I

Les solutions des problèmes de la théorie de la plasticité contiennent les fonctions mathématiques qui expriment les propriétés rhéologiques des matériaux et, en particulier, leur résistance à la déformation plastique. Ces fonctions sont établies, dans chaque cas particulier, par l'approximation des courbes expérimentales au moyen de formules relativement simples, commodes dans les applications numériques. Elles sont donc de nature purement formelle.

La fonction fondamentale, à partir de laquelle les autres fonctions peuvent être déduites,

exprime la relation entre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  en traction simple. Désignons cette fonction par :

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) \quad (1)$$

Sa forme mathématique est obtenue par une mise en équation de la « courbe rationnelle de traction » du matériau donné :

$$\sigma_e = \varphi(\varepsilon_e) \quad (2)$$

où  $\sigma_e$  et  $\varepsilon_e$  expriment les valeurs expérimentales relevées au cours de l'essai de traction :

$$\sigma_e = \alpha \frac{P}{S} \quad (3)$$

(1) Décédé le 9-9-1970.

$$\varepsilon_e = \ln \frac{S_0}{S} \quad (4)$$

avec :

$P$  : l'effort total de traction,

$\alpha$  : un coefficient de correction tenant compte de l'effet de forme (striction),

$S_0$  : section initiale du barreau d'essai,

$S$  : section minimale du barreau correspondant à l'effort  $P$ .

La forme courante de la fonction  $\sigma = \Phi(\varepsilon)$  est :

$$\sigma = \sigma_1 \varepsilon^n \quad (5)$$

$\sigma_1, n$  étant des constantes.

La coïncidence de la forme (5) avec des courbes expérimentales (2), en général, est satisfaisante. Toutefois, comme nous allons le montrer plus loin, si d'autres fonctions, déduites de (5) interviennent dans les opérations mathématiques, la divergence, même faible, de l'allure des courbes (5) et (2) peut devenir prohibitive et entraîner dans les solutions finales des calculs des erreurs inadmissibles. C'est pourquoi, dans cette note, nous nous proposons d'établir une formule comprenant un facteur correctif à la formule

$$\sigma = \sigma_1 \varepsilon^n$$

permettant d'améliorer la concordance des courbes théoriques et expérimentales. La formule proposée s'écrit :

$$\sigma = C e^{ae} \varepsilon^b \quad (6)$$

$C, a, b$ , constantes,

$e$ , base des logarithmes naturels.

## II

Outre la fonction  $\sigma = \Phi(\varepsilon)$ , les fonctions importantes sont : le module de plasticité :

$$E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \Phi'(\varepsilon) \quad (7)$$

le module moyen de plasticité :

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \Psi(\varepsilon) \quad (8)$$

le module réduit :

$$E_3 = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \Omega(\varepsilon) \quad (9)$$

Introduisons, pour les raisons que nous développerons plus loin, la fonction :

$$E_4 = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \theta(\varepsilon) \quad (10)$$

et désignons par :

$$E_{1e} = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} = \varphi'(\varepsilon_e) \quad (11)$$

$$E_{2e} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} = \varphi(\varepsilon_e) \quad (12)$$

$$E_{3e} = \frac{1}{\sigma_e} \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} = \omega(\varepsilon_e) \quad (13)$$

$$E_{4e} = \frac{E_{1e}}{E_{2e}} = \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} = v(\varepsilon_e) \quad (14)$$

les graphiques des courbes expérimentales.

Dans l'exemple concret d'un acier doux ( $R = 39,1 \text{ kg/mm}^2$ ), métal très ductile, nous allons comparer le degré de l'approximation de la courbe rationnelle de traction par les deux formules  $\sigma = \sigma_1 \varepsilon^n$  et  $\sigma = C e^{ae} \varepsilon^b$  en étendant la comparaison à des fonctions (7) à (10), dont la bonne coïncidence avec les graphiques expérimentaux est une vérification indispensable du choix rationnel des formules fondamentales (1).

Ecrivons les formules (1), (7), (8), (9) et (10) pour la fonction  $\sigma = \sigma_1 \varepsilon^n$  :

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) = \sigma_1 \varepsilon^n \quad (15)$$

$$E_1 = \Phi'(\varepsilon) = n \sigma_1 \varepsilon^{n-1} \quad (16)$$

$$E_2 = \Psi(\varepsilon) = \sigma_1 \varepsilon^{n-1} \quad (17)$$

$$E_3 = \Omega(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma} n \sigma_1 \varepsilon^{n-1} = \frac{n}{\varepsilon} \quad (18)$$

$$E_4 = \theta(\varepsilon) = n \quad (19)$$

et pour la formule  $\sigma = C e^{ae} \varepsilon^b$  :

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) = C e^{ae} \varepsilon^b \quad (20)$$

$$E_1 = \Phi'(\varepsilon) = C e^{ae} \varepsilon^b \left( a + \frac{b}{\varepsilon} \right) \quad (21)$$

$$E_2 = C e^{ae} \varepsilon^{b-1} \quad (22)$$

$$E_3 = a + \frac{b}{\varepsilon} \quad (23)$$

$$E_4 = a \varepsilon + b \quad (24)$$

L'idée d'introduire le facteur correctif  $e^{ae}$  dans la formule du type  $\sigma = \sigma_1 \varepsilon^b$  est précisément venue de l'examen du graphique expé-

mental  $E_{\epsilon_e} = v(\epsilon_e)$ , figure 3. A priori, il paraît évident que l'approximation d'un graphique quelconque  $Y = f(X)$  par une droite  $Y = AX + B$  doit être plus général et supérieur à l'approximation par une droite  $Y = A$ . Appliquons ce raisonnement et écrivons l'équation (24) sous la forme différentielle :

$$\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\epsilon} = a\epsilon + b \quad (25)$$

dont l'intégration donne précisément l'équation proposée :

$$\sigma = C e^{a\epsilon} \epsilon^b$$

tandis que l'intégration de (19) :

$$\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\epsilon} = n$$

donne la formule classique :  $\sigma = \sigma_1 \epsilon^n$

La méthode pratique de la mise en équation de  $\sigma_e = \varphi(\epsilon_e)$  par la formule proposée consiste à tracer préalablement le graphique  $E_{\epsilon_e}$  dont on cherche l'approximation par une droite  $a\epsilon + b$  et, ayant ainsi déterminé les constantes  $a$  et  $b$ , à chercher, par une des méthodes connues, la valeur de la constante  $C$ , en prenant, par exemple :

$$C = \frac{1}{N} \sum \frac{\sigma_e}{e^{a\epsilon} \epsilon^b} \quad (26)$$

$N$ , nombre des points expérimentaux.

### III

Nous avons choisi, pour illustrer la méthode, le cas d'un acier doux, métal extrêmement ductile, permettant d'explorer la déformation dans les limites très larges. Il est apparu dès le début, que l'approximation de la courbe entière, même par la formule  $\sigma = C e^{a\epsilon} \epsilon^b$ , n'était pas possible. Il a fallu donc diviser la courbe en deux tronçons :

tronçon A :  $\epsilon_e$  compris entre 0,04 et 0,12,

tronçon B :  $\epsilon_e$  supérieur à 0,12 jusqu'à 1,30.

( $\epsilon_e = 0,04$  est sensiblement égal à

$$A \% = 4,1$$

$\epsilon_e = 0,12$  est sensiblement égal à

$$A \% = 12,75$$

$\epsilon_e = 1,30$  est sensiblement égal à

$$A \% = 267,0).$$

La figure 1 donne les courbes expérimentales  $\varphi(\epsilon_e)$  et  $\varphi'(\epsilon_e)$ . Le point d'intersection des deux courbes détermine le point  $\sigma_m, \epsilon_m$  pour lequel on a évidemment :

$$\frac{d\sigma_m}{d\epsilon_m} = \sigma_m \quad (27)$$

On sait que la contrainte  $\sigma_m$  correspond à la valeur maximale  $P_m$  de la charge variable  $P$  enregistrée au cours de l'essai de traction, c'est-à-dire que

$$\sigma_m S = P_m, \quad (28)$$

d'autre part, la charge de rupture  $R$  est définie comme le rapport :

$$R = \frac{P_m}{S_0} \quad (29)$$

Les formules (4), (21) et (29) donnent :

$$\sigma_m e^{-\epsilon_m} = R \quad (30)$$

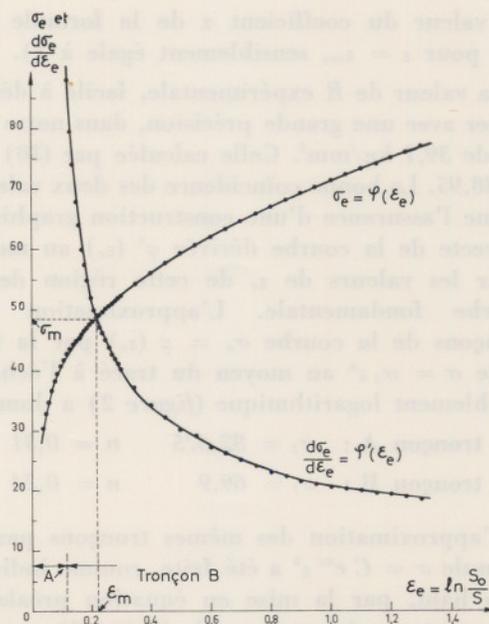


Fig. 1

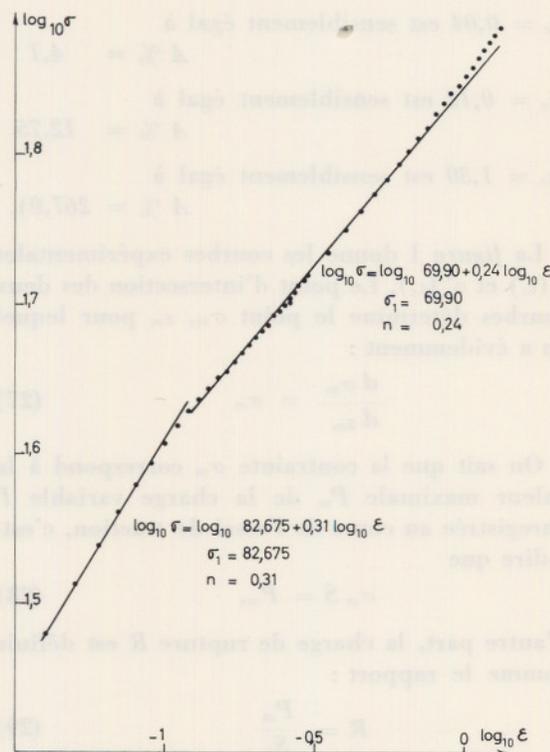


Fig. 2

(la valeur du coefficient  $\alpha$  de la formule (3) est, pour  $\varepsilon = \varepsilon_m$ , sensiblement égale à 1).

La valeur de  $R$  expérimentale, facile à déterminer avec une grande précision, dans notre cas est de  $39,1 \text{ kg/mm}^2$ . Celle calculée par (30) est de  $38,95$ . La bonne coïncidence des deux valeurs donne l'assurance d'une construction graphique correcte de la courbe dérivée  $\varphi'(\varepsilon_c)$  au moins pour les valeurs de  $\varepsilon_c$  de cette région de la courbe fondamentale. L'approximation des tronçons de la courbe  $\sigma_c = \varphi(\varepsilon_c)$  par la formule  $\sigma = \sigma_1 \varepsilon^n$  au moyen du tracé à l'échelle doublement logarithmique (figure 2) a donné :

$$\begin{aligned} \text{tronçon A : } & \sigma_1 = 82,675 & n = 0,31 \\ \text{tronçon B : } & \sigma_1 = 69,9 & n = 0,24 \end{aligned}$$

L'approximation des mêmes tronçons par la formule  $\sigma = C e^{a\varepsilon} \varepsilon^b$  a été faite, comme indiqué plus haut, par la mise en équation préalable des points expérimentaux  $E_{i,c}$  (figure 3) par les droites :

TABLEAU I

Ecartes moyennes quadratiques %

Formule théorique	$\sigma = C e^{a\varepsilon} \varepsilon^b$	$\sigma = \sigma_1 \varepsilon^n$
1) Fonction $\sigma$		
tronçon A :	0,28	0,48
tronçon B :	0,26	1,22
2) Fonction $E_1$		
tronçon A :	2,45	14,07
tronçon B :	2,62	12,40
3) Fonction $E_2$		
tronçon A :	2,06	14,04
tronçon B :	2,87	10,44
4) Fonction $E_3$		
tronçon A :	0,32	0,46
tronçon B :	0,30	1,24
5) Fonction $E_4$		
tronçon A :	1,96	14,14
tronçon B :	2,64	11,74

$$\text{tronçon A : } E_i = -1,5 \varepsilon + 0,415$$

$$\text{tronçon B : } A_i = 0,086 \varepsilon + 0,205$$

Les constantes  $C$  pour deux tronçons, déterminées par la formule (26) sont respectivement 134,8 et 65,24, et les équations définitives sont :

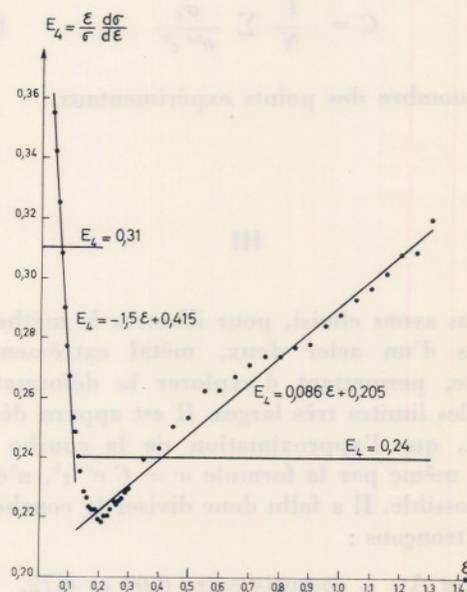


Fig. 3

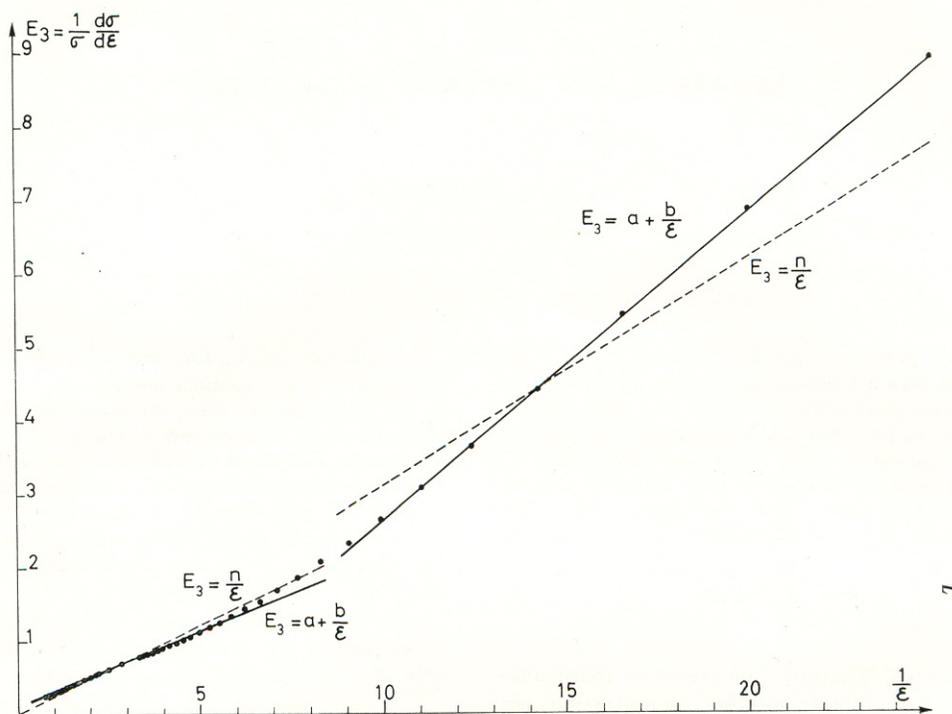


Fig. 4

tronçon A :

$$\sigma = 134,8 e^{-1,5\epsilon} \epsilon^{0,415} \quad (0,04 \leq \epsilon \leq 0,12)$$

tronçon B :

$$\sigma = 65,24 e^{0,086\epsilon} \epsilon^{0,205} \quad (\epsilon > 0,12)$$

En traçant, sur le graphique de  $E_{3e}$  de la figure 3, les horizontales  $n = 0,31$  et  $n = 0,24$ , on constate l'écart considérable entre les valeurs théoriques déduites de la formule  $\sigma = \epsilon^n$  et celles tirées des données expérimentales.

La figure 4 montre également, dans le cas de la fonction  $E_3$  (module réduit), la supériorité de la formule  $\sigma = C e^{a\epsilon} \epsilon^b$ . La figure 4 est tracée en coordonnées  $E_3, \frac{1}{\epsilon}$ .

Le tableau I donne les écarts quadratiques moyens, pour chaque tronçon de courbe, entre les valeurs calculées par les formules théoriques et les données expérimentales. Les écarts sont calculés en %.

### CONCLUSION

L'examen du tableau permet de constater la supériorité de la formule proposée en la comparant à la formule classique, notamment, en ce qui concerne les modules de plasticité  $E_1, E_2$  et la fonction  $E_3$  pour lesquels les écarts obtenus par la formule  $\sigma = \sigma_1 \epsilon^n$  sont de l'ordre de 10 à 14 % et la rendent, pour certains calculs, inutilisable.

## REMARQUE SUR L'ARTICLE DE M. POPOFF

par A. ZAOUI

Laboratoire de Mécanique des Solides,  
Ecole Polytechnique

La méthode préconisée par M. POPOFF s'applique particulièrement bien à l'analyse de courbes de traction suffisamment lisses pour permettre une bonne approximation de la dérivée, et pour des matériaux à seuil de plasticité négligeable. Quand ce n'est pas le cas, on a intérêt à utiliser la « méthode des différences finies », proposée par I. DE LACOMBE (*Rev. Mét.*, 36, (1939), 178). Cette méthode permet des approximations « paraboliques » du type :

$$y = y_0 + k x^\alpha \quad (1)$$

avec  $\alpha > 0$ .

Son principe est le suivant : on relève les coordonnées  $y_p$  des points d'abscisse  $x_p$  croissant en progression géométrique de raison  $a$  :

$$x_p = a^{p-1} x_1$$

avec  $p$  entier  $\geq 1$ ,  $a > 1$ , soit  $\Delta y_p$  la différence d'ordonnée entre les points voisins d'abscisse  $x_p$  et  $x_{p+1}$ . On a :

$$\Delta y_p = y_{p+1} - y_p = k (a^\alpha - 1) x_p^\alpha$$

d'où :

$$\log \Delta y_p = \log [k (a^\alpha - 1)] + \alpha \log x_p$$

En reportant  $\Delta y_p$  en fonction de  $x_p$  sur un diagramme bilogarithmique, on obtient une courbe qui, si l'équation (1) est à peu près vérifiée, est assimilable à un segment de droite dont la pente est  $\alpha$ . On peut ainsi apprécier directement l'exposant  $\alpha$ , indépendamment de  $k$  et de  $y$ , ces quantités pouvant être alors aisément calculées. Pour améliorer la précision de la mesure, on peut changer la valeur initiale  $x_1$ , les points correspondants s'alignant sur la même droite, ou changer la raison  $a$  : on obtient une droite parallèle à la première.

La méthode s'étend aisément au cas de courbes logarithmiques ou « hyperboliques » ( $\alpha < 0$ ). Elle est utilisable aussi bien pour l'analyse des courbes de traction :

$$\sigma = \sigma_{pl} + A \varepsilon_{pl}^\alpha$$

où  $\sigma_{pl}$  est le seuil de plasticité et  $\varepsilon_{pl}$  la déformation plastique, que pour celle des courbes de fluage

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + Bt^\alpha$$

où  $t$  est le temps. On peut ainsi déterminer avec précision les valeurs initiales  $\sigma_{pl}$  ou  $\varepsilon_0$ , difficiles à apprécier directement, ou, dans le cas de courbes « hyperboliques », la valeur asymptotique de la variable mesurée.

## CONCLUSION