

PB 30

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE
Bibliothèque

Cahiers
du
Groupe Français de Rhéologie

N° 6 - Tome I
AVRIL 1968

ÉDITÉ PAR LE CENTRE DE DOCUMENTATION DE L'ARMEMENT
MAGASIN DE VENTE : 2, AVENUE DE LA PORTE-D'ISSY, PARIS (15°)

1968

N° 6

Cahiers
du
Groupe Français de Rhéologie

N° 6 - Tome I

AVRIL 1968

SOMMAIRE

	PAGES
J. MANDEL. — Avant-propos	301
G. MAYNE et R. VAN GEEN. — Sur la définition du taux de variation de contrainte et ses applications en rhéologie	303
W. BISMUTH et M ^{me} M. CHEZEAUX. — Quelques expériences sur l'effet Weissenberg	315
A. M. FREUDENTHAL. — Effets du second ordre en plasticité	329
F. W. SMITH. — La mécanique des milieux continus et la chimie physique des liquides; étude des contraintes normales se produisant dans les liquides à structure simple	341
M. ALLARD et M. CHATAIN. — Présentation d'une machine industrielle appliquant l'effet Weissenberg	345
B. SHORTHOUSE. — Problèmes instrumentaux en rhéologie	349
Table des auteurs du tome I	355

AVANT-PROPOS

Ce cahier contient les conférences prononcées au cours du Colloque du 19 juin 1967 dont le thème était : « Progrès récents de l'étude des effets du second ordre ». Il apparaît, en effet, que, depuis le Symposium international de Haifa (1962) qui fut consacré à cette question, des progrès substantiels ont été acquis, tant en ce qui concerne les fluides visqueux que les solides plastiques.

La plupart des communications que l'on trouvera rassemblées ici sont relatives aux fluides et se rattachent plus ou moins à l'effet Weissenberg. Qu'on me permette de rappeler en quoi il consiste et les équations proposées pour en rendre compte.

Pour certains fluides, lorsqu'on provoque le cisaillement suivant Ox_1 des couches perpendiculaires à Ox_2 , se développent non seulement des contraintes de cission σ_{12} proportionnelles au glissement γ , mais encore des contraintes normales σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} proportionnelles à γ^2 .

Pour expliquer cet effet, REINER et RIVLIN (1947) ont proposé une équation de comportement de la forme :

$$\mathbf{s} = 2 \gamma \mathbf{u} + \alpha \text{dév}(\mathbf{u}^2),$$

\mathbf{s} étant le déviateur des contraintes, \mathbf{u} le tenseur vitesse de déformation, γ , α des constantes (lorsqu'on se limite aux termes du second ordre).

Une explication complètement différente a été avancée par MOONEY (1951), De WITT (1955), ANGLES D'AURIAC (1966) : le fluide est un fluide de Maxwell obéissant à l'équation linéaire :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{s}}{2 \gamma} + \frac{1}{2 \mu} \frac{D \mathbf{s}}{D t},$$

où $\frac{D \mathbf{s}}{D t}$ est le tenseur vitesse de contrainte. Mais cette vitesse de contrainte doit être évaluée par rapport à des axes qui tournent avec l'élément fluide. Les effets du second ordre sont ici dus à cette rotation.

On trouve que les contraintes s_{11} et s_{22} sont égales dans la première théorie, opposées dans la seconde. L'expérience ne confirmant ni l'une ni l'autre de ces prévisions, il semble nécessaire de combiner les deux théories. On peut aussi (on verra que cela revient au même) adopter d'autres définitions de la vitesse de contrainte que celles que nous venons de donner. La notion de vitesse de contrainte joue ainsi un rôle essentiel dans l'étude des effets du second ordre; la première communication va nous permettre de l'approfondir.

J. MANDEL,

Président
du Groupe Français de Rhéologie

SUR LA DÉFINITION DU TAUX DE VARIATION DE CONTRAINTE ET SES APPLICATIONS EN RHÉOLOGIE ⁽¹⁾

par G. MAYNE et R. VAN GEEN

CHARGÉS DE COURS ASSOCIÉS
À L'UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES

RÉSUMÉ

La définition d'un taux de variation objectif et intrinsèque d'une grandeur tensorielle conduit à l'utilisation d'un opérateur différentiel qui trouve son origine dans les travaux de Sophus LIE. Les propriétés de cette dérivée de LIE sont examinées, ainsi que diverses applications.

La dérivée au sens de JAUMANN apparaît comme la composante rigide de la dérivée au sens de LIE.

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

\bar{a}, a_{ij}^n	Vecteur, tenseur quelconque.
T ou T_{ij}	Tenseur des contraintes.
τ ou τ_{ij}	Densité tensorielle des contraintes selon TRUESDELL.
E ou E_{ij}	Tenseur des déformations d'ALMANSI.
V ou V_{ij}	Tenseur des vitesses de déformation.
\tilde{T}	Dérivée de JAUMANN.
$\tilde{L} T$	Dérivée de LIE associée au champ de vecteurs \bar{v} .
\tilde{T}	Matrice transposée de la matrice associée à T .
T^{-1}	Matrice inverse de la matrice associée à T .
τ et γ	Dans le modèle de MAXWELL, respectivement cisaillement et glissement.

A. — SUR L'OPPORTUNITÉ D'UNE MESURE OBJECTIVE ET INTRINSÈQUE DU TAUX DE VARIATION DU TENSEUR DES CONTRAINTES

- 1 L'influence du mouvement et de la déformation du référentiel, dans le calcul du taux de variation des contraintes intervenant dans la formulation des équations de comportement.

La détermination du comportement mécanique d'un milieu continu exige la connaissance d'équations constitutives ou *équations de comportement*, caractérisant le milieu.

Celles-ci visent à pallier l'insuffisance d'information fournie par les seules équations de mouvement et de continuité. Pour la même raison, une équation de comportement est nécessaire lorsqu'on veut calculer la puissance des forces intérieures dans le milieu continu.

Les équations de comportement de milieux simples sont des relations à valeur tensorielle entre tenseurs : $T = f(E)$ [solides élastiques], $T = f(V)$ [liquides newtoniens], $T = f(E, V)$ [corps visco-élastiques], etc. Certaines équations de comportement amènent l'introduction d'un *taux d'accroissement de contrainte*.

Ainsi, dans un corps élémentaire de Maxwell de complaisance $\frac{1}{\mu}$ et de viscosité τ , l'addition des déformations conduit à l'équation constitutive :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu} \dot{\tau} + \frac{1}{\tau} \dot{\tau}$$

(1) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 19 juin 1967.

qui contient un terme $\dot{\epsilon}$, « vitesse » d'accroissement de la contrainte. Mais un tel modèle simplifié, caractérisé par des scalaires, implique de fait l'acceptation de l'axiome de scission de la loi de comportement en deux lois distinctes, l'une liée aux parties isotropes, l'autre aux déviateurs des tenseurs concernés.

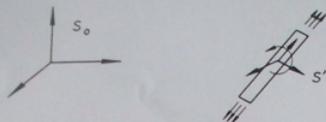


Fig. 1

Lorsqu'on cherche à étendre la portée d'une équation constitutive, on pose immédiatement la question du référentiel dans lequel sera calculé le taux d'accroissement ou « vitesse » du tenseur T.

Un exemple simple inspiré de W. PRAGER [1] va illustrer cette nécessité du choix du référentiel adéquat :

a) une éprouvette en traction simple statique est mise en rotation, avec le système de mise en charge, autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette (fig. 1). Les variations des composantes de T dépendent du choix du référentiel : ainsi, dans le référentiel absolu S_0 ces composantes varient,

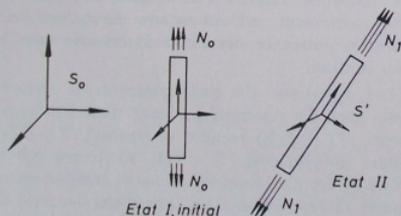


Fig. 2

alors qu'elles sont constantes pour tout observateur lié à l'éprouvette, c'est-à-dire dans le référentiel S' en rotation;

b) imaginons maintenant que la contrainte varie durant le mouvement de l'éprouvette, par exemple, lorsque celle-ci passe de l'état initial I (où l'on a confondu, par pure commodité, le

référentiel absolu et le référentiel arbitraire lié à l'éprouvette) à l'état II (fig. 2).

Le calcul du taux de variation de T peut se faire soit directement dans S' que l'on suit dans son mouvement, soit dans S_0 , mais dans ce cas pour autant que l'on élimine les variations dues au mouvement rigide du référentiel lié à la matière;

c) dans la figure 3, la rotation du référentiel n'est plus due à un mouvement d'ensemble du milieu par rapport à l'observateur, comme dans l'exemple de l'éprouvette de Prager : cette rotation est cette fois le résultat de la déformation elle-même du milieu continu.

L'influence du mouvement rigide du référentiel se fait à nouveau sentir lors du calcul du taux de variation de la contrainte. Ce dernier calcul doit être établi non dans un référentiel absolu S_0 , mais dans un référentiel S' construit en P en y faisant subir à S_0 la

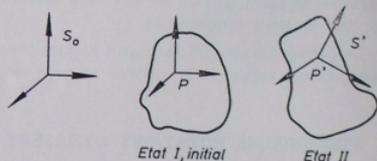


Fig. 3

rotation rigide du milieu (dans le cas d'un milieu élastique et de déformations évanouissantes, ce vecteur rotation serait $\bar{b} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{u}$).

Selon l'expression de J. MANDEL [2], le taux d'accroissement doit être calculé « par rapport à la matière », sans quoi sa mesure ne serait pas objective, puisque dépendante du mouvement des axes;

d) notre recherche d'une mesure objective du taux de variation de contrainte nous a amenés à éliminer la rotation relative de l'observateur par un mouvement rigide adéquat du référentiel S_0 . Nous avons ainsi construit en chaque point un référentiel à l'image du référentiel absolu (ces référentiels peuvent être orthonormés). Ce calcul équivaut à différencier au sens de JAUMANN [5]. On reprochera à cet ensemble de référentiels de ne pas être matériels (« entraînés par la matière ») et de résulter d'une construction à refaire en chaque point, à chaque instant.

ON PEUT PRÉFÉRER CALCULER UN TAUX DE VARIATION DANS UN RÉFÉRENTIEL ARBITRAIRE FIGÉ DANS LE MILIEU, SE MOUVANT ET SE DÉFORMANT AVEC LUI (fig. 4).

Les axes d'un tel référentiel lié à la matière sont formés de particules. En général, les directions

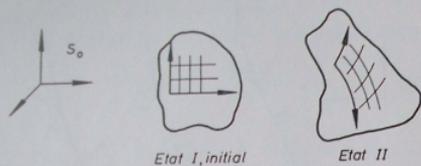


Fig. 4

constituant le trièdre se modifient à chaque instant, tandis qu'une graduation portée sur chaque axe (jauge) est déformée avec le milieu.

Le but de cet article est précisément de montrer qu'un tel calcul équivaut à l'emploi d'un opérateur différentiel qui trouve son origine dans les travaux de Sophus LIE [12].

Nous appellerons *INTRINSÈQUE* un taux de variation calculé dans un référentiel figé dans le milieu. Une grandeur intrinsèque est nécessairement objective, puisque les axes matériels subissent la rotation du milieu. Elle en diffère cependant : nous montrerons, en effet, que l'utilisation de la seule composante rigide de l'opérateur de LIE, revient à différencier au sens déjà défini de JAUMANN.

L'introduction d'opérateurs différentiels visant à exclure de la dérivée matérielle $\frac{dT}{dt}$ qui est non objective, le mouvement du référentiel, n'est pas chose neuve.

Dès 1911, G. JAUMANN [5] introduisit l'opérateur qui porte son nom. De 1934 à 1940, A. BIOT présente les éléments successifs d'une théorie où les effets physiques se séparent des effets géométriques par l'introduction du champ de vecteurs tourbillons dans les équations d'équilibre, et ce pour un matériau linéaire ou non-linéaire [6] à [8]. Récemment, quelques travaux ([9] à [11]) relatifs aux fondements de la rhéologie ont apporté une impulsion nouvelle à l'étude de cette question.

La dérivée au sens de LIE semble moins connue, bien que divers mémoires mathématiques lui aient été consacrés ([14] à [19]). La signification des diverses dérivées introduites après JAUMANN par

RIVLIN, OLDROYD [9], TRUESDELL [10] apparaît nettement lorsqu'on les situe par rapport à la dérivée de LIE.

Les propriétés de cette dérivée font l'objet de la partie B de cet article.

2 Exemple.

Les ouvrages déjà cités contiennent divers exemples faisant intervenir des dérivées du type de JAUMANN. Ces applications sont, à quelques rares exceptions près, relatives aux fluides visqueux.

Nous souhaitons ici préciser la question du choix du référentiel par un exemple tiré de la physique expérimentale des milieux continus. Nous n'examinerons qu'un état plan de contrainte.

On sait, en particulier, depuis les travaux de P. DANTU [3], qu'il est possible de déterminer la rotation rigide en chaque point, par la méthode des moirés et des moirés d'ordre supérieur.

Dans une récente conférence de synthèse — la « W. Murray Lecture 1965 » — A. DURELLI [4] a montré diverses méthodes d'obtention par moirure des courbes d'égal rotation rigide, ou *courbes isostrophiques*.

La méthode classique des « grids » permet, d'autre part, d'obtenir une image suffisamment fidèle de la déformation d'un référentiel figé dans le milieu.

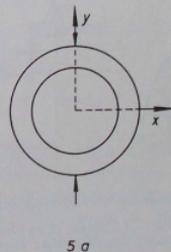


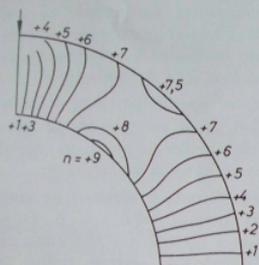
Fig. 5 a. — Schéma de l'expérience

Deux méthodes expérimentales nous permettent ainsi de marquer la différence dans le choix du référentiel lors des différenciations au sens de JAUMANN et de LIE.

Nous avons reproduit aux figures 5 a, b, c et d, des données expérimentales dues à DURELLI [4], relatives au cas de l'anneau circulaire déformé par deux forces égales agissant le long d'un diamètre (fig. 5 a).

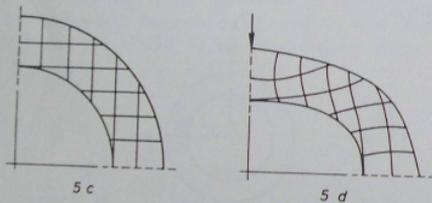
La figure 5 b donne les courbes isostrophiques pour un anneau en résine époxy ($E \approx 380 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0,385$, les diamètres extérieur, intérieur et l'épaisseur sont respectivement de 292 mm, 190 mm, 19 mm; chaque force appliquée vaut 900 kg²).

La figure 5 d donne le référentiel (initialement cartésien : fig. 5 c) déformé (afin d'accentuer la déformation, le modèle est cette fois en polyuréthane, $E \approx 0,37 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0,5$, les diamètres



5 b

Fig. 5 b. — Courbes isostrophiques :
 $\omega = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot n$ (en radians)



5 c

5 d

Fig. 5 c et d. — Déformation d'un référentiel fixé dans le milieu

REMARQUE. — La nature et les dimensions des modèles des figures 5 b et 5 c sont différentes

extérieur, intérieur et l'épaisseur sont respectivement de 127 mm, 83 mm, 12,7 mm; chaque force appliquée vaut 3,9 kg²).

Un calcul de vitesse de contrainte, au sens de LIE, se fera dans le repère déformé 5 d. Au sens de JAUMANN, le calcul se fera dans les repères construits comme indiqué à la figure 6 : le long de chaque courbe isostrophique d'ordre n , les orientations des axes (cartésiens) sont constantes.

Le mémoire de DURELLI [4] indique divers procédés expérimentaux pour obtenir les « vitesses » de certaines composantes du tenseur des déformations, ou encore la « vitesse » de cisailment maximum.

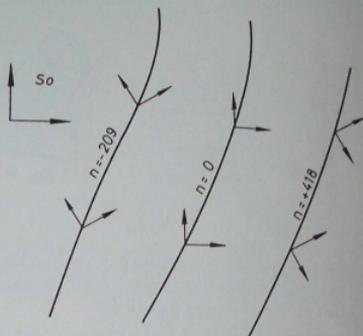


Fig. 6

B. — DÉFINITION D'UN TAUX DE VARIATION DES TENSEURS PAR RAPPORT A UN RÉFÉRENTIEL FIGÉ DANS UN MILIEU CONTINU

1 Taux de variation par rapport à un référentiel figé dans un solide euclidien indéformable.

Dans le cadre de la mécanique classique du solide euclidien, on envisage traditionnellement un référentiel supposé fixe et un référentiel figé dans le solide. L'établissement des équations d'Euler, qui s'obtiennent en projetant le théorème du moment cinétique sur les axes mobiles, rend nécessaire le calcul du taux de variation d'un vecteur par rapport au référentiel absolu en fonction du taux de variation de ce même vecteur par rapport au référentiel entraîné par le solide.

Désignons par (1, 2, 3) un référentiel cartésien orthogonal fixe de base e_i et par (1', 2', 3') un trièdre trirectangle de même origine et de base e_i , figé dans le solide.

Si \bar{a} est un vecteur quelconque, on aura :

$$\bar{a} = a^i e_i = a^{i'} e_{i'}$$

Soient a et a' les matrices colonnes des composantes du vecteur \vec{a} dans les deux référentiels; elles sont liées par la relation :

$$a = R(t) a' \quad (1)$$

où $R(t)$ est la matrice orthogonale définissant le mouvement du référentiel mobile.

En dérivant (1) par rapport au temps, il vient :

$$\frac{da}{dt} = R \frac{da'}{dt} + \frac{dR}{dt} R^{-1} a \quad (2)$$

Posons $\frac{dR}{dt} R^{-1} = W$ et montrons que cette matrice est antisymétrique. Puisque R est orthogonale :

$$R\tilde{R} = 1 \rightarrow \frac{dR}{dt} \tilde{R} + R \frac{d\tilde{R}}{dt} = 0$$

\tilde{R} désignant la transposée de R .

$$W = \frac{dR}{dt} R^{-1} = -R \frac{d\tilde{R}}{dt}$$

$$\tilde{W} = \tilde{R}^{-1} \frac{d\tilde{R}}{dt} = -R \frac{dR}{dt}$$

d'où il résulte que $W = -\tilde{W}$.

La relation (2) peut s'écrire en terme de composantes :

$$\frac{da^i}{dt} = R^i_r \frac{da'^r}{dt} + W^i_j a^j$$

ou en terme de vecteurs :

$$\frac{da^i}{dt} e_i = \frac{da'^r}{dt} \tilde{e}_r + W^i_j a^j \tilde{e}_i$$

On en conclut que le taux de variation d'un vecteur par rapport au référentiel fixe se compose du taux de variation calculé dans le trièdre mobile et d'une variation des composantes du vecteur due à la rotation de ce trièdre.

En notant $\frac{\delta}{\delta t}$ la dérivée par rapport au trièdre mobile et en introduisant le vecteur $\vec{\omega}$ de la rotation instantanée, la dernière relation peut encore s'écrire :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\delta \vec{a}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

où \times désigne le produit vectoriel.

Il en résulte que la dérivée absolue $\frac{da}{dt}$ d'un vecteur ne conduit pas à des grandeurs objectives au sens de la mécanique des milieux continus.

Au contraire, la dérivée relative $\frac{\delta a}{\delta t}$, en excluant les variations dues à la rotation du référentiel, satisfait le principe d'objectivité.

La formule définissant le taux de variation relatif d'un tenseur une fois contravariant, soit :

$$\frac{\delta a^i}{\delta t} = \frac{da^i}{dt} - W^i_j a^j$$

se généralise à un tenseur quelconque pour donner :

$$\begin{aligned} \frac{\delta a^{i_1 \dots i_k \dots}}{\delta t} = & \frac{da^{i_1 \dots i_k \dots}}{dt} - a^{j_1 \dots j_k \dots} W^i_{j_1} - a^{i_1 \dots j_k \dots} W^i_{j_2} - \dots \\ & + a^{i_1 \dots p_l \dots} W^p_k + a^{i_1 \dots k_p \dots} W^p_l + \dots \end{aligned}$$

2 Généralisation aux milieux continus.

Comme pour les solides euclidiens, on peut envisager de décrire le mouvement d'un milieu continu soit par rapport à un référentiel fixe absolu, soit par rapport à un repère figé dans le milieu et se déformant avec lui.

Les formules définissant la transformation du milieu entre les instants t_0 et t :

$$x^i = x^i(x'_\alpha, t) \quad \text{avec} \quad x'_\alpha = x^\alpha(x'_\alpha, t_0) \quad (3)$$

déterminent à chaque instant dans le référentiel absolu x , un référentiel curviligne x'_α , figé dans le milieu. A l'instant t_0 les deux référentiels coïncident mais aux instants ultérieurs, le référentiel figé se déforme et devient curviligne.

Travailler en coordonnées de Lagrange, c'est adopter comme référentiel le système de lignes matérielles x'_α . Dans ce repère curviligne déformable, figé dans le milieu, les particules de matière conservent leurs coordonnées. Il en résulte que les tenseurs définis dans le référentiel figé voient leurs composantes inchangées lors de la déformation du milieu.

Un champ de tenseur a étant défini sur le milieu à tout instant, pour introduire un taux de variation à l'instant t_0 , il faut comparer le champ tensoriel à

l'instant t au champ tensoriel à l'instant t_0 (fig. 7). Dans le référentiel absolu, cette comparaison conduit à la notion de dérivée totale ou matérielle dont le caractère non objectif apparaît déjà pour les milieux incompressibles.

Pour définir un taux de variation dans le référentiel figé, il faut comparer le champ à l'instant t au champ à l'instant t_0 , identifié dans le référentiel déformé à l'instant t ; d'où la définition :

$$\frac{\delta a}{\delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a(t) - a^*(t_0)}{t - t_0}$$

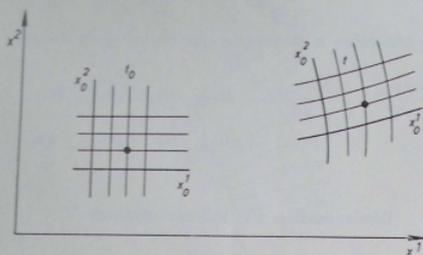


Fig. 7

$$x = x^i(x_0^j, t)$$

$a^*(t_0)$ est le transformé par la déformation (3) du champ à l'instant t_0 . En coordonnées de Lagrange, $a^*(t_0) = a(t_0)$ et ce taux de variation coïncide avec la dérivée partielle par rapport au temps :

$$\frac{\delta a^{...}}{\delta t} = \frac{\partial a^{...}}{\partial t}$$

Si le tenseur a est exprimé en coordonnées d'Euler, $a^*(t_0)$ s'obtiendra classiquement à partir de $a(t_0)$ suivant la formule :

$$a^{*ij...kl...} = \frac{\partial x^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^j}{\partial x^b} \dots \frac{\partial x^k}{\partial x^c} \frac{\partial x^l}{\partial x^d} \dots a^{ij...kl...}_{k_0 l_0 \dots}$$

Dérivée de LIE.

Considérons un système différentiel du premier ordre :

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \dots, x^n) \quad i = 1 \dots n \quad (4)$$

Ce système admet une et une seule solution prenant la valeur x_0 à l'instant t_0 :

$$x^i = x^i(x_0^j, t) \quad x_0^j = x^j(x_0^j, t_0)$$

Il en résulte qu'à tout champ de vecteur $\bar{X} = (X^1 \dots X^n)$, on peut associer un groupe de transformations ponctuelles à 1 paramètre :

$$\varphi_t : x = x(x_0, t)$$

Un champ de tenseur a étant défini sur une variété, on appelle dérivée de LIE du tenseur a relativement au champ de vecteur \bar{X} , l'opérateur :

$$L^{\bar{X}} a^{...} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a^{...}(\varphi_t x_0) - \varphi_t a^{...}(x_0)}{t - t_0}$$

Cet opérateur a été introduit sur la base de travaux de Th. DE DONDER [14] par M. Th. H. LEPAGE [15] pour les tenseurs covariants complètement antisymétriques (en rapport avec les invariants des formes différentielles extérieures) et par M. SLEBODZINSKI [16] pour les tenseurs quelconques (pour l'étude des invariants intégraux des équations canoniques). Il a été étudié en détail dès 1932 par SCHOOTEN, VAN KAMPEN [18] et VAN DANTZIG [17] à qui il doit son nom.

En 1950, OLDROYD [9] l'a introduit indépendamment dans le cadre de la mécanique des milieux continus sous la dénomination « dérivée convective ».

En mécanique des milieux continus, le groupe φ_t est engendré par le système différentiel des trajectoires :

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^j, t) \quad i = 1 \dots n \quad (5)$$

qui, dans l'espace-temps, est de la forme (4).

En effet, lorsqu'on pose $t = x^0$ et $v^0 = 1$, le système (5) devient :

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = v^\alpha(x^0, x^1, \dots, x^n) \quad \alpha = 0, 1, \dots, n$$

Le taux de variation d'un tenseur par rapport à un référentiel figé dans un milieu continu n'est autre que la dérivée de LIE associée au champ de vitesses d'univers des particules constitutives :

$$\frac{\delta a^{...}}{\delta t} = L^{\bar{v}} a^{...}, \quad \bar{v} = (1, v^1, \dots, v^n)$$

M. P. DEFRISE [19] a montré que la dérivée de LIE associée à un milieu continu peut être prolongée univoquement en dérivée covariante d'univers.

4 Propriétés.

1° La dérivée de LIE d'un tenseur est un tenseur de même espèce : cela résulte de la définition.

2° La dérivée de LIE satisfait la formule de LEIBNITZ.

Si a, b désigne le produit tensoriel de deux tenseurs a et b , on a :

$$\mathcal{L}_X^c a \cdot b = \mathcal{L}_X^c a \cdot b + a \cdot \mathcal{L}_X^c b$$

Cette formule s'établit comme analyse en classique à partir de la définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X^c(a \cdot b) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a \cdot b(\varphi_t x_0) - \varphi_t(a \cdot b)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a(\varphi_t x_0) \cdot b(\varphi_t x_0) - \varphi_t a \cdot \varphi_t b}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{[a(\varphi_t x_0) - \varphi_t a] \cdot \varphi_t b}{+ a(\varphi_t x_0) \cdot [b(\varphi_t x_0) - \varphi_t b]} \right\} \\ &= \mathcal{L}_X^c a \cdot b + a \cdot \mathcal{L}_X^c b \end{aligned}$$

3° DÉRIVÉE DE LIE D'UN SCALAIRE.

Si f est une grandeur scalaire, $\varphi_t f = f$ et :

$$\mathcal{L}_X^c f = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i$$

4° DÉRIVÉE DE LIE D'UN VECTEUR CONTRAVARIANT.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X^c a^i &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{a^i(x) - \varphi_t a^i(x_0)}{t - t_0} \\ a^i(x) &= a^i(x_0) + \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) X^j(x_0) \cdot (t - t_0) + \dots \end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)_{t=t_0} &= X^i(x_0) \\ \varphi_t a^i(x_0) &= \frac{\partial x^i}{\partial x^j_0} \cdot a^j(x_0) \end{aligned}$$

$$x^i = x_0 + X^i(x_0)(t - t_0) + \dots$$

$$\varphi_t a^i(x_0) = a^i(x_0) + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j_0} \right) a^j(x_0)(t - t_0) + \dots$$

$$\mathcal{L}_X^c a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} a^j$$

En calculant $\mathcal{L}_X^c a_i b^i$, on obtiendrait l'expression de la dérivée de LIE d'un vecteur covariant :

$$\mathcal{L}_X^c a_i = X^j \frac{\partial a_i}{\partial x^j} + a_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$$

5° DÉRIVÉE DE LIE D'UNE DENSITÉ SCALAIRE DE POIDS 1.

Si ρ désigne une densité scalaire de poids 1, on a :

$$\begin{aligned} \rho(x_0) &= \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^j_0} \right) \cdot \rho \\ &= \rho \det \left[\delta^i_j + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j_0} \right) (t - t_0) + \dots \right] \\ &= \rho \left[1 + \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^k_0} \right) (t - t_0) + \dots \right] \\ \mathcal{L}_X^c \rho &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\rho(x) - \varphi_t \rho(x_0)}{t - t_0} \end{aligned}$$

$$\rho(x) = \rho(x_0) + X^k(x_0) \frac{\partial \rho}{\partial x^k_0} (t - t_0) + \dots$$

$$\begin{aligned} \varphi_t \rho(x_0) &= \det \left(\frac{\partial x^i_0}{\partial x^j} \right) \rho(x_0) \\ &= \left[1 - \frac{\partial X^k}{\partial x^k_0} (t - t_0) + \dots \right] \rho(x_0) \\ \mathcal{L}_X^c \rho &= X^k \frac{\partial \rho}{\partial x^k} + \rho \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \end{aligned}$$

6° DÉRIVÉE DE LIE D'UNE DENSITÉ TENSORIELLE DE POIDS w .

Les résultats antérieurs permettent d'établir que si $a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q}$ est une densité tensorielle de poids w :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X^c a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} &= X^k \partial_k a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} - a^{k r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} \partial_k X^k \\ &\quad - \dots + a^{r_1 \dots r_p}_{k s_1 \dots s_q} \partial_k X^k + \dots \\ &\quad + w a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} \partial_k X^k \end{aligned}$$

Remarque.

L'expression de la dérivée de LIE ne change pas lorsqu'on substitue des dérivées covariantes aux dérivées ordinaires.

7° DÉRIVÉE DE LIE ASSOCIÉE AU CHAMP DES VITESSES D'UNIVERS.

Pour une densité tensorielle de poids w :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v^{\circ} a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} &= \hat{c}_l a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} + a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q, k} v^k \\ &- a^{kr_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} v^{r_1}_{, k} \dots + a^{r_1 \dots r_p}_{k, \dots s_q} v^k_{, s_1} + \dots \\ &+ w a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} v^k_{, k} \\ &= \frac{d a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q}}{d l} - a^{kr_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} v^{r_1}_{, k} - \dots \\ &+ a^{r_1 \dots r_p}_{k, \dots s_q} v^k_{, s_1} \dots + w a^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} v^k_{, k} \end{aligned}$$

les virgules désignent des dérivées covariantes.

5 Taux de variation de contrainte.

Explicitons la dérivée de LIE des différentes composantes du tenseur de contrainte :

$$\mathcal{L}_v^{\circ} T_{ij} = \frac{dT_{ij}}{dt} + T_{kj} v^k_{, i} + T_{ik} v^k_{, j} \quad (\text{RIVLIN})$$

$$\mathcal{L}_v^{\circ} T^i_j = \frac{dT^i_j}{dt} - T^k_j v^i_{, k} + T^i_k v^k_{, j}$$

$$\mathcal{L}_v^{\circ} T^{ij} = \frac{dT^{ij}}{dt} - T^{kj} v^i_{, k} - T^i_k v^j_{, k} \quad (\text{OLDROYD}) [9]$$

On peut définir le champ des contraintes à partir d'une densité tensorielle τ^{ij} de poids un, dont le taux de variation a été introduit par TRUESDELL [10] :

$$\mathcal{L}_v^{\circ} \tau^{ij} = \frac{d \tau^{ij}}{d l} - \tau^{kj} v^i_{, k} - \tau^{ik} v^j_{, k} + \tau^{ij} v^k_{, k}$$

Dans toutes ces formules, on peut décomposer le tenseur gradient de vitesse en parties symétrique et antisymétrique :

$$v^i_{, k} = V^i_k + W^i_k$$

V^i_k est le tenseur des vitesses de déformation

W^i_k est le tenseur antisymétrique définissant la rotation instantanée du milieu.

En particulier, pour les composantes contravariantes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v^{\circ} T^{ij} &= \frac{dT^{ij}}{d l} - (T^{kj} W^i_k + T^{ik} W^j_k) \\ &- (T^{kj} V^i_k + T^{ik} V^j_k) \end{aligned}$$

La dérivée de LIE définit un taux de variation intrinsèque excluant les modifications des composantes du tenseur qui résultent de la rotation et de la déformation du référentiel.

Si on se limite à la considération d'un taux de variation excluant les seules modifications dues à la rotation du référentiel, on est amené à envisager la définition suivante adoptée par JAUMANN (1911) [5] :

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{T}^{ij} &= \mathcal{L}_v^{\circ} T^{ij} + T^{kj} V^i_k + T^{ik} V^j_k \\ &= \frac{dT^{ij}}{d l} - T^{kj} W^i_k - T^{ik} W^j_k \end{aligned}$$

La dérivée de JAUMANN est parfois appelée composante rigide de la dérivée de LIE; elle définit un taux de variation par rapport à un référentiel rigide qui tourne avec le milieu.

Pour les milieux continus indéformables (cf. 1) les dérivées de JAUMANN et de LIE s'identifient.

6 Applications.

a) Conservation de la masse.

La masse volumique ρ se comporte, vis-à-vis de la déformation du milieu, comme une densité scalaire de poids 1 :

$$\rho(x) \frac{\partial (x^i)}{\partial (x^i_0)} = \rho(x_0)$$

Sa dérivée de LIE vaut :

$$\mathcal{L}_v^{\circ} \rho = \frac{d \rho}{d l} - \rho \operatorname{div} \bar{v}$$

Pour exprimer la conservation de la masse en coordonnées d'EULER, on annule la dérivée de LIE de la masse volumique.

b) *Théorème d'HELMHOLTZ.*

On montre, par le calcul, que le rotationnel de l'accélération est égal à la dérivée de LIE du rotationnel de la vitesse :

$$A_{i,j} - A_{j,i} = \underset{v}{L}^c (v_{i,j} - v_{j,i})$$

Pour un fluide parfait, barotrope, soumis à des forces extérieures massiques dérivant d'un potentiel :

$$A_{i,j} - A_{j,i} = 0$$

Il en résulte que le tenseur rotationnel de la vitesse est entraîné par la matière.

c) 1^o Le tenseur de déformation C_{ij} de CAUCHY se définit par le tenseur métrique avant déformation exprimé dans le référentiel déformé; il en résulte que sa dérivée de LIE est nulle :

$$\underset{v}{L}^c C_{ij} = 0$$

et que sa dérivée de JAUMANN vaut :

$$\overset{\nabla}{C}_{ij} = -C_{il} V_{lj} - C_{lj} V_{li}$$

2^o La dérivée de LIE du tenseur métrique g_{ij} vaut deux fois le tenseur des vitesses des déformations :

$$\underset{v}{L}^c g_{ij} = 2 V_{ij}$$

alors que sa dérivée de JAUMANN est nulle :

$$\overset{\nabla}{g}_{ij} = 0$$

3^o La dérivée de LIE du tenseur des déformations d'ALMANSI est le tenseur des vitesses de déformation; en effet :

$$\underset{v}{L}^c E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\underset{v}{L}^c g_{ij} - \underset{v}{L}^c C_{ij} \right) = V_{ij}$$

L'adoption de la dérivée de LIE pour définir un taux de variation permet de considérer le tenseur des vitesses de déformation comme dérivée intrinsèque du tenseur des déformations alors que la dérivée de JAUMANN donne :

$$\overset{\nabla}{E}_{ij} = V_{ij} - E_{kj} V_{ki} - E_{ik} V_{kj}$$

CONCLUSIONS.

La définition de JAUMANN reste conciliable avec la vision matricielle des tenseurs euclidiens du second ordre; en effet :

$$\text{si } T_{ik} = g_{ij} T_{jk}$$

$$\overset{\nabla}{T}_{ik} = g_{ij} \overset{\nabla}{T}_{jk}$$

alors que la dérivée de LIE conduit à :

$$\underset{v}{L}^c T_{ik} = 2 V_{ij} T_{jk} + g_{ij} \underset{v}{L}^c T_{jk}$$

Toutefois, par son caractère intrinsèque lié à la représentation lagrangienne du mouvement d'un milieu continu, la dérivée de LIE risque de s'imposer en accord avec une vision plus fondamentale du calcul tensoriel.

C. — EXEMPLE D'APPLICATION
A LA PHYSIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Dès 1939, M. BIOT introduit des équations constitutives en termes de taux de variation de contrainte (« stress-rate »), considérées comme cas limites des relations liant contraintes et déformations additionnelles (« incremental stress and strain relations »). Cette théorie connaît un développement actuel sous le nom d'*hypoélasticité* [13].

Choisissons une équation de comportement de la forme : « le taux de variation des contraintes est une fonction de la contrainte et de la vitesse de déformation ». Quelle définition du taux faut-il choisir? Faut-il différentier au sens de LIE, de JAUMANN ou de RIVLIN, etc.? La condition nécessaire et fondamentale à remplir est la condition d'*objectivité*; or, nous avons établi que toutes ces dérivées sont objectives, et dès lors le choix ne résultera plus que de considérations plus nuancées. La portée d'un changement de définition de dérivée peut être précisée par la remarque suivante : il est connu (J. MANDEL [2]) que les différentes définitions ne diffèrent que par une expression bilinéaire en T et V, de telle sorte que l'ordre le plus élevé des dérivées est indépendant du choix de la définition (pour autant que T et V interviennent dans l'équation de comportement).

Nous pouvons dès lors définir indifféremment par exemple un matériau hypoélastique par :

$$\overset{\circ}{T} = F_1(T, V) \quad \text{ou} \quad \overset{\circ}{T} = F_2(T, V)$$

Les fonctions F_1 et F_2 vont différer par leur forme, mais non par leur contenu physique. Le choix d'une ou l'autre définition du taux de variation résultera donc d'une appréciation sur la forme de l'équation de comportement que l'on préfère.

Comme déjà signalé, le choix de la dérivée de JAUMANN permet l'emploi d'axes cartésiens, et donc de la vision matricielle des tenseurs de second rang. La dérivée de LIE opère dans un repère physique.

On notera aussi que le tenseur des vitesses de déformation V intervenant dans les équations de comportement est précisément la dérivée de LIE du tenseur d'ALMANSI.

Ce qui précède montre que la dérivée de LIE est plus conforme à une conception plus fondamentale du calcul tensoriel. Pour ces raisons, nous préférons la formulation intrinsèque des équations de comportement.

La généralisation du fluide du type REINER-RIVLIN par l'emploi d'équations de comportement objectives a été exigée pour interpréter des effets physiques nouveaux. L'utilisation de taux de variation objectifs ou intrinsèques sont à l'origine de progrès récents dans l'étude des effets du second ordre (1).

Certaines de nos recherches actuelles portent sur une généralisation similaire des matériaux élastiques par une équation de comportement réalisant l'économie maximum d'hypothèses :

$$\overset{\circ}{T} = \Phi(T, \overset{\circ}{E}) = \Phi(T, V) \quad (\text{Hypoélasticité})$$

et par généralisation :

$$\overset{\circ}{T} = \Phi(T, V, \overset{\circ}{V}, \dots, \text{etc.})$$

Les corps élastiques peuvent, d'autre part, être définis par l'équation de comportement différentielle :

$$\overset{\circ}{T} = F(E, \overset{\circ}{E})$$

(1) A titre d'exemple : la communication de W. BISMUTH et M. GIEZEUX « Quelques expériences sur l'effet Weissenberg » à ce Colloque annuel (juin 1967) du Groupe Français de Rhéologie, consacré aux « Progrès récents dans l'étude des effets du second ordre » (voir p. 315).

Nous disposons ainsi de tous les éléments pour étudier la structure sous-groupe des corps hypoélastiques en élastiques (non linéaires \rightarrow quasi linéaires \rightarrow Hookiens), hypo-élastiques linéaires ($\overset{\circ}{T}$ est une fonction bilinéaire en T et V) et hypo-élastiques quelconques.

Les résultats de cette étude, qui sort du cadre général de cet article, feront l'objet d'une publication distincte. Nous souhaitons cependant signaler un résultat : le sous-groupe des hypoélastiques linéaires ($\overset{\circ}{T}$ est une fonction bilinéaire en T et V), contient des corps élastiques non linéaires qui présentent donc ces effets du second ordre qui sont précisément l'objet du Colloque d'aujourd'hui. Ceci révèle, d'une part, l'ambiguïté de l'expression « comportement linéaire », d'autre part, l'intérêt de hiérarchiser correctement les équations constitutives des milieux continus.

Les mêmes considérations valent pour les équations de comportement relatives à d'autres propriétés physiques, par exemple, la photo-élasticité ou la piézo-électricité classiques.

Remerciements.

Les discussions que nous eûmes à propos du présent texte avec les professeurs R. DEBEVER et J. KESTENS nous furent extrêmement utiles. Nous les remercions vivement pour leurs conseils.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. PRAGER. — *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn and Co., Boston (1961).
- [2] J. MANDEL. — *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, Paris (1966).
- [3] R. THIRY et P. DANTU. — *Exposé général d'une méthode expérimentale de détermination directe des déformations dans un solide (méthode des réseaux)*. IX^e Congrès International de Mécanique Appliquée, Actes VIII (pp. 490-499), Université Libre de Bruxelles (1957).
- [4] A. J. DURELLI. — *Visual Representation of the Kinematics of the Continuum*. The William Murray lecture dans « Experimental Mechanics 2 » (1965).
- [5] G. JAUMANN. — *Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze*. Sitzsber Akad. Wiss. Wien (11 a) 120, 385-530 (6, 159, 215, 243, 245, 262, 295) (1911).

- [6] M. A. BIOT. — *Sur la stabilité de l'équilibre élastique. Équations de l'élasticité d'un milieu soumis à une tension initiale.* Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, vol. 54, sér. B, part 1, pp. 18-21 (1934).
- [7] M. A. BIOT. — *Non linear Theory of Elasticity and the Linearized Case for a Body under Initial Stress.* Philosophical Magazine, vol. 27, sér. 7, pp. 468-489 (1939).
- [8] M. A. BIOT. — *Elastizitätstheorie zweiter Ordnung mit Anwendungen.* Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 20, n° 2, pp. 89-99 (1940).
- [9] J. G. OLDROYD. — *On the formulation of rheological equations of states.* Proc. Roy. Soc. London A, 200 (1963), 523-541 (1950).
- [10] C. TRUESDELL. — *Corrections and additions to the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics.* J. Rat. Mech. Anal. 2, 593-616 (1953).
- [11] W. NOLL. — *On the continuity of the solid and fluid states.* J. Rat. Mech. Anal. 4, 3-81 (1955).
- [12] S. LIE. — *Gesammelte Abhandlungen.* 6 vol. (1922-1937).
- [13] C. TRUESDELL. — *Handbuch der Physik Band III/3.* Springer Verlag (1965).
- [14] Th. DE DONDER. — *Théorie des invariants intégraux.* Paris, Gauthier-Villars (1927).
- [15] Th. LEPAGE. — *Sur les propriétés invariantives des covariants symétriques gauches.* Mémoire in-8°, Acad. Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences (1929).
- [16] W. SLEBODZINSKI. — *Sur les équations canoniques d'Hamilton.* Acad. Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5^e série, t. XVII, pp. 864-870 (1931).
- [17] D. VAN DANTZIG. — *Zur allgemeinen projectiven Differentialgeometrie, II, X_{n+1} , mit eingliederiger Gruppe.* Proc. Kon. Ak., 35, 535-542 (1932).
- [18] J. A. SCHOUTEN et E. R. VAN KAMPEN. — *Beitragen zur theorie der Deformation.* Warszawa Prac. Mat. Fiz., 41, 1-19 (1933).
- [19] P. DEFRISE. — *Espaces-temps à temps absolu.* Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, t. XIII, fasc. 1 et 2 (1961). Éd. J. Duculot, S.A. Gembloux.

AUTEURS NON CITÉS DANS LE TEXTE

- R. DEBEVER. — *Cours de Mécanique Analytique,* professé à la Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles (non édité), année académique 1966-1967.
- J. A. SCHOUTEN. — *Tensor Analysis for Physicists.* Oxford U.P., New York (1951).
- K. YANO. — *The theory of Lie derivatives and its applications.* North Holland Publ. Co. (1955).
- C. TRUESDELL et R. TOUPIN. — *The classical Field Theories.* Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer Verlag, p. 443 (1960).
- L. I. SEDOV. — *Introduction to the mechanics of a continuous Medium.* Addison Wesley publ. C.J., pp. 65-77 (1965).
- A. GLEYZAL. — *A mathematical formulation of the general continuous deformation problem.* Quart. Applied, Math. 6, 429-437 (1948).
- A. S. LODGE. — *On the use of convected coordinate systems in mechanics of continuous media.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 47, part 3, 575-584 (1951).
- F. QUERTAINMONT. — *La dérivée de Lie en mécanique classique.* Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de licencié en Sciences Mathématiques. Université Libre de Bruxelles, année académique 1964-1965.

QUELQUES EXPÉRIENCES SUR L'EFFET WEISSENBERG (1)

par W. BISMUTH et M^{me} M. CHEZEAUX

LABORATOIRE DE RHÉOLOGIE
CENTRE DE RECHERCHES PHYSIQUES, MARSEILLE

RÉSUMÉ

On étudie l'équation d'état généralisée des liquides non newtoniens en se limitant aux corps visco-élastiques non linéaires; on ne retient dans cette équation que les termes du premier degré par rapport aux tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation et leur produit. Les hypothèses faites par RIVLIN (corps visqueux non linéaire) et par MOONEY (corps maxwellien) dans leurs études sur « l'effet Weissenberg » sont des particularisations de l'équation générale.

Des expériences ont été faites sur des solutions de polyisobutylène soumises à un cisaillement entre deux cylindres coaxiaux. Les résultats obtenus montrent qu'il est nécessaire de tenir compte de tous les termes de l'équation générale proposée pour rendre compte quantitativement de l'effet Weissenberg pour les corps étudiés.

INTRODUCTION

C'est en 1947 [1] que, pour la première fois, WEISSENBERG publia dans la revue « Nature » un article consacré au phénomène d'un fluide qui, placé dans un vase cylindrique tournant, s'enroule autour d'un cylindre fixe plongé dans le fluide et monte le long de ce cylindre.

Pour expliquer ce phénomène, appelé « effet Weissenberg », plusieurs auteurs dont, en particulier, RIVLIN [2], [3] et MOONEY [4], ont donné des théories différentes :

1^o RIVLIN [2] suppose le fluide visqueux et non linéaire; la viscosité introduit dans l'expression

de la pression un terme supplémentaire, et si le signe de ce terme est convenable, il exprime une pression verticale vers le haut;

2^o MOONEY [4] suppose le fluide élastique et fortement visqueux, donc Maxwellien, sans qu'il soit question de non-linéarité. Il retrouve ainsi une pression dirigée vers le haut.

Dans ce travail, nous nous sommes proposés d'expliquer l'effet Weissenberg en partant d'une expression plus générale de l'équation d'état du fluide; les cas envisagés par RIVLIN et par MOONEY correspondent à des particularisations de cette équation. Les expériences faites en Laboratoire semblent montrer que cette généralisation était nécessaire pour les fluides que nous avons utilisés.

A. — ÉTUDE THÉORIQUE

1 Étude d'un fluide isotrope incompressible.

Il est possible de définir l'équation d'état d'un fluide quelconque soit en variables de Lagrange, comme l'a fait OLDROYD [5], soit en variables d'EULER [6]; c'est ce dernier système qu'a choisi RIVLIN [2], [3].

Nous adopterons pour notre étude les variables d'Euler et nous désignerons par $\{X_i\}$ les coordonnées initiales d'une particule qui, au temps t , se trouve au point $\{x_i\}$.

Dans le cas le plus général, la fonctionnelle \mathcal{F} , qui régit le comportement d'un corps quelconque,

(1) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 19 juin 1967.

dépend d'un certain nombre de paramètres et de fonctions qui sont :

- le gradient de vitesse Q ;
- la contrainte S ;
- la densité ρ ;
- et leurs dérivées successives par rapport au temps.

On se rappellera que le tenseur de déformation G_{ij} est donné par sa dérivée temporelle :

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} + \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \right],$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{2} [Q + \bar{Q}];$$

$$(1,1) \quad \mathcal{F}(Q, \dot{Q}, \dots, S, \dot{S}, \dots, \rho, \dot{\rho}, \dots) = 0.$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, si S est la contrainte, la contrainte externe sera :

$$T = S + p(\rho) I$$

et c'est cette contrainte externe qui doit intervenir dans la fonctionnelle (1,1). Si le fluide est purement visqueux, cette contrainte externe T est le déviateur du tenseur de contrainte S .

$p(\rho)$ est une pression hydrostatique fonction de la densité.

Si le fluide est homogène et incompressible, $\rho = \rho_0 = C^{te}$, et p est indépendante de ρ , soit :

$$(1,1') \quad \mathcal{F}(Q, \dot{Q}, \dots, T, \dot{T}, \dots) = 0.$$

Dans le cas d'un fluide isotrope, par rapport aux coordonnées d'EULER, RIVLIN et ERICKSEN [7] ont montré que la fonctionnelle \mathcal{F} ne doit faire intervenir que des tenseurs symétriques; la vitesse de déformation Q doit donc intervenir par sa fonction symétrique D , et de même pour les dérivées successives.

Si $\frac{\partial D}{\partial t}$ désigne la dérivée de D , liée au matériau, telle que l'a définie JAUMANN [8] :

$$D^{(1)} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial t} + W_i^k D_{kj} + W_j^k D_{ki},$$

avec :

$$W_i^k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right].$$

De même nous définirons :

$$T^{(1)} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

et nous aurons :

$$(1,1'') \quad \mathcal{F}[D, D^{(1)}, \dots, T, T^{(1)}, \dots] = 0.$$

Nous supposons les déformations quasi uniformes et négligerons, par conséquent, les effets des dérivées successives de D et $T^{(1)}$. \mathcal{F} se réduira donc à :

$$\mathcal{F}(D, T, T^{(1)}) = 0$$

ou :

$$(1,2) \quad T^{(1)} = F(D, T).$$

Le corps étant isotrope, la fonctionnelle d'état $F(D, T)$ l'est aussi; elle est donc invariante pour un changement de coordonnées, c'est-à-dire :

$$F(D_{ij}, D_{ij}^{(1)}, \dots) = 0 \Rightarrow F(\alpha_i^k \alpha_j^l D_{kl}, \dots) = 0,$$

avec :

$$\alpha_i^k \alpha_k^l = \delta_i^l \quad \text{quel que soit } \alpha.$$

Ceci entraîne, si $T^{(1)}$ est fonction de D seulement [9] :

$$T^{(1)} = F(D) = \alpha_0 I + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2 + \dots + \alpha_{n-1} D^{n-1},$$

où n est le nombre des valeurs propres distinctes de D et les coefficients α_i sont des scalaires fonctions de ces valeurs propres. Dans l'espace à trois dimensions :

$$T^{(1)} = \alpha_0 I + \alpha_1 D + \alpha_2 D^2.$$

De même, nous pouvons écrire, si $T^{(1)}$ est fonction de T seulement :

$$T^{(1)} = \gamma_0 I + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2.$$

La fonctionnelle $F(D, T)$ étant à la fois fonction de T et D nous aurons donc :

$$(1,3) \quad F(D, T) = T^{(1)} = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 T + a_4 T^2 + \dots$$

Étudions la dérivée matérielle de la contrainte T .
Nous avons [10] :

— si T est un tenseur covariant :

$$\frac{D T_{ij}}{D t} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + \omega_i^k T_{jk} + \omega_j^k T_{ik}$$

— si T est un tenseur contravariant :

$$\frac{D T^{ij}}{D t} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial t} - \omega_i^k T^{jk} - \omega_j^k T^{ik}$$

— si T est un tenseur mixte (i étant l'indice des lignes) :

$$\frac{D T_i^j}{D t} = \frac{\partial T_i^j}{\partial t} + \omega_i^k T_j^k + \omega_j^k T_k^i.$$

Ces trois dérivées ne diffèrent qu'à une forme bilinéaire de T et Q près. En considérant cette forme bilinéaire, nous obtenons, en rappelant que T ne doit être fonction que de tenseurs symétriques, et si les coefficients a_i sont des scalaires fonctions des invariants de T et D :

$$(1,4) \quad T^{(0)} = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 T + a_4 T^2 \\ + a_5 (TD + DT) + a_6 (T^2 D + DT^2) \\ + a_7 (TD^2 + D^2 T).$$

Rappelons que les invariants en question sont :

$$I_1 = \sum_i T_{ii},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij}^2),$$

$$I_3 = |T_{ij}| = \det. T_{ij}.$$

Il est possible de remplacer I_2 et I_3 par les traces de matrice des tenseurs T^2 et T^3 :

$$\text{tr } T^2 = J_2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij} T_{ji},$$

$$\text{tr } T^3 = J_3 = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k} T_{ij} T_{jk} T_{ki},$$

et nous avons :

$$2 J_2 = I_1^2 - 2 I_2,$$

$$3 J_3 = 3 I_3 - 2 I_2 I_1 + I_1^3;$$

donc les coefficients a_i seront fonctions des invariants :

$$\text{tr } (T), \text{tr } (T^2), \text{tr } (T^3), \text{tr } (D^2), \text{tr } (D^3), \\ \text{tr } (DT), \text{tr } (DT^2), \text{tr } (D^2 T).$$

[Le fluide étant supposé incompressible, $\text{tr } (D) = 0$.]

Nous appliquerons l'équation (1,4) dans le cas particulier de l'écoulement stationnaire d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux animés d'un mouvement de rotation l'un par rapport à l'autre. Nous poserons que chaque point du fluide se déplace dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation

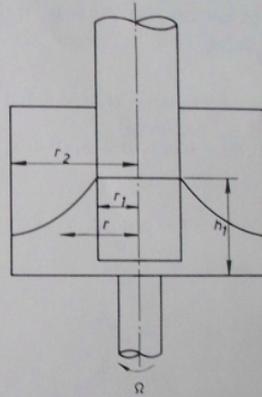


Fig. 1. — Schéma synoptique du montage
 r_1 : rayon du cylindre fixe;
 r_2 : rayon du vase;
 r : rayon d'un point quelconque du liquide;
 Ω : vitesse de rotation du vase;
 h_1 : hauteur d'un point quelconque du liquide.

et sur une orbite circulaire autour de cet axe. Soient r_1 et r_2 les rayons respectivement du cylindre intérieur et du vase. Si la vitesse angulaire d'un point du fluide situé à la distance r de l'axe des deux cylindres est ω , nous poserons $\omega = 0$ pour $r = r_1$ et $\omega = \Omega$ pour $r = r_2$ (fig. 1), le cylindre intérieur étant fixe. Nous traiterons le problème en coordonnées cylindriques.

L'axe z , dirigé vers le bas, coïncide avec l'axe du cylindre. Dans ce système de coordonnées, le champ de vitesse est donné par :

$$\} \omega^i \{ = \} 0, \omega(r), 0 \{$$

et nous avons :

$$D = \frac{1}{2} \omega' r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \omega' = \partial_r \omega,$$

$$D^2 = \frac{1}{4} r^2 \omega'^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Fluide de Rivlin-Reiner.

RIVLIN admet que le fluide est uniquement visqueux, ce qui entraîne $T^{(0)} = 0$, $\text{tr}(T) = 0$ et $\text{tr}(D^2) = \frac{1}{2} r^2 \omega'^2$.

Dans ce cas l'équation (1,4) se réduit à :

$$(2,1) \quad F(D, T) = 0 = a_1 D + a_2 D^2 + a_3 T,$$

avec :

$$T = S + pI.$$

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} -\frac{a_1}{a_3} &= \eta, \\ +\frac{a_2}{a_3} &= \psi, \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$(2,2) \quad T = \eta D + 3\psi \left(D^2 - \frac{1}{3} \text{tr} D^2 \right),$$

ce qui donne :

$$T_{rr} = T_{\theta\theta} = -\frac{1}{4} \psi r^2 \omega'^2,$$

$$T_{0r} = T_{r0} = \frac{1}{2} \eta \omega' r,$$

$$T_{zz} = T_{zz} = T_{z0} = -\frac{1}{2} \psi r^2 \omega'^2.$$

Portons ces valeurs de la contrainte externe dans l'équation dynamique :

$$(2,3) \quad \partial_r T_{rr} + r^{-1} [T_{rr} - T_{\theta\theta}] - \partial_r P = -\rho_0 r \omega'^2,$$

$$\partial_r T_{r0} + 2 r^{-1} T_{r0} - r^{-1} \partial_0 P = 0$$

$$-\partial_z P = 0.$$

Le fluide étant isotrope :

$$\partial_0 P = 0.$$

Donc, par intégration, nous obtenons :

$$(2,4) \quad T_{r0} = \frac{1}{2} \eta \omega' r = C r^{-2}.$$

C'est une constante d'intégration. Elle représente le couple de cisaillement exercé sur le cylindre intérieur par la contrainte de cisaillement T_{r0} .

En considérant la viscosité η constante :

$$\omega = \frac{\eta}{C} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right].$$

Donc :

$$\Omega = \frac{\eta}{C} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right].$$

Soit :

$$(2,5) \quad C = \eta \Omega \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

et la pression $P(r)$ sera donnée par l'expression :

$$(2,6) \quad P(r) = \int_{r_1}^r \rho_0 r \omega'^2 dr - \psi \Omega^2 \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \frac{1}{r^4}.$$

L'intégrale représente la force centrifuge. Pour une vitesse Ω assez faible, elle peut être négligée. Donc, dans le cas où ψ est positif, il existe une pression verticale P dirigée vers le haut et qui tend à faire monter le fluide autour du cylindre intérieur. La courbe représentant le couple C en fonction de Ω est une droite de pente :

$$\eta \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

RIVLIN appelle ce coefficient ψ : le coefficient de contrainte normale.

3 Fluide visco-élastique.

On considère un fluide dont on néglige, dans l'équation d'état (1,4), les termes du deuxième degré en T et D :

$$(3,1) \quad T^{(0)} = a_0 I + a_1 D + a_2 T + a_3 (TD + DT).$$

Remarquons que ce fluide n'est pas linéaire au sens mathématique, le principe de superposition ne s'y applique pas. Le fluide étant incompressible, $\text{tr}(\mathbf{D}) = 0$, donc il n'y a que deux invariants : $\text{tr}(\mathbf{T})$ et $\text{tr}(\mathbf{DT})$; en posant $\alpha_3 \neq 0$:

$$\frac{1}{\alpha_3} = \tau,$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_3} = \beta \text{tr}(\mathbf{T}) + \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{DT}),$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \eta + \alpha_2 \text{tr}(\mathbf{DT}),$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \alpha_3,$$

où les coefficients β et α_i sont des constantes du fluide et :

$$\dim(\beta) = 1,$$

$$\dim(\alpha_i) = L^{-1};$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \tau \mathbf{T}^{(0)} &= \mathbf{T} + \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I} + \alpha_1 \text{tr}(\mathbf{DT}) \mathbf{I} \\ &+ [\eta + \alpha_2 \text{tr}(\mathbf{T})] \mathbf{D} \\ &+ \alpha_3 (\mathbf{TD} + \mathbf{DT}). \end{aligned}$$

En considérant toujours le cas du cisaillement entre deux cylindres :

$$\mathbf{TD} + \mathbf{DT} = \frac{1}{2} \omega' r \begin{pmatrix} 2 T_{r0} & T_{rr} + T_{00} & 0 \\ T_{rr} + T_{00} & 2 T_{r0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{tr}(\mathbf{DT}) = \omega' r T_{r0},$$

$$\mathbf{T}^{(0)} = -\frac{1}{2} \omega' r \begin{pmatrix} 2 T_{r0} & T_{00} - T_{rr} & 0 \\ T_{00} - T_{rr} & -2 T_{r0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc les quatre équations suivantes :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} T_{rr} &= -\beta \text{tr}(\mathbf{T}) - (\alpha_1 + \alpha_3 - \tau) \omega' r T_{r0}, \\ T_{00} &= -\beta \text{tr}(\mathbf{T}) - (\alpha_1 + \alpha_3 + \tau) \omega' r T_{r0}, \\ T_{zz} &= -\beta \text{tr}(\mathbf{T}) - \alpha_1 \omega' r T_{r0}, \\ T_{r0} &= [-\eta - \alpha_2 \text{tr}(\mathbf{T}) - 3(T_{rr} + T_{00}) \\ &- \tau(T_{rr} - T_{00})] \frac{1}{2} \omega' r, \end{aligned}$$

ce qui donne, par combinaison linéaire de ces quatre équations :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{T}) &= -(3\alpha_1 + 2\alpha_3)(1 + 3\beta)^{-1} \omega' r T_{r0}, \\ &= -\lambda \omega' r T_{r0}, \end{aligned}$$

en posant :

$$\lambda = \frac{3\alpha_1 + 2\alpha_3}{1 + 3\beta}.$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} T_{rr} &= -(-\lambda\beta + \alpha_1 + \alpha_3 - \tau) \omega' r T_{r0}, \\ T_{00} &= -(-\lambda\beta + \alpha_1 + \alpha_3 + \tau) \omega' r T_{r0}, \\ T_{zz} &= -(-\lambda\beta + \alpha_1) \omega' r T_{r0}, \\ T_{r0} &= -\frac{1}{2} \eta \omega' r - [-\alpha_2 \lambda + 2\beta \lambda \alpha_3 \\ &- 2(\alpha_1 + \alpha_3) \alpha_3 - 2\tau^2] \frac{1}{2} \omega'^2 r^2, \end{aligned}$$

et en posant :

$$(3.5) \quad \nu = 1 - \frac{\lambda}{2\tau^2} (\alpha_2 - 2\beta\alpha_3) - \frac{\alpha_3}{\tau^2} (\alpha_1 + \alpha_3);$$

$$(3.6) \quad T_{r0} = -\frac{1}{2} \eta \omega' r - 2\tau^2 \nu \omega'^2 r^2 T_{r0}.$$

Soit :

$$T_{r0} = -\frac{1}{2} \frac{\eta \omega' r}{1 + 2\tau^2 \nu \omega'^2 r^2},$$

ou encore :

$$(3.7) \quad \omega' = -\frac{\eta r^{-1}}{4\nu\tau^2 T_{r0}} \left[1 \pm \sqrt{1 - 16\nu\tau^2 \eta^{-2} T_{r0}^2} \right].$$

A ces équations nous devons associer l'équation dynamique du mouvement :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \partial_r T_{rr} - \partial_r P + r^{-1} [T_{rr} - T_{00}] &= -\rho_0 \omega^2 r, \\ \partial_r T_{r0} - r^{-1} \partial_\theta P + 2r^{-1} T_{r0} &= 0, \\ -\partial_z P &= 0. \end{aligned}$$

Le corps étant isotrope, la pression P ne dépend pas de l'orientation des axes, donc $\partial_\theta P = 0$; ce qui entraîne :

$$(3.9) \quad T_{r0} = C \Gamma^{-2},$$

C étant le couple exercé sur le cylindre intérieur par la contrainte de cisaillement T_{r0} .

En considérant les équations (3.7) et (3.9), nous obtenons :

$$(3.10) \quad \omega' = -\frac{\eta r}{4\nu\tau^2 C} \left[1 \pm \sqrt{1 - 16\nu\tau^2 \eta^{-2} C^2 r^{-4}} \right].$$

La vitesse angulaire doit être continue pour $C = 0$; donc il faut que sa dérivée ait une valeur finie pour $C = 0$.

Il faut donc choisir le signe — dans l'expression $[1 \pm U]$.

A. — CALCUL DE LA VITESSE DE CISAILLEMENT

Pour calculer ω , il nous faut considérer deux cas :

$$v > 0,$$

$$v < 0.$$

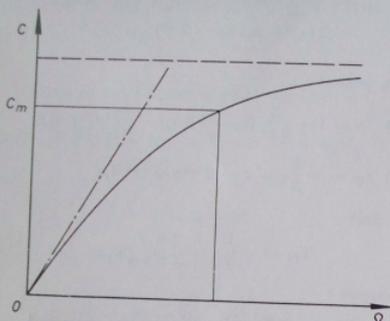


Fig. 2. — Variation du couple C en fonction de la vitesse de rotation Ω du vase dans le cas où $v > 0$

Pour simplifier, posons :

$$\varepsilon = 16 v \tau^2 \eta^{-2};$$

$$(3,11) \quad U = \sqrt{1 - \varepsilon C^2 r^{-4}},$$

avec :

$$0 < U < 1.$$

a) $v > 0$.

$$(3,12) \quad d\omega = -\frac{\sqrt{\varepsilon} \eta}{8 v \tau^2} \frac{U}{1 - U^2} \frac{1}{\sqrt{1 - U^2}} [1 - U] dU.$$

L'équation (3,12), avec cette condition, se réduit à :

$$(3,13) \quad d\omega = -\frac{\sqrt{\varepsilon} \eta}{8 v \tau^2} \frac{U}{1 + U} \frac{1}{\sqrt{1 - U^2}} dU.$$

Intégrons (3,13) en effectuant les changements de variables :

$$U = \cos x, \quad \text{puis} \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$d\omega = +\frac{1}{2\sqrt{v} \tau^2} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt,$$

$$\omega = +\frac{1}{2\sqrt{v} \tau^2} [-t + 2 \operatorname{arctg} t] + \omega_0.$$

La constante d'intégration ω_0 est donnée par les conditions aux limites :

$$\omega(r_1) = 0, \quad \omega(r_2) = \Omega.$$

Nous obtenons :

$$(3,14) \quad \omega = +\frac{1}{2\sqrt{v} \tau^2} \left[\sqrt{\frac{1 - U_1}{1 + U_1}} - \frac{1 - U}{1 + U} + \operatorname{arc} \cos U - \operatorname{arc} \cos U_1 \right],$$

avec :

$$U_1^2 = 1 - 16 v \tau^2 \eta^{-2} C^2 r_1^{-4},$$

$$U_2^2 = 1 - 16 v \tau^2 \eta^{-2} C^2 r_2^{-4}.$$

Pour que l'écoulement soit stationnaire, il faut que U soit réel et donc :

$$1 - \varepsilon C^2 r^{-4} > 0;$$

$$(3,15) \quad C \leq C_m \frac{r_1^2}{\sqrt{\varepsilon}} = \eta \frac{r_1^2}{4\sqrt{v} \tau^2}.$$

La valeur $C = C_m$ est la valeur maximum que peut atteindre le couple pour que l'écoulement reste stationnaire.

L'équation (3,14) nous donne pour Ω :

$$(3,16) \quad \Omega = +\frac{1}{2\sqrt{v} \tau^2} \left[\sqrt{\frac{1 - U_1}{1 + U_1}} - \sqrt{\frac{1 - U_2}{1 + U_2}} + \operatorname{arc} \cos U_2 - \operatorname{arc} \cos U_1 \right].$$

La courbe $C = f(\Omega)$ est représentée sur la figure 2.

La pente de la tangente à cette courbe est donnée par la valeur de la dérivée $d\Omega_C$:

$$\frac{d\Omega}{dC} = -\frac{\varepsilon}{r^4 U} \times \left[\frac{1+U}{(1+U)^2 \sqrt{1-U}} - \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} \right] \frac{v_2}{v_1} \frac{1}{2\sqrt{v}\tau}$$

Lorsque $C \rightarrow 0$, $U \rightarrow 1$, donc nous pouvons écrire :

$$U \simeq 1 - \frac{1}{2} \varepsilon C^2 r^{-4};$$

$$(3,17) \quad \left(\frac{dC}{d\Omega} \right)_{C=0} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right].$$

b) $v < 0$.

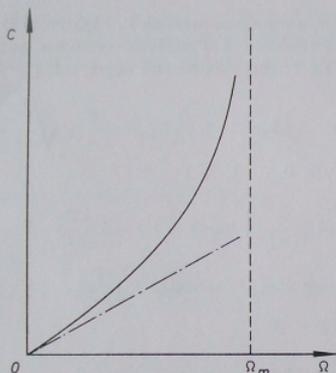


Fig. 3. — Variation du couple C en fonction de la vitesse de rotation Ω du vase dans le cas où $v < 0$

Dans ce cas, nous avons :

$$(3,18) \quad d\omega = -\frac{1}{2\sqrt{v}\tau} \frac{U}{U^2 - 1} \frac{1}{\sqrt{U^2 - 1}} [1 - U] dU.$$

En posant $U = \operatorname{ch} x$ et $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, il est possible d'intégrer l'équation (3,18) :

$$(3,19) \quad \omega = -\frac{1}{2\sqrt{v}\tau} [2 \operatorname{arctg} t - t];$$

$$\Omega' = \Omega'_{x=0} = + \frac{1}{2\sqrt{v}\tau} \times \left[\operatorname{arg} \operatorname{ch} U_2 - \operatorname{arg} \operatorname{ch} U_1 + \sqrt{\frac{U_1 - 1}{U_1 + 1}} - \sqrt{\frac{U_2 - 1}{U_2 + 1}} \right].$$

La courbe $C = f(\Omega)$ est donnée par la figure 3. La pente de la courbe à l'origine est encore égale à :

$$\frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right].$$

Et dans ce cas seulement, il faut admettre une vitesse de rotation Ω'_m pour laquelle le couple devient infini :

$$(3,20) \quad \Omega'_m = + \frac{1}{\sqrt{v}} \log \frac{r_2}{r_1}.$$

B. — CALCUL DE LA PRESSION VERTICALE P

La première des équations dynamiques (3,8) donne :

$$(3,21) \quad P(r) = \int_0^r \rho_0 r \omega^2 dr + T_{rr} + \int_0^r r^{-1} [T_{rr} - T_{\theta\theta}] dr$$

avec, rappelons le :

$$T_{rr} = -(-\lambda \beta + \alpha_1 + \alpha_3 - \tau) \omega' r T_{r\theta},$$

$$r^{-1} [T_{rr} - T_{\theta\theta}] = + 2 \tau \omega' C r^{-2}.$$

a) $v > 0$.

$$0 < U < 1.$$

Par intégration, nous trouvons :

$$(3,22) \quad P(r) = \int_0^r \rho_0 r \omega^2 dr + (-\lambda \beta + \alpha_1 + \alpha_3 - T) \frac{\eta}{4\sqrt{v}\tau} \times [1 - U] - \frac{\eta}{4\sqrt{v}\tau} [-\log(1+U) + U] + P_0.$$

$$P(r) = P_1(r) + P_0.$$

La constante d'intégration P_0 est déterminée par la relation suivante :

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} h(r) r dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{P}{\rho g} r dr = 0,$$

ce qui donne :

$$P_0 = -\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} P_1 r dr.$$

Posons :

$$(1) = -\frac{\eta}{4\nu\tau} [-\log(1+U) + U];$$

$$(2) = -\frac{\eta}{4\nu\tau^2} [-\lambda\beta + \alpha_1 + \alpha_3 - \tau] [1-U],$$

$$\Gamma = -\lambda\beta + \alpha_1 + \alpha_3 - \tau,$$

$$P_1(r) = \frac{\eta}{4\nu\tau} \left[\log(1+U) - U + \frac{\Gamma}{\tau}(1-U) \right] + P_0,$$

b) $\nu < 0$.

$$1 < U < \infty.$$

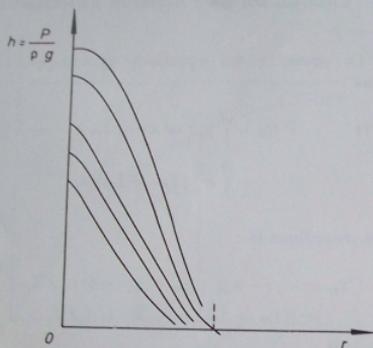


Fig. 4. — Variation de la hauteur h du fluide en fonction de la distance radiale r pour 0

$$h = 0 \quad \text{pour} \quad r^* = r_1 \sqrt{\frac{C}{C_m} \left(\frac{1}{1-U_1^*} \right)^{-4}}$$

$$\text{avec} \quad U_1^* = \frac{\Gamma}{\tau} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{\tau^2} + \frac{2\Gamma}{\tau}}.$$

Nous avons encore :

$$P_1(r) = \frac{\eta}{4|\nu|\tau} \left[\log(1+U) - U + \frac{\Gamma}{\tau}(U-1) \right] + P_0.$$

Nous pouvons résumer les cas $\nu > 0$ et $\nu < 0$ en écrivant :

(3.23)

$$P_1(r) = \frac{\eta}{4|\nu|\tau} \left[\log(1+U) - U + \frac{\Gamma}{\tau}|1-U| \right] + P_0.$$

Pour avoir l'effet Weissenberg, il faut une pression $P_1 = P - P_0$ dirigée vers le haut, donc

négative. Pour discuter du signe de P_1 , il faut envisager deux cas :

$$\Gamma > 0,$$

$$\Gamma < 0.$$

1° $\Gamma > 0$.

Si $\nu > 0$, $U < 1$.

Nous pouvons admettre :

$$\log(1+U) = U - \frac{U^2}{2}.$$

ce qui donne :

$$(3.24) \quad P_1(r) = \frac{\eta}{4\nu\tau} \left[-\frac{U^2}{2} + \frac{\Gamma}{\tau} - \frac{\Gamma}{\tau}U \right].$$

Nous aurons une pression P_1 négative si U a une valeur extérieure à l'intervalle compris entre les racines du trinôme du second degré, soit :

$$P_1 < 0 \quad \text{pour} \quad U > U_0 = -\frac{\Gamma}{\tau} + \sqrt{\frac{\Gamma^2}{\tau^2} - \frac{2\Gamma}{\tau}}.$$

Si $\nu < 0$, $U > 1$:

$$P_1(r) = \frac{\eta}{4|\nu|\tau} \left[\log(1+U) + U \left(\frac{\Gamma}{\tau} - 1 \right) - \frac{\Gamma}{\tau} \right];$$

P_1 est négatif si U est voisin de $\frac{\Gamma}{\Gamma - \tau}$.

2° $\Gamma < 0$.

Nous avons :

(3.25)

$$P_1 = \frac{\eta}{4|\nu|\tau} \left[\log(1+U) - U - \frac{|\Gamma|}{\tau}|1-U| \right];$$

P_1 est toujours négatif. Dans ce cas il y existe une pression verticale dirigée vers le haut, quelle que soit la valeur de U .

Étudions la variation de la pression P_1 en fonction de la distance radiale r (fig. 4).

La pente de cette courbe est donnée par la valeur de la dérivée :

$$\partial_r P_1(r) = [\partial_\nu(1) + \partial_\nu(2)] \partial_r U,$$

soit :

$$(3.26) \quad \partial_r P_1(r) = \frac{2\sqrt{\varepsilon} C^2}{r^5} \left[-\frac{1}{1+U} - \frac{|\Gamma|}{\tau U} \right].$$

Cette dérivée s'annule pour :

$$U = \frac{\left| \frac{\Gamma}{\tau} \right|}{\left| \frac{\Gamma}{\tau} \right| - 1} > 1,$$

donc, dans le cas où $\nu < 0$.

Pour $C = C_m$ sur le cylindre, dans le cas où $\nu > 0$, $U = 0$, nous pouvons écrire :

$$U^2 \simeq 1 - \frac{1}{2} \varepsilon C_m^2 r_1^{-4}$$

et :

$$(\partial_r P_1)_{r=r_1} = -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\tau} + 1 \right] \frac{1}{r_1}.$$

Puisque, dans le cas $\nu > 0$ exclusivement, $0 < U < 1$, nous pouvons encore admettre, pour cette dérivée, un développement en série, ce qui donne :

$$\partial_r P_1 = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{C_m} \frac{C^2}{r^5} \left[\frac{\Gamma}{\tau} + 1 \right].$$

CAS PARTICULIER D'UN COUPLE FAIBLE.

$$U \simeq 1$$

$$\partial_r P_1(r) = \frac{\eta}{4\nu\tau} \frac{2\varepsilon C^2}{r^5} \left[-\frac{1}{2} + \frac{|\Gamma|}{\tau} \right],$$

avec :

$$C = \eta \Omega \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

ce qui donne :

$$P_1(r) = -2\tau\eta\Omega^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{|\Gamma|}{\tau} \right] \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Posons :

$$\psi'_1 = 2\tau\eta \left[-\frac{1}{2} + \frac{|\Gamma|}{\tau} \right];$$

$$(3,27) \quad P_1(r) = -\psi'_1 \Omega^2 \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Si ψ' est positif, il y a effet Weissenberg.

FLUIDE DE MAXWELL : $\Gamma = -\tau$.

soit :

$$P_1(r) = -\tau\eta\Omega^2 \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \frac{1}{r^4}.$$

Un fluide de Maxwell présente un effet Weissenberg si le couple de cisaillement est faible.

$$\Gamma > 0.$$

$$\partial_r P_1(r) = \frac{\eta}{4\nu\tau} \frac{2\varepsilon C^2}{r^5} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{\tau} \right].$$

Si le couple est très faible :

(3,28)

$$P_1(r) = -2\tau\eta\Omega^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{\tau} \right] \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \frac{1}{r^4},$$

$$P_1(r) = -\psi'_2 \Omega^2 \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \frac{1}{r^4},$$

avec :

$$\psi'_2 = 2\tau\eta \left[-\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{\tau} \right].$$

Si $\frac{\Gamma}{\tau} > \frac{1}{2}$, soit τ très petit, il ne peut y avoir effet Weissenberg.

B. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

Trois plateaux tournant à la même vitesse sont montés sur un carter en duralumin. Les cylindres

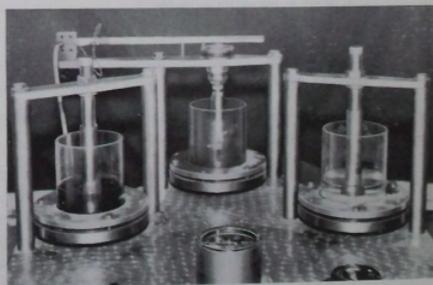


Fig. 5. — Photo du montage

en verre contenant le fluide à étudier sont fixés aux plateaux par une embase en Plexiglas tenue par une couronne en duralumin (fig. 5).

L'ensemble est entraîné par un système poulie-courroie commandé par un moteur à courant continu à 1/2 CV, qui tourne à 4 000 tr/mn. La vitesse de rotation des vases, grâce à un réducteur de vitesse de 1/10, peut varier de 0 à 400 tr/mn. La commande

de vitesse est du type classique à thyatron qui permet de la maintenir constante pendant toutes les mesures. Cette vitesse est connue de manière très précise : un disque percé de n trous, solidaire d'un des plateaux, délivre, par l'intermédiaire d'une lampe et d'une cellule photorésistante, n impulsions par tour; ces impulsions sont dénombrées par un compteur électronique pendant un temps donné T . En faisant varier T , il est possible d'obtenir une grande précision et nous avons :

$$V = \frac{N}{\pi T};$$

N : nombre d'impulsions comptées pendant le temps T .

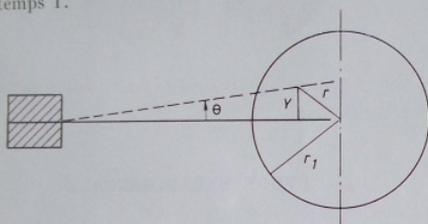


Fig. 6. — $C = Pr_1 = KYr$

Y : mesure de la flexion de la lame;
 r_1 : est le rayon du cylindre;
 K : est un facteur de proportionnalité.

La mesure de la hauteur $h = \frac{P1}{\rho_0 g}$ du liquide au-dessus du plan de repos est faite au cathétomètre qui donne une précision de 1/100 de mm.

Le cylindre intérieur plongeant dans le fluide est relié fixement à un système en forme d'étrier. Son extrémité supérieure est terminée par une tige filetée qui permet de faire glisser le cylindre le long de son axe et de le maintenir fixe en rotation par des contre-écrous. Le diamètre de ce cylindre peut varier entre 1 cm et 4 cm, tandis que le diamètre du vase est maintenu constant. Nous avons relevé la hauteur h du fluide en fonction de la distance radiale r , pour différentes vitesses de rotation du vase et les courbes expérimentales trouvées ont été comparées aux courbes théoriques (chap. 3, partie A).

Comme nous avons pu le voir, il est intéressant de relever la valeur du couple pour différentes vitesses Ω . Pour cela, nous avons mesuré ce couple, qui s'exerce sur le cylindre intérieur, au moyen d'un système à lames de flexion : des jauges de contrainte

collées sur cette lame nous permettent de connaître le couple avec une grande précision. Dans ce montage, le cylindre central est libre en rotation (montage sur butées à billes). Un ergot, monté sur le haut du cylindre, appuie sur l'extrémité libre de la lame de flexion. Lorsqu'un couple s'exerce sur le cylindre, celui-ci tourne d'un angle θ , le couple C antagoniste est fourni par la lame de flexion agissant comme un ressort (fig. 6).

L'emploi de différentes lames de flexion permet la mesure du couple de 10 g-cm à 6 kg-cm (la valeur supérieure n'étant pas limitative). Un étalonnage préalable permet de connaître le couple avec une précision supérieure à 1 %.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Plusieurs expériences ont été faites avec de nombreux fluides.

Nous avons choisi des polyisobutènes dont les caractéristiques sont les suivantes :

	POLYISOBUTÈNES		
	(1)	(2)	(3)
Densité	0,880	0,883	0,910
Poids moléculaire	880	1 230	2 000
Viscosité en poises à 27° C..	223	970	7 600

Seul le polyisobutène (3) présente l'effet Vianenberg; de plus, nous avons constaté qu'une solution caoutchoutique réalisée en laboratoire avec du Vistanex et une huile S244 fournie par Esso, utilisée comme solvant, présentait également une pression verticale négative très importante.

1 Mesures de viscosité.

Nous avons mesuré la viscosité dynamique de ces fluides en fonction de la contrainte de cisaillement à l'aide d'un viscosimètre à cylindre tournant type Epprecht Rhéomat 15, pour des températures variant de 5° C à 70° C.

Nous avons pu vérifier que la viscosité dynamique de ces quatre fluides reste constante lorsque la contrainte de cisaillement augmente : fait très important car, dans le paragraphe 3 de la

partie A, pour effectuer l'intégration de $\partial_r \omega$, nous avons dû supposer que cette viscosité restait constante en fonction de la contrainte de cisaillement.

Nous avons pu constater que les polyisobutènes (1), (2), (3) vérifiaient la loi de Andrade, loi qui donne la variation de la viscosité en fonction de la température absolue $T^\circ K$:

$$\eta = A e^{\frac{n}{RT}}$$

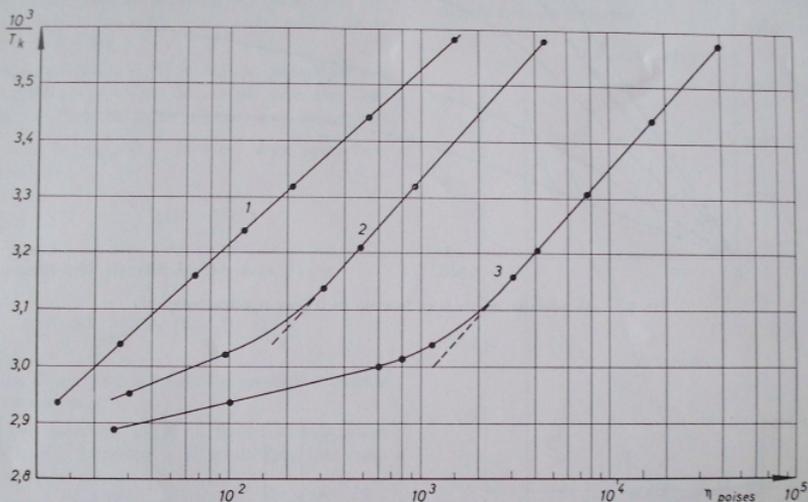


Fig. 7. — Loi de Andrade : variation de η avec la température absolue T_k pour les polyisobutènes (1), (2), (3)

E étant l'énergie d'activation de l'écoulement et A une constante du fluide. L'énergie d'activation E est donnée par la pente de la courbe :

$$\log \eta = f\left(\frac{1}{T}\right).$$

Si le fluide suit la loi de Andrade, cette courbe doit être une droite. Sur la courbe de la figure 7 (1), nous voyons que la loi de Andrade est vérifiée pour le polyisobutène (1), dans tout le domaine de température étudié.

Pour le polyisobutène (2), cette loi n'est plus valable au-dessus de $50^\circ C$ et, pour le polyisobutène (3), il n'y a plus linéarité entre $\log \eta$ et $\frac{1}{T}$ au-dessus de $43^\circ C$.

Dans le domaine où nous travaillons, pour étudier l'effet Weissenberg, $20 < t^\circ C < 30$, nous pouvons admettre la loi de Andrade. Cette loi, appliquée, en général, à une solution quelconque de polymères, est donc aussi vérifiée pour le polyisobutène (3). Il semblerait donc que, du point de vue viscosité apparente, ce fluide ait un comportement normal. L'effet Weissenberg ne serait donc pas uniquement dû à des propriétés particulières de la viscosité.

2 Étude du couple de cisaillement.

Nous avons mesuré le couple de cisaillement pour différentes vitesses de rotation du vase (courbe 2) et différents rayons r_1 du cylindre, pour les trois polyisobutènes. La courbe de la figure 8 représente cette variation pour le polyisobutène (3).

Nous pouvons constater que, sauf pour des rayons r_1 trop importants où les effets de bords ne sont plus négligeables, l'allure des courbes $C = f(\Omega)$ est analogue à celle donnée par la théorie (fig. 2) avec $\nu > 0$.

Pour les polyisobutènes (1) et (2), ce couple est très faible ($C < 300 g$) tandis qu'il est très important dans le cas du polyisobutène (3) où il peut atteindre $4 kg/cm$.

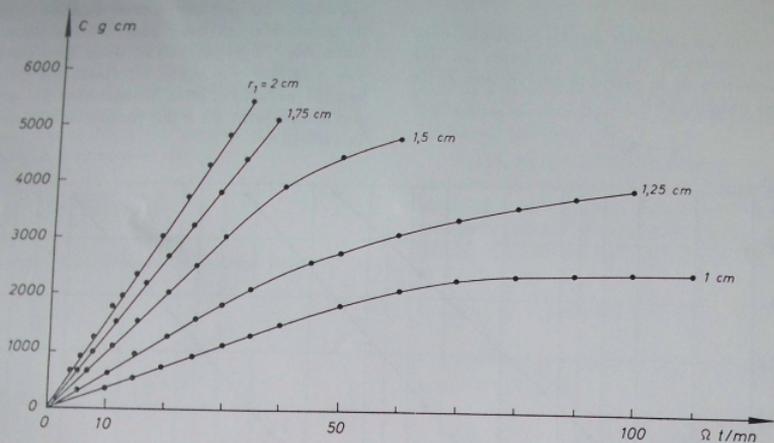


Fig. 8. — Variation du couple C en fonction de Ω pour le polyisobutène (3)

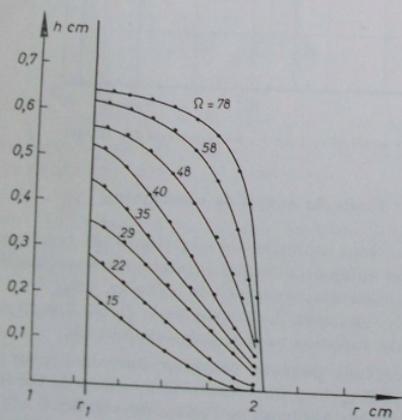


Fig. 9. — $h = f(r)$ pour le polyisobutène (3)

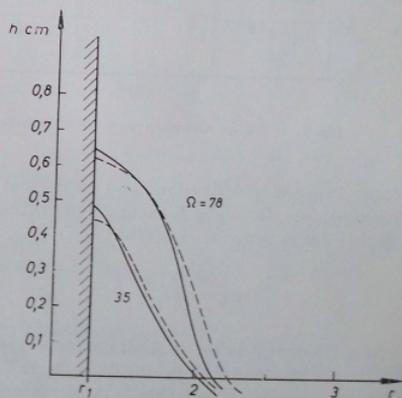


Fig. 10. — Comparaison entre la courbe expérimentale (—) et la courbe théorique (---) (§ III, A), pour le polyisobutène (3)

Il est possible de vérifier sur cette courbe (fig. 8) que, pour de petites vitesses de rotation du vase, la loi de variation $C = f(\Omega)$ est linéaire, vérifiant la formule (2,5) donnée par RIVLIN.

3 Mesure de la pression verticale.

Nous avons relevé la hauteur $h = \frac{P}{\rho g}$ du fluide en fonction de la distance radiale et pour différentes vitesses de rotation du vase (fig. 9), pour le polyisobutène (3). Elles ont l'allure de la figure 4 (voir fig. 10).

Les polyisobutènes (1) et (2) ne présentent pas l'effet Weissenberg. Nous avons pu constater que ces fluides ont un temps de relaxation extrêmement faible, donc le rapport $\frac{\Gamma}{\tau} > 0$ est très important et l'expression :

$$(2) = \frac{\eta \Gamma}{4 \nu \tau^2} [1 - U] > 0$$

est prépondérante devant l'expression (1) :

$$(1) = \frac{\eta}{4 \nu \tau} [\log(1 + U) - U].$$

Donc, il ne peut y avoir de pression verticale dirigée vers le haut.

Le polyisobutène (3) a un temps de relaxation nettement plus important. Il semblerait que nous ayons, dans ce cas, $\Gamma < 0$.

Donc, courbe de la figure 9 :

$$P_1 = \frac{\eta}{4 \nu \tau} \left[-\frac{U^2}{2} + \frac{\Gamma}{\tau} U - \frac{\Gamma^2}{\tau} \right],$$

et nous n'aurons plus de pression verticale dirigée vers le haut pour :

$$U \geq U_0 = \frac{\Gamma}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{\tau}\right)^2 - 2 \frac{\Gamma}{\tau}}.$$

La solution de Vistanex présente, elle, un temps de relaxation très important. Lorsqu'elle est soumise à une déformation, il faut plus d'une heure à la surface libre du fluide pour reprendre sa position de repos. Γ est donc négatif pour ce fluide et nous avons alors l'effet Weissenberg. Cependant, il semblerait qu'il existe dans cette solution un temps de retard non négligeable. Il faudrait donc considérer dans la fonctionnelle (1,1') le tenseur $D^{(1)}$ que nous avons négligé dans le paragraphe 3, A.

COMPARAISON AVEC LE FLUIDE DE RIVLIN.

Nous avons comparé nos résultats à ceux trouvés par GREENSMITH et RIVLIN [11] en 1952, qui ont effectué des mesures sur des solutions de polymères et ont comparé leurs résultats aux résultats théoriques donnés par l'équation (2,6) dans le cas de petites vitesses de rotation du vase.

Ils ont trouvé que la loi de variation de la hauteur h du fluide en fonction de la distance radiale r est de la forme :

$$h = A - B r^2.$$

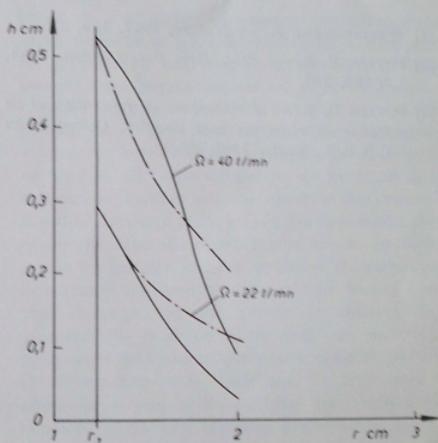


Fig. 11. — Comparaison entre la courbe expérimentale (—) et la courbe déduite de la théorie de Rivlin [équ. (2,6)] (---).

En comparant avec l'équation (2,6), il faut admettre :

$$\psi = \psi_1 K^{-1/2}, \quad \psi_1 = C^{10}, \quad K = \text{tr}(D^2),$$

ce qui donne bien :

$$P = f(r^2).$$

Sur la courbe de la figure 11, nous avons comparé nos résultats expérimentaux (courbes en traits pleins) avec les résultats obtenus en tenant compte de l'hypothèse de Rivlin et de la loi :

$$\psi = \psi_1 K^{-1/2} \quad (\text{courbes en pointillés}),$$

pour deux vitesses de rotation du vase. Nous pouvons constater que la courbe expérimentale est confondue avec la courbe de Rivlin pour de petites vitesses de cisaillement du fluide. Mais si cette vitesse devient plus importante, la courbe expérimentale décroît beaucoup plus rapidement que ne le prédit la théorie de Rivlin.

Actuellement, nos travaux se poursuivent par l'étude approfondie du Vistanex et l'influence de la température sur la pression verticale P_1 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WEISSENBERG K. — *Nature*, 1947, **159**, 310.
- [2] RIVLIN R. S. — *Proc. Roy. Soc. London*, 1948, A **193**, 260.
- [3] RIVLIN R. S. — *Phénomènes de relaxation et de fluage en rhéologie non linéaire*. Colloque du C.N.R.S., Paris, 1960, 83-93.
- [4] MOONEY M. — *Journ. Colloid Sci.*, 1951, **6**, 96. — *Journ. Applied Physics*, 1940, **11**, 582. — *Journ. Applied Physics*, 1953, **24**, 675.
- [5] OLDRROYD J. C. — *Proc. Roy. Soc. London*, 1950, A **200**, 185. — *Proc. Roy. Soc. London*, 1950, A **200**, 345.
- [6] COLEMAN B. D., NOLL W. — *Arch. for Rational Mech. and Analysis*, 1959, **3**, 289-303.
- [7] RIVLIN R. S., ERICKSEN J. L. — *J. of Ration. Mech. and Analysis*, 1955, **4**, 323.
- [8] JAUMANN C. G. — *Wien Sitz. ber.*, 1911, **120**, 385.
- [9] TRUESDELL C. — *In Journal Ration. Mech. and Analysis*, 1952, **1**, 125-300.
- [10] MANDEL J. — *Mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, édit., 1966, **1**.
- [11] GREENSMITH H. W., RIVLIN R. S. — *Nature*, 1961, **168**, 664. — *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1950, A **245**, 399.

EFFETS DU SECOND ORDRE EN PLASTICITÉ ⁽¹⁾

par Alfred M. FREUDENTHAL

(COLUMBIA UNIVERSITY, NEW YORK)

RÉSUMÉ

Une torsion alternée cyclique d'éprouvettes cylindriques ou tubulaires d'aluminium pur et d'autres métaux écrouissables produit des allongements permanents, croissants, proportionnels au carré de l'angle de torsion. L'existence de cet allongement du second ordre, amplifié par l'application répétée de la torsion (effet Ronay), est incompatible avec les critères d'écoulement classiques et avec la condition de coïncidence des directions principales des tenseurs de contrainte et de déformation infinitésimale. Un nouveau critère est proposé, qui est compatible avec les observations.

FAITS EXPÉRIMENTAUX

Les lois de comportement des milieux continus solides sont établies, en général, sous la forme de relations tensorielles linéaires entre contraintes ou accroissements de contrainte et déformations infinitésimales ou accroissements de déformation, ou encore vitesses de déformation. Par conséquent, les directions principales des deux tenseurs reliés coïncident. De nombreuses observations montrent que cette coïncidence n'est qu'approchée et que les déviations systématiques ne peuvent pas être considérées comme des erreurs d'expériences.

Les observations de POYNTING [1] ont montré que la torsion d'un fil (élastique) d'acier dur est accompagnée d'un allongement et d'une variation de volume proportionnels au carré de la contrainte de cisaillement. Des cylindres circulaires de caoutchouc incompressible de longueur constante, soumis à une déformation de torsion, développent une force de compression axiale [2]; si les cylindres sont

libres de s'allonger, on observe des allongements assez importants pour le caoutchouc contenant un sel granulé [3]. La force de compression et l'allongement sont proportionnels au carré de l'angle de torsion. Pour le caoutchouc (polyuréthane) l'allongement est du type *élasticité retardée* et dépend de la vitesse de torsion. Des allongements irréversibles de tiges et de tubes de cuivre, de fer et de laiton, sévèrement tordus, ont été observés par SWIFT [4] et par L'HERMITE et DAWANCE [5]. Cependant, il faut remarquer que les observations sur le caoutchouc et sur les métaux dans le domaine des écrouissages importants résultent de déformations finies; dans ce cas, l'allongement est plutôt le résultat de la géométrie de la déformation finie que de la loi de comportement tensorielle non linéaire entre contrainte et déformation des matériaux. Ce sont donc des effets du second ordre du type que REINER [6] a nommés effets non linéaires *géométriques*.

L'observation des effets du second ordre *tensoriels purs*, comme l'effet Poynting, demande une précision extraordinaire, puisqu'on doit les observer dans le domaine des déformations primaires petites, sinon infinitésimales. D'après la relation :

$$\varepsilon \approx 0,5 \gamma^2,$$

qui traduit approximativement les résultats de Poynting pour l'acier dur, l'allongement élastique pour une déformation de torsion de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$ est de l'ordre de 10^{-6} , quantité très petite, à peine mesurable, sauf sur éprouvettes très longues. Cependant, si une tige cylindrique est tordue au-delà de la limite d'écoulement, l'allongement n'est plus recouvrable. Si la torsion est répétée, l'addition des quantités infinitésimales d'accroissement permanent

(1) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 19 juin 1967.

par cycle, produit, après 10^4 ou 10^5 cycles, un allongement fini. Cet effet cumulatif du second ordre, trouvé par M. RONAY [7] au cours de recherches récentes sur la fatigue en torsion avec ou sans tension, et nommé *effet Ronay* par W. A. WOOD [8], est beaucoup plus important, du point de vue pratique, que les effets Poynting ou WEISSEBERG [9], car ces derniers ne croissent pas, mais tendent à s'annuler avec la déformation ou la vitesse de cisaillement.

L'effet Ronay produit des phénomènes divers, qui restent inexplicables si l'on ne fait pas appel à la théorie des effets du second ordre, mais qui sont

cyclique (*fluage cyclique*). Quand la longueur d'une éprouvette soumise à un essai de fatigue en torsion est fixée, on observe souvent le flambage en flexion latérale de cette éprouvette, effet produit par la force axiale, qui croît avec le nombre de cycles.

Dans les essais systématiques sur éprouvettes d'aluminium recuit pur (fig. 1), de cuivre, de fer et de titane, soumises à des déformations cycliques en torsion de ± 15 à $\pm 450 \cdot 10^{-4}$, des allongements permanents considérables, accompagnés de contractions caractéristiques de l'instabilité dans les essais de traction, se sont produits. Ces allongements

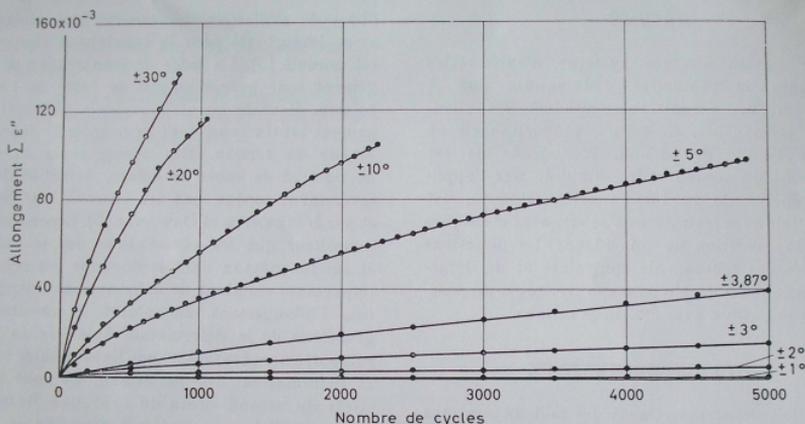


Fig. 1. — Allongements permanents d'éprouvettes cylindriques d'aluminium pur produits par torsion cyclique
 [($\pm 1^\circ$ correspond à une déformation γ de $\pm 15 \cdot 10^{-4}$)]

caractéristiques du comportement des éprouvettes métalliques soumises à des déformations (permanentes) cycliques.

Ainsi, la résistance à l'écroutissage sous traction est réduite d'une manière frappante par la superposition d'une déformation cyclique faible, soit de fréquence mécanique [10], soit de fréquence ultrasonore [11]. Une tige d'aluminium recuit soumise à une traction-compression cyclique, superposée à une torsion constante assez faible, s'est tordue progressivement dans la direction de cette torsion [10]. Pour des éprouvettes de cuivre [12], [13] et de fer [14] soumises à une tension axiale assez faible, qui ne produit, seule, presque pas d'allongement permanent, le fluage commence aussitôt qu'on applique une contrainte faible de torsion

les plus grands pour les éprouvettes tubulaires minces et diminuent en raison inverse de l'épaisseur de la paroi (fig. 2), ce qui est caractéristique des effets du second ordre. Dans les éprouvettes à paroi mince, l'allongement croissant produit un phénomène de flambage de la paroi sous une forme qu'on n'observe, en général, que sous une pression hydrostatique extérieure, mais qui est produite ici par la contraction du second ordre (fig. 3).

L'additivité des allongements irréversibles infinitésimaux par cycle au cours des répétitions cycliques de la torsion alternée est la cause de l'importance technique de l'effet Ronay. On s'aperçoit que 2 000 cycles de torsion alternée de $\pm 10^\circ$ produisent un allongement de plus de 20 % sur une tige cylindrique d'aluminium pur recuit (fig. 4). Cet

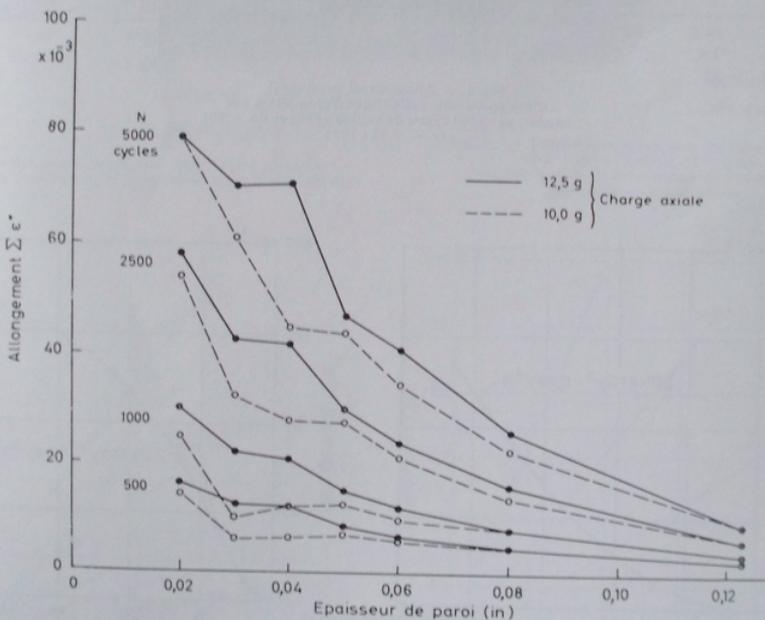
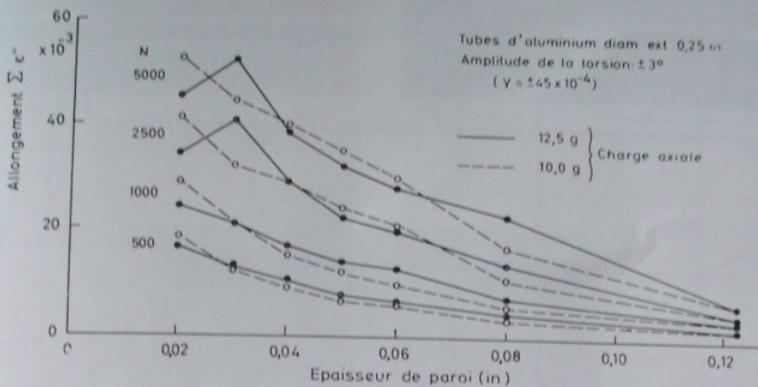


Fig. 2. — Effet de l'épaisseur de la paroi sur l'allongement permanent d'éprouvettes tubulaires d'aluminium pur sous torsion cyclique

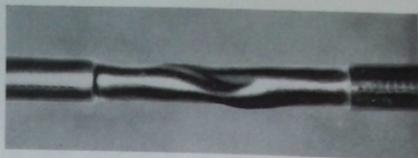
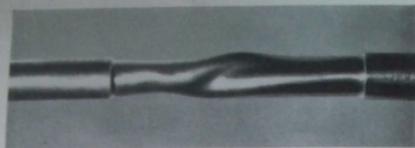


Fig. 3. — Flambage d'une éprouvette tubulaire d'aluminium pur après 3150 cycles de torsion cyclique de $\pm 2^\circ$ ($\gamma = \pm 3 \cdot 10^{-3}$)

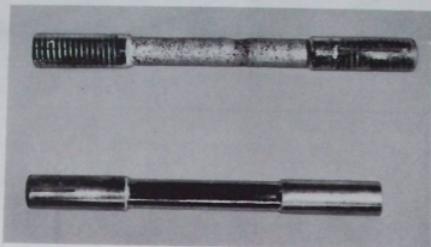


Fig. 4. — Allongement permanent d'une éprouvette cylindrique d'aluminium pur produit par 2160 cycles de torsion cyclique de $\pm 10^\circ$ ($\gamma = \pm 15 \cdot 10^{-3}$)

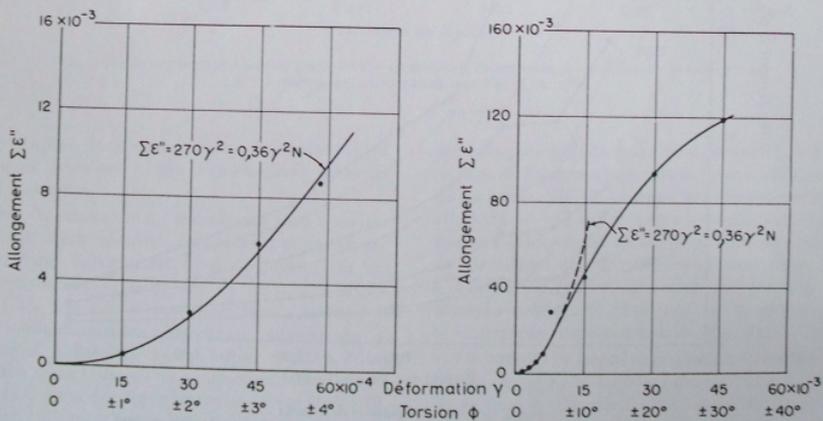


Fig. 5. — Allongement permanent sous torsion cyclique en fonction de la déformation de cisaillement pour l'aluminium pur

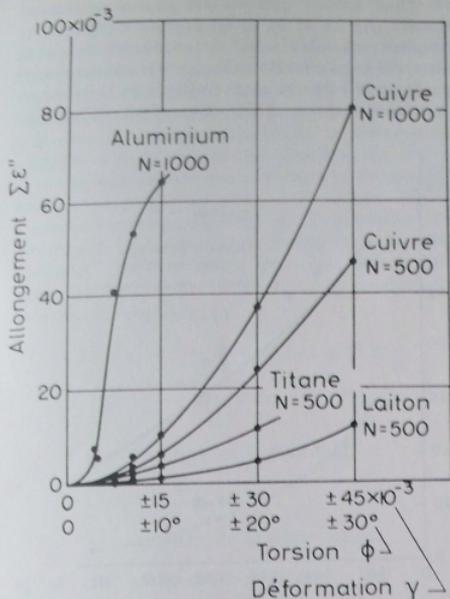


Fig. 6. — Allongement permanent sous torsion cyclique en fonction de la déformation de cisaillement pour divers métaux

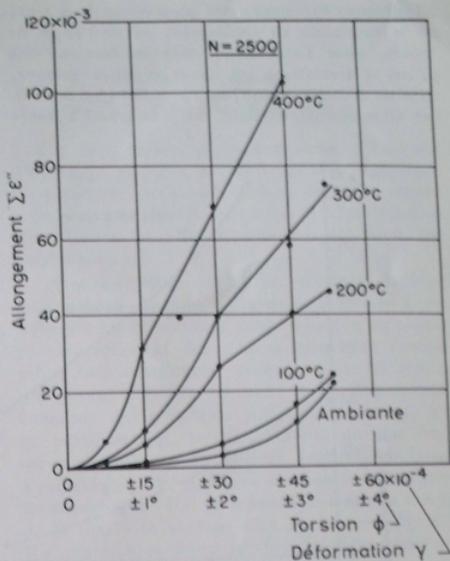


Fig. 7. — Allongement permanent de l'aluminium pur sous torsion cyclique (N = 2500) en fonction de la déformation de cisaillement pour diverses températures

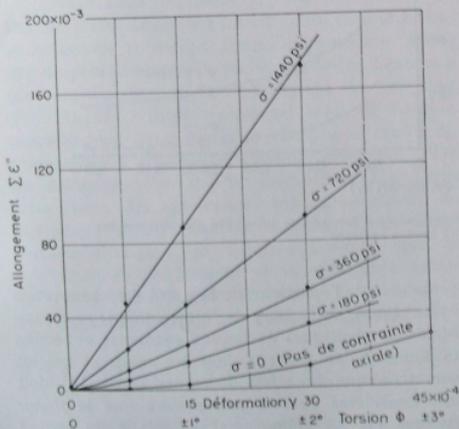


Fig. 8. — Relations quasi linéaires entre l'allongement permanent et l'angle de torsion cyclique pour divers contraintes axiales σ (aluminium pur)

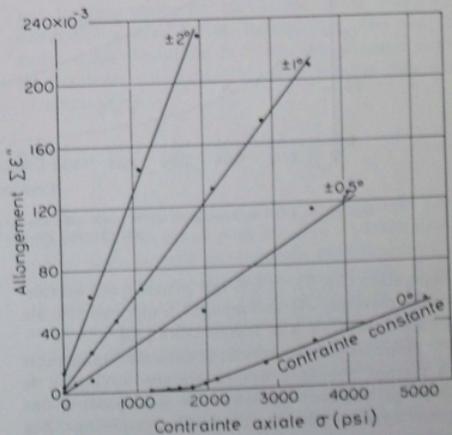


Fig. 9. — Relations quasi linéaires entre l'allongement permanent et la contrainte axiale pour divers angles de torsion cyclique

allongement cumulé reste proportionnel au carré de la contrainte de cisaillement ou de l'angle de torsion, pour l'aluminium dans le domaine des petites déformations, et, pour d'autres métaux, dans un domaine allant jusqu'à $\pm 30^\circ$ (fig. 5 et 6). Cet allongement cumulé est plus grand à haute

et d'une torsion cyclique est approximativement linéaire (fig. 8 et 9). Il est possible d'expliquer ce couplage comme le résultat de la réduction du seuil de plasticité par l'effet Bauschinger, phénomène illustré par le modèle d'écroutissage cinétique de Novozhilov et KADASHVICH [17]. Cependant, l'influence

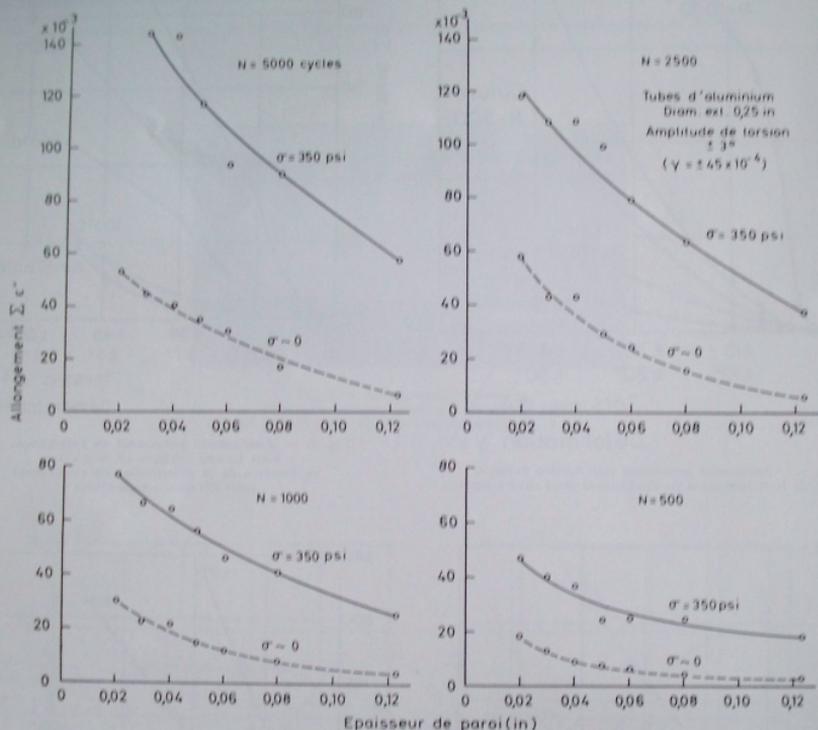


Fig. 10. — Effet de l'épaisseur de la paroi sur l'allongement permanent d'éprouvettes tubulaires d'aluminium par sous tension constante σ et torsion cyclique

température (fig. 7), ce qui fait penser que l'accroissement plastique est accompagné d'une composante visqueuse, sensible à la température [15].

Parmi les phénomènes de la déformation instable des métaux soumis à des contraintes cycliques, le *fluage cyclique* sous tension faible superposée à une torsion cyclique alternée est le plus important. Des essais sur des éprouvettes de cuivre, d'aluminium et de fer [16], montrent que l'action mutuelle d'une tension

prononcée de l'épaisseur de la paroi des éprouvettes cylindriques sur le taux de *fluage cyclique* sous combinaisons identiques de tension constante et torsion cyclique, qu'on observe dans les essais et qui est caractéristique des effets du second ordre [18], doit être considérée comme une preuve que le *fluage cyclique* est un allongement cumulé du second ordre sous torsion cyclique, augmenté par l'action mutuelle et linéaire de la tension constante (fig. 10).

Une étude précise, au cours d'un seul cycle, de l'accroissement d'allongement du second ordre sous torsion et tension [19] a démontré l'existence d'un effet additionnel du second ordre, qui s'est produit à la suite de l'action mutuelle de la déformation plastique et de la déformation élastique. La source de ce couplage est l'existence, dans la loi de comportement tensorielle complète d'un milieu élasto-plastique isotrope, résultant de l'application du théorème de Cayley-Hamilton généralisé par RIVLIN-ERICHSEN [20] au milieu élasto-plastique, d'un terme qui représente le produit des contraintes élastiques et plastiques :

$$(1) \quad \underset{\sim}{d}e = \alpha'_1 \underset{\sim}{d}s + \alpha'_2 \underset{\sim}{d}t + (\alpha'_1 \underset{\sim}{s} + \alpha'_2 \underset{\sim}{t}) \underset{\sim}{d}f + \alpha_3 (\underset{\sim}{s} \cdot \underset{\sim}{d}s + \underset{\sim}{d}s \cdot \underset{\sim}{s});$$

$\underset{\sim}{s}$: déviateur de la contrainte ;

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{s}^2 - \frac{2}{3} J_2 \cdot \underset{\sim}{1};$$

$\underset{\sim}{e}$: déviateur de la déformation ;

α'_1 et α'_2 : constantes élastiques ;

α'_1 et α'_2 : paramètres plastiques ;

α_3 : paramètre élasto-plastique.

L'expression complète [1] est la relation de Prandtl-Reuss avec tous les effets du second ordre, dans laquelle le dernier terme exprime une déformation pseudo-réversible du second ordre, beaucoup plus importante que la déformation de Poynting (fig. 11). On a déjà trouvé cet effet de l'action mutuelle des deux tenseurs dans une étude du comportement d'un milieu élastique retardé à l'aide du rhéogoniomètre de WEISSENBERG [21]. Dans cette étude, des éprouvettes tubulaires courtes de caoutchouc naturel ont été soumises à des déformations cycliques en torsion, pendant que la contrainte de cisaillement et la contrainte axiale du second ordre ont été observées.

Dans une relation de Kelvin généralisée :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \alpha'_1 \underset{\sim}{\varepsilon} + \alpha'_2 \underset{\sim}{\varepsilon}^2 + \alpha'_1 \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} + \alpha'_2 \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}^2 + \alpha_3 (\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} + \underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon});$$

$\underset{\sim}{\sigma}$: tenseur de la contrainte ;

$\underset{\sim}{\varepsilon}$: tenseur de la déformation ;

$\underset{\sim}{\varepsilon}$: tenseur de la vitesse de déformation ;

α'_1 et α'_2 : constantes élastiques ;

α'_1 et α'_2 : constantes visqueuses ;

α_3 : une constante visco-élastique,

il y a trois termes du second ordre : élastique (Poynting), visqueux et visco-élastique (couplage). De sorte que l'existence de trois effets du second ordre dans un milieu élasto-plastique (effet Poynting, effet Ronay et effet élasto-plastique) n'est pas surprenante.

L'analyse théorique de l'effet Ronay dans un milieu élasto-plastique écrouissable se heurte à une difficulté fondamentale : il n'y a pas de loi unique de comportement des milieux plastiques écrouissables sous contraintes cycliques. Cette loi change d'un cycle à l'autre au cours de la déformation, évolution qui représente soit un écrouissage, soit un amollissement ; le milieu atteint un état final, qu'on pourrait appeler *cyclique*, avec seuil de fluage à contrainte nulle, mais sans déformation cumulative du second ordre, état pour lequel les lois de la théorie de la plasticité ne sont plus applicables (fig. 12). Il n'y aurait plus alors de méthode d'analyse théorique des divers phénomènes d'instabilité [10] qui se produisent au cours de la déformation cumulative du second ordre.

Cependant, l'existence de cette déformation ne doit pas être négligée dans le développement des lois fondamentales de la théorie de la plasticité, compatibles avec l'effet Ronay. Cet effet est la cause d'une déviation de la relation classique entre les paramètres de LODE [22] pour le corps plastique incompressible :

$$(2) \quad \mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2d\varepsilon'_2 - d\varepsilon'_3 - d\varepsilon'_1}{d\varepsilon'_1 - d\varepsilon'_3} = \nu.$$

Si $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, $d\varepsilon'_1 > d\varepsilon'_2 > d\varepsilon'_3$, cet écart doit être le plus grand pour $\mu = \nu = 0$ (cisaillement), région dans laquelle les résultats expérimentaux de Lode dans une dispersion considérable. Il sera démontré plus tard que les expériences de TAYLOR et QUINNEY [23] ne concernent pas cette région.

Le critère d'écoulement ou le potentiel plastique le plus simple qui n'impose pas la condition arbitraire que le signe de la déformation doit changer avec celui de la contrainte appliquée, est représenté par :

$$(3) \quad f = J_2^{3/2} + mJ_3 \pm k^3 = 0.$$

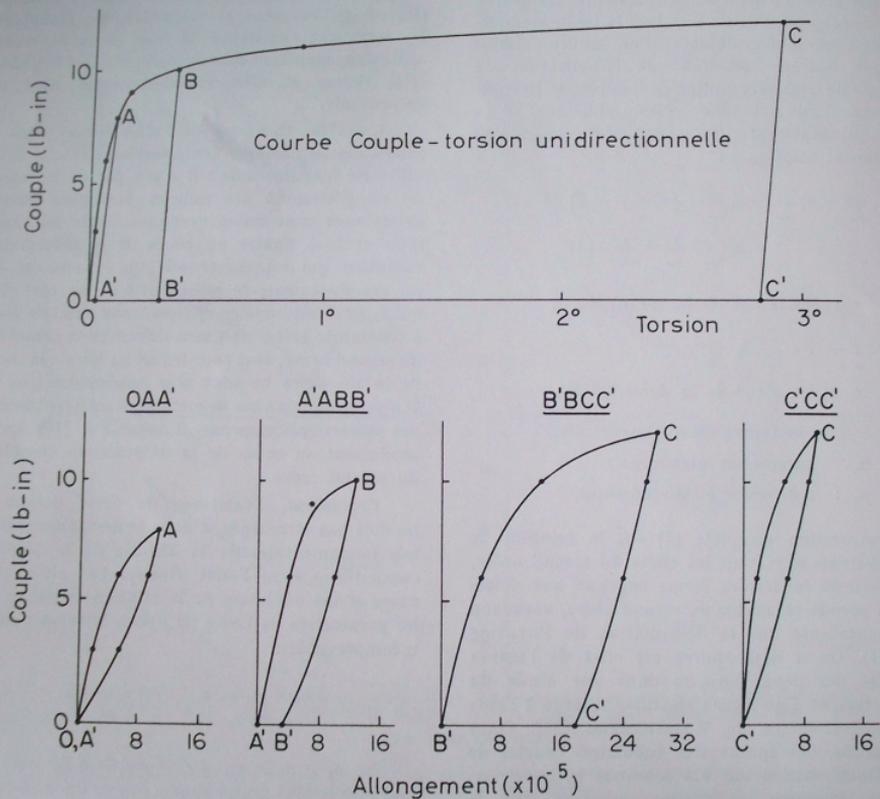


Fig. 11. — Relation entre le moment de torsion appliqué et l'allongement permanent, puis l'allongement réversible, au cours de quatre cycles de torsion, dans des régions différentes de la déformation de l'aluminium pur

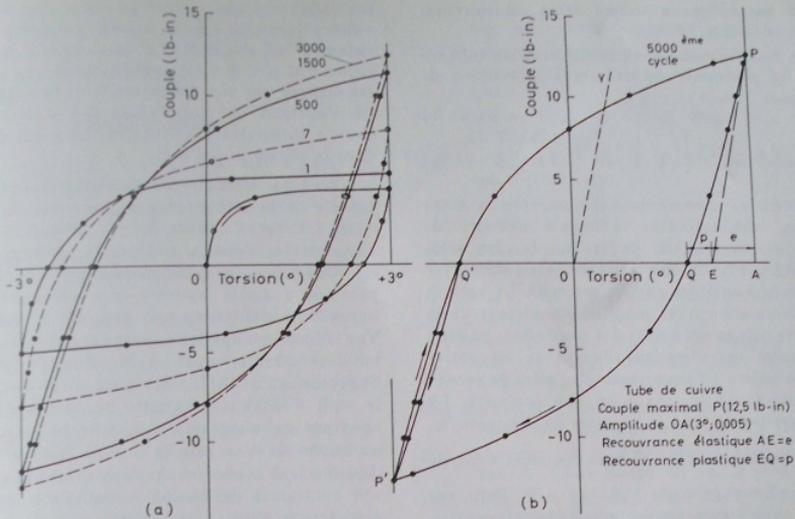


Fig. 12. — Développement de l'état « cyclique » sous torsion cyclique d'une éprouvette tubulaire de cuivre

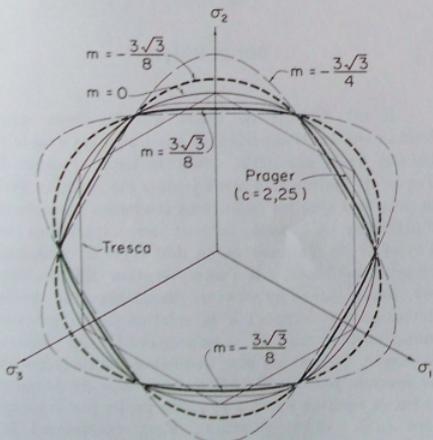


Fig. 13. — Critère d'écoulement [équation (3)]

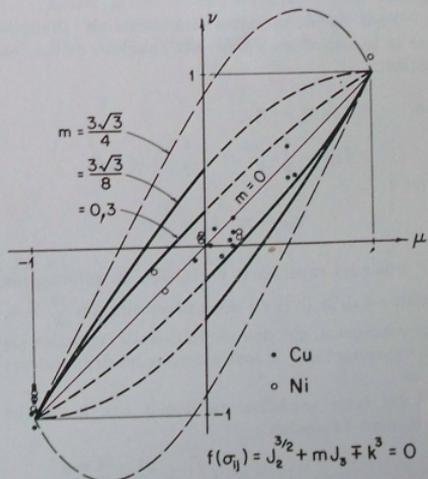


Fig. 14. — Relation entre les paramètres de Lode d'après l'équation (6) avec les résultats de Lode pour le cuivre et le nickel

Le paramètre du second ordre est introduit comme constante.

La relation associée entre déformation infinitésimale et contrainte est réduite à la relation de Lévy pour $J_3 = 0$:

$$(4) \quad d\epsilon_{ij} = 2\lambda \left[\left(\sqrt{\frac{J_2}{k}} \right) s_{ij} + \frac{2}{3} \frac{m}{k} l_{ij} \right].$$

Le critère d'écoulement [équation (3)] a deux branches, valables dans différents secteurs de l'espace des contraintes, projeté sur le plan octaédrique (fig. 13). Le critère résultant coïncide avec le critère de Von Mises aux six sommets. Le vecteur de la déformation n'est parallèle au vecteur de la contrainte qu'aux six points des contraintes axiales; l'écart entre ces directions dans tous les autres points du critère est l'expression de l'effet du second ordre qui atteint le maximum aux sommets. La forme du critère dépend de la valeur du paramètre m , dont les limites $m = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$ s'obtiennent à partir de la condition évidente : $d\nu/d\mu \geq 0$. Pour ces limites, l'angle θ entre les vecteurs de la déformation et de la contrainte aux sommets atteint le maximum : $\cos\theta = 0,94$. La condition de convexité du critère donne les limites de m : $\pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Pour la déformation infinitésimale produite par la torsion d'une éprouvette tubulaire mince, on obtient :

$$(5) \quad d\epsilon'_{\theta\theta} = 2\lambda \tau;$$

$$d\epsilon'_{zz} = \frac{4\lambda}{9} \frac{m}{k} \tau^2 = \frac{1}{9} \frac{m}{k\lambda} (d\epsilon'_{\theta\theta})^2,$$

avec :

$$\sigma_{\theta\theta} = \tau; \quad l_{zz} = \frac{1}{3} \tau^2.$$

Pour les expériences en torsion, la déformation axiale : $d\epsilon'_{zz} > 0$; il est donc nécessaire que $\frac{m}{k} > 0$. Par conséquent, aux deux définitions de l'équation (3) correspondant à $\pm k$ sont associées les deux valeurs $\pm m$.

De cette condition on déduit que la courbe μ, ν , dont l'équation :

$$(6) \quad \nu = \mu + \frac{2}{3} m \frac{(1-\mu^2) \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{3} + \frac{4}{9} m \mu}}{1 + \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{4}{9} m \right)^2 \right] \mu^2},$$

est déduite de (4), a deux branches pour les deux valeurs de m (fig. 14) : la branche de $m > 0$ dans la région $-1 \leq \mu \leq 0$ et la branche de $m < 0$ dans la région $0 \leq \mu \leq 1$; c'est pourquoi le point $\mu = \nu = 0$ est marqué par une discontinuité de la relation (6). On s'aperçoit que cette conclusion s'accorde bien avec la dispersion des résultats des essais de Lode dans la région $\mu = \nu = 0$.

Bien que le critère d'écoulement proposé tienne compte de l'existence des déformations du second ordre, il sera difficile de le vérifier à l'aide d'expériences directes. Les écarts par rapport aux résultats préconçus peuvent toujours être expliqués par une « faible anisotropie » des éprouvettes. Cependant, des écarts par rapport au critère de Von Mises, compatibles avec le critère proposé, ont été observés par A. M. ЗИЧКОВ et V. A. СВЕТЛИКОВА [24]. L'écart était assez fort, quand le seuil d'écoulement atteint en torsion avait été suivi par une contrainte axiale *neutre* (par rapport au critère de Von Mises); il était faible si le seuil d'écoulement atteint en traction avait été suivi par une contrainte de torsion *neutre*. Cette différence peut être le résultat de l'existence de « coins » aux points de scission ($J_3 = 0$), dans le nouveau critère d'écoulement, points de coïncidence de ce critère avec le critère de Von Mises, mais points d'écart maximal des directions des vecteurs des déformations *neutres* d'après les deux critères.

CONCLUSION

Il est difficile de croire que les deux séries fondamentales d'expériences sur lesquelles repose la théorie de la plasticité, celles de Lode et celles de Taylor et Quinney, n'aient jamais été répétées avec la précision que les conditions modernes permettent d'atteindre. Ce sont surtout les expériences de Taylor et de Quinney qu'on doit regarder avec une certaine méfiance, car l'interprétation des résultats est basée sur l'hypothèse discutable que toute déviation par rapport à la relation $\mu = \nu$ est une manifestation de la compressibilité du milieu plastique. Comme un état de cisson simple (torsion) ne produit pas de dilatation de volume du premier ordre, la relation entre μ et ν doit passer par le point zéro ($\mu = \nu = 0$); pourtant, c'est exactement le point des déviations maximales des résultats de Lode, déviations produites par les allongements irréversibles du second ordre. Il faut donc retourner

à la base expérimentale de la théorie de la plasticité avec une précision instrumentale supérieure à celle employée jusqu'à présent, tout en se rendant compte de l'existence de l'effet Ronay.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] POYNTING, J. H. — *Proc. Roy. Soc. A.*, vol. 82 (1909), 546; vol. 86 (1912), 534.
- [2] RIVLIN, R. S. and SAUNDERS, D. W. — *Phil. Trans. Roy. Soc. A.*, vol. 243 (1951), 251.
- [3] LENOE, E. M., HELLER, R. A. and FREUDENTHAL, A. M. — *Trans. Soc. Rheology*, vol. 9, part 2 (1965), 77.
- [4] SWIFT, H. W. — *Engineering* (1947), 253.
- [5] L'HERMITE R. et DAWANCE, G. — *Circul. Inst. Tech. Batim.*, série G, n° 16, sept. 5 (1947), 258.
- [6] REINER, M. — *Handbuch d. Physik* (S. Fluegge, éd.), Springer Verlag, Berlin (1958).
- [7] RONAY, M. — *British J. Appl. Phys.*, vol. 16 (1965), 727; *J. Inst. Metals*, vol. 94 (1966), 392.
- FREUDENTHAL, A. M. and RONAY, M. — *Proc. Roy. Soc. A.*, vol. 292 (1966), 14.
- [8] WOOD, W. A. — *Acta Met.*, vol. 15 (1967), 841.
- [9] WEISSENBERG, K. — *Nature*, London, vol. 159 (1947), 310.
- [10] COFFIN, L. F. J. — *J. Basic Eng.* (Trans. Am. Soc. Mech. Eng.), vol. 82 (1960), 671.
- [11] LANGENECKER, B. — *J. Am. Inst. Aeron and Astron.*, vol. 1 (1963), 80.
- [12] BENDLER, H. M. and WOOD, W. A. — *Trans. Met. Soc. AIME*, vol. 224 (1962), 18.
- [13] MOYAR, G. J. and SINCLAIR, C. M. — *Proc. Internat. Conf. Creep London*, vol. 1 (1963), 2-47.
- [14] BENHAM, P. P. — *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 7 (1965), 81.
- [15] RONAY, M. — *Int. J. Solids and Structures*, vol. 3 (1966), 167.
- [16] RONAY, M. — *Special Techn. Publ. Am. Soc. Testing Mat.*, n° 404 (1967), 176.
- [17] KADASHEVICH, I. et NOVOZHILOV, V. V. — *Prikl. Math i Mekh.*, vol. 22 (1959), 104.
- [18] RONAY, M. — *Int. J. Solids Structures*, vol. 4 (1968) (en presse).
- [19] WOOD, W. A. — *Inst. for the Study of Fatigue and Reliability*, Columbia Univ., New York, Techn. Rep., n° 42 (1967).
- [20] RIVLIN, R. S. and ERICKSEN, J. L. — *J. Rational Mech. and Analysis*, vol. 4 (1955), 323.
- [21] ALBRECHT, B. and FREUDENTHAL, A. M. — *Int. J. Solids Structures*, vol. 2 (1966), ?.
- [22] LODE, N. — *Zft. Ang. Math. Mech.*, vol. 5 (1925), 142; *Zft. Physik*, vol. 36 (1926), 913.
- [23] TAYLOR, G. I. and QUINNEY, H. — *Phil. Trans. Roy. Soc. A.*, vol. 230 (1931), 323.
- [24] OLSZAK, W., MROZ, Z. and PERZYNA, P. — *Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity*, Pergamon Press-MacMillan Co., New York (1963), chapter 11.5.

**LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS
ET LA CHIMIE PHYSIQUE DES LIQUIDES
ÉTUDE DES CONTRAINTES NORMALES
SE PRODUISANT DANS LES LIQUIDES A STRUCTURE SIMPLE (1)**

par F. W. SMITH

DIVISION DE GÉNIE MÉCANIQUE,
CONSEIL NATIONAL DE RECHERCHES, OTTAWA, CANADA

RÉSUMÉ

On décrit un modèle du liquide basé sur la théorie des vitesses des réactions d'Arrhénius et sur la théorie de la structure des liquides due à Bernal. L'effet d'une contrainte de cisaillement sur ce liquide est conforme à la théorie des fluides simples de Coleman et Noll. Les contraintes normales (effet Weissenberg) sont prédites même pour un liquide non-polymère.

* * *

1. — L'existence des contraintes normales et l'effet Weissenberg qui en découle sont devenus des questions familières dans les problèmes d'écoulement des liquides de structure complexe, tels que les solutions de caoutchouc. L'intérêt théorique de ces phénomènes est peut-être plus grand que leur aspect pratique, car leur étude, aux alentours de 1940 et 1950, a aidé au développement de la théorie moderne de la mécanique non linéaire des milieux continus [1]. Cette théorie est d'application générale, car non seulement l'écoulement des liquides à structure complexe est-il non linéaire, mais celui des liquides à structure simple l'est aussi, en principe. Il doit se produire également un effet Weissenberg, peut-être d'ordre quasi infinitésimal, dans l'écoulement des liquides moléculaires tels que l'eau ou le benzène. L'auteur tente d'exposer comment les

valeurs des contraintes normales peuvent être calculées dans les liquides en cisaillement simple, en rattachant les caractéristiques non linéaires d'un écoulement visqueux à une équation élémentaire non linéaire de la chimie physique, l'équation des vitesses de réaction d'Arrhénius.

2. — On peut résumer la théorie moderne des contraintes dans un liquide en cisaillement simple comme suit : dans le liquide au repos (taux de cisaillement $\dot{\gamma} = 0$) les pressions sont distribuées isotropiquement. Si le liquide est animé de ce qu'on peut qualifier de mouvement suffisamment lent, le déplacement du fluide donne naissance à une contrainte de cisaillement τ proportionnelle à $\dot{\gamma}$, tandis que les pressions restent distribuées isotropiquement, dans les limites des possibilités d'observation. C'est le régime décrit par la théorie de Navier et Stokes, celui de la plupart des expériences menées en laboratoire pour la mesure de la viscosité des liquides non polymères (*fig. 1 b*). Dans le cas le plus général, comme les théorèmes de Coleman et Noll le montrent [1], le mouvement du fluide s'écoulant donne encore naissance à la contrainte de cisaillement, mais la distribution des pressions n'est plus isotrope; deux autres composantes de contrainte σ_{11} et σ_{22} doivent être prises en considération. Au fur et à mesure que $\dot{\gamma}$ décroît et que σ_{11} et σ_{22} deviennent très petits, ils tendent à être proportionnels à $\dot{\gamma}^2$. Ces contraintes normales sont

(1) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 19 juin 1967.

réalisées sous forme d'effet Weissenberg avec certains liquides polymères, mais il est difficile de les observer avec des liquides à structure moléculaire simple, bien que, comme TRUESDELL [2]

à l'étude de la viscosité. Les traits essentiels d'un liquide monoatomique, ou à structure simple, concernent les interstices intermoléculaires, qui sont créés et détruits de la façon indiquée

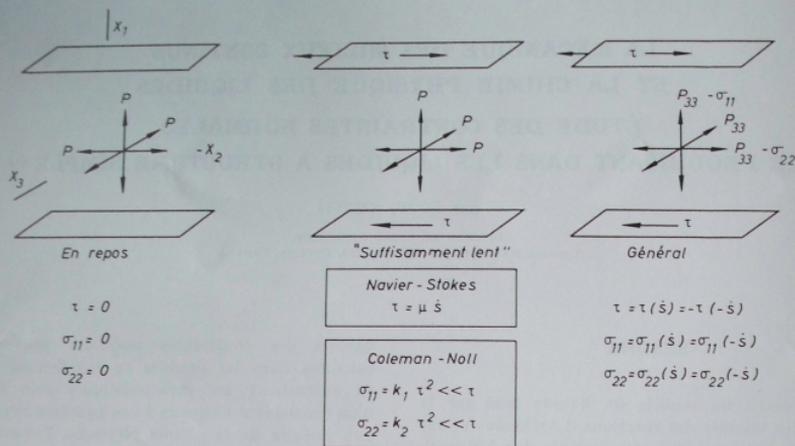


Fig. 1. — Cisaillement linéaire du fluide simple

l'a souligné, elles conservent leur importance théorique comme paramètres de la viscosité même si elles sont inobservables.

3. — L'établissement d'un modèle mathématique du liquide est nécessaire, auquel on puisse

schématiser à la figure 2. Dans un liquide au repos, les interstices sont créés et détruits isotropiquement. Dans un liquide s'écoulant, les interstices sont créés en majorité dans une direction privilégiée, l'axe principal du tenseur d'extension, et détruits de préférence dans les autres directions.

Ce concept de création et de destruction volumique fournit le cadre d'application de la théorie des vitesses des réactions chimiques, en prenant comme hypothèse que la création d'un interstice nécessite l'utilisation d'une énergie d'activation, laquelle dépend à son tour des contraintes régnant à l'intérieur du liquide.

Pour exprimer ces faits mathématiquement, nous utilisons les axes x'_1, x'_2, x'_3 du tenseur d'extension, pivotés de 45° autour de l'axe x_3 de l'ensemble des coordonnées x_1, x_2, x_3 qui décrivent habituellement le cisaillement simple. Nous écrivons ensuite trois équations schématiques abstraites où les composantes principales du tenseur d'extension D sont exprimées sous la forme de résultantes des composantes positives et négatives de création d'interstices dans le liquide. Les

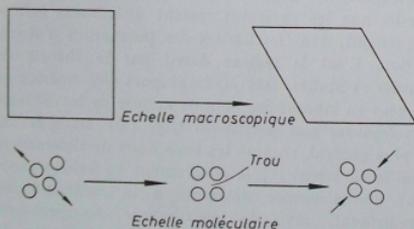


Fig. 2. — Cisaillement du liquide simple

appliquer les théories chimiques et la mécanique des milieux continus. Nous utilisons dans ce but un travail de BERNAL [3] établissant une théorie géométrique de la structure des liquides monoatomiques, dont on a décrit ailleurs [4] l'application

composantes de D sont multipliées par V, volume du liquide :

$$(1) \quad VD_{11'} = \dot{V}_{-11'} + \dot{V}_{-11'} ;$$

$$(2) \quad VD_{22'} = \dot{V}_{+22'} + \dot{V}_{-22'} ;$$

$$(3) \quad VD_{33} = \dot{V}_{+33} + \dot{V}_{-33} = 0.$$

Nous écrivons ensuite les vitesses de production des interstices sous la forme d'équations d'Arrhénius, dans lesquelles l'énergie d'activation dépend de la composante de la contrainte dans la direction des principaux axes de D. Nous exprimons ces composantes de la pression comme fonctions de P_{33} et nous considérons comme acquise l'existence des contraintes normales σ_{11} et σ_{22} :

$$(4) \quad \dot{V}_{+11'} = K e^{-\frac{1}{2}(\epsilon_0 + v)(P_{33} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \tau) / kT} ;$$

$$(5) \quad \dot{V}_{+22} = K e^{-\frac{1}{2}(\epsilon_0 + v)(P_{33} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \tau) / kT} ;$$

$$(6) \quad \dot{V}_{+33} = K e^{-(\epsilon_0 + vP_{33}) / kT} ,$$

où ϵ_0 symbolise l'énergie d'activation pour un écoulement à contraintes nulles et v le volume d'activation.

Les équations (4), (5) et (6) forment un système contenant trop d'inconnues pour qu'il soit possible de le résoudre complètement. Pour atteindre notre but actuel, nous pouvons continuer en considérant les corrélations et les limitations affectant $\dot{V}_{+11'}$, $\dot{V}_{+22'}$ et \dot{V}_{+33} en fonction de \dot{s} , taux de cisaillement.

Tout d'abord, si \dot{s} est nul, nous devons obtenir :

$$(7) \quad \dot{V}_{+33}(\dot{s}=0) = \dot{V}_{+11'}(\dot{s}=0) = \dot{V}_{+22'}(\dot{s}=0) = \dot{V}(\dot{s}=0) \quad (\dot{s}=0).$$

Deuxièmement, quand \dot{s} est petit, nous pouvons exprimer $V - V(\dot{s})$ sous forme d'une série exponentielle contenant $\dot{V}_{+11'} - \dot{V}(\dot{s})$ et $\dot{V}_{+22'} - \dot{V}(\dot{s})$, et prendre en considération les premiers termes seulement :

$$(8) \quad \dot{V}_{+33}(\dot{s}) - \dot{V}(\dot{s}) = a + b \left\{ \dot{V}_{+11'}(\dot{s}) - \dot{V}(\dot{s}) \right\} + c \left\{ \dot{V}_{+22'}(\dot{s}) - \dot{V}(\dot{s}) \right\} \dots$$

De plus, la symétrie de la situation, quand la direction de l'écoulement est inversée, exige que :

$$(9) \quad \dot{V}_{+33}(-\dot{s}) = \dot{V}_{+33}(\dot{s}) ;$$

$$(10) \quad \dot{V}_{+11'}(-\dot{s}) = \dot{V}_{+22'}(\dot{s}) ;$$

$$(11) \quad \dot{V}_{+22'}(-\dot{s}) = \dot{V}_{+11'}(\dot{s}).$$

Ces équations simplifient la forme de (8) comme suit :

$$(12) \quad \dot{V}_{+33}(\dot{s}) = \frac{1}{2} \dot{V}_{+11'}(\dot{s}) + \frac{1}{2} \dot{V}_{+22'}(\dot{s}) \dots$$

de telle façon que quand \dot{s} est suffisamment petit, les équations (4), (5) et (6) peuvent se substituer aux termes correspondants de l'équation (12) et donner l'équation des contraintes normales :

$$(13) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = \left(\frac{2kT}{v} \right) \ln \cosh \left(\frac{\tau v}{kT} \right).$$

Dans les théories de ce type [5] nous pouvons considérer que :

$$\frac{v}{kT} = \gamma,$$

où γ est l'exposant de l'influence de la pression sur la viscosité :

$$\eta(p) = \eta(p=0) e^{\gamma p}.$$

De cette façon, quand $\tau \gamma$ est petit, l'équation (13) peut être représentée approximativement par :

$$(14) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 \gamma \tau^2 + \dots$$

4. — Nous arrivons ainsi à une équation simple, pouvant donner une idée de la grandeur des contraintes normales qui s'exercent dans un écoulement laminaire d'un liquide à structure simple, non polymère, en nous fondant sur la connaissance des effets de la pression sur la viscosité. Cette grandeur est très faible dans les conditions où les mesures de viscosité sont effectuées en laboratoire, mais elles sont peut-être plus facilement mesurables quand le liquide est soumis à de fortes pressions qui augmentent à la fois la viscosité et la valeur des contraintes de cisaillement qu'on peut pratiquement utiliser.

5. — Nous pouvons nous faire une idée de l'importance des forces normales d'un liquide

moléculaire en cisaillement simple à l'aide d'un exemple imaginaire, mais typique : considérons un liquide de poids moléculaire 100, de densité 1 g/cm^3 et de viscosité 0,01 poise à 300°K . On sait que pour toute une classe de liquides le volume d'activation est d'un sixième de volume moléculaire pour les écoulements visqueux [6], c'est-à-dire, dans le cas présent, de $16,7 \text{ cm}^3/\text{mole}$. Il découle de l'équation (14) que la somme des contraintes normales est :

$$(15) \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 1,283 \cdot 10^{-13} \dot{\gamma}^2 \text{ dyn/cm}^2,$$

c'est-à-dire qu'à un taux de cisaillement de 10^8 sec^{-1} la somme des contraintes normales est :

$$1,28 \cdot 10^{-7} \text{ dyn/cm}^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. A. TRUESDELL et W. NOLL. — *The non-linear field theories of mechanics*, « Encyclopedia of Physics », éd. S. Flügge, vol. 3, 3^e part, Springer, Berlin, 1965.
- [2] C. A. TRUESDELL. — *Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*, ed. M. Reiner et D. Abir, MacMillan, New York, 1964.
- [3] J. D. BERNAL. — *Proc. Roy. Soc. A*, 1964, vol. 280, p. 299.
- [4] F. W. SMITH. — *Can. J. Physics*, vol. 42, pp. 304-320, 1964.
- [5] S. GLASSTONE, K. J. LAIDLER et H. EYRING. — *The theory of rate processes* McGraw-Hill, New York, 1941, chap. IX.
- [6] J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS et R. B. BIRD. — *Molecular theory of gases and liquids*, New York, 1954, chap. IX.

PRÉSENTATION D'UNE MACHINE INDUSTRIELLE APPLIQUANT L'EFFET WEISSENBERG ⁽¹⁾

par M. ALLARD et M. CHATAIN

(CENTRE D'ÉTUDES DES MATIÈRES PLASTIQUES)

RÉSUMÉ

Un prototype de machine à extruder a été réalisé, dans lequel le polymère est cisailé entre deux plateaux, l'un tournant, l'autre fixe. La chaleur nécessaire à la fusion provient en grande partie de l'énergie mécanique mise en jeu, et la température est plus uniforme que dans les machines classiques, mais la pression obtenue est encore trop faible.

MESURES DE LABORATOIRE

L'un des buts du Centre d'Étude des Matières Plastiques et des organismes associés est d'aborder les problèmes que pose la transformation des hauts polymères : étude du comportement de ces matériaux dans les conditions de mise en œuvre, et des techniques nouvelles.

Dans le cadre d'un contrat D.G.R.S.T., FUZESEY a étudié les propriétés des différents polymères linéaires à l'état fondu. Il a consacré une partie de son étude à l'écoulement sous charge de ces matériaux et aux effets de second ordre qui en résultent, en particulier, l'effet Weissenberg. Pour cela, il a utilisé un microconsistomètre Kepes.

Les modifications apportées à ce viscosimètre rotatif cône-plan permettent l'enregistrement des efforts axiaux s'exerçant sur le cône. Les expériences réalisées à différentes températures sur plusieurs types de polymères ont permis de mettre en évidence les phénomènes suivants :

— la force normale augmente rapidement avec la vitesse de déformation ou avec la contrainte de cisaillement (*fig. 1 et 2*);

— les contraintes normales développées sont fonction du poids moléculaire du polymère. Elles sont d'autant plus importantes que le poids moléculaire est plus élevé. Le poids moléculaire moyen du polymère est caractérisé par son indice de fluidité (IF), c'est-à-dire le poids de matière qui s'écoule à travers une filière pendant 10 mn sous l'action d'une charge fixe à température constante. Cet indice de fluidité est d'autant plus faible que le poids moléculaire est élevé;

— la nature du polymère et sa structure ont une influence déterminante. Nous pouvons remarquer que les contraintes normales développées dans un polyéthylène basse densité sont supérieures à celles développées dans un polyéthylène haute densité.

La *figure 3* montre les variations des contraintes normales et des contraintes de cisaillement en fonction du temps pour différentes vitesses de déformation. On constate que, pour des vitesses de déformation élevées, les contraintes normales passent par un maximum puis diminuent et tendent vers une valeur inférieure en régime permanent.

PRINCIPE DE LA MACHINE

Les résultats expérimentaux de ces études, obtenus *in vitro*, ont été ensuite étendus au domaine industriel; dans ce cas, à la mise en œuvre sur extrudeuse.

Parallèlement à cette étude, un prototype de machine utilisant l'effet Weissenberg a été réalisé. Malgré les résultats médiocres obtenus, l'expérimentation sommaire faite sur cette machine a permis

(1) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 19 Juin 1967.

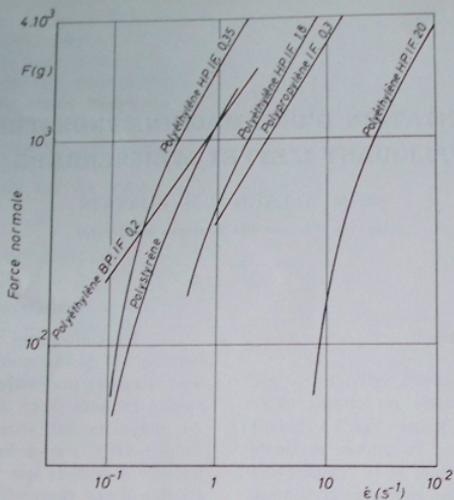


Fig. 1. — Microconsistomètre Képes θ : 182° C.

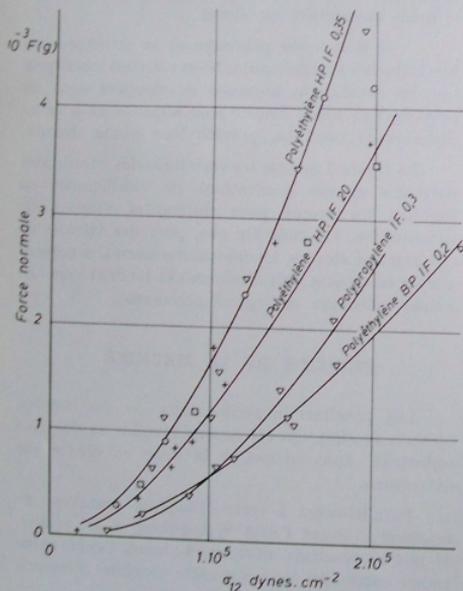


Fig. 2. — Microconsistomètre Képes

○ : 136° C; + : 154° C; ◊ : 182° C; ◻ : 210° C.

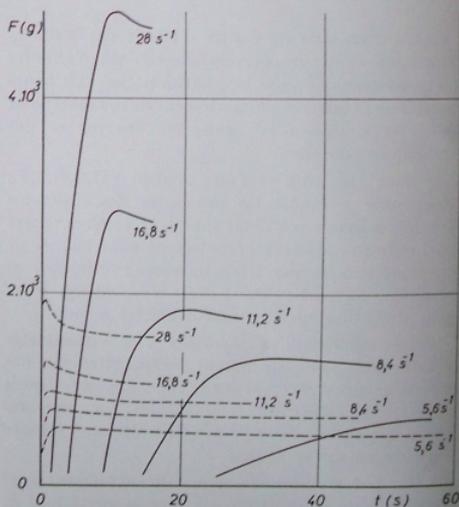


Fig. 3. — Microconsistomètre Képes

θ : 154° C; Polyéthylène HP :
 --- : σ_{11} ; PM : 17 000;
 — : F; IF : 20.

de concevoir un autre modèle plus perfectionné que nous allons examiner en détail.

Avant de poursuivre, et, puisque notre objectif est d'examiner les possibilités d'applications d'un tel procédé à la transformation des hauts polymères, il nous faut comparer les possibilités d'une telle machine à celles des ensembles technologiques employés actuellement. Ces ensembles doivent assurer simultanément, ou suivant un programme donné, différentes fonctions :

— chauffer jusqu'à son point de fusion le polymère que l'on introduit sous forme de granulés ou de poudres;

— mélanger et transporter la masse plastifiée;

— mettre en pression le polymère pour le transférer à travers une filière ou dans un moule.

Les machines actuelles comportent généralement un cylindre chauffé dans lequel un piston ou une vis assurent le transport, la mise en pression et l'homogénéisation du matériau.

Dans ces conditions, le chauffage du polymère se fait, en grande partie, par conduction. Les matières plastiques étant, par nature, de très bons isolants thermiques, il est nécessaire de laisser séjourner la matière assez longtemps dans le cylindre de la machine. Malgré différentes techniques particulières qui permettent de favoriser les échanges thermiques entre le cylindre et la matière, il est souvent nécessaire de créer un gradient de température important dans le polymère. Ceci entraîne des risques de décomposition et donne une masse plastifiée plus ou moins homogène.

Dans le cas des systèmes à vis, les plus utilisés, à ces défauts s'ajoutent le fait que chaque matière nécessite une vis adaptée à ses propriétés particulières.

Les principaux défauts sont éliminés dans les appareils utilisant le phénomène de pompage centripète. Schématiquement, une telle machine se compose de deux plateaux dont l'un, le rotor, est entraîné en rotation, l'autre, fixe, étant percé d'un orifice qui permet au polymère de s'écouler.

L'espace entre les plateaux, ou espace de cisaillement, est rempli de granules.

Dans cet intervalle étroit, la matière est soumise à un effort de cisaillement important sur une grande surface. La matière est alors chauffée principalement par la chaleur due au frottement mécanique.

Le chauffage ayant lieu dans la masse même du polymère, sa température est uniforme. Le temps de séjour dans la machine est alors remarquablement court, environ 10 s.

Les conditions de travail des polymères de types différents sont fixées uniquement en réglant le taux de cisaillement de la matière, en faisant varier, soit la vitesse de rotation du rotor, soit l'espace de cisaillement.

De plus, le polymère étant soumis à un cisaillement important, on en facilite le dégazage. Les gaz pouvant être évacués facilement, la plastification est alors très homogène.

Cette machine très simple permettrait donc de donner une solution pratique au problème de la mise en œuvre des hauts polymères. Malheureusement, les pressions engendrées sont faibles, ce qui restreint les applications possibles. (On peut noter que les pressions mises en jeu avec les moyens courants sont souvent supérieures à 1 500 bars en injection et de l'ordre de 200 bars en extrusion.)

DESCRIPTION ET RÉSULTATS

Revenons maintenant à la machine que nous avons réalisée et dont la mise au point se poursuit actuellement. Les différentes solutions adoptées pour sa conception ont été choisies en vue d'obtenir une machine qui permette l'étude expérimentale du phénomène et des conditions de travail des hauts polymères.

Pour cela nous avons prévu l'entraînement du plateau de cisaillement à vitesse variable. Une transmission hydraulique permet de réaliser une variation continue de vitesse dans une plage étendue (30 à 350 tr/mn) avec un couple constant indépendant de la vitesse de rotation. D'autre part, ce système permet une mesure facile du couple transmis.

Le schéma du système hydraulique est simple. Nous disposons d'une pompe à pistons à débit constant. Cette pompe, entraînée par un moteur asynchrone de 10 ch, débite dans un moteur hydraulique à piston de cylindrée constante. La variation de vitesse est obtenue en dérivant une partie du fluide à travers un régulateur de débit ajustable.

Afin de pouvoir étudier l'influence du taux de cisaillement de la matière, un dispositif mécanique simple permet de faire varier l'espace de cisaillement de 0 à 14 mm sans discontinuité.

L'alimentation de l'espace de cisaillement pose un problème délicat à résoudre simplement. Un premier rotor, muni d'ailettes destinées à entraîner les granules, s'est avéré inadapté. Le rotor actuel a une forme tronconique dont la partie active a un

diamètre de 50 mm environ. Le granulé est introduit dans une trémie refroidie et l'alimentation se fait par gravité, dans le plan de l'espace de cisaillement.

Enfin, il semblait, d'après les publications, qu'un chauffage supplémentaire était nécessaire pour fondre le granulé. En fait, nous avons constaté que, s'il est nécessaire de chauffer les plateaux pour obtenir l'adhésion de la matière sur le rotor et le stator, il suffit de compenser, dans certains cas, les pertes extérieures. Une résistance électrique de 300 W permet le chauffage du stator et de la filière, le rotor est chauffé par un courant d'air chaud dirigé vers son centre.

L'équipement de la machine est complété par différents appareils de mesure qui permettent le contrôle et l'étude du phénomène. Un manomètre permet, en indiquant la pression d'huile à l'entrée du moteur, de calculer le couple résistant sur le rotor. Une dynamo tachymétrique montée sur l'arbre du moteur hydraulique assure le contrôle précis de la vitesse de rotation du rotor. Enfin, un dynamomètre à jauge de contrainte, relié à un galvanomètre enregistreur, permet de tracer la courbe des variations de la force résultante sur le rotor. Cette mesure est importante pour étudier le comportement des différents matériaux et les conditions de travail. Elle permet, en outre, d'avoir un ordre de grandeur de la pression maximale au centre du rotor si l'on connaît la loi de répartition des pressions sur le disque.

Une étude, faite par KOZULIN, PECHENKIN et SHEPKOV, a montré que la fonction de répartition est de la forme $p = p_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)^k$, s'il n'y a pas d'écoulement.

p_c est la pression au centre du rotor, k un exposant caractéristique du matériau, compris entre 0,3 et 0,8 pour les polymères courants.

Si l'on admet que l'écoulement ne perturbe pas la répartition donnée, l'intégration donne, dans notre cas, $76 \times 10^{-3} F < p_c < 130 \times 10^{-3} F$, F étant la force résultante sur le rotor et l'unité d'aire le centimètre carré. On constate que cette hypothèse n'est pas parfaitement vérifiée, elle permet seulement de donner un ordre de grandeur des pressions mises en jeu.

Les mesures faites donnent $p_c \approx 10$ bars maximum pour du polyéthylène et 3 bars en régime permanent.

La pression obtenue est donc fonction de l'état de déformation du matériau. Ceci met en évidence l'importance des conditions d'alimentation, car elles déterminent les variations de pression à la filière, d'où des fluctuations de débit.

Actuellement, le débit de la machine est relativement faible.

A travers une filière de 8 mm, le débit est environ 40 g/mn avec du polystyrène. Cependant, ce débit peut être augmenté, si l'on augmente le rapport du diamètre de la filière au diamètre de la partie active du rotor, le débit maximum pouvant être atteint lorsque ce rapport est environ 0,7.

L'apport essentiel de ce nouveau procédé réside donc dans l'amélioration du chauffage du polymère et de la plastification qui sont plus homogènes. Dans la conception de machines nouvelles, destinées à la transformation, on utilisera ces avantages en les associant à un ensemble de mise en pression du polymère fondu.

PROBLÈMES INSTRUMENTAUX EN RHÉOLOGIE (1)

par B. SHORTHOUSE

(SANGAMO CONTROLS, BOGNOR REGIS, GRANDE-BRETAGNE)

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé le principe du rhéogoniomètre de Weissenberg, l'auteur énumère quelques-unes des difficultés que peuvent présenter les mesures et qui sont, d'ailleurs, indépendantes de l'appareil considéré : turbulences, rupture et dégradation du matériau, par exemple. Il donne des indications sur la précision avec laquelle la position relative du cône et du plan doit être maintenue constante, malgré l'apparition des contraintes normales.

engendrées dans un matériau, lorsqu'il est soumis à une déformation; ces neuf contraintes résultantes peuvent être exprimées par le tenseur de contrainte bien connu. Pour réduire le nombre de mesures nécessaires, nous avons tenté d'en éliminer certaines grâce à des symétries et aussi en choisissant un mode de déformation et un taux de déformation susceptibles d'en éliminer d'autres.

La première réduction se fait en imposant, par cylindres coaxiaux, une vitesse de cisaillement uniforme à travers toute l'éprouvette, la seconde en

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 p_{11} & p_{21} & p_{31} & \rightarrow & p_{11} & p_{21} & 0 & \rightarrow & p_{11}-p_{22} & p_{21} & 0 \\
 p_{12} & p_{22} & p_{32} & & p_{21} & p_{22} & 0 & & p_{21} & 0 & 0 \\
 p_{13} & p_{23} & p_{33} & & 0 & 0 & p_{33} & & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Fig. 1

Deux exemples d'application de l'effet Weissenberg sont cités : l'huile pour palier à joues coniques et de l'encre pour stylo à bille.

PRINCIPE D'UN RHÉOMÈTRE A CÔNE ET PLAN

En établissant le projet d'un dispositif de mesure des propriétés rhéologiques d'un matériau, on est tout d'abord amené à faire et à justifier quelques hypothèses simplificatrices.

Dans le rhéogoniomètre de Weissenberg, nous avons admis que neuf contraintes résultantes sont

appliquant l'hypothèse, non prouvée à ce jour mais raisonnablement admise, que les composantes p_{22} et p_{33} sont égales; ceci permet de réduire les neuf composantes en une contrainte tangentielle et une différence de contraintes normales. Il faut remarquer, toutefois, qu'il s'agit là d'hypothèses qui peuvent n'être pas toujours valables, mais qui, jusqu'à ce jour, se sont révélées raisonnables.

La méthode utilisée consiste à appliquer un mouvement rotatif à un cône placé en face d'un plan fixe, de façon que le gradient de vitesse soit uniforme à travers l'éprouvette. Le sommet du cône, qui devrait normalement juste toucher la plaque, est

(1) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 19 juin 1967.

tronqué, éliminant ainsi tout couple résiduel de la machine, mais posant, par contre, un problème de maintien de l'intervalle entre cône et plan. Le principe est illustré par la figure 2.

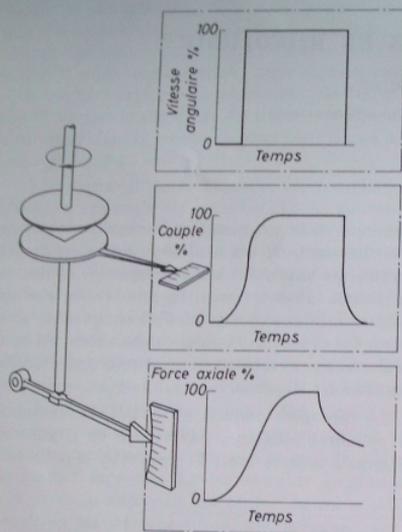


Fig. 2. — Schéma de l'appareil

DESCRIPTION DE L'APPAREIL ET PERFECTIONNEMENT

En réalité, c'est la partie inférieure de la machine qui est prévue pour engendrer ou une déformation connue, ou une vitesse de déformation connue, ou enfin, si nécessaire, une vitesse de déformation programmée, la partie supérieure de l'appareil servant à mesurer les contraintes qui en résultent. La composante, de loin la plus facile à mesurer, est la contrainte tangentielle p_{21} ; c'est le couple tendant à faire tourner la plaque supérieure, transmis à travers l'éprouvette depuis le cône inférieur en rotation. La plaque est supportée radialement par un rotor placé dans un coussinet à air assurant un couple résiduel inférieur à 10 dynes-cm, et axialement par une barre de torsion. La torsion de cette barre permet à la plaque un mouvement de rotation de l'ordre de quelques milliradians; cette déviation

est mesurée grâce à un capteur de déplacement du type à transformateur linéaire. La rigidité transversale des différentes barres de torsion étant étagée entre 10^6 dynes-cm/rad et 10^{10} dynes-cm/rad et la mesure de la déviation se faisant avec trois ordres de grandeur, soit jusqu'à 10 milliradians, la contrainte tangentielle peut être comprise entre 0,1 dyne/cm² et 10^{12} dynes/cm². En utilisant une géométrie cône et plan, la vitesse de cisaillement dépend de l'angle et de la vitesse de rotation du cône; elle peut être comprise approximativement entre 10^{-3} et 10^{+3} s⁻¹. On obtient ainsi le domaine d'utilisation possible de la figure 3.

La différence des contraintes normales (p_{11} - p_{22}) est intégrée sur la surface cône et plan; elle est mesurée par la force tendant à séparer les deux parties. Elle est comprise entre environ 10 dynes/cm² et 10^6 dynes/cm², ce qui correspond au domaine de mesure de l'appareil en rotation pure.

Mais certains problèmes pratiques apparaissent lorsqu'on essaye de construire un appareil ayant des possibilités aussi étendues. Certaines parties du domaine indiqué figure 3 ne sont pas utilisables, par suite d'effets ne dépendant plus seulement de la qualité de l'appareil et de son montage. Dans le cas de taux de cisaillement élevés et de faibles viscosités, par exemple, la viscosité de l'eau mesurée avec une géométrie cône et plan sous un taux de 10^3 s⁻¹,

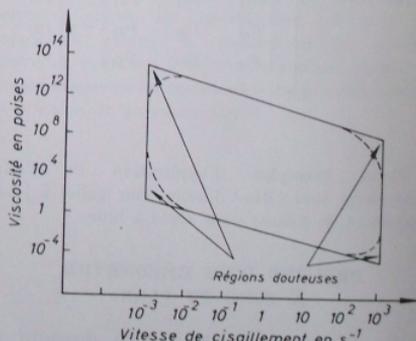


Fig. 3

des courants secondaires et des turbulences dus à des forces centrifuges transmises par la partie tournante à l'éprouvette peuvent être observés. Certains travaux ont été publiés récemment à ce sujet.

Une autre région tendant également à montrer des comportements anormaux est celle qui correspond à une vitesse de cisaillement et à une viscosité élevées. Dans cette région, où apparaissent des phénomènes de rupture du matériau, l'énergie de déformation transmise à l'éprouvette provoque la dégradation physique et, dans les cas extrêmes, chimique du milieu.

Les deux autres « coins » de la courbe englobant le domaine d'utilisation sont soumis à des phénomènes tels que : tension superficielle, viscosité superficielle, magnétisme résiduel, etc.

Un point important à considérer est la finition et la forme du cône. Lorsqu'on essaye de discriminer des différences minimales dans la cisison, une attention particulière doit être portée à la *fidélité* du cône. Il faut un cône véritable, avec des génératrices linéaires et une parfaite symétrie par rapport à l'axe de rotation. Ce dernier doit être parfaitement normal au plan et, de plus, il est nécessaire d'obtenir une parfaite concentricité du cône et du plan, qui, dans tous les cas, peut être considéré comme un cône d'angle au sommet nul. Pour pouvoir obtenir des mesures reproductibles, les positions relatives du cône et du plan doivent être maintenues dans des limites extrêmement serrées, de l'ordre du dixième de micron ou moins; ceci est très important et sera repris avec plus de détails lors de la discussion au sujet de la contrainte normale.

Or, à partir du moment où une déformation connue peut être imposée à un matériau et où les forces résultantes sont mesurées, il est intéressant de ne pas être limité à un seul type de géométrie d'essai. Le cône et le plan peuvent être remplacés par des systèmes à plans parallèles, à cylindres coaxiaux, à hémisphères concentriques, ou par une géométrie du type Mooney; le choix du système dépend des résultats particuliers recherchés aussi bien que de la nature du matériau à essayer.

En ce qui concerne la mesure de la différence des contraintes normales intégrées, il est possible de tracer, de façon similaire, la courbe englobant le domaine d'utilisation. Celle-ci est donnée *figure 4*.

Si on considère les limitations, il faut d'abord regarder vers les faibles viscosités et les différences de contraintes normales élevées, un exemple typique étant les savons métalliques en solution non aqueuse. Aucune difficulté n'est généralement rencontrée avec ce type d'essais, les énergies emmagasinées ou élastiques étant élevées et la viscosité basse, le matériau flue facilement, l'équilibre des forces

s'établit rapidement et les mesures peuvent être rapides. Même avec des viscosités élevées, ces problèmes sont généralement faciles à résoudre expérimentalement. En travaillant avec des forces et des viscosités faibles, les barres de torsion doivent être très sensibles, donc peu robustes, ainsi que le ressort antagoniste à la force normale. Dans ce cas, la régularité de la rotation, les bruits et les fréquences naturelles posent des problèmes ardu. Il peut y être remédié en rendant le mouvement relatif du cône et du plan très petit, juste suffisant, en fait, pour que la mesure devienne sensée et réalisable. On est ainsi limité entre quelques centièmes et quelques dixièmes de microns, jamais plus du micron. Malheureusement, dans le cas d'effets du second ordre, les régions les plus intéres-

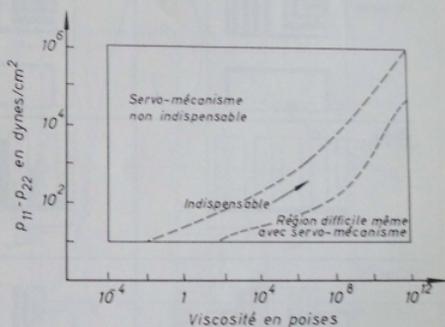


Fig. 4

santes sont souvent celles correspondant à une faible force normale et à une viscosité élevée. Il s'agit là de termes relatifs, dépendant plus des proportions que des valeurs absolues. Le système cône et plan s'écartera légèrement pour équilibrer la différence de force résultante; il s'ensuit un mouvement du matériau vers le centre de l'ensemble cône et plan. On obtient ainsi uniquement une valeur en régime permanent, et non la vitesse d'augmentation et de diminution de la force normale. Ces informations sont nécessaires lorsqu'on considère à la fois la relaxation de la contrainte ou la recouvrance de la déformation et les temps de retard ou de relaxation.

Il est alors intéressant d'avoir un servo-mécanisme permettant au plan de se mouvoir, mais agissant aussi sur la position du cône par

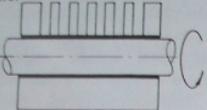
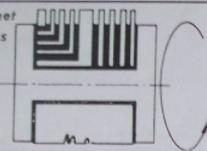
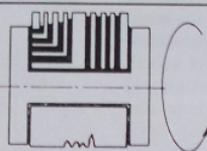
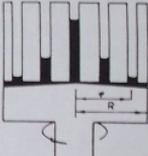
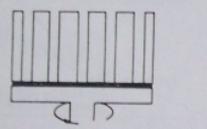
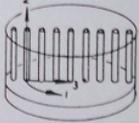
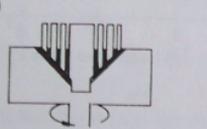
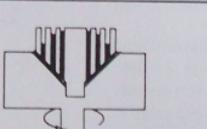
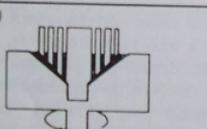
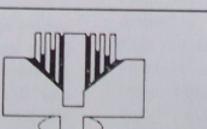
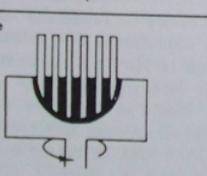
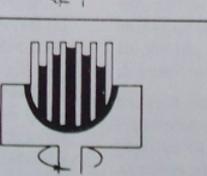
Lubrifiants visqueux (Vitesses de cisaillement quelconques) Lubrifiants visco-élastiques (Petites vitesses de cisaillement)	Lubrifiants visco-élastiques (Grandes vitesses de cisaillement)	Conditions { <ul style="list-style-type: none"> Température constante Forces d'inertie négligeables Alignement parfait
Coussinet 		Cas idéal d'un lubrifiant visco-élastique dans un entrefer plan-cône à grande vitesse de cisaillement.
Coussinet à joes 		
Butée 		
Pivot (I) 		Système de coordonnées
Pivot (II) 		$P_{11} - P_{22} = P_{11} - P_{33} \frac{\delta P_{22}}{\delta \ln r/R} = G \gamma_e^2$
Sphérique 		$P_{21} = \eta \dot{\epsilon} = G \gamma_e$ $P_{13} = P_{23} = 0$ <p> ω G = module de cisaillement γ_e = déformation recouvrable η = viscosité apparente $\dot{\epsilon}$ = vitesse de cisaillement </p>

Fig. 5. — Distribution de la pression dans les roulements en rotation

rapport au plan, de manière que leur distance soit maintenue constante. Ce servomécanisme est indispensable pour les mesures dans un domaine ayant souvent une grande importance pratique. Le problème se complique encore du fait de la nécessité d'exécuter des recherches rhéologiques dans une gamme de températures allant de -40°C à $+400^{\circ}\text{C}$, ce qui peut, en principe, être obtenu en entourant l'ensemble cône et plaque d'une enceinte isotherme avec, si nécessaire, un gaz inerte.

Tout ceci, naturellement, n'est valable que pour les essais en rotation continue qui, de part leur nature, déforment le matériau d'une façon anisotrope et créent des structures différentes dans le système, réduisant l'entropie et augmentant l'énergie libre récupérable et, en ce qui concerne le rhéologue, augmente le comportement élastique. Idéalement, on serait intéressé par les conditions de l'état initial du matériau, avant que celui-ci n'ait été soumis à la distorsion due à la déformation. Une méthode, pour obtenir ceci, est de faire osciller le cône par rapport au plan, de préférence dans une large gamme de fréquences et d'amplitudes. L'appareil actuel permet ces essais entre 100 Hz et 10^{-4} Hz pour des amplitudes de ± 1 à ± 50 milliradians. La valeur de l'essai d'un matériau sous une amplitude de 50 milliradians, pour une fréquence de 10^{-4} Hz, peut être discutable, mais il est certainement intéressant de soumettre un matériau à des fréquences intermédiaires ou supérieures dans une gamme modérée d'amplitudes. En première approximation, on peut dire qu'une oscillation de faible amplitude dans une large gamme de fréquence fournit souvent les résultats les plus significatifs.

EXEMPLES PRATIQUES

Les propriétés ainsi mesurées ont une signification pratique; la *figure 5* montre le gradient de la pression dans différents roulements, tournant avec des lubrifiants visqueux et visco-élastiques. En général, les huiles de lubrification modernes ont des caractéristiques non-newtoniennes. Comme exemple, la *figure 6* montre le gradient de pression dans un palier à flasques coniques pour différents angles du cône. La pression en P est maximum pour un angle du cône de $2,5^{\circ}$ et correspond à un équilibre entre la contrainte de cisaillement dans la partie conique et la chute de pression dans le canal d'amènée de l'huile.

- Les avantages de ce type de palier sont :
- le palier est auto-amorçant;
 - le système de circulation automatique de l'huile favorise le refroidissement;
 - le palier peut être auto-nettoyant et filtrant, tous les débris étant retenus par le système filtrant;
 - l'huile ne stationne qu'un temps très court dans le champ de fort cisaillement et de haute température;

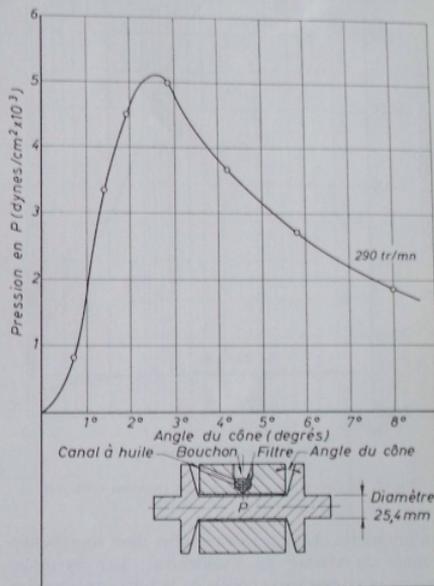


Fig. 6. — Pression centrale dans un roulement de Weissenberg en fonction de l'angle du cône

e) à grande vitesse de rotation, les propriétés visco-élastiques améliorent l'auto-centrage du palier.

Ces facteurs permettent d'espérer une durée de vie bien supérieure à celle d'un tourillon simple.

Un autre exemple est donné par les propriétés visco-élastiques de certaines encres pour stylos à billes et la *figure 7* montre la viscosité sous mouvement tournant simple de deux encres. Le comportement de l'une des encres est sensiblement newtonien dans une grande gamme de vitesse de

cisaillement, alors que l'autre est nettement newtonien. Les spécifications d'un type d'encre pour stylo à bille exigent un équilibre entre plusieurs conditions contradictoires. L'encre doit posséder

faible vitesse de distorsion, elle coulera du réservoir de la plume, lorsque celle-ci n'est pas utilisée. Si une contrainte normale suffisante pouvant être considérée comme tensio-élasticité, peut être obtenue dans l'encre, celle-ci sera entraînée dans l'intervalle bille-siège et autour de la bille par les forces $p_{11}-p_{22}$, assurant ainsi un écoulement continu sur le papier. Lorsque la plume cesse d'écrire et que la vitesse de distorsion s'annule, l'encre doit alors avoir une viscosité élevée pour résoudre le problème des fuites d'encre. Mais il est fondamental de connaître également les propriétés rhéologiques de l'encre *avant* qu'elle n'arrive directement dans l'intervalle de cisaillement compris entre la bille et son siège. Dans ce cas, il est nécessaire de mesurer l'état ou les propriétés initiales de l'encre, avant qu'elle



Fig. 7. — Encre pour stylo à bille (rotation continue)

des propriétés rhéologiques connues dans une grande gamme de vitesse de cisaillement; par exemple, lorsque la vitesse superficielle de la bille sur le papier est grande, la vitesse de cisaillement entre papier et bille peut être de 10^{-4} à $10^6 s^{-1}$, alors qu'au repos elle est zéro. Lorsque la bille se déplace sur la surface du papier, elle tourne dans son logement et la vitesse de distorsion entre la bille et son siège est du même ordre de grandeur. La viscosité tangentielle devra être maintenue faible de façon que l'encre coule du réservoir dans l'intervalle entre la bille et son logement et, de là, sur le papier. Si elle est trop faible, l'encre ne supportera pas la pression exercée en écrivant et la bille s'appliquera au fond de son logement, interrompant l'admission d'encre. Par ailleurs, si l'encre possède une faible viscosité à

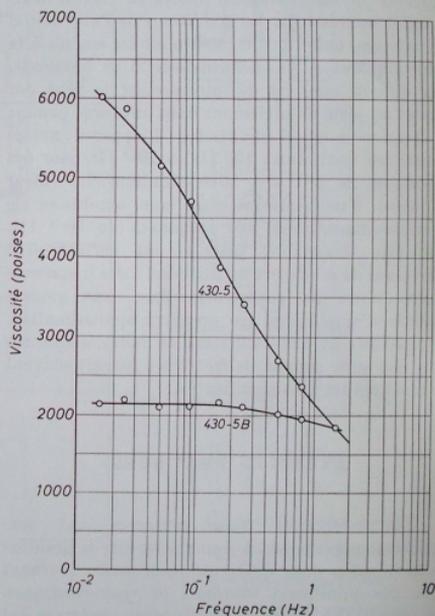


Fig. 8. — Encre pour stylo à bille (oscillations)

ne soit soumise aux contraintes de cisaillement élevées. La figure 8 montre ces propriétés à l'état initial, mesurées par la méthode des oscillations.

TABLE DES AUTEURS DU TOME I

AUTEURS	PAGES
ALLARD (M.)	345
BISMUTH (W.)	259, 315
BLANC (R.)	259
BOMBLED (J. P.)	35
BOURGOIN (D.)	293
BRUN (L.)	191, 267
BUI (H. D.)	15
BUVET (R.)	131, 173
CAZE (R.)	101
CHATAIN (M.)	345
CHEZEAUX (M.)	315
FREUDENTHAL (A. M.)	329
FRIAS (M.)	203
GEEN (R. Van)	303
HARWOOD (J. A. C.)	207
HUET (C.)	237
JOLY (M.)	217
KOVACS (A.)	123
LAGARDE (F.)	143
LECLERC (J.)	3
LEMAITRE (J.)	225
MANDEL (J.)	1, 9, 33, 171, 181, 301
MAYNÉ (G.)	303
NAYROLES (B.)	21
NÉDONCHELLE (Y.)	285
PAYNE (A. R.)	207
PRENTICE (J. H.)	75
POPOFF (A.)	101, 299
ROBINET (J. C.)	131, 173
ROMAIN (J.)	87
SAYEGH (G.)	51
SCHLOSSER (F.)	25
SCHUTZ (R. A.)	285
SCOTT BLAIR (G. W.)	75
SHORTHOUSE (B.)	349
SMITH (F. W.)	341
TCHENG (Y.)	81
VERSTRAETEN (J.)	87
WEBER (J.)	161
ZAOUI (A.)	267

CEDOCAR



IMPRIMERIE