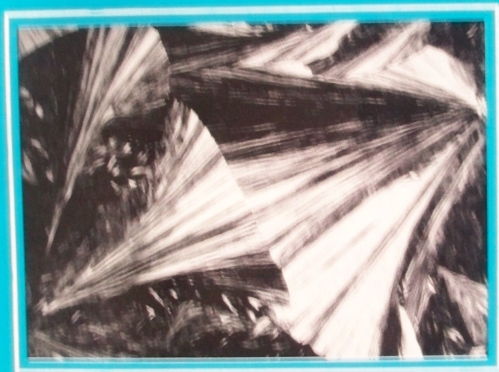


Revue

REVUE INTERNATIONALE DE RHEOLOGIE
FONDÉE EN 1963

DE
L'INDUSTRIE
MINÉRALE



CAHIERS
DU GROUPE
FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE
Tome II
Numéro 4

15 DÉCEMBRE 1970

NUMÉRO SPÉCIAL

COLLECTIVITES MEMBRES DU GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

- Aquitaine-Organico. Laboratoire d'Applications de Serquigny. 27 — Serquigny.
- Bassin d'Essais des Carènes, 6, bd Victor, 75 — Paris (15^e).
- Bibliothèque de l'École Nationale Supérieure des Mines, 60, bd St-Michel, 75 — Paris (6^e).
- Centre d'Essais et de Recherches Techniques des Tabacs, B.P. n° 2, 45 — Fleury-les-Aubrais.
- Centre d'Etudes du Bouchet (Direction des Poudres), 91 — Vert-le-Petit.
- Centre d'Etudes des Matières Plastiques, 21, rue Pinel, 75 — Paris (13^e).
- Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, 35, rue St-Dominique, 75 — Paris (7^e).
- Centre d'Etudes et de Recherches de l'Industrie des Liants Hydrauliques, 23, rue de Cronstadt, 75 — Paris (15^e).
- Centre de Recherches, C.E.R.C.A., 26 — Romans-sur-Isère.
- Centre de Recherches sur les Macromolécules, 6, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Centre de Recherches Routières, Fokkerdreef 21, 1960 — Sterrebeek, Belgique.
- Centre Technique du Cuir, 181, av. Jean-Jaurès, 69 — Lyon (6^e).
- Centre Technique de l'Industrie Horlogère, 39, av. de l'Observatoire, 25 — Besançon.
- Centre Technique de l'Industrie des Papiers, Cartons et Celluloses, CEDEX n° 175, 38 — Grenoble-Gare.
- Centre Technique des Tuiles et Briques, 2, av. Hoche, 75 — Paris (8^e).
- Chemistry and Physics Library, 303 Whitmore Laboratory, Pennsylvania State University, University Park, Penn. 16 802, USA.
- Compagnie Française de Raffinage, Centre de Recherches, B.P. n° 27, 76 — Harfleur.
- Compagnie Française Thomson — Houston, B.P. n° 10, 92 — Bagneux.
- Compagnie Péchinsy, 23, rue Balzac, 75 — Paris (8^e).
- Compagnie de Raffinage Shell-Berre, Centre de Recherches, 76 — Grand Couronne.
- Compagnie de Saint-Gobain, Direction des Recherches, Laboratoires Scientifiques, 52, bd de la Villette, 75 — Paris (19^e).
- Direction des Recherches et Moyens d'Essais, 5 bis, avenue de la Porte de Sèvres, 75 — Paris (15^e).
- Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Laboratoire de Mécanique des Sois, 92 — Châtenay-Malabry.
- Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, Service Documentation, 6, quai Watier, 78 — Chatou.
- Electricité de France, Service Géologique et Géotechnique, 3, rue de Messine, 75 — Paris (8^e).
- L'Electronique Appliquée, 98, rue Maurice-Arnoux, 92 — Montrouge.
- ELF-Union, Centre d'Etudes Nucléaires, Chemin des Martyrs, 38 — Grenoble.
- ESSO-Standard, S.A.F., Centre de Recherches de Mont-Saint-Aignan, 76 — Mont-Saint-Aignan.
- Faculté des Sciences, Laboratoire de Mécanique, Route de Chauvigny, 86 — Poitiers.
- Fédération des Fabricants de Peintures, Vernis et Encres d'Imprimerie, Laboratoire des Peintures et Vernis, rue H.-Dunant, 94 — Thiais.
- Institut Français du Caoutchouc, 42, rue Scheffer, 75 — Paris (16^e).
- Institut Français du Pétrole, Dir. Doc. Inf. 1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92 — Rueil-Malmaison.
- Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis, 12, rue de l'Industrie, 68 — Saint-Louis.
- Institut de Mécanique Théorique et Appliquée de l'Académie Tchèqueoslovaque des Sciences, Vysehradská 49, Praha 2, Nové Mesto, Tchèqueoslovaquie.
- Institut National de la Recherche Agronomique, Etoile de Choisy, 78 — Versailles.
- Institut National des Sciences Appliquées, Bibliothèque Centrale, 20, avenue Albert-Einstein, 69 — Villeurbanne.
- Institut National des Sciences Appliquées, Département de Génie Civil, avenue de Ranguell, 31 — Toulouse.

CAHIERS
DU
GROUPE FRANÇAIS
DE RHÉOLOGIE

Tome II — N° 4

15 Décembre 1970

SOMMAIRE

	PAGES
G. VALLET et C. SMADJA	Étude de l'influence de la morphologie sur les propriétés mécaniques dynamiques des matériaux semi-cristallins 263
J.F. DELORME, J. PEREZ, P. PEGUIN et P. GOBIN	Amortissement interne dans le domaine de la déformation plastique 273
P. LE ROY et J.M. PIERRARD	L'étude de lois de comportement visco-élastique liquide au moyen d'écoulements de révolution 287
P. MORLIER	Comportement mécanique des solides poreux. Domaine élastique des corps poreux. Rôle de la pression de pore..... 295

Etude de l'influence de la morphologie sur les propriétés mécaniques dynamiques des matériaux semi-cristallins^(*)

par G. VALLET et C. SMADJA

Laboratoire de Chimie Macromoléculaire
de la Faculté des Sciences de Lyon

RESUME

Une tentative de corrélation entre la structure et les propriétés mécaniques du polypropylène a été faite en utilisant, d'une part différentes techniques permettant d'étudier la morphologie des éprouvettes, d'autre part une technique basée sur la transmission d'ondes ultrasonores grâce à laquelle on a pu déterminer les modules dynamiques de compressibilité et de cisaillement.

INTRODUCTION

Les essais mécaniques dynamiques permettent d'étudier la réponse d'un matériau soumis à des contraintes variables périodiquement dans le temps. Celles-ci sont en général sinusoïdales et conduisent simultanément à la mesure d'un module et de la fraction d'énergie transformée en chaleur.

De telles constantes sont d'un intérêt pratique important pour les mécaniciens, les physiciens et les chimistes, et peuvent être utilisées tant sur le plan pratique que sur le plan théorique.

Les techniques, sans être largement commercialisées, sont assez nombreuses et peuvent être groupées en trois classes :

1°) Celles travaillant aux basses fréquences (jusqu'à 10 Hz).

L'appareil le plus fréquemment utilisé est le pendule de torsion [1, 2, 3] qui permet d'accéder au module de cisaillement et à la tangente de l'angle de perte mécanique.

Ses inconvénients :

- le poids du pendule peut déformer longitudinalement l'éprouvette ;
- il est pratiquement impossible de garder la fréquence constante si l'on fait varier la température.

Ses avantages :

- le large domaine de température dans lequel il peut être utilisé.

(*) Communication au *Groupes Français de Rhéologie*, section lyonnaise, le 17 novembre 1967.

2°) Celles travaillant aux moyennes fréquences (de 10 à 500 000 Hz).

Un appareil de ce type quelque peu commercialisé est la verge vibrante [4, 5, 6]. Celle-ci est soumise à une gamme de fréquences variables. On détermine alors la fréquence de résonance correspondant au maximum d'amplitude de la vibration de l'extrémité libre, et, à partir de cette mesure, on déduit le module d'Young. La tangente de l'angle de perte mécanique est calculée d'après l'allure du pic de résonance. Dans cette méthode, il est difficile de s'assurer que la déformation demeure constante dans tout le domaine de fréquence exploré, ce qui constitue un inconvénient majeur.

3°) Celles travaillant aux hautes fréquences (à partir de 500 kHz).

On utilise des appareils émettant une onde ultra-sonore, le plus généralement sous la forme d'une impulsion. Celle-ci se propage dans le milieu à étudier avec une vitesse qui est fonction du module. La tangente de l'angle de perte mécanique est liée dans ce cas au coefficient d'absorption de l'éprouvette.

C'est cette dernière technique que nous avons choisi d'utiliser. Ses avantages portent sur les trois points ci-après :

- les déformations sont microscopiques, ce qui permet de ne pas modifier la structure et de se placer dans un cas où l'exploitation des résultats peut être réalisée à l'aide d'un modèle rhéologique linéaire ;
- cette technique permet de déterminer simultanément le comportement d'un matériau soumis à une contrainte de cisaillement et à une contrainte de compressibilité ;
- la méthode n'est pas destructive, et l'éprouvette peut être étudiée par d'autres techniques afin d'analyser par exemple sa morphologie.

Les inconvénients sont :

- d'une part, la quantité de matière nécessaire,
- d'autre part, le faible domaine de fréquence exploré (une décade).

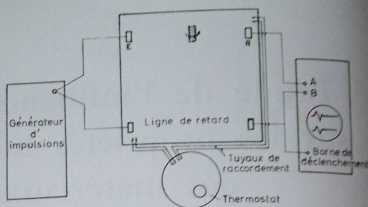


Fig. 1. — Schéma du principe de la méthode

PRINCIPE DE LA METHODE (figure 1)

Un bref train d'ondes longitudinales est émis par la céramique *E* dans un milieu porteur, puis capté après traversée de ce dernier par une céramique *R* couplée à l'amplificateur vertical d'un oscilloscope déclenché par un signal extérieur (ligne de retard). Une plaque de polymère à faces parallèles, interposée sur le trajet du faisceau, permet de mesurer la vitesse de propagation et l'absorption de l'onde longitudinale, si l'angle d'incidence est nul. Dans le cas contraire, on a formation de deux ondes au sein du matériau, l'une longitudinale, l'autre transversale. A partir d'une certaine valeur de l'angle d'incidence, seule la seconde est transmise. La mesure de la vitesse de propagation et de l'absorption dues à ce type d'ondes est alors possible.

THEORIE DU PHENOMENE

Si M^0 représente la valeur complexe du module mécanique relatif à l'onde considérée (longitudinale ou transversale), l'équation de propagation peut être exprimée dans tous les cas sous la forme :

$$\Delta \vec{U} = \frac{\rho}{M^0} \frac{\delta^2 \vec{U}}{\delta t^2} \quad (1)$$

\vec{U} représentant le champ des vecteurs de déplacement de l'onde et

ρ la masse spécifique du milieu.

Si l'onde est longitudinale

$$M^0 = K^0 + (4G^0/3)$$

Si l'onde est transversale $M^0 = G^0$.

K^0 et G^0 étant respectivement les valeurs complexes des modules de compressibilité et de cisaillement.

Si la propagation se fait suivant la seule direction \vec{Ox} , l'équation (1) va se réduire à :

$$\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} = \frac{\rho}{M^0} \frac{\delta^2 U}{\delta t^2}$$

La solution de ce système est de la forme

$$U = U_0 e^{-\alpha x} e^{j\omega(t - \frac{x}{V})}$$

ce qui conduit finalement aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \omega \sin \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{\rho}{|M^0|}} \\ &\text{avec } M^0 = |M^0| e^{j\theta} \\ V &= \frac{1}{\cos \delta/2} \sqrt{\frac{|M^0|}{\rho}} \end{aligned} \right.$$

et réciproquement :

$$\left\{ \begin{aligned} |M^0| &= \rho V^2 \frac{1}{1 + \frac{A^2 V^2}{\omega^2}} \\ \tan \delta &= \left(2 \frac{AV}{\omega} \right) / \left(1 - \frac{A^2 V^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \right.$$

On voit donc que le module et la tangente de perte mécanique peuvent être déterminés si l'on connaît la vitesse de propagation V et l'absorption A de l'onde dans le milieu considéré.

DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE ET PROCESSUS EXPERIMENTAL

Sans entrer dans le détail des différents appareils commerciaux (générateur d'impulsions, thermostat et oscilloscope), il est intéressant

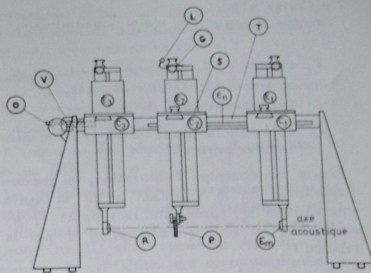


Fig. 2. — Schéma du support

d'étudier le support des céramiques. Celui-ci représente l'élément essentiel du montage, car il est nécessaire que les céramiques piezo-électriques aient leurs axes acoustiques confondus. D'autre part, nous verrons par la suite qu'il faut déplacer la céramique réceptrice d'une distance qui doit être mesurée avec le minimum d'erreur possible et qu'il faut définir avec une grande précision l'angle d'incidence que fait l'onde ultrasonore avec la plaque de polymère.

Sur la figure 2, nous avons représenté le schéma du support. Pour régler la position des céramiques E_m et R, il a été prévu trois déplacements qui permettent le réglage selon toutes les directions de l'espace.

La mesure du déplacement de la céramique réceptrice se fait à l'aide d'une règle à graduation fine parfaitement horizontale et se déplaçant derrière un lecteur optique O. Un dispositif goniométrique G solidaire du porte-éprouvettes C₂ permet de définir l'angle d'incidence à ± 5 minutes.

Pour déterminer la vitesse de propagation de l'onde dans la plaque de polymère, on déplace la céramique réceptrice d'une distance telle que le temps de transfert de l'impulsion soit identique avec et sans interposition de l'éprouvette.

Si b représente ce déplacement et e l'épaisseur de l'éprouvette, on a :

$$V_L = \frac{V_0}{1 - b/c} \text{ en ondes longitudinales}$$

$$V_T = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (b/c)(b/c - 2 \cos i)}} \text{ en ondes transversales.}$$

V_0 représente la vitesse de propagation dans le milieu porteur.

En ce qui concerne l'absorption, on mesure l'amplitude de la vibration avant et après interposition de l'éprouvette. Le rapport $[T]$ des amplitudes est relié à l'absorption A par la relation :

$$A = \frac{1}{e} (\text{Log}_e K - \text{Log}_e [T])$$

dans le cas de l'onde longitudinale.

$$A = - \frac{1}{e} (\text{Log}_e [T]) \cdot \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n}$$

dans le cas de l'onde transversale,

$$\text{avec } K = \frac{1 \rho_0 V_0 \rho V_L}{(\rho V_0 + \rho V_T)^2}$$

$$n = \frac{V_0}{V_T} \text{ et } i \text{ l'angle d'incidence.}$$

ρ_0 et V_0 sont dans ces formules respectivement la masse spécifique du milieu porteur et la vitesse de propagation de l'onde dans ce milieu.

Dans les conditions actuelle de montage, on peut affirmer que la vitesse de propagation est définie à $\pm 1/1000$ et que l'erreur sur l'absorption est de $\pm 3\%$. Cette dernière peut être considérablement diminuée en utilisant un tiroir d'oscilloscope différentiel.

APPLICATION AU POLYPROPYLENE

Notre étude a porté principalement sur trois facteurs :

- la morphologie des éprouvettes,
- l'influence de la température,
- l'influence de la fréquence.

Les mesures ont été conduites à l'aide de 6 éprouvettes obtenues par compression dans un moule placé sous vide afin d'éviter toute occlusion d'air et d'assurer une homogénéité de structure.

A — Morphologie des éprouvettes

Sans développer outre mesure les techniques qui nous ont permis d'étudier la morphologie des éprouvettes, signalons :

1 — En ce qui concerne l'aspect physico-chimique :

a) Une étude de la masse moléculaire de nos échantillons.

Elle a été réalisée au moyen d'un viscosimètre Ubbelohde. Des mesures ont été pratiquées dans la décaline à 135° C et le calcul de la masse moléculaire a pu être conduit en utilisant la loi proposée par F. DANUSSO et G. MORAGIO [7].

$$[\eta] = 1,53 \cdot 10^{-3} M_w^{0,77}$$

b) Une étude comparative de la tacticité des matériaux par solubilité dans des solvants appropriés.

Nous avons utilisé pour cela l'éther éthylique à sa température d'ébullition (extraction de la fraction atactique) et le n-héptane (extraction des groupements stéréobloqués). Comme cette étude est fonction de la granulométrie, nous avons broyé les produits de départ et prélevé la fraction contenant des grains de polymère compris entre 0,30 et 0,75 mm. L'opération de broyage a été menée en atmosphère de CO₂ dans un récipient maintenu continuellement à une température inférieure à 0° C.

c) Une étude comparative du degré d'oxydation des éprouvettes basée sur la thermogravimétrie.

La dégradation du polypropylène est fortement influencée par la présence de groupements peroxydiques sur la chaîne.

Une étude des plaques, conduites à l'aide d'une balance Uguine Eyraud, a permis de déterminer le degré d'oxydation de certaines d'entre elles à partir des courbes de dégradation obtenues.

L'ensemble des résultats expérimentaux obtenu est donné dans le tableau I.

TABLEAU I

Plaques N°	M _w	Fraction soluble		% O ₂ contenu
		dans l'éther éthylrique (% pondéral)	dans n-heptane (% pondéral)	
I	310 000	2,3	3,3	0,5
II	310 000	2,3	3,3	0,5
III	210 000	3,0	6,2	0
IV	210 000	3,0	6,2	0
V	190 000	2,3	4,3	0
VI	190 000	2,3	4,3	0

2 — En ce qui concerne la structure :

— étude du taux de cristallinité basée sur des diagrammes de diffraction X et sur des mesures de densité - dimensions moyennes des cristallites.

On a établi, à l'aide d'un diffractomètre Philips, des diagrammes RX des 6 éprouvettes, puis calculé, grâce aux données de la littérature, le taux de cristallinité et la dimension moyenne des cristallites.

La mesure des masses spécifiques, effectuée à l'aide d'une colonne « à gradient de densité », nous permet de vérifier les valeurs déterminées par diffraction et surtout leur sens de variation. En utilisant l'analyse thermique différentielle, on a également contrôlé le sens de variation de la dimension moyenne des cristallites en associant cette dernière à la température à laquelle se situe le maximum du pic de ther-

mogramme. Enfin, une étude de la variation du coefficient de dilatation linéaire et volumique nous a permis de corriger :

- les variations d'épaisseur de la plaque,
- les variations de volume spécifique, puisque ce dernier entre en jeu dans le calcul des modules ultrasoniques.

L'ensemble des résultats est donné dans le tableau II.

La différence excessive observée entre les données RX et les données obtenues à partir de la mesure du volume spécifique sur les éprouvettes III et IV pourrait être due à la présence de cristallites qui correspondraient à la forme II du polypropylène (forme hexagonale).

B — Etude aux ultrasons

1 — Vitesse de propagation

Sur la figure 3, nous avons reporté les variations de la vitesse de propagation de l'onde longitudinale en fonction de la température. On obtient alors un faisceau de courbes décroissantes, parallèles entre elles. A une même température, la vitesse augmente avec la cristallinité.

Sur la figure 4, nous avons reporté les variations de la vitesse de propagation de l'onde transversale en fonction de la température. Là aussi, on observe un faisceau de courbes parallèles entre elles et décroissantes. A une même température, la vitesse augmente également avec la cristallinité.

TABLEAU II

Epreuves N°	Taux de cristallinité		Dimensions moy. des cristallites en Å	Coef. de dilatation cubique
	par RX	par la mesure du vol. spécifique		
I	64,0	63,0	127	4,2.10 ⁻³
II	73,0	72,0	133	3,7.10 ⁻³
III	60,5	63,0	117	4,2.10 ⁻³
IV	74,5	76,5	204	3,4.10 ⁻³
V	66,5	65,5	127	3,3.10 ⁻³
VI	76,0	75,5	173	3,6.10 ⁻³

2 — Tangente de l'angle de perte mécanique

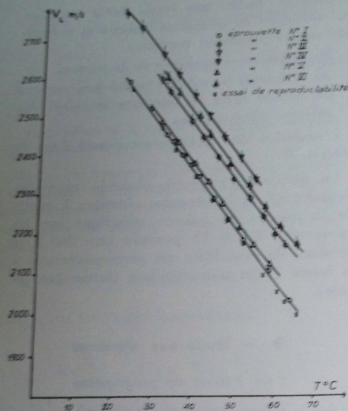


Fig. 3. — Courbes de la variation de la vitesse de propagation longitudinale en fonction de la température à 1,02 MHz.

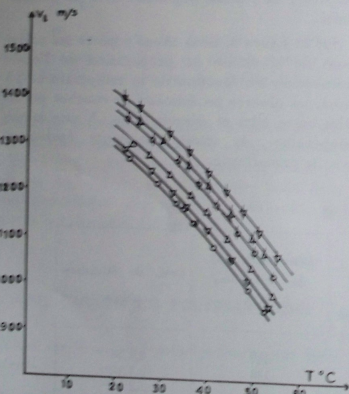


Fig. 4. — Courbes de la variation de la vitesse de propagation transversale en fonction de la température à 1,02 MHz.

Sur la figure 5, nous avons représenté les variations de $\text{tg } \delta$ en fonction de la température, et ce pour les deux types d'ondes. Dans tous les cas, les courbes présentent un maximum dont la valeur décroît lorsque la cristallinité augmente. Il faut observer également que la température à laquelle se situe ce maximum diffère selon le type d'onde utilisée. Comme on se trouve en présence de deux formes d'ondes conduisant à des modules différents, on peut donc penser que le phénomène de relaxation, que l'on associe habituellement au maximum de la courbe, n'est pas le même selon le type de déformation utilisé.

A partir de la vitesse de propagation et de la tangente de l'angle de perte mécanique, on peut calculer les parties réelles et imaginaires des différents modules.

$$M' = |M^0| \cos \delta$$

$$M'' = |M^0| \sin \delta$$

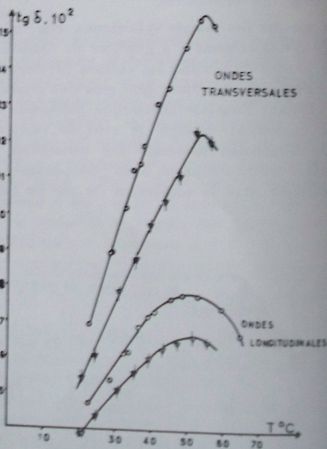


Fig. 5. — Courbes de la variation de $\text{tg } \delta$ en fonction de la température à 1,02 MHz

3 — Partie réelle du module

Nous avons représenté sur les figures 6 et 7 les variations de la partie réelle du module complexe correspondant respectivement à l'onde longitudinale et à l'onde transversale. Nous observons un faisceau de courbes linéaires parallèles entre elles et décroissantes. A une même température, le module augmente avec la cristallinité. Il est intéressant d'étudier l'évolution des différents modules en fonction de la cristallinité. Si M'_a et M'_{cr} représentent respectivement les valeurs des parties réelles des modules dues aux polymères amorphes d'une part et cristallins d'autre part, on pourrait écrire d'une façon général que

$$M' = M'_{cr}X + M'_a(1 - X)$$

où X représente le taux de cristallinité.

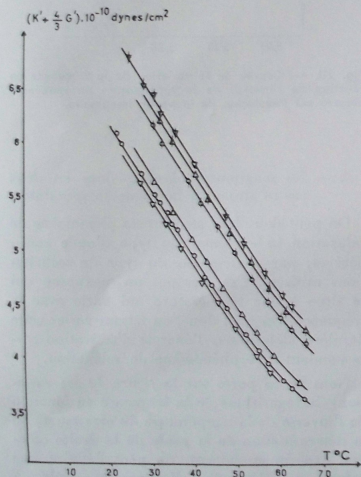


Fig. 6. — Courbes de la variation des parties réelles des modules correspondant à l'onde longitudinale en fonction de la température à 1,02 MHz.

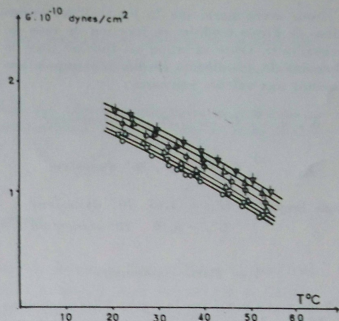


Fig. 7. — Courbes de la variation de la partie réelle des modules correspondant à l'onde transversale en fonction de la température à 1,02 MHz.

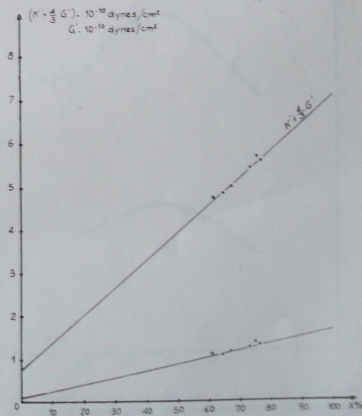


Fig. 8. — Variation des parties réelles des modules en fonction de la cristallinité

Nous avons porté sur la *figure 8* les variations de divers modules en fonction du taux de cristallinité. Cette variation est linéaire dans le domaine de cristallinité étudié. L'extrapolation conduit aux valeurs suivantes :

$$K'_{er} + \frac{4}{3} G'_{er} = 7,20 \cdot 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$$

$$K'_a + \frac{4}{3} G'_a = 0,75 \cdot 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$$

dans lesquelles $G'_{er} = 1,65 \cdot 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$

$$G'_a = 0,10 \cdot 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$$

4 — Partie imaginaire

Nous avons porté sur la *figure 9* les variations de M'' en fonction de la température correspondant aux deux types d'ondes étudiées.

On observe que :

a — ces variations sont indépendantes de la cristallinité,

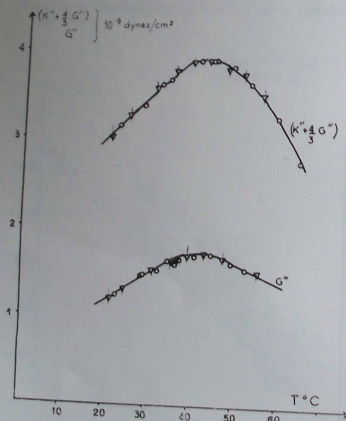


Fig. 9. — Courbes de la variation des parties imaginaires des modules correspondant aux deux types d'ondes en fonction de la température à 1,02 MHz.

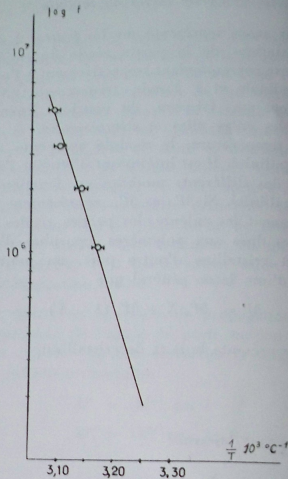


Fig. 10. — Courbe de la variation de la fréquence en fonction de l'inverse de la température du maximum observé sur l'évolution de la partie imaginaire.

b — les maximums observés dans les deux cas se situent à la même température.

On peut donc leur associer un phénomène de relaxation indépendant du type d'onde considéré et, par conséquent, du type de sollicitations utilisées. Ces pics ont un maximum qui se situe à une température qui varie avec la fréquence. On peut donc, en faisant varier cette dernière, déterminer l'énergie d'activation correspondant à ce phénomène de relaxation.

Nous avons porté sur la *figure 10* les variations du logarithme de la fréquence en fonction de l'inverse de la température du maximum. De la détermination de la pente de la droite obtenue expérimentalement, on peut déduire une valeur de l'énergie d'activation égale à 40 kcal/mole d'unité structurale.

En conclusion, on voit qu'une telle méthode permet :

- de définir le comportement mécanique d'un matériau en fonction de la structure,*
- d'étudier les vibrations de segments de chaîne sous l'action de sollicitations mécaniques sinusoïdales.*

On peut d'ailleurs s'attendre à retrouver ainsi des effets qualitativement analogue à ceux observés lorsque l'on détermine les permittivités relatives et la tangente de perte électrique dans un domaine de fréquence comparable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.M. SINNOT, *J. Appl. Phys.* 29, 1433 (1958).
 - [2] K.H. ILLERS et E. JENCKEL, *Kolloid Z.* 160, 97 (1958).
 - [3] D.J. PLAZEK, M.N. VEANCKEN et J.W. BERGE, *Trans. Soc. Rheology* 2, 39 (1958).
 - [4] C.S. DUCKWALD, *Modern Plastics* 33, 148 (1956).
 - [5] S. NEWMAN, *J. Appl. Polymer Sci.* 2, 333 (1959).
 - [6] D. ROBINSON, *J. Sci. Instrum.* 32, 2 (1955).
 - [7] F. DANUSSO et G. MORAGLIO, *Makromol. Chem.* 22, 250 (1958).
-

Amortissement interne dans le domaine de la déformation plastique^(*)

par J. F. DELORME, J. PEREZ, P. PEGUIN et P. GOBIN

Département de Physique
Institut National des Sciences Appliquées - Villeurbanne - 69

RESUME

Les mesures de frottement interne effectuées sur un pendule de torsion nous donnent accès à l'amortissement global de l'éprouvette. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes permettant de calculer le frottement interne local à partir des courbes d'amortissement global mesuré. Ces méthodes supposent une relation linéaire entre l'effort et la déformation. Nous proposons un calcul de correction de frottement interne applicable au domaine plastique où la relation effort-déformation n'est plus linéaire. Cette méthode développée dans le cas d'éprouvettes cylindriques ne nécessite que la mesure de la variation de la période d'oscillation du pendule avec l'amplitude de la déformation.

INTRODUCTION

Les mesures de frottement interne effectuées sur pendule de torsion nous donnent accès à l'amortissement global de l'éprouvette, quelle que soit la méthode de mesure utilisée. Dans tous les phénomènes de frottement interne dépendant de l'amplitude de la déformation, il faudra effectuer une correction due à la répartition des contraintes et des déformations à l'intérieur de l'éprouvette. Le problème qui se pose est de remonter de la mesure globale à la valeur locale de la dissipation d'énergie ou au frottement interne local.

Différents auteurs ont effectué le calcul d'une telle correction dans l'hypothèse de la théorie élastique, c'est-à-dire en admettant la proportionnalité entre l'effort et la déformation (GRANATO, LUCKE, 1956 — BODE, 1959 — SECRETAN, 1964 — PEREZ et al, 1965).

LAZAN (1960) a donné une méthode générale pour obtenir l'énergie spécifique d'amortissement D d'un matériau, à partir de l'énergie totale D_0 dissipée dans toute l'éprouvette. Cette méthode est applicable à des formes complexes d'éprouvettes. Le problème se ramène à la résolution d'une équation de Volterra de première espèce :

$$D_0(\sigma_d) = V_0 \int_0^{\sigma_d} \frac{1}{\sigma_d} \times \frac{d\left(\frac{V}{V_0}\right)}{d\left(\frac{\sigma}{\sigma_d}\right)} \cdot D(\sigma) d\sigma$$

$D_0(\sigma_d)$: énergie totale dissipée dans le volume V_0

$D(\sigma)$: énergie spécifique d'amortissement pour la contrainte σ .

σ_d : contrainte maximum appliquée.

V : volume de l'éprouvette où la contrainte est inférieure à σ .

V_0 : volume total de l'éprouvette.

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, section lyonnaise, le 19 janvier 1968.

Nous pensons que ce calcul doit être modifié dans le cas du frottement interne à grande amplitude de déformation, car la relation effort-déformation n'est plus linéaire. Nous développons une nouvelle méthode de calcul qui tient compte de la relation empirique entre la contrainte et la déformation dans le domaine de déformation plastique. Cette méthode présentée dans le cas d'éprouvette cylindriques sollicitées en torsion n'exige que la mesure de la variation de période du mouvement avec l'amplitude de la déformation.

PLASTICITE — COURBE EFFORT DEFORMATION CYCLIQUE

Le domaine plastique réel de beaucoup de matériaux apparaît à de très faibles amplitudes de déformation. La loi de Hooke n'est plus alors réellement applicable. On a pu montrer que du cuivre recuit et de l'acier austénitique hypotempé présentaient une déformation rémanente après l'application d'une déformation relative en torsion respectivement de 10^{-3} et de 10^{-4} .

Lors de cycles alternés de contraintes, le matériau passe successivement par toute une série d'états intermédiaires qui constituent le cycle effort-déformation. On sait qu'il y a une évolution des paramètres de ce cycle au début, puis qu'une stabilisation se produit. Considérons (figure 1) le cycle stabilisé (MORROW,

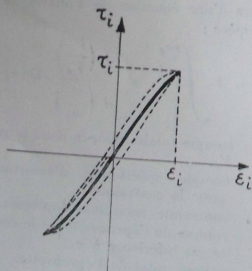


Fig. 1

1965). En joignant les extrémités des cycles $\tau_i - \epsilon_i$ pour différents niveaux d'amplitude, on obtient ce que MORROW appelle la « courbe effort-déformation cyclique ». Pour des matériaux qui se consolident sous l'effet des cycles, cette courbe effort-déformation cyclique sera au-dessus de la courbe effort-déformation de première charge. C'est le contraire pour un matériau qui s'adoucit sous l'effet des cycles. Cette courbe est généralement régulière, sans discontinuités brutales et de simples fonctions de puissance permettent de la décrire.

MORROW a décrit la courbe effort-déformation cyclique en considérant la contrainte comme variable. Il considère que la déformation totale est la somme de la déformation élastique et de la déformation plastique considérée comme une fonction puissance de la contrainte :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + A \sigma^m$$

Cette représentation est très conforme à la réalité dans le domaine d'amplitude où travaille MORROW, c'est-à-dire à des niveaux de déformations supérieures à 2.10^{-3} . Il a pu montrer d'autre part, que la forme du cycle était mathématiquement liée à celle de la courbe effort-déformation cyclique. Cette courbe traduit donc les propriétés mécaniques du matériau lorsqu'il est soumis à des cycles alternés de contraintes.

Dans le domaine où nous travaillons ($\epsilon < 2.10^{-3}$), le cycle est étroit et sa forme est très voisine de la courbe effort-déformation cyclique.

HYPOTHESES DE DEPART BASES DU CALCUL

Pour effectuer la correction de frottement interne, il faut déterminer la répartition des contraintes et des déformations à l'intérieur de l'éprouvette.

— Nous supposons que cette répartition des contraintes et des déformations constitue un état d'équilibre à chaque instant. C'est une répartition statique.

— Nous supposons que le module élastique est constant. (Nous appellerons module élastique la pente à l'origine des cycles et nous admettrons que le retour des cycles s'effectue suivant une droite parallèle à cette pente, C est un retour élastique). Ceci est valable car les déformations appliquées ne sont pas trop grandes et l'écroutissage reste faible.

— Des expériences ont montré (JAOUË, NABAI, ILLIOUCHINE) que lorsqu'on déforme plastiquement en torsion une éprouvette cylindrique, les diamètres restent droits. La déformation en un point est donc proportionnelle à sa distance r à l'axe du cylindre. On peut donc écrire :

$$z = \frac{\theta r}{l} \quad (1)$$

θ : angle de torsion,

l : longueur de l'éprouvette.

— Nous avons défini la déformation en chaque point de l'éprouvette. Si nous connaissons la loi $\tau = f(z)$ liant la contrainte à la déformation au cours des cycles, nous aurons défini la répartition des contraintes et des déformations dans l'éprouvette. Nous choisissons la déformation comme variable pour décrire la courbe effort-déformation cyclique. Numériquement nous pouvons écrire :

$$\tau = Gz - Bz^n - Gz(l - X) \quad (2)$$

Le terme Bz^n traduit une relaxation de contrainte par rapport à la contrainte théorique qui existerait si la loi de Hooke était rigoureusement applicable. Cette forme de loi constitue une hypothèse mathématique de travail. La vérification de ses conséquences (mesure de période) montre qu'elle est numériquement valable.

— Nous pouvons calculer la constante de torsion C d'un fil de rayon R , de longueur l , de module élastique G dont la loi effort-déformation est définie par l'équation (2).

$$M = C\theta = \int_s \tau \cdot r \cdot dS$$

$$M = C\theta = \int_0^R \left(G \frac{\theta \cdot r}{l} - B \frac{\theta^n \cdot r^n}{l^n} \right) r \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$M = C\theta = 2\pi \frac{G\theta}{l} \cdot \frac{R^4}{4} - 2\pi B \frac{\theta^n}{l^n} \cdot \frac{R^{n+4}}{n+3}$$

En posant $C_0 = \frac{G\pi R^4}{2l}$, on obtient :

$$M = C\theta = C_0\theta \left(1 - \frac{4}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \theta^{n-1} \right)$$

$$C = C_0 \left(1 - \frac{4}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \theta^{n-1} \right) \quad (3)$$

CALCUL DES PARAMETRES DE LA COURBE EFFORT-DEFORMATION CYCLIQUE A PARTIR DE LA VARIATION DE PERIODE DU PENDULE

On constate expérimentalement que la période des oscillations d'un pendule varie fortement lorsque l'on change le niveau d'amplitude. La période croît lorsque l'amplitude de la déformation augmente. Ces variations ne peuvent être expliquées simplement par l'existence d'un coefficient d'amortissement visqueux car elles sont d'un ordre de grandeur très supérieur (quelques pour cent). Il faut étudier l'équation du mouvement pour expliquer ces variations de période.

L'équation différentielle d'un mouvement pendulaire s'écrit :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + M = 0$$

I : inertie du système pendulaire,

M : moment appliqué à l'éprouvette.

En utilisant les équations (1) et (3), on obtient l'expression :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z - A z^n = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{I}{C_0}}$$

$$A = \omega_0^2 \cdot \frac{4}{n+3} \cdot \frac{B}{G}$$

On peut résoudre l'équation (4) en la rem-

plaçant par un système différentiel. Posons $u = \varepsilon^n$

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \omega_0^2 \varepsilon - A u = 0 \quad (5)$$

$$n u \frac{d \varepsilon}{dt} - \varepsilon \frac{du}{dt} = 0$$

La résolution de ce système nous donnera la courbe $\varepsilon = f(t)$ déformation-temps en fonction des différents paramètres ω_0 , A , n .

Cette résolution a été effectuée par calcul automatique sur machine électronique Analac.

Paramètres d'étude

— On a choisi la pulsation ω_0 de façon à ce qu'elle corresponde à la gamme de fréquences que nous utilisons sur pendule (0,5 Hz à 2 Hz) :

$$f = 0,5 \text{ Hz} \quad \omega_0^2 = 9,87$$

$$f = 1 \text{ Hz} \quad \omega_0^2 = 39,5$$

$$f = 2 \text{ Hz} \quad \omega_0^2 = 157,92$$

— On a étudié l'influence du paramètre n pour des valeurs comprises entre $n = 1$ et $n = 3$.

— L'équation (4) peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \omega_0^2 \varepsilon \left(1 - \frac{A}{\omega_0^2} \cdot \varepsilon^{n-1} \right) = 0 \quad (6)$$

et en posant $Y = \frac{A}{\omega_0^2} \cdot \varepsilon^{n-1}$

$$= \frac{4}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \cdot \varepsilon^{n-1} = \frac{4}{n+3} \cdot X :$$

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \omega_0^2 \varepsilon (1 - Y) = 0$$

Le terme Y traduit l'écart au mouvement sinusoïdal parfait. Il ne dépend que des caractéristiques n et $\frac{B}{G}$ de la courbe effort-déformation cyclique.

On choisit pour le coefficient A des valeurs telles que Y varie de 0 à 1, compatibles avec la pulsation ω_0 et la déformation étudiée ε .

Méthode d'étude

On a choisi certaines valeurs des paramètres ω_0 , n , A . On se fixe des conditions initiales

pour ε , $\frac{d \varepsilon}{dt}$, $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$. Il est logique de choisir à l'origine des temps $t = 0$, le pendule à sa position d'équilibre $\varepsilon = 0$ avec une certaine vitesse initiale $\left(\frac{d \varepsilon}{dt} \right)_i$. Comme le mouvement tend vers le mouvement sinusoïdal parfait aux faibles déformations, on prendra $\left(\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \right)_i = 0$.

En pratique, ce choix n'est pas possible car on ne peut alors définir $\frac{du}{dt}$ dans le système (5) et l'intégration est impossible. Nous avons donc choisi comme conditions initiales des relations très proches de l'équilibre.

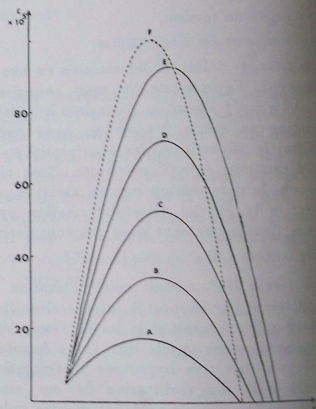


Fig. 2. — Enregistrement des courbes $\varepsilon = f(t)$ pour $n = 1,7$ $A = 1685$ $\omega_0 = 6,28$

Les courbes sont tracées pour les valeurs successives suivantes de $\left(\frac{d \varepsilon}{dt} \right)_i$

$$A : 10^{-3} \quad B : 2 \cdot 10^{-3} \quad C : 3 \cdot 10^{-3} \\ D : 4 \cdot 10^{-3} \quad E : 5 \cdot 10^{-3}$$

La courbe F est la sinusoïde parfaite obtenue par l'équation

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

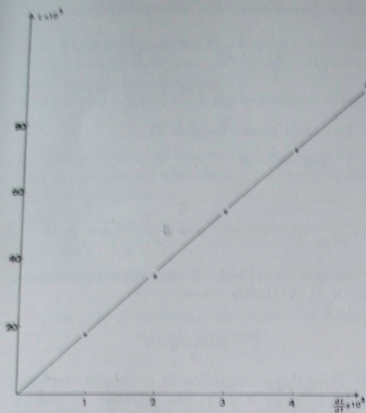


Fig. 3

Nous avons étudié des mouvements dont l'amplitude maximale ε atteinte varie de 10^{-3} à 10^{-1} , en enregistrant graphiquement sur une demi-période les solutions $\varepsilon = f(t)$ pour différentes valeurs initiales de $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_I$. Nous présentons figure 2 un exemple d'enregistrement.

Pour chaque courbe, on peut mesurer sur l'enregistrement la demi-période et tracer $\frac{\Delta T}{T} = f(\varepsilon_M)$, anomalie de période en fonction de l'amplitude maximale de la déformation. Nous présentons (figure 4) quelques exemples des courbes obtenues.

Résultats de l'étude

- 1/ L'analyse graphique montre que les courbes $\varepsilon = f(t)$ sont des courbes très proches d'une sinusoïde.
- 2/ Dans chaque cas, il y a proportionnalité entre l'amplitude maximale atteinte ε_M et la vitesse initiale $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_I$.

$$\varepsilon_M = K \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_I \quad (\text{figure 3})$$

Ce résultat était valable en théorie élastique. Il le reste ici.

- 3/ Lorsque Y est inférieur à 0,25, c'est-à-dire $A \varepsilon_M^n$ est petit vis-à-vis du terme $\omega_0^2 \varepsilon_M$, l'anomalie de période est donnée par la formule approchée :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{Y}{2} = \frac{2}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \cdot \varepsilon_M^{n-1} = \frac{A}{2 \omega_0^2} \varepsilon_M^{n-1} \quad (B)$$

Cette formule peut être obtenue directement de l'équation (7) si on considère Y comme constant et petit par rapport à l'unité.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - Y}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{Y}{2}$$

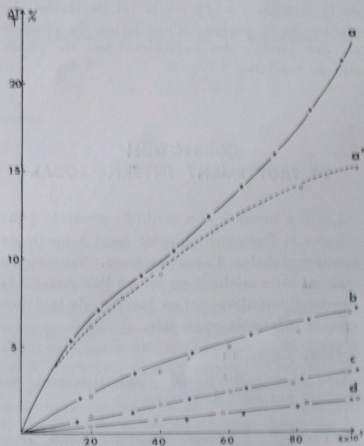


Fig. 4. — Etude expérimentale de l'équation (4)

● Courbe calculée sur machine

○ Courbe calculée par la formule (8)

a - a'	n = 1,7	A = 1 685	$\omega_0 = 6,28$
b	n = 1,7	A = 674	$\omega_0 = 6,28$
c	n = 1,7	A = 337	$\omega_0 = 6,28$
d	n = 2	A = 1 585	$\omega_0 = 6,28$

Sur la figure 4, on a tracé quelques courbes calculées par l'expression (8).

4/ Lorsque Y est inférieur à 0,25, l'anomalie de période est indépendante de la pulsation ω_0 . Pour les valeurs supérieures, celle-ci intervient.

Nous avons ainsi pu mettre en évidence la règle suivante : lorsque l'anomalie de période n'est pas trop importante ($\frac{\Delta T}{T} < 12\%$), on peut la relier directement aux paramètres de la courbe effort-déformation cyclique par la relation $\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \cdot \varepsilon^{n-1}$.

Ainsi, de la mesure de la période en fonction de l'amplitude de la déformation, on peut tirer les coefficients n et $\frac{B}{G}$ qui caractérisent l'écart de la relation $\tau = f(\varepsilon)$ à la loi de Hooke. La mesure de la période d'oscillation du pendule est une mesure des caractéristiques de plasticité du matériau.

CORRECTION DE FROTTEMENT INTERNE LOCAL

LAZAN a indiqué une méthode générale pour calculer le frottement interne local à partir de mesures globales d'amortissement. Nous appliquerons cette méthode au cas où l'on connaît la courbe d'amortissement en fonction de la déformation maximale appliquée.

Nous posons :

D : énergie spécifique d'amortissement par cycle et par unité de volume,

$W_1 = \frac{\tau^2}{2G}$: énergie élastique locale récupérée à la décharge,

δ_l = $\frac{D}{W_1}$: frottement interne local,

δ_0 = amortissement global mesuré,

$X = \frac{B}{G} \varepsilon^{n-1}$

Par définition :

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \frac{\int_{vol} D \cdot dV}{\int_{vol} W_1 dV} = \frac{\int_{vol} \delta_l W_1 dV}{\int_{vol} W_1 dV}$$

Le calcul donne (annexe I)

$$\delta_l = \delta_0 + K \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{d\delta_0}{d\varepsilon}$$

$$\text{avec } K = \frac{1 - \frac{8}{n+3} X + \frac{2}{n+2} X^2}{(1-X)^2}$$

Nous avons calculé K pour différentes valeurs de n et X (figure 5).

Remarques

1° Dans l'approximation de la théorie élastique, $X = 0$ et $K = 1$. On retrouve le résultat classique :

$$\delta_l = \delta_0 + \frac{\varepsilon}{4} \frac{d\delta_0}{d\varepsilon} = \delta_0 + \frac{\tau}{4} \frac{d\delta_0}{d\tau}$$

2° Si $n = 1$, on trouve $K = 1$ et la formule précédente est applicable.

3° Le calcul de cette correction est rendu très pratique parce que l'on connaît l'anomalie de période $\frac{\Delta T}{T}$ qui nous donne n et X .

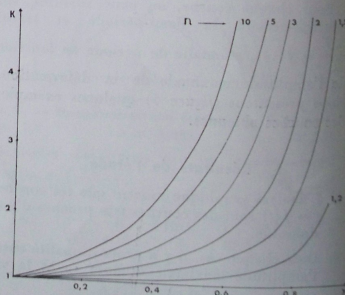


Fig. 5

EXTENSION DU CALCUL

On a supposé jusqu'à présent qu'il y a unicité de phénomène dans toute la zone des déformations que nous étudions ($10^{-4} < \epsilon < 2 \cdot 10^{-2}$) en choisissant une seule loi effort-déformation :

$$\tau = G \epsilon - B \epsilon^n$$

En pratique, ceci est rare et l'on distingue souvent deux zones de déformation où les mécanismes sont différents.

Soit ϵ_1 la déformation correspondant à la transition :

pour $\epsilon < \epsilon_1$, supposons un régime pratique-élastique $\tau = G \epsilon$

pour $\epsilon > \epsilon_1$, supposons un régime de déformation plastique

$$\tau = G \epsilon - B (\epsilon - \epsilon_1)^n$$

On peut reprendre sur cette nouvelle hypothèse tous les calculs dont le principe a été indiqué auparavant (figure 6) :

— calcul du moment de torsion,

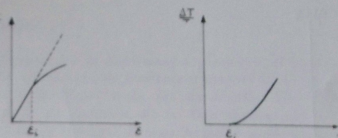


Fig. 6

- détermination de n et de X par l'anomalie de période (annexe II),
- correction de frottement interne local (annexe III).

Nous indiquons seulement les résultats de ces calculs.

$$\text{Posons } X = \frac{B}{G} \cdot \frac{(\epsilon - \epsilon_1)^n}{\epsilon} \text{ et } k = \frac{\epsilon_1}{\epsilon}$$

On obtient pour le calcul de la période :

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\Delta T}{T} \right) = \frac{X}{2}$$

On obtient pour la correction de frottement interne

$$\bar{\epsilon}_0 = \bar{\epsilon}_0 + \frac{\epsilon}{4} \cdot \frac{d \bar{\epsilon}_0}{d \epsilon} \cdot \left[1 + \frac{2(1-k)(1+2n+k)}{(n+1)(2n+1)} X^2 - 4 \frac{\Delta T}{T} \right] \frac{1}{(1-X)^2}$$

Pratiquement, le terme en X^2 est petit vis-à-vis de l'anomalie de période et on pourra le négliger.

APPLICATIONS PHYSIQUES

Un tel calcul de frottement interne peut être appliqué à toute mesure d'amortissement global fonction de la déformation, dans une éprouvette cylindrique soumise à de la torsion. Aucune hypothèse physique n'est faite sur le mécanisme qui est la cause de la dissipation d'énergie. Nous n'avons supposé que l'existence d'une répartition statique des contraintes et des déformations à l'intérieur du matériau. Cette répartition nous est donnée par la courbe effort-déformation cyclique. De ce fait, une telle correction n'est théoriquement pas applicable à un phénomène de frottement interne où le

temps intervient. Pratiquement, ce sera possible si l'on admet qu'à chaque instant l'équilibre interne du solide est atteint.

D'autre part, les mesures de période que nous pouvons effectuer directement sur le pendule, en nous donnant accès aux coefficients n et X , peuvent nous permettre d'étudier les caractéristiques mécaniques plastiques des matériaux, en fonction de paramètres tels que la température et les traitements thermomécaniques.

APPLICATIONS EXPERIMENTALES

Nous avons appliqué ces résultats à des mesures de période et de frottement interne effectuées sur des éprouvettes cylindriques d'acier austénitique à 18 % de chrome et 12 % de

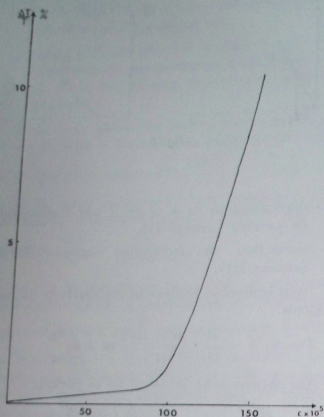


Fig. 7

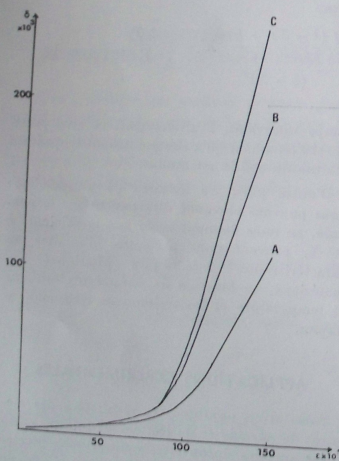


Fig. 8

nickel. Les éprouvettes ont été chauffées 10 mn à 1 050° C puis trempées à l'eau.

Nous avons effectué les mesures de frottement interne sur pendule inversé en mesurant le temps de passage d'un spot entre deux cellules photoélectriques placées symétriquement par rapport à la position d'équilibre du pendule au repos (LINDTVEIT et al 1964). Les mesures de période ont été faites en entretenant le mouvement du pendule à amplitude constante (PEREZ et al, 1967).

Nous présentons sur les figures 7 et 8 les courbes $\frac{\Delta T}{T} = f(\varepsilon)$ et $\delta = f(\varepsilon)$ dans les trois cas suivants :

- amortissement global $\delta_g = f(\varepsilon)$ mesuré,
- amortissement local $\delta_{l_1} = f(\varepsilon)$ après correction dans l'hypothèse élastique,
- amortissement local $\delta_{l_2} = f(\varepsilon)$ avec notre correction.

On peut justifier la relation mathématique (2) utilisée pour décrire la courbe effort-déformation en vérifiant que l'anomalie de période est une fonction puissance de la déformation (figure 9).

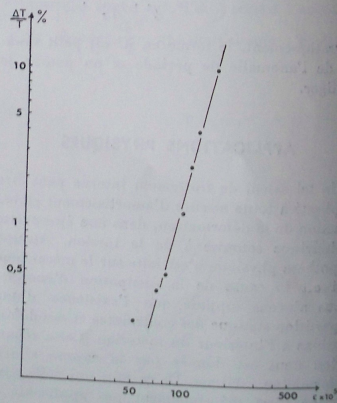


Fig. 9

CONCLUSION

Pour étudier, par frottement interne, le domaine de la déformation plastique, il nous a paru nécessaire de mettre au point un calcul de correction de frottement interne local qui tienne compte dans son expression mathématique de l'écart à la loi de Hooke. Un tel calcul est applicable à toute mesure d'amortissement en fonction de la déformation appliquée, pour une éprouvette cylindrique soumise à de la torsion. Aucune hypothèse physique n'est faite sur le mécanisme de la dissipation d'énergie, seule est supposée l'existence d'une répartition statique des contraintes et des déformations à l'intérieur du matériau. Une telle correction n'est donc en toute rigueur applicable qu'à un phénomène d'hystérésis.

A partir de la mesure de la période d'oscillation du pendule, on peut déterminer cet écart à la loi de Hooke, et ainsi connaître les paramètres de la courbe effort-déformation cyclique. Ces paramètres nous donnent accès à la répartition des contraintes à l'intérieur de l'éprouvette. Ils permettent alors de calculer le frottement interne local à partir de l'amortissement global mesuré. Il apparaît dans l'illustration expérimentale que nous avons donnée que cette correction est importante pour les fortes déformations.

REFERENCES

- GRANATO, LUCKE - 1956, J. Appl. Phys., vol. 27.
 LAZAN - 1960, Structural Damping (Oxford Pergamon Press).
 BODE - 1959, Zeitschrift für naturforschung.
 SECRETAN - 1964, Thèse, Ecole Polytechnique - Université de Lausanne.
 PEREZ, PEGUIN, GOBIN - 1965, Brit. J. Appl. Phys., vol. 26.
 MORROW - 1965, Cyclic Plastic Strain Energy and Fatigue of Metals, A.S.T.M., n° 378.
 JAOUËL - Etude de la Plasticité et application aux métaux. Dunod.
 NADAI - Theory of flow and fracture of solids.
 ILLIOUCHINE - Plasticité, Eyrolles.
 LINDVEIT, PEGUIN, GOBIN - 1964, J. Sc. Instr., vol. 41.
 PEREZ, DELORME, PEGUIN, GOBIN - 1967, J. Sc. Instr., vol. 44.

ANNEXE I

Equations de départ :

$$\delta_g = \frac{\int_{vol} \delta_l W_1 dV}{\int_{vol} W_1 dV}$$

$$\tau = G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n$$

$$\varepsilon = \frac{\theta r}{l}$$

$$W_1 = \frac{r^2}{2G}$$

$$\delta_g = \frac{\int_{vol} \delta_l (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 dV}{\int_{vol} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 dV} \quad (1)$$

Dans une éprouvette cylindrique, on a :

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_M} \right)^2$$

$$d'où dV = 2 \cdot V_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon \quad (2)$$

$$\delta_g \cdot \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\varepsilon_M} \delta_l (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon \quad (3)$$

Appliquons la règle de Leibnitz de dérivation sous le signe somme :

$$\frac{d\delta_g}{d\varepsilon_M} \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon + \delta_g \frac{d}{d\varepsilon_M} \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} d\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon_M} \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} d\varepsilon$$

$$\frac{d\delta_g}{d\varepsilon_M} \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} d\varepsilon + \delta_g (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2 \frac{1}{\varepsilon_M} - 2\delta_g \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} d\varepsilon =$$

$$\delta_{l(\varepsilon_M)} (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2 \frac{1}{\varepsilon_M} - 2 \int_0^{\varepsilon_M} \delta_l (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} d\varepsilon$$

Remplaçons le terme $\int_0^{\varepsilon_M} \delta_l (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} d\varepsilon$ par sa valeur tirée de (3) :

$$\frac{\delta_g}{\varepsilon_M} \cdot \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon$$

$$\frac{d\delta_g}{d\varepsilon_M} \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon + \delta_g (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2 \frac{1}{\varepsilon_M} - 2\delta_g \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon$$

$$= \delta_{l(\varepsilon_M)} (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_M} - 2 \cdot \frac{\delta_g}{\varepsilon_M} \cdot \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^3} \cdot d\varepsilon$$

Dans cette expression, le 3^e terme du premier membre est égal au 2^e terme du 2^e membre. Il vient :

$$\frac{d\delta_y}{d\varepsilon_M} \cdot \int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon + \delta_y (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_M} = \delta_1(\varepsilon_M) (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_M}$$

$$\frac{d\delta_y}{d\varepsilon_M} \cdot \frac{\int_0^{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon} - B_{\varepsilon}^n)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} \cdot d\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon_M} (G_{\varepsilon_M} - B_{\varepsilon_M}^n)^2} + \delta_y(\varepsilon_M) = \delta_1(\varepsilon_M)$$

$$\frac{d\delta_y}{d\varepsilon_M} \cdot \frac{\frac{G^2 \varepsilon_M^3}{4} + \frac{B^2 \varepsilon_M^{2n+2}}{2n+2} - \frac{2GB\varepsilon_M^{n+3}}{n+3}}{G^2 \varepsilon_M^2 + B^2 \varepsilon_M^{2n+1} - 2GB\varepsilon_M^{n+1}} + \delta_y(\varepsilon_M) = \delta_1(\varepsilon_M)$$

D'où la formule :

$$\delta_1 = \delta_y + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{d\delta_y}{d\varepsilon} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{B^2}{G^2} \cdot \varepsilon^{2n-2} - \frac{8}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \cdot \varepsilon^{n-1}}{1 + \frac{B^2}{G^2} \cdot \varepsilon^{2n-2} - \frac{2B}{G} \cdot \varepsilon^{n-1}}$$

Posons $X = \frac{B}{G} \cdot \varepsilon^{n-1}$

Ce terme traduit l'écart à la loi de Hooke : $\tau = G_{\varepsilon} (1 - X)$

$$\delta_1 = \delta_y + K \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{d\delta_y}{d\varepsilon} \tag{4}$$

avec $K = \frac{1 - \frac{8}{n+3} X + \frac{2}{n+1} X^2}{(1 - X)^2}$

On peut introduire l'anomalie de période dans cette expression : $\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{n+3} X$

D'où $K = \frac{1 - 4 \frac{\Delta T}{T} + \frac{2}{n+1} X^2}{(1 - X)^2}$

ANNEXE II EXTENSION DU CALCUL

On peut calculer par la même méthode que précédemment le moment de torsion d'une éprouvette soumise à une déformation ε .

$$\begin{aligned} \varepsilon < \varepsilon_1 & \quad \tau = G\varepsilon \\ \varepsilon > \varepsilon_1 & \quad \tau = G\varepsilon - B(\varepsilon - \varepsilon_1)^n \end{aligned}$$

On a les deux équations

$$M = 2\pi \int_0^R G\varepsilon \cdot r^2 dr - 2\pi \int_{r_1}^R B(\varepsilon - \varepsilon_1)^n r^2 dr \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{\theta r}{l} \quad (2)$$

Posons $r - r_1 = u$

$$M = C_0 \theta - 2\pi B \frac{\theta^n}{l^n} \int_0^{R-r_1} u^n (r_1 + u)^2 du$$

On obtient après intégration et réduction :

$$M = C_0 \theta \left[1 - \frac{4B}{G} \cdot \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^{n-1}}{\varepsilon^4} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{n+3} + \frac{2\varepsilon_1(\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{n+2} + \frac{\varepsilon_1^2(\varepsilon - \varepsilon_1)^3}{n+1} \right) \right] \quad (3)$$

On peut écrire cette expression sous une forme condensée $M = C_0 \theta (1 - P)$

L'équation différentielle du mouvement du pendule s'écrit alors :

$$I \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + C \theta (1 - P) = 0$$

où $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \varepsilon (1 - P) = 0$

Dans la mesure où le terme P est petit, on peut généraliser les résultats obtenus lors de l'étude de la période des oscillations :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{P}{2}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2B}{G} \cdot \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^{n-1}}{\varepsilon^4} \left[\frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^4}{n+3} + \frac{2\varepsilon_1(\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{n+2} + \frac{\varepsilon_1^2(\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{n+1} \right] \quad (4)$$

Si on fait $\varepsilon_1 = 0$, on retrouve la formule que nous avons démontrée précédemment :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{n+3} \cdot \frac{B}{G} \cdot \varepsilon^{n-1}$$

On peut utiliser la formule (4) en multipliant les deux membres par ε^4 et en dérivant par rapport à : le membre de gauche et par rapport à $\varepsilon - \varepsilon_1$ le membre de droite :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon^4 \cdot \frac{\Delta T}{T} \right) = 2 \frac{B}{G} (\varepsilon - \varepsilon_1)^n \left[(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_1(\varepsilon - \varepsilon_1) + \varepsilon_1^2 \right]$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon^4 \cdot \frac{\Delta T}{T} \right) = \frac{2B}{G} (\varepsilon - \varepsilon_i)^n \cdot \varepsilon^2$$

$$4\varepsilon \left[\frac{\Delta T}{T} + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\Delta T}{T} \right) \right] = 2 \frac{B}{G} (\varepsilon - \varepsilon_i)^n \quad (5)$$

Sous cette forme, cette expression est utilisable pour calculer le terme $\frac{B}{G}(\varepsilon - \varepsilon_i)^n$ et le paramètre n .

Si on considère l'écart relatif à la loi de Hooke, X , on peut écrire :

$$X = \frac{B}{G} \cdot \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)^n}{\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\Delta T}{T} \right) = \frac{X}{2}$$

ANNEXE III

Equations de départ

$$\delta_\sigma = \frac{\int_{vol} \delta_l \cdot W_l \cdot dV}{\int_{vol} W_l \cdot dV}$$

$$\tau = G\varepsilon \quad \varepsilon < \varepsilon_i$$

$$\tau = G\varepsilon - B(\varepsilon - \varepsilon_i)^n \quad \varepsilon > \varepsilon_i$$

$$dV = 2 \cdot V_0 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} \cdot d\varepsilon$$

$$W_l = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\delta_\sigma = \frac{\int_0^{\varepsilon_M} \delta_l \cdot \frac{G\varepsilon^3}{2\varepsilon_M^2} \cdot d\varepsilon + \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_M} \delta_l \cdot \frac{B^2(\varepsilon - \varepsilon_i)^{2n}}{2G} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon - \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_M} \delta_l \cdot B(\varepsilon - \varepsilon_i)^n \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_M} \frac{G\varepsilon^3}{2\varepsilon_M^2} \cdot d\varepsilon + \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_M} \frac{B^2(\varepsilon - \varepsilon_i)^{2n}}{2G} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon - \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_M} B(\varepsilon - \varepsilon_i)^n \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon}$$

Le développement du calcul est identique à celui de l'annexe I.

On applique la règle de Leibnitz de dérivation sous le signe somme et l'on réduit les termes. On obtient :

$$\delta_l = \delta_\sigma + \frac{a}{b} \cdot \frac{d\delta_\sigma}{d\varepsilon_M}$$

avec

$$a = \int_0^{\varepsilon_M} \frac{G\varepsilon^3}{2\varepsilon_M^2} d\varepsilon + \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_M} \frac{B^2(\varepsilon - \varepsilon_i)^{2n}}{2G} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon - \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_M} B(\varepsilon - \varepsilon_i)^n \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M^2} d\varepsilon$$

$$b = \frac{G}{2} \varepsilon_M + \frac{B^2(\varepsilon_M - \varepsilon_i)^{2n}}{2G\varepsilon_M} - B(\varepsilon_M - \varepsilon_i)^n$$

Si on pose $X = \frac{B}{G} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^n}{\varepsilon}$, on peut écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{\varepsilon_M}{4(l-X)^2} \left[1 + \frac{4B^2}{G^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_M^4} \left(\frac{(\varepsilon_M - \varepsilon_1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_M - \varepsilon_1)^{2n+1}}{2n+1} \right) - \frac{8B}{G\varepsilon_M^4} \left(\frac{(\varepsilon_M - \varepsilon_1)^{n+3}}{n+3} + \frac{2\varepsilon_1 (\varepsilon_M - \varepsilon_1)^{n+2}}{n+2} + \frac{\varepsilon_1^2 (\varepsilon_M - \varepsilon_1)^{n+1}}{n+1} \right) \right]$$

On remarque que ce terme peut se simplifier en introduisant X et $\frac{\Delta T}{T}$ dont l'expression a été calculée dans

l'annexe II.

$$\frac{a}{b} = \frac{\varepsilon_M}{4} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n+1} \cdot \frac{(\varepsilon_M - \varepsilon_1)^2}{\varepsilon_M^2} \cdot X^2 + \frac{4}{2n+1} \cdot \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_M - \varepsilon_1)}{\varepsilon_M^2} \cdot X^2 - 4 \frac{\Delta T}{T}}{(1-X)^2}$$

Si l'on pose $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_M} = k$, on a l'expression finale :

$$\bar{\delta}_y = \bar{\delta}_v + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{d\bar{\delta}_v}{d\varepsilon} \cdot \frac{1 + \frac{2(1-k)(1+2n+k)}{(n+1)(2n+1)} X^2 - 4 \frac{\Delta T}{T}}{(1-X)^2}$$

Si dans cette expression on fait $k = 0$, on retrouve le cas traité dans l'annexe I.

L'étude de lois de comportement viscoélastique liquide au moyen d'écoulements de révolution^(*)

par P. LE ROY et J.-M. PIERRARD

Laboratoires de Mécanique des fluides, CEDEX n° 53, 38 - Grenoble

RESUME

Expression de la loi de comportement d'un liquide incompressible satisfaisant à un principe de superposition en repère rhéologique. Non linéarité de cette loi en repère quelconque.

Etude d'une cinématique de révolution en régime permanent. L'impossibilité théorique et expérimentale de déterminer ainsi la fonction caractéristique du matériau a conduit les auteurs à envisager cette détermination au moyen d'essais en régime transitoire.

Ce type de loi rend compte de tous les effets secondaires (dits WEISSENBERG) dans des écoulements de révolution à trajectoires circulaires ou rectilignes.

I. — EXPRESSION DES LOIS DE COMPORTEMENT

— Le principe d'objectivité matérielle impose à une loi de comportement d'être une relation entre grandeurs objectives, c'est-à-dire que les tenseurs ou scalaires qui figurent dans l'expression de cette loi ne dépendent pas des repères dans lesquels on les exprime.

— Une loi de comportement rhéologique définit complètement la contrainte quand on connaît l'histoire passée de la transformation.

Conséquence : il existe certains axes privilégiés pour lesquels les lois de comportement exprimées dans ces axes déterminent complètement la contrainte quand on connaît l'histoire de la vitesse de déformation.

Loi de comportement

La loi de comportement d'un matériau est une loi locale. Elle ne fait pas intervenir de dérivées spatiales. Elle permet de déterminer la contrainte à un instant t si l'on connaît la transformation de $-\infty$ à t .

On doit donc pouvoir déterminer la contrainte à t si l'on connaît la contrainte à t_0 et la transformation de t_0 à t . Mais la transformation n'est pas une grandeur objective.

Principe des axes rhéologiques

Nous appelons (Réf. 1) repères rhéologiques R_s des repères dans lesquels la vitesse de transformation est une vitesse de déformation. Ce sont ces repères privilégiés mentionnés plus

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, section lyonnaise, le 17 mai 1968.

haut. Tout repère fixe par rapport à un repère R_0 , et donc déduit de celui-ci par une rotation constante, est également rhéologique. La vitesse de rotation de R_0 est la vitesse de rotation du trièdre principal de la transformation.

Dans R_0 , la dérivée par rapport au temps d'une grandeur objective est elle-même objective; c'est l'opérateur dérivée au sens de JAUMANN qui, à une grandeur objective, associe une autre elle-même objective (Réf. 2).

Donc, en repère rhéologique, la loi de comportement détermine la contrainte à partir de la connaissance de l'histoire de la vitesse de déformation (qui est une grandeur objective); et elle peut faire intervenir des dérivées par rapport à t successives de la contrainte et de la vitesse de déformation, qui sont toutes objectives.

II. — ECRITURE D'UN LIQUIDE VISCOELASTIQUE BOLTZMANNIEN

Le principe de superposition de BOLTZMANN appliqué dans R_0 conduit à la représentation du liquide de MAXWELL généralisé; la relation entre la contrainte et la vitesse de déformation est

$$S^{ij}(t) = \int_0^{+\infty} \chi(t-t') \mathcal{D}^{ij}(t') dt' \quad (1)$$

$$(S^{ij}(0) = 0)$$

(relation purement déviatoire dans le cas de l'incompressibilité, que nous supposons, la pression isotrope étant arbitraire).

$\chi(t)$ est une fonction de relaxation du corps, qui est reliée aux fonctions de distribution des temps de réponse par les relations connues:

$$\chi(t-t') = \int_0^{+\infty} \frac{N(\tau)}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) e^{-\frac{t-t'}{\tau}} d[\text{Log } \tau]$$

Un cas particulier est le liquide de MAXWELL simple où:

$$\chi(t) = G e^{-\frac{t}{t_0}} = \frac{2\mu}{t_0} e^{-\frac{t}{t_0}} \quad \text{avec } t_0 = \frac{2\mu}{G}$$

Soient \vec{f}_i et \vec{e}_i respectivement les vecteurs de base R_0 et d'un autre repère tels que $\vec{f}_i = r_j^i \vec{e}_j$, où r_j^i est une rotation telle que la vitesse de rotation de \vec{f}_i par rapport à \vec{e}_i soit égale à la vitesse de rotation du corps par rapport à \vec{e}_i (pour tout \vec{e}_i fixe ou non). Alors, la forme (1) de la loi ci-dessus s'écrit dans \vec{e}_i :

$$S_j^{ik}(t) =$$

$$r_i^h(t) r_j^k(t) \int_0^{+\infty} \chi(t-t') \mathcal{D}^{h'k'}(t') r_i^{h'}(t') r_j^{k'}(t') dt'$$

où S_j^{ik} et D_j^{ik} sont les composantes dans \vec{e}_i de la contrainte et de la vitesse de déformation.

Notons que cette relation (dans \vec{e}_i) n'est pas linéaire, la rotation r_j^i étant une fonction du temps (car de la cinématique).

III. — ETUDE DE CETTE LOI DANS UN ECOULEMENT DE REVOLUTION

Soit (\vec{e}_i) un repère orthonormé, fixe, d'axe \vec{e}_3 vertical.

Etudions l'écoulement en régime permanent suivant: en un point M de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) , nous postulons que le champ des vitesses est de la forme (figure 1):

$$\vec{V} = \rho g(\rho, z) \vec{h}_1$$

$$\text{ou } \rho = R \cos \varphi; z = R \sin \varphi$$

Le repère (\vec{h}_i) est le repère associé à cette cinématique de la façon suivante (figure 2 dans le plan méridien):

\vec{h}_1 est tangent aux lignes $g = \text{cte}$

\vec{h}_2 est normal aux lignes $g = \text{cte}$, dans le plan méridien. $(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3)$ direct.

Dans ce repère (\vec{h}_i) , la vitesse de transformation a la forme:

$$\begin{vmatrix} 0 & \Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \left(\text{ou } \Omega_1 = \vec{h}_1 \otimes \vec{h}_2 + \vec{h}_2 \otimes \vec{h}_1 \right)$$

où $\Omega_1 = \frac{\rho}{2} \frac{\partial g}{\partial y_2}$ et évidemment $\frac{\partial g}{\partial y_1} = 0$

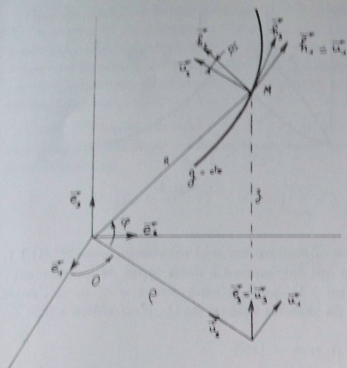


Fig. 1

$$\vec{V} = v(\rho, z) \vec{u}_1 = \rho \omega(\rho, z) \vec{u}_1$$

Correspondance entre les différents repères :

$$\vec{u}_1 \oplus \vec{u}_2 \oplus \vec{u}_3 = \Omega_1 \vec{h}_1 \oplus \vec{f}_1 = R \vec{h}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \Omega_1 \cos \Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{v}{\rho} \right) \\ \Omega_1 \sin \Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases}$$

en définissant les $\partial/\partial y_i$ comme les dérivées dans la direction \vec{h}_i .

D'autre part $\vec{\Omega}_1 = \Omega_1 \vec{h}_1$ représente la rotation instantanée de (\vec{h}_i) par rapport au repère rhéologique (\vec{f}_i) .

Avec la loi rhéologique utilisée, on trouve les composantes du déviateur de contrainte dans (\vec{h}_i)

$$S^{\alpha\beta}(\vec{h}_i) = \begin{vmatrix} S^{11}(\Omega_1) & S^{12}(\Omega_1) & 0 \\ S^{12}(\Omega_1) & S^{22}(\Omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



Fig. 2

$$\left(\text{ou : } S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} \left(\vec{h}_1 \oplus \vec{h}_2 - \vec{h}_3 \oplus \vec{h}_4 \right) + S^{\alpha\beta} \left(\vec{h}_1 \oplus \vec{h}_4 + \vec{h}_5 \oplus \vec{h}_6 \right) \right)$$

S^{ij} et $S^{\alpha\beta}$ sont des fonctions de Ω_1 seulement.

Une première condition d'existence de la pression p est obtenue en écrivant que celle-ci admet une symétrie de révolution :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(- \frac{\partial \rho}{\partial y_i} \right) = 0$$

On obtient alors, après introduction dans les équations de l'équilibre et intégration,

$$\rho^2 S^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial y_i} (H),$$

H étant une fonction arbitraire telle que

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = 0,$$

La deuxième condition d'existence est obtenue en traduisant que p a un gradient dans le plan méridien ; cette condition est automatiquement vérifiée pour les cas d'écoulement à répartition conique ou cylindrique. Pour la répartition plane des vitesses, elle entraîne $g = \lambda z$.

IV. — CINEMATIQUE PLAN-CONE

La première des conditions ci-dessus donne $S^{12} = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$; a est une constante arbitraire

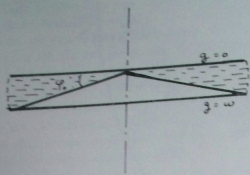


Fig. 3

déterminée par les conditions aux limites qui sont :

$g = 0$ sur le plan supérieur,

$g = \omega$ (vitesse de rotation du cône) sur le cône inférieur.

La surface libre est assimilée à une sphère.

La distribution conique du champ des vitesses conduit à ces expressions pour les contraintes (exprimées dans \vec{h}_i) :

$$S^{11} = \Omega_i \int_0^{\infty} \chi(u) \sin(2\Omega_i u) du \quad ; S^{22} = 0$$

$$\text{et } S^{33} = \Omega_i \int_0^{\infty} \chi(u) \cos(2\Omega_i u) du \quad ; S^{12} = S^{13} = 0$$

$$\text{Avec : } \Omega_i = \frac{1}{2} \cos \varphi g'(\varphi),$$

$$\text{et si } \varphi_0 \text{ petit ; } \Omega_i(\varphi) \simeq \frac{\omega}{2}$$

Elles se réduisent, pour le modèle simple de MAXWELL, à :

$$S^{11} = \frac{4 \mu t_0 \Omega_i^2}{1 + 4 t_0^2 \Omega_i^2}$$

$$S^{33} = \frac{2 \mu \Omega_i}{1 + 4 t_0^2 \Omega_i^2}$$

Les allures qualitatives sont représentées sur la figure 4.

La condition : $S^{33} = a/\cos^2 \varphi$ détermine $\Omega_i(\varphi)$ par inversion. Or, d'après les variations de $S^{33}(\Omega_i)$, il y a deux déterminations principales

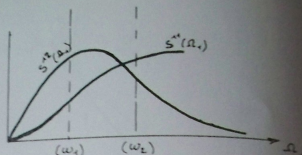


Fig. 4

(en admettant un seul maximum pour $S^{33}(\Omega_i)$), ce qui correspond à deux types de mouvement : l'un à Ω_i petit, c'est-à-dire à $\omega < \omega_1$ et l'autre à de grandes valeurs de Ω_i , c'est-à-dire à $\omega > \omega_2$.

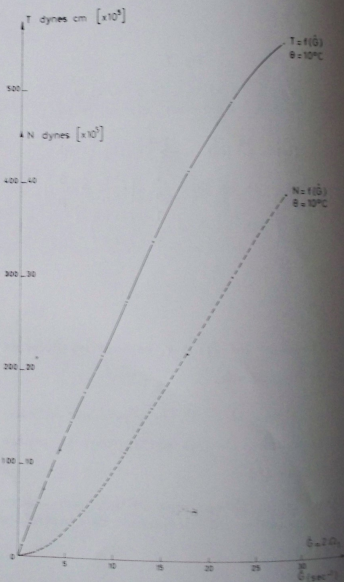


Fig. 5

Plan-cône : $\varphi_0 = 1^\circ 30'$
: $\varnothing 7,5 \text{ cm}$

Dans le domaine intermédiaire, il n'y a pas de mouvement stationnaire possible, et une étude de stabilité montre que le régime à grande vitesse est instable, ce qui est agréable à admettre physiquement, et évidemment corroboré par les expériences.

Alors, le couple résultant de S^{II} sur le plan supérieur et l'effort normal résultant de S^{II} ont pour expression

$$T = A_I S^{II} [\Omega_i (\dot{\varphi} = 0)] \quad \left(A_I = \int_{\text{plan}} \rho \, d\Sigma \right)$$

$$N = A S^{II} [\Omega_i (\dot{\varphi} = 0)] \quad \left(A = \int_{\text{cône}} d\Sigma \right)$$

Expériences

Celles-ci ont été poursuivies sur un rhéogoniomètre de WEISSEBERG, type R 16, de *Sangamo Controls Limited*, qui peut mesurer avec différentes cinématiques (plan-cône, plan-plan, cylindre de COUETTE, etc...) T et N .

Les matériaux utilisés ont été des polymères (polyisobutylène, silicones) en solution ou non, ainsi que des argiles dans leur domaine de comportement liquide, ou des suspensions d'argiles de concentrations variables.

La figure 5 montre les variations de T et N (Ω_i) pour un polybutène. La stabilité de

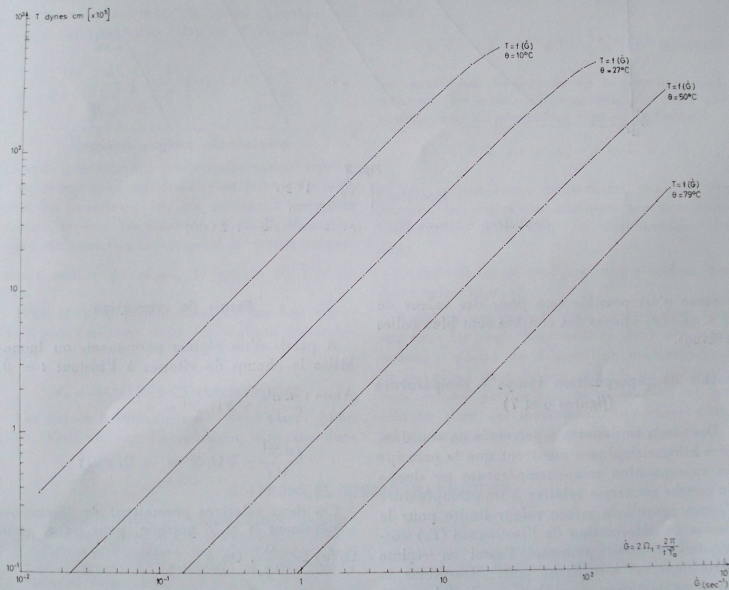


Fig. 6

Plan-cône $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 1^\circ 30' \\ \varnothing 7,5 \text{ cm} \end{array} \right.$

Polybutène « Napvis 200 » (poids moléculaire : 2 000)

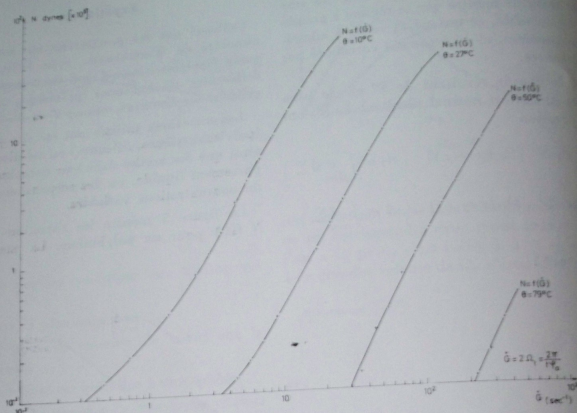


Fig. 7

Plan-cône $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 1^\circ 30' \\ \varnothing 7,5 \text{ cm} \end{array} \right.$
 Polybutène « Napvis 200 » (poids moléculaire : 2 000)

mesure n'est possible que pour des valeurs de $\omega < \omega_0$. Les allures des courbes sont bien celles prévues.

Essais de superposition temps - température (figures 6 et 7)

Des essais isothermes représentés en coordonnées bilogarithmiques montrent que le principe de superposition temps-température ne donne de courbe maîtresse relative à une température T_0 que jusqu'à la même valeur limite pour la vitesse de déformation de l'isotherme (T_0) correspondant. C'est pourquoi l'essai en régime permanent est insuffisant pour déterminer la loi d'un matériau viscoélastique linéaire, car les fonctions de transferts ne peuvent être utilisées pour déduire les courbes $\chi(t)$ et $H(\tau)$ puisque l'on ne connaît pas N et T sur toute l'échelle des Ω_1 .

Essais de relaxation

A partir d'un régime permanent, on immobilise le champ de vitesses à l'instant $t = 0$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} \frac{dS^{II}}{dt} + 2\Omega_1 S^{II} = 0 \\ \frac{dS^{II}}{dt} - 2\Omega_1 S^{II} = -\Omega_1 \chi(t) \end{cases}$$

Ces deux relations permettent de déterminer entièrement N et T puisque, pour un φ_0 petit,

$$\Omega_1(\varphi) \approx \frac{\omega}{2\varphi_0}. \text{ On a :}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \frac{dN(t)}{dt} + \frac{\omega}{\varphi_0} \frac{T(t)}{A_1} \\ \frac{1}{A_1} \frac{dT(t)}{dt} - \frac{\omega}{\varphi_0} \frac{N(t)}{A} = -\frac{\omega}{2\varphi_0} \chi(t) \end{cases}$$

Mais la mesure expérimentale de $N(t)$ n'est possible (fiable, reproductible, etc...) que pour des vitesses lentes et, la plupart du temps, très inférieures à la relaxation du matériau étudié. La mesure de $N(t)$ se fait par un servomécanisme compensant la déflexion d'un système élastique contraint par N . Il y a donc, en régime transitoire, couplage entre la relaxation propre du matériau et la réponse du servomécanisme d'une part, et variation des conditions aux limites de l'écoulement d'autre part (variation de l'entrefer pendant la réponse du servomécanisme).

L'essai de relaxation n'est valablement exploitable qu'avec l'utilisation de la variation de $T(t)$ seulement.

Si l'on élimine $N(t)$ des deux équations ci-dessus, on peut tirer $\chi(t)$ de $T(t)$ seul :

$$\frac{1}{A_1} \frac{dT(t)}{dt} + \frac{\omega^2}{\tau_a^2} \int_0^t \frac{1}{A} T(t') dt' = \frac{\omega}{\tau_a} \chi(t)$$

Essai en régime oscillatoire

L'étude générale des petits mouvements voisins d'un écoulement stationnaire se fait en linéarisant les équations, ce qui revient à prendre comme repère rhéologique celui de l'écoulement stationnaire. Donc, pour des petits mouvements autour du repos, le repère $R_k(\vec{f}_j)$ est fixe.

D'où la formulation classique des lois viscoélastiques linéaires pour les régimes harmoniques.

V. — AUTRES CINEMATIQUES

Les autres écoulements de révolution : plan-plan, COUETTE, et l'écoulement linéaire dans

un tuyau (POISEULLE) ont été traités par P. LE ROY de la même façon (Réf. 3), les lois viscoélastiques linéaires donnant tous les effets secondaires (dits WEISSEBERG) de ces écoulements :

- écoulement plan-plan : effort normal N , distribution de la pression scalaire, $p(r)$;
- COUETTE ($R_2 > R_1$) : $p(R_1) > p(R_2)$ mais pas de surface libre stable ;
- tuyau (cylindrique) : S' , d'où gonflement à la sortie.

Remarque

Avec une loi purement visqueuse du second ordre :

$$S^{ij} = 2 \mu \mathcal{D}^{ij} + K (\mathcal{D}^{ik} \mathcal{D}^{kj} - \frac{1}{3} \mathcal{D}^{kk} \mathcal{D}^{ij}) \text{ (RIVLIN)}$$

les conditions d'existence de la pression montrent que les seules solutions possibles pour une cinématique de révolution sont de la forme :

$$v = k_1 \rho z + k_2 \frac{1}{\rho} + k_3 \rho$$

ce qui exclut toute répartition conique des vitesses, les seules cinématiques possibles étant COUETTE ou plan-plan, ou combinaison des deux.

Ce type de loi ne rend pas compte évidemment de la relaxation.

Ajoutons également une constatation faite sur tous les matériaux utilisés dans nos expériences : quand un échantillon manifestait un de ses effets secondaires, alors il les présentait tous et, en particulier, la relaxation, ce qui élimine pour ces matériaux l'hypothèse d'une loi de comportement purement visqueuse.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. ANGLES D'AUBRIAC — « Définitions et principes en rhéologie tensorielle », Symposium I.U.T.A.M. Rhéologie et Mécanique des Sols, Grenoble, Avril 1964, Éditeurs : J. KHAYCHENKO et P.M. SHREYNS, Springer, Verlag, 1966.
- [2] MANDEL — « Cours de Mécanique des milieux continus », pp. 357-367, Gauthier-Villars, 1966.
- [3] P. LE ROY — « Modèle simple de Maxwell dans un

repère rhéologique », C.R.A.S., 263, série A, (18.7.1966), 136-137.

P. LE ROY — « Etude d'un écoulement plan d'un liquide viscoélastique de Maxwell », C.R.A.S., 263, série A, (25.7.1966), 172-173.

P. LE ROY — « Sur des cas d'impossibilité mathématique d'existence pour certains écoulements stationnaires d'un liquide viscoélastique », C.R.A.S., 264, série A, (20.2.1967), 361-362.

Comportement mécanique des solides poreux

Domaine élastique des corps poreux

Rôle de la pression de pore^(*)

par Pierre MORLIER

Laboratoire de Mécanique des Solides
de l'École Polytechnique

RESUME

L'étude du comportement mécanique sous très fortes contraintes d'un certain nombre de corps poreux (roches, béton, métaux frittés...) met en évidence des phénomènes nouveaux :

- existence d'une limite élastique en compression hydrostatique,
- courbes intrinsèques ou surfaces intrinsèques fermées.

Nous en donnons, à l'aide de quelques schémas théoriques simples, une explication et montrons quelques exemples de corps poreux réels. Notre étude, fondée sur l'analyse des contraintes locales, nous conduit à examiner l'influence de la pression de pore sur le domaine élastique et, là encore, un phénomène nouveau, bien vérifié par l'expérience, apparaît : la présence d'un liquide interstitiel sous pression durcit les matériaux poreux.

SUMMARY

The study of the mechanical behavior of porous materials like rock, concrete, sintered metal, under high stresses points out some unusual properties like the existence of an elastic limit under hydrostatic pressure and the fact that the frontier of the elastic field — intrinsic curve or surface — is closed. We try to explain these properties by considering some simple theoretical models ; our study is based upon the analysis of local stresses, around the voids of the porous material, and leads to examine the influence of pore pressure on the elastic frontier ; then appears an other unusual property : the existence of an interstitial fluid under pressure may harden the porous material. At each stage of the study examples on real materials are given.

(*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 12 février 1969.

Extrait d'une thèse soutenue à la Faculté des Sciences de Paris, devant M. GLANGEAUD, Président du Jury et MM. SIESTRUNCK, VICHNIEWSKY, HABIB et MANDEL, examinateurs.

NOTATIONS

σ_{ij}	contraintes macroscopiques,		
$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$	"	"	principales,
σ	"	"	compression ou tension,
τ	"	"	cission,
s_{ij}	contraintes locales,		
s_1, s_2, s_3	"	"	principales,
s	"	"	compression ou tension,
t	"	"	cission,
σ ou $s < 0$	indique une tension,		
σ ou $s > 0$	indique une compression,		
u	pression de pore,		
$R_T < 0$	résistance à la traction de la matrice solide		} fragile,
$R_C > 0$	résistance à la compression " "		
L	limite élastique de la matrice solide élasto-plastique,		
L_e	limites élastiques - définies dans le texte,		
φ	porosité.		

DEFINITIONS

Essais drainés, non drainés, non gainés...

En mécanique des sols et des roches, on a l'habitude d'utiliser des essais de résistance dits triaxiaux : l'éprouvette est soumise à une pression liquide $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ dite pression latérale et σ_1 est ensuite augmenté jusqu'à la rupture, essais en compression, où σ_1 est abaissé jusqu'à la rupture, essais en extension. Pour les matériaux à porosité ouverte, on peut également contrôler u , pression de pore, d'où les trois types d'essais suivants :

essais drainés : l'éprouvette est entourée d'une gaine de façon à empêcher que le liquide exerçant la pression latérale ne pénètre le matériau ; la pression de pore est maintenue constante et égale à la pression atmosphérique en général,

essais non drainés : l'éprouvette est entourée d'une gaine, mais le liquide ne peut s'échapper de l'éprouvette ; une pression de pore se développe alors, dépendant des contraintes appliquées ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$),

essais non gainés : le liquide qui exerce la pression latérale peut pénétrer à l'intérieur de l'éprouvette ; si l'on agit lentement, on a à chaque instant $\sigma_2 = \sigma_3 = u$.

Essais uniaxiaux, biaxiaux, triaxiaux à symétrie axiale

Dans ce texte, nous utilisons la terminologie suivante : soit ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) les contraintes principales lors d'un chargement expérimental,

- si $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, l'essai est dit *uniaxial* de compression ($\sigma_1 > 0$) ou de traction ($\sigma_1 < 0$) ;
- si $\sigma_2 = 0$, l'essai est dit *biaxial* ;
- si $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \neq 0$, l'essai est dit *triaxial* ;
- en particulier, si deux contraintes principales sont égales (essais « triaxiaux » classiques), l'essai sera dit (triaxial) à *symétrie axiale*.

1. SUR LA RESISTANCE DES MILIEUX POREUX

1.1. Limites élastiques et ruptures

Le comportement le plus général d'un corps poreux sous l'action d'une compression monodirectionnelle σ_1 est donnée sur la figure 1, où ε_1 désigne la déformation longitudinale et ε_2 la déformation transversale; on voit apparaître deux limites élastiques bien distinctes: le_2 relative à la déformation ε_2 et le_1 relative à la déformation ε_1 . Ce phénomène peut être expliqué de la façon suivante.

Soit un matériau poreux dont la matrice est fragile, c'est-à-dire pour laquelle les ruptures ont lieu sans déformation plastique et pour $|R_T| \ll |R_C|$; sous l'effet d'une contrainte macroscopique σ_1 les contraintes locales s_i sur le pourtour des pores, qui seront données plus loin pour quelques cas simples, sont:

en A et A', $s_1 = 0$, s_2 et $s_3 < 0$, s_1 et $s_2 \neq -\sigma_1$; le long de BCB'C', par exemple en B et B', $s_1 = 0$, $s_2 \gg s_3 > 0$, $s_1 > 2\sigma_1$ (figure 1 bis).

La résistance à la traction R_T est atteinte en A ou A' bien avant que la résistance à la compression R_C soit atteinte sur BCB'C'; il y a formation d'une fissure en A, limitée et stable,

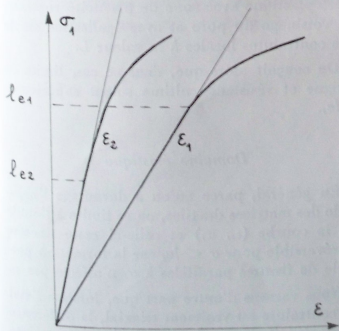


Fig. 1. — Limite élastique le_1 et le_2

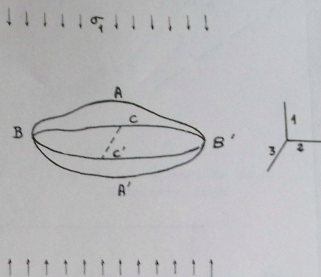


Fig. 1 bis

qui se lit sur la courbe $(\varepsilon_1, \sigma_1)$, bien avant l'écrasement sur BCB'C' dont le début se lit sur la courbe $(\varepsilon_1, \sigma_1)$.

La création de fissures en A ou A' peut être décelée, outre par la courbe $(\varepsilon_1, \sigma_1)$, par quelques mesures bien choisies: célérité des ondes ultrasonores, dans la direction 2 ou 3, résistivité électrique dans la direction 2 ou 3, détection de microbruits...

L'existence d'une double limite élastique a pu être observée sur un grand nombre de roches poreuses naturelles ou de corps poreux artificiels; BIENIAWSKI [1] l'a observée et expliquée pour des roches strictement fissurées (granites, calcaires compacts).

La limite élastique le_2 peut être appelée limite de fatigue car, si, à contrainte constante, les fissures parallèles à σ_1 ne se propagent que pour des contraintes voisines de la résistance-stabilité, l'expérience [2] montre qu'elles peuvent se développer lors de cycles de charge et décharge et conduire à la ruine du matériau. La figure 2 montre la courbe d'endurance d'un matériau poreux à matrice fragile — l'andésite de Volvic —: pour un faible nombre de cycles (en compression, de 0 à σ_1) la rupture a lieu

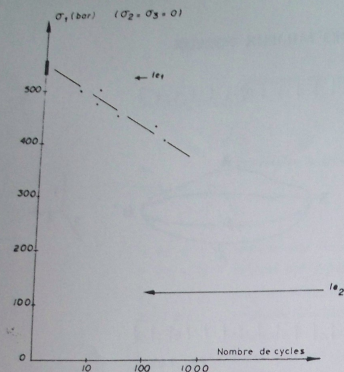


Fig. 2. — Andésite de Volvic. Essais de fatigue en compression simple

bien en dessous de la limite le_1 et l'on peut raisonnablement penser que la droite $\sigma_1 = le_1$ est asymptote à cette courbe.

Si γ est l'énergie libre de surface de la matrice, l'énergie dissipée dans un cycle est $\gamma \Delta S$ où ΔS est l'accroissement de surface interne du matériau.

Cette rupture par fatigue est d'ailleurs une rupture par décohésion, inhabituelle pour ces corps poreux : une manipulation de photo-élasticité nous a, en effet, montré que la présence de fissures en A et A' n'affecte pas la répartition des contraintes le long de BCB'C' ; pour $\sigma_1 < le_1$, il ne peut donc y avoir de ruptures le long de cette ligne.

Si par contre, on fait croître régulièrement, sans cycles, la contrainte σ_1 , on peut estimer que la limite élastique le_1 est la résistance ultime, c'est-à-dire la résistance du matériau chargé à une vitesse infiniment lente : dès que $\sigma_1 > le_1$, la ligne BCB'C' est soumise à une contrainte biaxiale qui, si la matrice est idéalement fragile, amène une rupture locale par écaillage ; à contrainte constante, il est vraisem-

blable que cet écaillage se poursuit jusqu'à la rupture totale du matériau, car la forme du pore se modifie dans un sens tel que le rapport $v_1(B) / \sigma_1$ croît. A cette instabilité, peut se joindre l'instabilité de la fissuration parallèle à σ_1 : au-dessous d'une certaine contrainte, cette fissuration peut en effet se propager à charge constante — voir [1] —.

On peut voir là une confirmation des résultats antérieurs de l'auteur [3], qui assimilent la résistance ultime à la limite élastique le_1 , et qui sont le fruit de nombreux essais sur divers types de roches.

La rupture finale peut enfin s'effectuer par cisaillement macroscopique du matériaux poreux.

Matrice plastique

Le comportement des matériaux poreux à matrice plastique (métaux poreux) est tout différent ; à la notion de fissuration, se substitue la notion de viscoplasticité ; il n'y a pas deux limites élastiques distinctes car $R_T = R_C = L$, car les contraintes locales en A sont inférieures en valeur absolue aux contraintes locales en B : la limite élastique ($le_1 = le_2$) apparaît donc lorsque la limite élastique L de la matrice est franchie sur BCB'C'. Pour des charges supérieures à le_1 , la répartition élastique des contraintes autour du pore devient une répartition élastoplastique avec zone de plasticité contenue au voisinage du pore et avec égalisation finale des contraintes locales à la valeur L .

On conçoit alors que, dans ce cas, limite de fatigue et résistance ultime soient supérieures à le_1 .

Domaine élastique

En général, parce qu'on a davantage l'habitude des matrices ductiles, on se limite à l'étude de la courbe (ϵ_1, σ_1) et celle-ci reste linéaire et réversible pour $\sigma < le_1$, car la formation possible de fissures parallèles à σ_1 n'affecte pas ϵ_1 .

Nous verrons d'autre part que, lorsque l'état de contrainte est vraiment triaxial, la différence entre le_1 et le_2 tend vers 0 si la contrainte moyenne augmente.

Néanmoins et en toute rigueur, le domaine élastique doit être défini par le_2 si $le_2 < le_1$, ou le_1 dans les autres cas : ce point est très important pour l'utilisateur, car c'est à partir de le_2 qu'interviennent les phénomènes de rupture par fatigue et autres phénomènes néfastes : la création de fissures augmente en effet la surface spécifique, donc l'altérabilité des matériaux, leur sensibilité aux chocs thermiques.

Existence d'une limite élastique en compression hydrostatique

Il est évident que du fait des concentrations de contraintes et de l'existence d'une contrainte locale principale nulle pour les matériaux poreux dits secs, c'est-à-dire dont les pores sont remplis de gaz très compressibles, la résistance peut être atteinte localement lors d'un chargement hydrostatique et des déformations de volume irréversibles peuvent avoir lieu.

On définit ainsi une limite élastique le_2 en compression hydrostatique : lorsque la matrice est fragile, le_2 désigne une rupture au sens strict, matérialisée par un écrasement des pores, de la même façon que, pour les corps pulvérulents — sables, — des contraintes hydrostatiques importantes amènent une comminution.

D'une façon générale, RYCHLEWSKI [4] a pu montrer à quelles conditions la compression hydrostatique d'un corps non-homogène donne

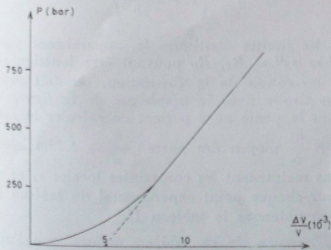


Fig. 3 a. — Andésite de Volvic. Compressibilité

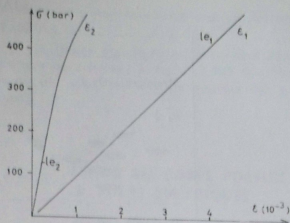


Fig. 3 b. — Andésite de Volvic. Compression simple

naissance à des états de contrainte locaux non hydrostatiques et donc à la possibilité de déformations plastiques ou ruptures.


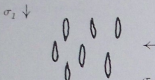
1.2. Etude d'un cas particulier : l'andésite de Volvic

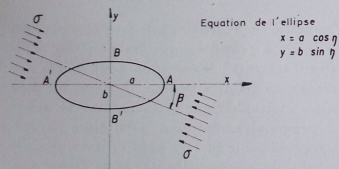
L'andésite de Volvic est une lave très poreuse ($\varphi \approx 0,20$) à porosité large (vacuoles de quelques millimètres) ; les vacuoles sont reliées par un réseau de fissures lorsque la roche est à la pression atmosphérique ; ces fissures se referment progressivement sous contrainte hydrostatique croissante et l'on peut estimer, d'après la courbe de compressibilité de la figure 3 a, que les fissures sont toutes refermées pour des contraintes hydrostatiques supérieures à 250 bar ; l'andésite présente en outre une orthotropie très marquée due à l'orientation préférentielle des vacuoles en forme d'ellipsoïdes allongés.

L'étude de la résistance de cette lave a été effectuée au Laboratoire de Mécanique des Solides [5] et a donné les résultats suivants du tableau I.

Pour interpréter ces résultats, nous utilisons les formules de la figure 4 [6], donnant la contrainte locale tangentielle s (η) au pourtour d'un pore elliptique dans un schéma bidimensionnel — la contrainte locale normale étant nulle.

TABLEAU I

	$\sigma_2 = \sigma_3$ (bar)	$\sigma_1 - l e_1$ (bar)
Première série I 	0	460
	250	1 250
	500	1 500
	1 000	1 550
Deuxième série II 	0	660
	250	1 700
	500	2 000
	1 000	2 400



$$s(\eta)_2 = \frac{2ab + (a^2 - b^2) \cos 2\beta - (a+b)^2 \cos 2(\beta - \eta)}{a^2 + b^2 - (\sigma^2 - b^2) \cos 2\eta} \sigma$$

Cas particuliers

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} s_A = s(0) = -\sigma \\ s_B = s(\frac{\pi}{2}) = \sigma (1 + 2\frac{a}{b}) \end{array} \right. \\ \beta = \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s_A = s(0) = \sigma (1 + 2\frac{a}{b}) \\ s_B = s(\frac{\pi}{2}) = -\sigma \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Fig. 4. — Concentration de contraintes autour d'un pore elliptique

Pour la première série :

$$s_A^I = \sigma_1 \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) - \sigma_2$$

$$s_B^I = \sigma_2 \left(1 + 2 \frac{b}{a} \right) - \sigma_1$$

Pour la deuxième série :

$$s_B^{II} = \sigma_1 \left(1 + 2 \frac{b}{a} \right) - \sigma_2$$

$$s_A^{II} = \sigma_2 \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) - \sigma_1$$

Si les limites élastiques $l e_1$ apparaissent pour $s_A^I = s_B^{II} = R_C$, R_C pouvant être fonction de σ_2 en raison de la fissuration, on doit avoir une droite dans le graphique de la figure 5, dont la pente nous permet de calculer le rapport $\frac{a}{b}$ moyen des pores : $\frac{a}{b} = 1,26$. Calculons maintenant les contraintes locales s_1 et s_2 pour chaque point expérimental du tableau I, nous obtenons le tableau II.

L'examen de ce tableau montre que l'approximation bidimensionnelle est satisfaisante et que :

TABLEAU II

$\sigma_2 = \sigma_3$ (bar)	0	250	500	1 000	
I	s_B	- 460	- 600	- 200	+ 900
	s_A	1 640	4 170	4 800	4 600
II	s_B	1 700	4 150	4 700	5 700
	s_A	- 660	- 820	- 250	+ 1 130

— la limite élastique le_1 est franchie pour une contrainte locale de compression constante égale à la résistance présumée de la matrice non fissurée ($\sigma_2 \gg 0,25$ kbar) : $R_c \sim 4 700$ bar ; ce chiffre est très important car il s'agit de la résistance de la matrice à une échelle extrêmement fine ;

— les tensions locales obtenues lors du franchissement de le_1 aux sommets des pores laissent à penser que des fissurations locales s'y sont produites pour une limite le_2 bien inférieure à le_1 — voir figure 3 b : courbe (ε_3, σ_1) relevée en compression simple ;

— pour $\sigma_2 = \sigma_3 = 1 000$ bar, les contraintes aux sommets des pores sont devenues de compression ; il n'y a plus de fissuration possible ; ce renversement du signe des contraintes locales aux sommets « verticaux » des pores lorsque

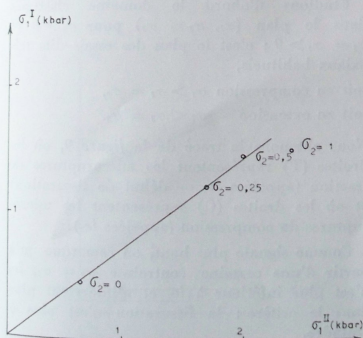


Fig. 5. — Andésite de Volvic.
Interprétation des essais triaxiaux.

la contrainte moyenne croît sera généralisé par la suite ;

— la limite élastique le_2 peut être évaluée, d'après ce schéma, à $le_2 = 1 900$ bar (écrasement des vacuoles aux extrémités des grands axes).

2. ETUDE DU CORPS POREUX A PORES SPHERIQUES

2.1. Domaine élastique pour une matrice plastique

Nous utilisons les expressions des contraintes locales [7] données par la figure 6 ; nous calculons les contraintes locales en fonction des trois contraintes macroscopiques principales (σ_1, σ_2 et σ_3) pour différents coefficients de Poisson de la matrice : $\nu = 0$; $\nu = \frac{1}{4}$; $\nu = \frac{1}{2}$

Pour $\nu = \frac{1}{4}$, nous avons par exemple :

$$\begin{aligned}
 \text{A} \quad & \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -0,585 \sigma_1 + 2,020 \sigma_2 + 0,065 \sigma_3 \\ s_3 = -0,585 \sigma_1 + 0,065 \sigma_2 + 2,020 \sigma_3 \end{cases} \\
 \text{B} \quad & \begin{cases} s_1 = 2,020 \sigma_1 - 0,585 \sigma_2 + 0,065 \sigma_3 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0,065 \sigma_1 - 0,585 \sigma_2 + 2,020 \sigma_3 \end{cases} \\
 \text{C} \quad & \begin{cases} s_1 = 2,020 \sigma_1 + 0,065 \sigma_2 - 0,585 \sigma_3 \\ s_2 = 0,065 \sigma_1 + 2,020 \sigma_2 - 0,585 \sigma_3 \\ s_3 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

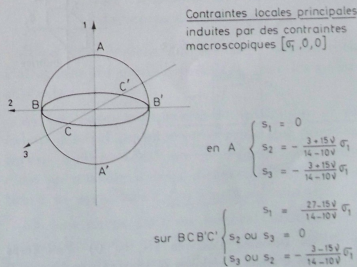


Fig. 6. — Concentration de contraintes au pourtour d'un pore sphérique

Nous étudions deux types de sollicitation simple :

- a) $\sigma_2 = 0$ essais biaxiaux.
b) $\sigma_2 = \sigma_3$ essais triaxiaux à symétrie axiale.

Pour chaque type de sollicitation et chaque coefficient de Poisson, nous traçons le domaine élastique, en utilisant le critère de TRESCA et en écrivant que les points intérieurs au domaine vérifient

$$\max |s_i - s_j| \leq L \text{ en A, en B et en C.}$$

Les résultats sont donnés sur les figures 7 et 8.

Evidemment les courbes des figures 7 et 8 sont symétriques par rapport à l'origine ; en général, les critères de plasticité représentés ne sont pas de MOHR^(*), il faudrait qu'ils soient symétriques par rapport à la première bissectrice dans le plan $(\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3)$.

Ces critères ne sont donc pas de TRESCA malgré leur tracé dans le plan $(\sigma_1 = 0)$. Le domaine élastique est fermé et les « courbes intrinsèques » qu'on peut en déduire, par exemple en prenant $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$, sont également fermées.

2.2. Domaine élastique pour une matrice fragile

Nous utilisons les formules de la figure 6, avec $\nu = 1/4$; nous faisons l'hypothèse que le critère de rupture pour la matrice fragile est celui proposé par PARATE [8] :

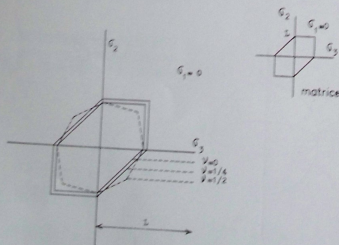


Fig. 7. — Domaine élastique $(\sigma_2 = 0)$ d'un corps poreux à pores sphériques et matrice plastique

(*) Critère de MOHR = critère de la courbe intrinsèque.

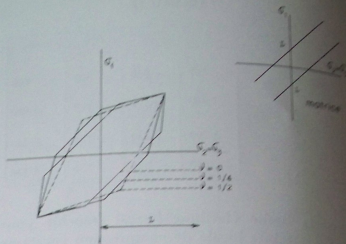


Fig. 8. — Domaine élastique $(\sigma_3, \sigma_2 = \sigma_1)$ d'un corps poreux à pores sphériques et matrice plastique.

$$\frac{1}{2} \max |s_i - s_j| = C + tg \phi \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}$$

la rupture en traction de la matrice est atteinte d'autre part pour un critère de traction maximum [9] :

$$\min (s_1, s_2, s_3) = R_T$$

Nous supposons dans les calculs que $R_C = 3 R_T$ et que $tg \phi = 1/2$; la résistance en compression double de la matrice est alors égale à $2 R_C$.

Étudions d'abord le domaine élastique dans le plan $(\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3)$ pour $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$; c'est le plan des essais dits triaxiaux habituels,

soit en compression $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$,

soit en extension $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$.

Nous obtenons le tracé de la figure 9, où les droites (T) représentent les microruptures de traction (appelées le_2 — début de fissuration) et où les droites (C) représentent les microruptures de compression (appelées le_1).

Comme signalé plus haut, on remarque qu'à partir d'une certaine contrainte $\sigma_2 = \sigma_3$, le_2 n'est plus inférieur à le_1 et n'intervient plus dans le critère : la fissuration n'est plus à craindre.

Le critère représenté sur la figure 9 n'est évidemment pas de MOHR, et ceci semble logi-

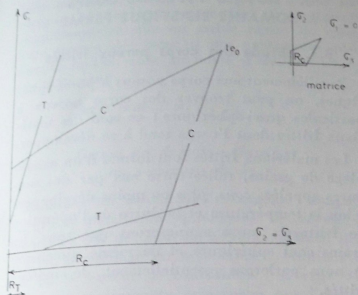


Fig. 9. — Domaine élastique ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$) d'un corps poreux à pores sphériques et matrice fragile.

que puisque le mécanisme de franchissement de la limite élastique n'est pas un microglissement, mais une microrupture de compression, ou de traction.

Si nous représentons maintenant le domaine élastique dans le plan $\sigma_1 = 0$, nous obtenons la figure 10 : le critère de traction maximum semble bien vérifié dans cette représentation puisque

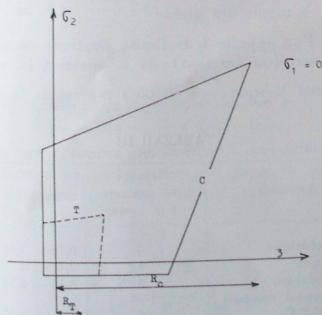


Fig. 10. — Domaine élastique ($\sigma_1 = 0$) d'un corps poreux à pores sphériques et matrice fragile.

- la résistance en traction simple est $R_T/2,02$,
- la résistance en traction double est $R_T/2,085$,
- et bien que la résistance en traction triple soit $R_T/1,5$.

La limite élastique l_{e_0} , d'autre part, est pratiquement constante.

Remarque sur la résistance au cisaillement

Lors d'un essai de cisaillement pur

$$(\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau, \sigma_3 = 0)$$

les contraintes locales sont :

- en A 0
 - 0,65 τ
 - 2,60 τ
- en B 1,95 τ
 0
 - 1,95 τ
- en C 2,60 τ
 - 0,65 τ
 0

Il y a rupture en B ou B' par cisaillement pur, c'est-à-dire, si la matrice est fragile, par formation d'une fissure en B et B' perpendiculaire à CC', lorsque $\tau = \frac{R_T}{1,95}$. La résistance au cisaillement est donc assez voisine de la résistance à la traction simple.

2.3. Domaine élastique des corps poreux réels

Il est bien évident que les corps poreux réels s'éloignent du modèle précédent par les points suivants :

- a) Les pores sont rarement sphériques et un calcul général prenant en compte des pores en forme d'ellipsoïdes, ou des pores elliptiques dans un modèle à deux dimensions, serait trop lourd et apporterait des résultats voisins.
- b) Les pores sont en général suffisamment rapprochés pour que les formules utilisées jusqu'au haut ne soient plus valables ; une approche empirique consisterait à remplacer dans ces formules les σ_{ij} par $\sigma_{ij}/e^{-\nu}$ comme nous le

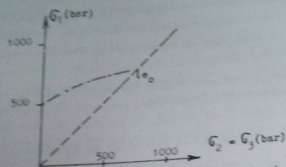


Fig. 11. — Domaine élastique du ciment Portland.

suggère le fait que les courbes expérimentales donnant les résistances R ou les raideurs Λ des corps poreux de même matrice se laissent très correctement approcher par des lois du même type

$$R = R_{\text{matrice}} e^{-\alpha} \\ \text{ou } \Lambda = \Lambda_{\text{matrice}} e^{-\alpha}$$

La figure 11 représente les résultats expérimentaux obtenus sur un ciment Portland (rapport E/C : 0,3); des résultats analogues ont été obtenus sur d'autres corps strictement poreux.

Si la figure 9, pour $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$, donne dans le plan de Mohr une droite décroissante, on observe souvent la forme de la figure 12 des courbes intrinsèques, notamment sur les craies ou autres roches tendres [5].

L'explication est sans doute que ces roches très poreuses se rapprochent plus des corps frittés que nous étudierons plus loin et que les mécanismes de micro-glisement (courbe intrinsèque non décroissante) sont prépondérants pour de faibles contraintes moyennes et s'effacent progressivement devant des mécanismes de micro-écrasements (tendance vers un point le_0 situé sur l'axe des n).

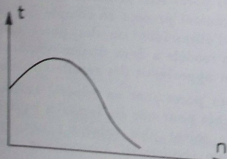


Fig. 12

3. AUTRES TYPES DE CORPS A DOMAINE ELASTIQUE FERME

3.1. Etude des corps poreux frittés

Parallèlement aux corps poreux à pores sphériques, on peut trouver des corps poreux à particules quasi-sphériques : ce sont des matériaux frittés dont l'usage tend à se développer.

Les matériaux frittés sont formés d'un assemblage de grains, reliés entre eux par des soulages appelés *cous*, plus ou moins développés selon la température et la durée de l'opération de frittage ; nous supposons que tous les grains sont sphériques et de même dimension et nous parlerons essentiellement de *métaux frittés*.

Calcul de la limite le_0

On peut concevoir plusieurs géométries simples d'agrégats de grains de même dimension (tableau III), caractérisées par le nombre de contacts par grain ou la porosité initiale φ_0 — avant le frittage — : lorsque ces agrégats sont soumis à une pression hydrostatique, les réactions intergranulaires sont *centrées* et on peut calculer le coefficient k de concentration de contrainte défini par :

$$k = \frac{F}{\sigma R^2}$$

F : force intergranulaire

σ : pression hydrostatique macroscopique

R : rayon des grains

Si l'on appelle L la limite élastique en compression (ou traction) de la matrice le_0 sera atteinte lorsque $\frac{F}{s} = L$ où s représente la sur-

TABEAU III

Assemblage	Nombre de contacts par grain	φ_0	k
tétraédrique	4	0,70	5,85
cubique	6	0,475	4
octaédrique (*)	8	0,40	2,55
hexagonal compact ou C.F.C.	12	0,26	1,414

(*) L'assemblage octaédrique semble le plus probable dans une fabrication courante.

face moyenne d'un cou; nous ne tenons pas compte ici de la concentration de contrainte supplémentaire due au faible rayon de courbure moyen des cous ni des contraintes résiduelles locales dues au mode d'élaboration de ces matériaux.

$$\text{On a donc : } l_{e_0} = \frac{s}{R^2} \frac{L}{k}$$

Forme du domaine élastique
au voisinage de l_{e_0}

Étudions un assemblage hexagonal compact de grains métalliques sphériques de rayon R assemblés par des cous de section s (figure 13). Un tel assemblage est orthotrope; étudions le cas où le tenseur de contraintes ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$) a les mêmes directions principales que l'assemblage.

DANTU [10] a donné les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} R^2 \sigma_1 &= F + \sqrt{2} F' \\ 4 \sqrt{2} R^2 \sigma_2 &= 3G + F - \sqrt{2} F' \end{aligned}$$

où F, F' et G sont les forces de contact (figure 13); si nous appelons $f = F/s, f' = F'/s, g = G/s$, l'équilibre élastique sera rompu si

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{f^2 + 4f'^2} &\geq L^2 && \text{(critère de TRESCA)} \\ g^2 &\geq L^2 \end{aligned} \right\}$$

en combinant ces deux systèmes d'équations, on arrive à l'équation :

$$\begin{aligned} [3A^2 + 48B^2 - 8AB + 23L^2]^2 \\ = 36(A - 12B)^2 L^2 \end{aligned}$$

$$\text{où } A = \frac{\sqrt{2} R^2}{s} \sigma_1 = \frac{L}{l_{e_0}} \sigma_1$$

$$\text{et } B = \frac{\sqrt{2} R^2}{s} \sigma_2 = \frac{L}{l_{e_0}} \sigma_2$$

Au voisinage de $\sigma_1 = \sigma_2 = l_{e_0}$, on a

$$(\sigma_1 - l_{e_0}) = -4(\sigma_2 - l_{e_0}),$$

soit une « courbe intrinsèque » imaginaire et différente en compression ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) et en extension ($\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$).

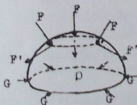


Fig. 13. — Schéma de corps poreux fritté.

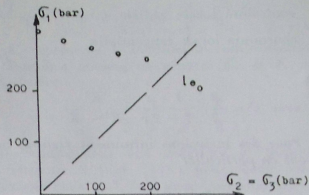


Fig. 14 a. — Domaine élastique d'un bronze fritté ($\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3$)

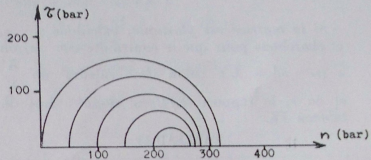


Fig. 14 b. — Domaine élastique d'un bronze fritté. Courbe intrinsèque

Une étude plus complète des métaux frittés sera trouvée dans « Plasticité et Ecrouissage d'un métal fritté » [11].

La figure 14 donne, soit dans le plan ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$) soit dans le plan de MOHR, le domaine élastique d'un bronze fritté ($\nu \sim 0,40$) déterminé par les essais triaxiaux habituels.

3.2. Etude des corps à inclusions

Bien qu'il ne s'agisse pas de corps poreux, il s'agit de corps suffisamment utilisés pour qu'on les évoque ici. Soit donc un corps élastique contenant, à la place des pores du chapitre 2, des inclusions élastiques de module de compressibilité K' .

On sait [7] que si K et ν sont le module de compressibilité et le coefficient de Poisson de la matrice, on a, sous l'effet d'une contrainte hydrostatique macroscopique σ , les contraintes principales locales suivantes, dans la matrice, au pourtour de l'inclusion :

$$\text{contrainte locale radiale } s_r = -\sigma \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}$$

$$\text{contrainte locale tangentielle } s_t = -\sigma \frac{\Gamma - 3/2}{\Gamma - 1}$$

$$\text{avec } \Gamma = \frac{3}{2} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{K'}{K - K'}$$

Pour des inclusions infiniment rigides, nous avons en particulier

$$s_r = 3 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \sigma$$

et

$$s_t = 3 \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma$$

Si la matrice est plastique, calculons $s_r - s_t$ et cherchons pour quelle contrainte $\sigma = le_0$ on a $|s_r - s_t| = L$; selon les valeurs de $\frac{K'}{K}$ et de ν , le rapport le_0/L est donné dans le tableau IV.

TABLEAU IV

K'/K \ \nu				
	0	1/4	1/2	
1	2/3	2/3	2/3	pores
1/2	5/3	13/6	∞	
1	∞	∞	∞	continus
2	4/3	7/3	∞	
∞	1/3	5/6	∞	inclusions rigides

On peut trouver sur la figure 15 un exemple de corps à inclusions, soit un mortier sec (*). Il est évident que les parties de matrice brisées ne pouvant s'étendre vers le centre de l'inclusion, comme on peut l'imaginer pour un corps poreux, il s'agit de microruptures — ou de plasticité — contenues. Dans ces conditions, la courbe de compressibilité obtenue est indépendante de la vitesse de chargement, il n'y a pas de fluage comme l'expérience le confirme. Néanmoins, les dommages créés sont suffisamment importants pour altérer complètement le matériau revenu à la pression atmosphérique après une compression hydrostatique supérieure à le_0 : la résistance et les propriétés élastiques comme la célébrité des ondes sont considérablement diminuées [12].

4. INFLUENCE DE LA PRESSION DE PORE SUR LA LIMITE ELASTIQUE DES CORPS POREUX

4.1. Etude générale du phénomène

Reportons nous aux deux courbes de la figure 16 représentant le critère (le_1) pour le même mortier sec ou saturé; pour $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, la limite le_1 du matériau saturé est inférieure

(*) C'est un corps à la fois poreux et à inclusions.

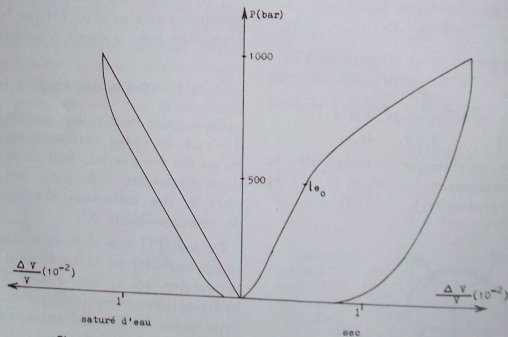


Fig. 15. — Mortier normalisé : compression hydrostatique

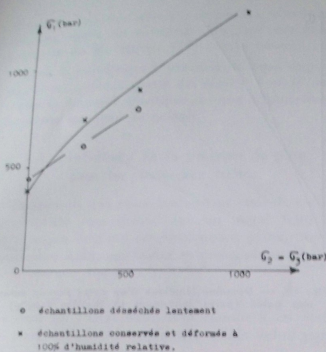


Fig. 16. — Domaine élastique d'un mortier normalisé ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$) sec ou saturé

à celle du matériau sec — et la résistance du matériau saturé est bien inférieure à celle du matériau sec — car le matériau saturé est soumis à des contraintes internes dites de gonflement [13] ; lorsque $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ la limite l_{e1} du matériau saturé croît plus vite que celle du matériau sec et ce fait peut s'expliquer de la façon suivante.

Sous des contraintes moyennes importantes, le mortier peut être considéré comme imperméable, les essais comme non drainés, et nous pouvons nous ramener au schéma du corps à pores sphériques, saturés cette fois de liquide.

La théorie de BIOT [14, 15] montre que tout corps poreux saturé comprimé dans un essai non drainé, c'est-à-dire où le liquide ne peut pas s'échapper, voit se créer une pression u à l'intérieur des pores ; cette pression u est proportionnelle à la déformation moyenne du corps poreux ou à la contrainte macroscopique moyenne σ_m .

Dans le cas du corps étudié en 2, nous avons [15] par exemple :

$$\chi = \frac{u}{\sigma_m} = \frac{3(1-\nu)K_f}{K_f(1+\nu) + 2(1-2\nu)K}$$

où K_f représente le module de compressibilité de liquide ; comme en général $K_f \ll K$, on peut écrire :

$$\chi = \frac{u}{\sigma_m} = \frac{3}{2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{K_f}{K}$$

Reportons nous aux notations et formules du chapitre 2 ($\nu = 1/4$) ; pour deux essais triaxiaux classiques avec même pression latérale $\sigma_3 = \sigma_2$, les contraintes locales en B (où les microruptures de compression gouvernent la limite l_{e1}) sont :

Pour le matériau sec

$$\begin{cases} s_1 = 2,02 \sigma_1 - 0,52 \sigma_2 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0,065 \sigma_1 + 1,435 \sigma_2 \end{cases}$$

Pour le matériau saturé

$$\begin{cases} s_1 = 2,02 \bar{\sigma}_1 - 0,52 \bar{\sigma}_2 - \frac{u}{2} \\ s_2 = u = \chi \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3} \\ s_3 = 0,065 \bar{\sigma}_1 + 1,435 \bar{\sigma}_2 - \frac{u}{2} \end{cases}$$

les $\bar{\sigma}_{ij}$ sont les contraintes effectivement appliquées au solide soit

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \varphi u$$

Pour un même état de contrainte macroscopique, le cisaillement local maximum est plus faible $\left(\frac{s_1 - 1,5u}{2} \text{ au lieu de } s_1/2 \right)$; la limite élastique sera donc plus élevée pour le matériau saturé (non drainé) que pour le matériau sec, puisque la contrainte locale moyenne est inchangée.

Cette conclusion est confirmée par la figure 16 et la figure 15 sur laquelle on peut voir que la limite l_{e2} du matériau saturé est bien supérieure à la limite l_{e2} du matériau sec ; on peut calculer l_{e2} du matériau saturé par les formules du paragraphe 3.2, en faisant $K^* = K_f$.

Remarquons que l'existence d'une pression de pore, imposée ou engendrée par les contraintes macroscopiques, a un effet inverse sur la limite l_{e1} — matrice fragile, contrainte moyenne ma-

croscopique faible ; — en compression simple par exemple : $le_2 = \frac{|R_T|}{0,585}$ pour le matériau sec de la figure 9 ; $le_2 = \frac{|R_T|}{0,585 + \frac{\chi}{6}}$ pour le

matériau non drainé. Cet abaissement de le_2 , joint à l'abaissement d'énergie libre de surface de la matrice [13] donc à la facilité accrue de développer la fissuration, peut expliquer l'influence néfaste de la présence d'eau dans des roches réelles [3, page 1203].

4.2. Etude du corps poreux à pores sphériques et à matrice plastique

Nous reprenons l'étude du paragraphe 2.1, avec $\nu = \frac{1}{4}$, et pour un corps poreux saturé d'un liquide tel que $K_1/K = 1/9$.

Nous avons tracé sur la figure 17 le domaine élastique dans le plan $(\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3)$ pour les trois cas importants suivants :

- matériau sec ou matériau saturé drainé $u = 0$
- matériau saturé non drainé $u = \frac{1}{4} \sigma_m$
- matériau saturé non gainé $u = \sigma_1 = \sigma_3$.

Dans ce dernier cas, le critère de plasticité est un critère de TRESCA $\sigma_1 - u = \text{constante}$ ($u = \sigma_2 = \sigma_3$) et ceci peut être expliqué de la façon suivante : le chargement (σ_1, u, u) avec une pression de pore u peut être décomposé en :

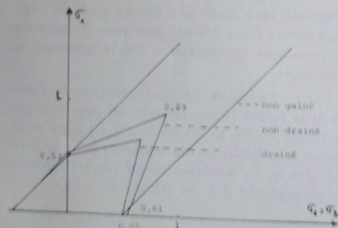


Fig. 17. — Domaine élastique d'un corps poreux saturé à pores sphériques et matrice plastique : essais drainé, non drainé, non gainé.

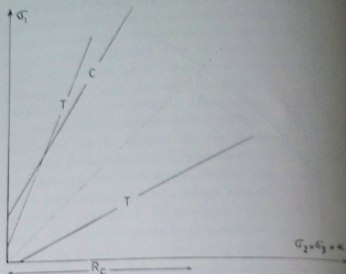


Fig. 18. — Domaine élastique d'un corps poreux saturé non gainé (pores sphériques et matrice fragile)

- un chargement isotrope u en chaque point de la matrice,
- et un chargement uniaxial $(\sigma_1 - u)$ sur la matrice ; comme cette matrice est métallique, les seuils locaux de plasticité ne sont pas affectés par le premier chargement isotrope ; reste $(\sigma_1 - u)$, compression monoaxiale, qui donne des déformations plastiques pour une valeur constante.

4.3. Etude du corps poreux à pores sphériques et à matrice fragile

Si nous essayons de tracer le domaine analogue à celui de la figure 9 pour les essais non gainés, nous pouvons voir sur la figure 18 que :

- les droites T sont légèrement modifiées,
- la droite C ($\sigma_1 > u$) est considérablement modifiée, sa pente devenant supérieure à l'unité,
- la droite C ($\sigma_1 < u$) est très en dessous de l'axe des u , dont les microfissures de compression ne peuvent pas jouer dans ce domaine.

L'expérience montre bien en effet que lors d'essais triaxiaux classiques non gainés ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = u$), la limite élastique le_1 et la

résistance croissent avec u ; on pourra se reporter aux essais de ROBINSON [16] sur des calcaires et de Mc HENRY [17] sur le béton.

Dans le cas d'essai à pression de pore imposée, il est facile à partir des figures 9 et 18 de tracer le domaine élastique puisque u intervient linéairement dans les calculs.

4.4. Influence de la pression de pore pour les matériaux frittés

Supposons que nous fassions un essai de compressibilité non drainé sur un métal fritté ; la pression de pore se développant proportionnellement à la contrainte macroscopique σ on a, à chaque instant :

$$\sigma_{\text{solide}} = \bar{\sigma} = \sigma (1 - \varphi \chi) ;$$

les cous du métal fritté sont soumis à un état de contrainte local à symétrie axiale défini par les contraintes principales

$$-\sigma (1 - \chi) \frac{k R^2}{s} - \chi' \sigma \quad \text{avec } \chi' > 0$$

$$-\chi \sigma$$

$$-\chi \sigma ;$$

l'équilibre élastique sera donc détruit pour $\sigma = l_{e_0}$ tel que

$$l_{e_0} (1 - \chi) \frac{k R^2}{s} - (\chi + \chi') l_{e_0} = L$$

La limite élastique l_{e_0} du matériau saturé non drainé est donc supérieure à celle du matériau sec.

Pour les essais à pression de pore imposée, on peut, comme en 4.2., décomposer l'état de contrainte ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 ; u$) en un état neutre ($u, u, u ; u$) et un champ macroscopique ($\sigma_1 - u, \sigma_2 - u, \sigma_3 - u ; 0$) régissant les plasticités locales. Là encore, il est visible que l'existence de u augmente la limite élastique du matériau.

5. CONCLUSIONS — COMPARAISON AVEC LES CORPS PULVERULENTS

Notre étude a permis de mettre en évidence les faits importants suivants :

1° Le domaine élastique des corps poreux est fermé et de forme variée selon que la matrice est plastique ou fragile, selon la porosité du matériau : les matériaux de faible porosité peuvent être considérés comme poreux à pores sphériques ou en forme d'ellipsoïdes, ceux de forte porosité, comme poreux à particules sphériques frittées.

2° L'écroutissement, sans fissuration, des matériaux poreux à matrice plastique, permet de sortir sans crainte du domaine élastique défini dans ce texte ; par contre, l'écroutissement des matériaux poreux à matrice fragile ne fait que masquer des dégradations internes et est néfaste (faux écroutissement).

3° Pour ces derniers matériaux, et pour de faibles contraintes moyennes, il faut absolument définir le domaine élastique par la plus basse des limites élastiques dont le franchissement peut amener une ruine avec le temps par fatigue ou altération.

4° Les concepts de pression de pore et contraintes effectives ont été réexaminés et ont amené à la conclusion importante du durcissement possible dû aux pressions de pores parfois développées par les contraintes extérieures elles-mêmes ; ce durcissement même doit être utilisé avec prudence, car, dans les corps poreux quasi-imperméables, les pressions interstitielles développées immédiatement sous l'effet des contraintes se dissipent lentement en abaissant la résistance du corps (fausse consolidation).

Comparaison de la mécanique des corps poreux avec la mécanique des sols

a) Pour les corps pulvérulents, de même que pour les métaux, le mécanisme intime du franchissement de la frontière élastique est un microglissement : le critère est donc un critère de MOHR et les courbes intrinsèques sont largement ouvertes du côté des compressions ; après le franchissement de la limite élastique, la déformation se fait rapidement à volume constant.

Dans les corps poreux, ce mécanisme est une microrupture de compression ou de traction : le critère n'est pas de MOHR et est fermé ; après le franchissement de la limite élastique, le coefficient de Poisson ne tend pas nécessairement vers $1/2$ [11].

b) En mécanique des sols, on emploie le critère de la contrainte effective [18] selon lequel la rupture ne dépend que des contraintes effectives $\sigma_{ij}^{\text{eff}} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}u$; en mécanique des milieux poreux, ce critère est inapplicable puisque l'effet d'une pression de pore sur la limite élastique est opposé.

SKEMPTON [18] a interprété l'augmentation de résistance avec la pression $\sigma_1 = \sigma_2 = u$ dans les essais non gainés de matériaux poreux non pulvérulents, en remplaçant l'expression précédente des contraintes effectives, qui prévoit une résistance indépendante de u , par l'expression.

$$\sigma_{ij}^{\text{eff}} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \alpha u$$

où α est le nombre $\left(1 - \frac{K}{K_s}\right)^{(*)}$

et en utilisant toujours un mécanisme de microglissement comme initiateur de rupture. Notre explication est fondée sur l'analyse des contraintes locales et conduit à la même conclusion, mais pour la limite élastique.

On peut néanmoins, pour les problèmes de déformation seulement, appliquer ce dernier critère de contrainte effective — théorie de BIOT [14, 15] — et se ramener à l'élasticité classique.

c) En mécanique des sols [19], on a l'habitude d'employer un coefficient χ égal à l'unité, c'est-à-dire que pour des essais non drainés et avec le critère de contrainte effective, la résistance est indépendante de la pression $\sigma_1 = \sigma_2 (= u)$. Pour les milieux poreux examinés ici, le coefficient χ est toujours inférieur à l'unité.

d) Certains corps poreux, en particulier les roches gréseuses [20 et 3, page 1194], formées de grains souvent liés par un ciment argileux, semblent plutôt obéir aux critères de mécanique des sols qu'aux critères développés ici ; il faut voir là la prépondérance des microglissements entre grains par rapport aux microruptures que nous avons envisagées dans cette étude.

Remarque finale

Nous avons évidemment traité des cas très idéaux et le comportement observé sur les corps poreux réels ne peut être prévu que qualitativement par cette étude.

(*) K : module de compressibilité du matériau sec
 K_s : module de compressibilité de la matrice.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RIENIAWSKI (1966). — Stability concept of brittle fracture propagation in rock. *Engineering Geology*, 2, 3, 149-162.
- [2] PERAMI et THENOZ (1967). — Perméabilité et porosité des roches. *Colloque sur la Fissuration des Roches*. Paris.
- [3] MORLIER (1964). — Etude expérimentale de la déformation des roches. *Revue IFP* XIX, 10, 1115-1197 et 11, 1183-1217.
- [4] RYCHLEWSKI (1965). — Note on the beginning of plastic deformation in a body under uniform pressure. *Archivum Mechaniki Stosowanej*, 3, 17, 405-411.
- [5] HABB et VOUILLE (1966). — Publications internes du Laboratoire de Mécanique des Solides.
- [6] TIMOSHENKO et GOODIER (1961). — Théorie de l'élasticité. *Béranger* p. 387-389.
- [7] GOODIER (1933). — Concentration of Stress around Spherical and Cylindrical inclusions and flaws. *Trans. A.S.M.E.* E 55, 39-44.
- [8] PARATE (1969). — Critère de rupture des roches fragiles. *Annales I.T.B.T.P.* n° 253, 147-160.
- [9] MORLIER et PARATE (1968). — Critère de rupture des roches fragiles au voisinage du sommet de la courbe intrinsèque. *Symposium International de Mécanique des Roches de Madrid*.
- [10] DANTU (1961). — Etude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maxima. 5^e congrès de Mécanique des Sols.
- [11] MORLIER (1970). — Plasticité et écrouissage d'un métal fritté. *Mémoires Scientifiques, Rev. Metal lurgie*, LXVII, 6, 401-412.
- [12] BAROS, HABB, MORLIER (1963). — Phénomènes physico-mécaniques apparaissant dans les roches entrées dans le domaine ductile. *Colloque A.R.T.F.P. de Paris*. Communication n° 5 b.
- [13] MORLIER (1967). — Influence de l'eau sur la résistance des Roches. *Cahier 1/68 du Comité Français de Mécanique des Roches* 19-25.
- [14] BIOT (1962). — Mechanics of Deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.* 33, 1482-1498.
- [15] MORLIER (1968). — Elasticité d'un corps faiblement poreux ; application au calcul des célérités des ondes dans une roche saturée. *Colloque A.R.T.F.P. de Pau*. Communication n° 36.
- [16] ROBINSON (1959). — The effect of pore and confining pressure on the failure process in sedimentary rocks. *Colo. Sch. Mines Q.* 54, 177.
- [17] MC HENRY (1948). — The effect of uplift pressure on the shearing strength of concrete. *Proc. 6th Congr. Large Dams*, Paper 48.
- [18] SKEMPTON (1961). — Effective stress in soils, concrete and rocks. *Pore pressure and suction in soils*. Butterworths.
- [19] SKEMPTON (1954). — The pore pressure coefficients A et B. *Géotechnique*, 4 - 4 - 143-147.
- [20] BARON, CASTEL, HABB (1963). — Influence de la pression interstitielle sur les caractéristiques des roches en condition de fond *Colloque A.R.T.F.P. de Paris* - Communication n° 5 a.

- Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, 3, rue Fernand-Hainaut, 93 — Saint-Ouen.
- Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, 9, rue La Pérouse, 75 — Paris (16^e).
- Institut Textile de France, 35, rue des Abondances, 92 — Boulogne.
- Institut Universitaire de Technologie de Belfort. Département Génie Mécanique, Rue Engel-Gros, 90 — Belfort.
- Le Joint Français, 84-116, rue de Carrières, 95 — Bezons.
- Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58, bd Lefebvre, 75 — Paris (15^e).
- Laboratoire du Centre d'Etudes et de Recherches des Charbonnages de France, B.P. n° 27 à 60 — Greil.
- Laboratorio de Engenharia de Angola, Caixa Postal 6500 Luanda, Angola.
- Laboratoire du Génie Electrique, 2, rue Camichel, 31 — Toulouse.
- Laboratoire de Mécanique des Fluides, 2, rue Boussingault, 67 — Strasbourg.
- Laboratoire de Mécanique des Sois, Faculté des Sciences, Domaine Universitaire, CEDEX 83, 38 — Grenoble.
- Laboratoire de Recherches Unilever, Société Thibaud-Gibbs, 8, Impasse de la Montjoie, 93 — La Plaine St-Denis.
- Laboratoire Rhône-Alpes, B.P. n° 269, 38 — Grenoble.
- Lhomargy, S.A., 3, bd de Bellevue, 91 — Draveil.
- Mesure et Automatismes pour l'Industrie et la Recherche (MAIR), 9 bis av. de Latre de Tassigny, 92 — Boulogne.
- Michelin et Cie, place des Carmes, 63 — Clermont-Ferrand.
- The Milton S. Eisenhower Library, Serials Department, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland 21218, U.S.A.
- Minerais et Métaux, Services Techniques, 28, rue Arthur-Rozier, 75 — Paris (19^e).
- Naphthochimie, Laboratoire, B.P. n° 2, à 13 - Lavra.
- National Lending Library for Science and Technology, Walton, Boston Spa (Yorkshire), Angleterre.
- Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, 29, av. de la Division Leclerc, 92 — Châtillon.
- L'Oréal, 1, avenue Saint-Germain, 93 — Aulnay-sous-Bois.
- Orta Dogu Teknik Universitesi, Engineering Fakultesi, Ankara, Turquie.
- Pêchiney-Saint-Gobain, Centre de Recherches, 12, rue des Gardinoux, 93 — Aubervilliers.
- Produits Chimiques Pêchiney-Saint-Gobain, 63, rue de Villiers, 92 — Neuilly-sur-Seine.
- Régie Nationale des Usines Renault, 10, avenue Emile-Zola, 92 — Billancourt.
- Rijksinstituut voor Grondmechanica, Hertogsstraat 89, Brussel, Belgique.
- Sangamo Controls Limited, North Bersted, Bognor Regis, Sussex, Angleterre.
- Service ERNUTH, Direction des Etudes et Recherches, E.D.F., Centre des Renardières, 77 — Ecuisses.
- Service Etudes Physiques, Société Rhodiacéta, 45, rue Sergent-Michel-Berthet, 69 — Lyon (9^e).
- Service d'Etudes sur la Séparation des Isotopes de l'Uranium, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, B.P. n° 2, 91 — Gif-sur-Yvette.
- SICPA France, B.P. n° 66, 74 — Annemasse.
- Société Anonyme Jean Lamy et Cie, 19, av. Barthélémy-Thimonnier, 69 - Caluire.
- Société Commerciale Paustra, Laboratoire Central, Route de Périn-gondas, 28 — Châteaudun.
- Société d'Équipement Industriel Electro-Mécanique, 8, rue Polonceau, 75 — Paris (8^e).
- Société Ethylène-Plastique, Centre de Recherches, B.P. n° 1, 62 — Mazingarbe.
- Société Kléber-Colombes, 12, rue des Sablons, 75 — Paris (16^e).
- Société Minière et Métallurgique de Penarroya, 12, place Vendôme, 75 — Paris (1^{er}).
- S.N.C.F. Direction des Installations Fixes, 42, rue de Châteaudun, 75 — Paris (9^e).
- Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine, Centre de Recherches de Lacq, B.P. n° 34, 64 — Lacq.
- Société Prolabo, 12, rue Pelée, 75 — Paris (11^e).
- Société Rhône-Poulenc, Atelier d'Applications de Vénissieux, 11, avenue de la République, 69 — Vénissieux.
- Techn. Hogeschool, Bibliotheek, Weg — en Waterbouwkunde, Oostplantsoen 25, Delft (Hollande).
- Unilever Research Laboratory, The Frythe, Welwyn, Hertfordshire, (Angleterre).