

P.B. 29

GRUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE
Bibliothèque

Cahiers
du
Groupe Français de Rhéologie

N° 5 - Tome I
NOVEMBRE 1967

ÉDITÉ
PAR LE SERVICE DE DOCUMENTATION SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE L'ARMEMENT

MAGASIN DE VENTE : 2, AVENUE DE LA PORTE-D'ISSY, PARIS (15^e)

1967

N° 5

Cahiers
du
Groupe Français de Rhéologie

N° 5 - Tome I
NOVEMBRE 1967

S O M M A I R E

	PAGES
J. LEMAITRE. — Intérêt des essais de relaxation appliqués à l'étude des corps élasto-visco-plastiques	225
C. HUET. — Représentation des modules et complaisances complexes dans les plans complexes arithmétique et logarithmique	237
W. BISMUTH et R. BLANC. — Étude des propriétés visco-élastiques des bétons bitumineux par une méthode d'ébranlements par choc	259
L. BRUN et A. ZAOUÏ. — Sur l'hésitation au fluage	267
Y. NEDONCHELLE et R. A. SCHUTZ. — La rhéologie des systèmes à base de carbohydrates macromoléculaires	285
D. BOURGOIN. — Structure des liquides et processus d'écoulement	293
A. POPOFF. — Brève note sur le calcul des contraintes dans les éprouvettes tubulaires en torsion élastoplastique. A propos d'une erreur	299

INTÉRÊT DES ESSAIS DE RELAXATION APPLIQUÉS A L'ÉTUDE DES CORPS ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUES (1)

par Jean LEMAITRE

O.S.E.R.A.

RÉSUMÉ

Après un rappel des propriétés rhéologiques des corps élasto-visco-plastiques, l'intérêt des essais de relaxation est mis en évidence : trois calculs comparatifs montrent le gain de temps considérable apporté dans la recherche des effets de la vitesse de déformation plastique. La réalisation des essais est décrite, et quelques applications sont données : mise en évidence de l'évolution des « équilibres » élasto-plastiques, détermination des caractéristiques visco-plastiques en fluage établi et fluage primaire.

I L'ÉTUDE RHÉOLOGIQUE DES CORPS ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUES

La plupart des matériaux métalliques entrent dans la catégorie des corps élasto-visco-plastiques. De tels solides soumis à une sollicitation mécanique présentent toujours simultanément :

- des déformations élastiques résultant des modifications des espaces interatomiques;
- des déformations irréversibles dues aux glissements dans les plans cristallographiques et mettant en jeu des phénomènes de viscosité.

La déformation totale, seule accessible directement aux observations, est la somme des déformations élastiques et des déformations irréversibles.

Un des problèmes essentiels de la Rhéologie est la recherche des lois de comportement, c'est-à-dire

la détermination des fonctions ou fonctionnelles qui relient l'état de déformation à l'état de contrainte. Quelle que soit la méthode de recherche utilisée : analyses de physique des solides, étude de modèles analogiques ou méthode globale semi-empirique, il est toujours nécessaire de procéder à des expériences sur des éprouvettes pour quantifier les effets de chaque paramètre. Les essais les plus employés, parce que les plus simples à mettre en œuvre, sont les essais en traction simple, et particulièrement :

— l'essai d'écroissage qui met en évidence la réponse du matériau à un échelon vitesse de déformation;

— l'essai de fluage qui met en évidence la réponse du matériau à un échelon contrainte.

De nombreuses études expérimentales de ce genre aboutissent aux conclusions classiques suivantes :

— les matériaux métalliques à la température ambiante présentent un comportement pratiquement indépendant de la vitesse de déformation. La *figure 1* montre un exemple concret, où l'on voit que les courbes d'écroissage, correspondant à un domaine de vitesses borné par les valeurs aussi différentes que $0,095 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $4,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, sont disposées au hasard dans un pinceau dont la largeur n'excède pas la marge d'incertitude sur les mesures $\left(\frac{\delta \sigma}{\sigma_{\text{moy}}} < 2 \text{ \%} \right)$. Cette propriété permet de concevoir l'existence d'une courbe d'écroissage statique unique qui constitue la base des théories de la plasticité [1];

— par contre, l'influence de la vitesse de déformation devient importante dès que la température

(1) Conférence présentée au Groupe Français de Rhéologie, le 17 mars 1966.

dépasse le tiers de la température absolue de fusion. Une loi de comportement monodimensionnelle, qui traduit assez bien les principaux phénomènes

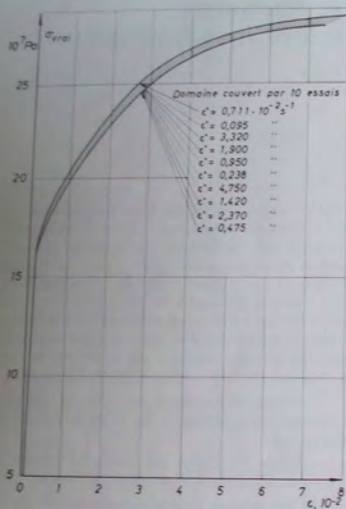


Fig. 1. — Essais d'écroutissage en traction simple
Duralumin 7075-T6 trempé vieilli. Température 23°C

$\dot{\psi}$ la fonction d'écroutissage que l'on peut représenter par :

$$(4) \quad \dot{\psi}(\dot{\epsilon}_p) = \frac{[\gamma \dot{\epsilon}_p]^n}{1 + [\gamma \dot{\epsilon}_p]^n}$$

φ la fonction de viscosité traduite par la loi de Norton-Hoff :

$$(5) \quad \varphi(\dot{\epsilon}_p) = [\tau \dot{\epsilon}_p]^n$$

γ , μ , τ et n sont des paramètres intrinsèques propres à chaque matériau pour une température donnée.

Cette loi peut être généralisée aux états tridimensionnels à condition de se limiter aux cas de chargement radial (solicitations telles que les directions principales du tenseur des contraintes restent constantes) [3].

Le fluage est essentiellement caractérisé par l'importance du paramètre vitesse de déformation plastique. L'allure de la fonction φ pour les matériaux usuels est telle ($2 < n < 400$) que souvent, pour déceler l'effet de cette vitesse, les observations expérimentales doivent porter sur une très grande gamme de vitesses. Les essais d'écroutissage et de fluage sont assez mal adaptés à cette nécessité car les faibles vitesses correspondent à des essais de longue durée dans lesquels la stabilité du matériau est difficile à maintenir, les fluctuations de température difficiles à éviter et les mesures délicates à effectuer. Les résultats des essais à très faibles vitesses sont souvent imprécis, voire aberrants, et pratiquement le domaine des vitesses facilement accessibles est limité à :

$$0,01 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon}_p < 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

On va montrer que les essais de relaxation constituent un moyen d'augmenter considérablement ce domaine sans accroître les difficultés expérimentales.

2 L'ESSAI DE RELAXATION EN TRACTION SIMPLE

2.1 Principe.

C'est la réponse du matériau à un échelon déformation. Une déformation longitudinale ϵ est appliquée rapidement à une éprouvette et est

maintenue constante ensuite. L'information apportée par l'essai de relaxation est l'évolution, en fonction du temps, de la contrainte longitudinale σ nécessaire pour maintenir cette déformation constante.

Il est aisé d'en déduire la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_p$:

Des équations (1) et (2), valables pour tout matériau élasto-visco-plastique à élasticité linéaire, on tire :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\epsilon}_p$$

et en dérivant par rapport au temps ($\dot{\epsilon} = C^te \Rightarrow \dot{\epsilon} = 0$) :

$$(6) \quad \dot{\epsilon}_p = -\frac{\dot{\sigma}}{E}$$

L'essai de relaxation permet donc de mettre en évidence la loi de variation de la contrainte σ en fonction de la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_p$, pour une déformation totale ϵ donnée. Notons que si la déformation imposée est assez grande, la déformation plastique $\epsilon_p = \epsilon - \frac{\sigma}{E}$ varie peu au cours de l'essai.

2.2 Intérêt.

Le grand intérêt de ce type d'essai est qu'il permet d'explorer une gamme de vitesses de déformation plastique importante, et d'atteindre des vitesses faibles en des temps d'essais beaucoup plus courts que ceux correspondant aux essais de fluage ou d'écroutissage équivalents.

Pour le montrer, comparons les temps Δt nécessaires pour atteindre une déformation totale ϵ^* à une vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_p^*$ dans un essai de relaxation, un essai d'écroutissage et un essai de fluage, sur un matériau obéissant à la loi de comportement représentée par les relations (1), (2), (3), (4) et (5).

Cas de la relaxation : $\dot{\epsilon} = C^te = \dot{\epsilon}^$.*

Posons $\dot{\psi}(\epsilon_p) = \dot{\psi}^* \neq C^te$.

Remplaçons, dans l'équation (3), la fonction $\dot{\psi}$ par l'expression (5) et dérivons par rapport au temps :

$$\dot{\sigma} = E \dot{\psi}^* \frac{1}{n} \frac{1-n}{\dot{\epsilon}_p^n} \dot{\epsilon}_p$$

ou, avec la relation (6) :

$$\dot{\psi}^* \frac{1-n}{n} \frac{1-n}{\dot{\epsilon}_p^n} \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_p = 0,$$

équation différentielle du premier ordre en $\dot{\epsilon}_p$, d'où l'on peut tirer le temps

$$dt = -\dot{\psi}^* \frac{1}{n} \frac{1-2n}{\dot{\epsilon}_p^n} d\dot{\epsilon}_p$$

Comme il n'est pas possible de justifier une condition initiale sur $\dot{\epsilon}_p$ correspondant au cas théorique de l'échelon déformation, nous prendrons :

$$t \approx 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_{p_0}$$

ce qui suppose que la mise en déformation est rapide, et que la relaxation débute alors avec une certaine vitesse initiale $\dot{\epsilon}_{p_0}$.

L'intégration donne aisément :

$$\Delta t_{rel} = \dot{\psi}^* \frac{1}{n-1} \frac{1}{\dot{\epsilon}_p^*} \left[\frac{1}{\dot{\epsilon}_p^*} - \frac{1}{\frac{\dot{\epsilon}_{p_0}^{n-1}}{\dot{\epsilon}_p^n} \frac{1}{\dot{\epsilon}_p^*}} \right]$$

en remarquant que :

$$\dot{\psi}^* \frac{1}{n} \frac{1}{\dot{\epsilon}_p^{*n}} = \dot{\epsilon}_p^*$$

$$\Delta t_{rel} = \frac{\dot{\epsilon}_p^*}{n-1} \left[\frac{1}{\dot{\epsilon}_p^*} - \frac{1}{\frac{\dot{\epsilon}_{p_0}^{n-1}}{\dot{\epsilon}_p^n} \frac{1}{\dot{\epsilon}_p^*}} \right]$$

Si la déformation ϵ^* est imposée rapidement, la relaxation débute avec une contrainte importante et une vitesse initiale $\dot{\epsilon}_{p_0}$, très grande devant $\dot{\epsilon}_p^*$, pour $n > 2$, le deuxième terme peut être négligé devant le premier et :

$$(7) \quad \Delta t_{rel} \approx \frac{1}{n-1} \frac{\dot{\epsilon}_p^*}{\dot{\epsilon}_p^*}$$

Cas de l'écroutissage : $\dot{\epsilon} = C^te$.

Dans un essai d'écroutissage, la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}_p$ est rapidement voisine de la vitesse de déformation totale $\dot{\epsilon}$.

Pour simplifier on prendra :

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}$$

et :

$$(8) \quad \Delta t_{scr} \approx \frac{\dot{\epsilon}^*}{\dot{\epsilon}_p^*}$$

Cas du fluage : $\sigma = C^m = \sigma^*$.

Remplaçons dans l'équation (3) la fonction φ par la relation (5) et la fonction ψ par la loi d'Odqvist plus simple (mais moins précise) que la relation (4) :

$$\dot{\psi}(\epsilon_p) = [\beta \epsilon_p]^m,$$

$$\sigma^* = E [\beta \epsilon_p]^m [\tau \dot{\epsilon}_p]^n,$$

ou :

$$\epsilon_p^m \dot{\epsilon}_p = \left[\frac{\sigma^*}{E} \right]^n \beta^{-\frac{n}{m}} \tau^{-1},$$

équation différentielle du premier ordre en ϵ_p d'où l'on peut tirer le temps avec la condition initiale :

$$t = 0 \Rightarrow \epsilon_p = 0,$$

$$\Delta t_{fl} = \left[\frac{\sigma^*}{E} \right]^n \beta^{-\frac{n}{m}} \tau \frac{\epsilon_p^{n+m}}{n+m} \frac{1}{m}$$

ϵ_p^* étant la valeur de ϵ_p pour $\epsilon = \epsilon^*$:

$$\Delta t_{fl} = \left[\frac{1}{\beta^m \epsilon_p^{*m} \tau^n} \right]^n \epsilon_p^* \frac{m}{n+m},$$

ou, en remarquant que :

$$\frac{1}{\beta^m \epsilon_p^{*m} \tau^n} = \frac{\sigma^*}{E \dot{\epsilon}_p^n},$$

$$(9) \quad \Delta t_{fl} = \frac{m}{n+m} \frac{\epsilon_p^*}{\dot{\epsilon}_p^n}.$$

Finalement, des relations (7), (8) et (9) on tire :

$$\frac{\Delta t_{rel}}{\Delta t_{ecr}} \approx \frac{1}{n-1} \frac{\epsilon_p^*}{\dot{\epsilon}_p^n}$$

$$\frac{\Delta t_{rel}}{\Delta t_{fl}} \approx \frac{n+m}{m} \frac{\epsilon_p^*}{[n-1] \dot{\epsilon}_p^n}.$$

Les essais usuels correspondent environ à :

$$\frac{1}{100} < \frac{\epsilon_p^*}{\dot{\epsilon}_p^n} < \frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{100} < \frac{\epsilon_p^*}{\dot{\epsilon}_p^n} < 1.$$

D'autre part, les matériaux d'usage courant sont caractérisés par :

$$2 < n < 400 \quad \text{et} \quad 2 < m < 100.$$

On a alors :

$$\Delta t_{relaxation} = \frac{\Delta t_{ecrouissage}}{n_1} = \frac{\Delta t_{fluage}}{n_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < n_1 < 40\,000 \\ 1 < n_2 < 8\,000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{suivant les matériaux,} \\ \text{la température et la} \\ \text{déformation } \epsilon^* \end{array}$$

résultat qui met en évidence le gain de temps considérable que l'on peut attendre des essais de relaxation dans la plupart des cas.

Exemple d'un duralumin AU4G trempé vieilli étudié à 200°C à une déformation ϵ^* égale à 10 fois la déformation élastique ϵ^* :

$$n = 27, \quad m = 50, \quad \frac{\epsilon_p^*}{\dot{\epsilon}_p^n} = \frac{1}{10}, \quad \frac{\epsilon_p^*}{\dot{\epsilon}_p^n} = \frac{1}{9},$$

$$\Delta t_{rel} = \frac{\Delta t_{ecr}}{260} = \frac{\Delta t_{fl}}{152},$$

c'est-à-dire que pour obtenir le même renseignement, l'essai d'écrouissage est 260 fois plus rapide que l'essai de fluage.

2,3 Réalisation.

Réaliser la condition locale $\epsilon = \text{constante}$ sur une éprouvette est une entreprise difficile qui demande un asservissement de grande qualité, donc délicat. Il est préférable d'imposer un déplacement qui corresponde à une déformation approximativement constante et d'employer une méthode de dépouillement raffinée qui tienne compte des conditions réelles.

Le principe des essais réalisés à l'O.N.E.R.A. est le suivant (fig. 2) : une éprouvette de traction, située dans un four à grande inertie thermique, est encastrée à une extrémité et montée en série avec un dynamomètre. Elle est sollicitée par une force de traction surabondante qui amène rapidement l'extrémité du dynamomètre sur une butée fixe. L'éprouvette est alors soumise à un déplacement constant et l'indication du dynamomètre représente

la force nécessaire pour maintenir cet allongement constant.

Les résultats sont précis si un certain nombre de précautions particulières sont prises [4].

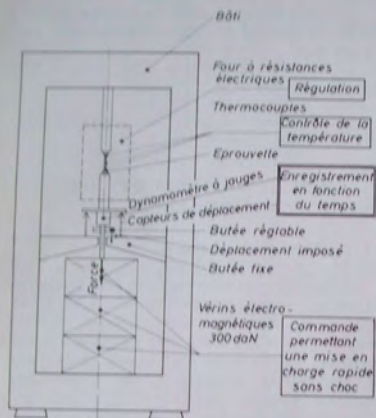


Fig. 2. — Dispositif pour essais de relaxation
Machine O.N.C.R.A. pour essais dynamiques
sous charge de traction

2.31 PROBLÈME DE LA BUTÉE.

Dans le diagramme contrainte-déformation (fig. 3), la relaxation proprement dite est représentée par le vecteur R. Si, pour une cause quelconque, la déformation ϵ^* diminue légèrement de $\delta \epsilon^*$, il s'ensuit une diminution de contrainte suivant le module d'Young :

$$\delta \sigma = E \delta \epsilon^*$$

Par contre, si la déformation augmente de $\delta \epsilon^*$, la contrainte n'augmente que suivant le module tangent E_t :

$$\delta \sigma \approx E_t \delta \epsilon^*$$

Or, pour les matériaux métalliques, E_t est toujours beaucoup plus petit que E,

$$\left(\frac{1}{100} < \frac{E_t}{E} < \frac{1}{10} \text{ pour } \epsilon^* > 2 \epsilon^* \right).$$

L'erreur que l'on peut commettre sur σ est donc beaucoup plus sensible à une diminution qu'à une augmentation de déformation.

En conséquence, comme il n'est pas possible de maintenir le déplacement rigoureusement constant, la butée est réalisée de telle sorte que le déplacement augmente légèrement et constamment.

2.32 PROBLÈME DE LA TEMPÉRATURE.

Les déformations irréversibles sont particulièrement sensibles à la température. Un calcul d'erreur effectué sur la formule de Dorn :

$$\dot{\epsilon}_p = f(\sigma_{..}) e^{-\frac{\Delta H}{RT}}$$

- $\Delta H \rightarrow$ énergie d'activation liée au processus de fluage;
- $R \rightarrow$ constante des gaz parfaits;
- $T \rightarrow$ température absolue,

montre que, pour les matériaux usuels, la précision relative à exiger sur la température doit être de 15 à 70 fois supérieure à la précision souhaitée sur la vitesse de déformation plastique.

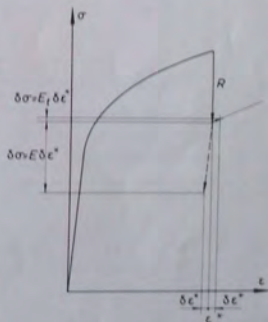


Fig. 3. — Précision dans un essai de relaxation

D'autre part, la mise en déformation rapide entraîne, au sein du matériau, des phénomènes thermodynamiques qui provoquent des fluctuations de température. La vitesse de mise en déformation est ainsi limitée supérieurement à la valeur

qui entraîne une variation de température juste compatible avec la précision désirée sur ϵ_p .

Exemple d'un essai de relaxation effectué à 200° C sur un duralumin AU4G trempé vieilli :

— une déformation $\epsilon^* = 2,5\%$ imposée en 0,8 s provoque, sur l'éprouvette, une chute de

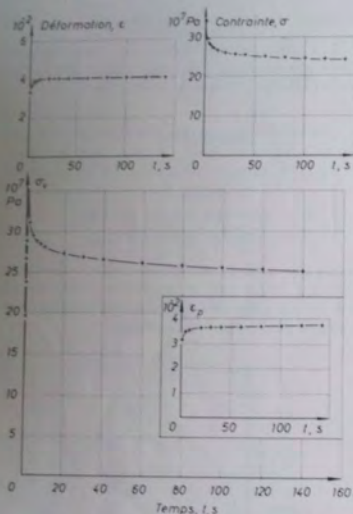


FIG. 1. — Essai de relaxation en traction simple
Duralumin AU4G trempé vieilli. Température 200° C.

température à 199° C, puis une élévation à 201° C suivie d'un retour asymptotique à la valeur nominale de 200° C.

2.33 DÉPOUILLEMENT DES RÉSULTATS.

Les résultats bruts de l'essai sont constitués par :

— le déplacement ΔL légèrement croissant en fonction du temps;

— la force F variable dans le temps.

La déformation ϵ est déduite de ΔL , pour des valeurs discrètes du temps, par un calcul qui permet

d'éliminer les déformations des têtes de l'éprouvette et des dispositifs de fixation.

La contrainte vraie σ_p (rapportée à la section effective) est calculée à partir de F et de l'expression du coefficient de Poisson élasto-plastique.

Afin de prendre en compte les conditions réelles d'essai, la vitesse de déformation plastique est calculée par :

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

Les résultats d'un essai ainsi dépouillés sont indiqués sur la figure 4.

3 RÉSULTATS DÉDUITS D'ÉTUDES DE RELAXATION

3.1 Équilibres élasto-plastiques.

L'essai de relaxation constitue donc un moyen d'investigation commode du domaine des très basses vitesses. On peut alors espérer déceler, à toute température, les évolutions des « équilibres » élasto-plastiques que les essais d'écroutissage et de fluage ne mettent en évidence qu'aux températures moyennes et hautes.

La figure 5 montre les résultats bruts, reproduits de l'enregistrement analogique, d'un essai de relaxation exécuté à une température de 21° C sur un duralumin du même type que celui de la figure 1, où il n'était pas possible de déceler l'effet de la vitesse. Là, la décroissance de la force (à déplacement imposé constant) est nette et, après 150 s de relaxation, la diminution de contrainte est d'environ 0,6 % toutes les 10 s.

La figure 6 résume les principaux résultats d'essais de relaxation réalisés au laboratoire des Travaux Publics de Paris [5], à la température ambiante, sur des fils d'acier destinés à la pré-contrainte du béton. Après plusieurs années de relaxation ($\dot{\epsilon}_p$ de l'ordre de 10^{-12} s⁻¹) la contrainte évolue toujours, bien que la contrainte initiale soit nettement inférieure à la limite d'élasticité « apparente ».

Ces deux exemples montrent bien que les équilibres élasto-plastiques, et même le domaine d'élasticité, ne peuvent être envisagés que de façon conventionnelle. On peut d'ailleurs très bien caractériser ce fluage dans le domaine d'élasticité par la relation (3). Les deux essais relatifs à l'acier patenté de la figure 6 ont été dépouillés en supposant,

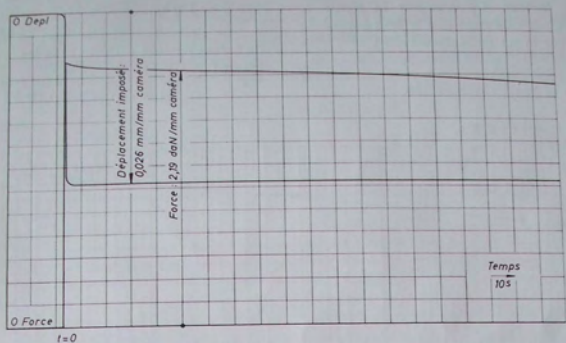


Fig. 5. — Enregistrement des résultats d'un essai de relaxation. Duralumin AU4G trempé vieilli. Température 21° C

Éprouvette TV3 D11-25 :

$d_s = 3,01$ mm;

$L_s = 45$ mm.

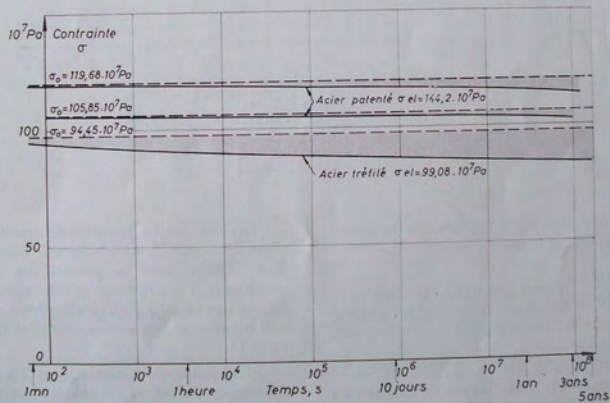


Fig. 6. — Essais de relaxation en traction simple
Expériences du Centre Expérimental de Recherches et d'Études du Bâtiment et des Travaux Publics
Température ambiante

pour chacun d'eux, $\dot{\psi} = C^*$ puisque ϵ_p varie peu au cours de l'expérience. La fonction $\dot{\psi}$ est représentée au facteur $E \dot{\psi}$ près sur la figure 7, où il est remarquable de constater le bon accord de ces résultats avec la loi de Norton-Hoff :

$$\dot{\psi} = [\tau \epsilon_p]^n \Rightarrow n = 380.$$

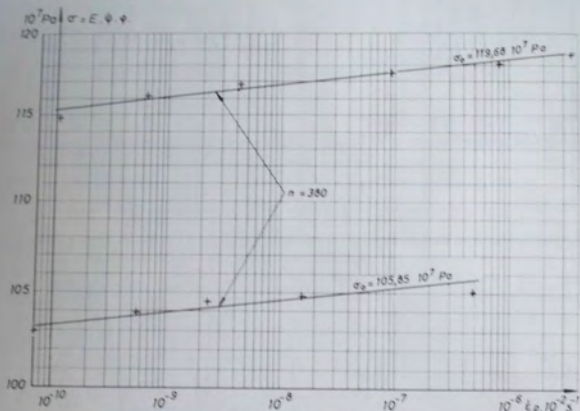


Fig. 7. — Fonction de viscosité $\dot{\psi} = (\dot{\psi} \neq C^*)$
Acier patenté — Travaux publics
Température ambiante

$$\sigma_{el} = 144,2 \cdot 10^7 \text{ Pa}; \quad \sigma_{rupt} = 150 \cdot 10^7 \text{ Pa}; \quad \epsilon_{rupt} = 8,7 \cdot 10^{-2}$$

$$E = 20\,000 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

$$\tau = 3,83 \cdot 10^{-103} \text{ s}$$

Les caractéristiques de rupture du matériau permettent de calculer le coefficient τ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rupt} &= 150 \cdot 10^7 \text{ Pa} \\ \epsilon_{rupt} &= 8,7 \cdot 10^{-2} \\ \dot{\psi} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ pour } \dot{\epsilon} \simeq 0,087 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \tau = 3,83 \cdot 10^{-103} \text{ s}$$

Pour préciser ces ordres de grandeur notons que :

— la durée de vie d'un barreau de ce matériau sollicité en traction simple au $\frac{1}{4}$ de la contrainte de rupture ($\frac{1}{3,8}$ de la limite d'élasticité) est de :

$$\Delta t_{rupture} = 1,92 \cdot 10^{223} \text{ années.}$$

Pour effectuer ce calcul, on a supposé que la rupture était caractérisée par $\epsilon = 8,7 \cdot 10^{-2}$ et l'on a pris $\dot{\psi} = 1 \sqrt{\epsilon_p}$;

— l'allongement plastique au bout de 100 ans du même barreau sollicité dans les mêmes conditions est de :

$$\epsilon_p(100 \text{ ans}) = 0,45 \cdot 10^{-220} \text{ } \frac{0}{10}.$$

Ces deux petites applications montrent bien qu'il s'agit d'évolutions extrêmement lentes, que l'on peut négliger dans la plupart des constructions métalliques : qu'importe si un calcul de fluage prouve que la tour Eiffel s'effondrera en l'an 10^{200} , bien d'autres causes sont susceptibles de la détruire avant !

Néanmoins, dans certains cas il y a lieu de se préoccuper de ces problèmes (éléments travaillant en relaxation, par exemple) et, de toute façon, il faut être prudent dans l'application des théories de la plasticité qui impliquent l'existence d'équilibres élasto-plastiques stricts. La courbe d'écroutissage « quasi statique » doit être obtenue à une

vitesse conventionnelle compatible avec l'utilisation envisagée.

3.2 Fluage établi.

L'application des essais de relaxation à l'étude du fluage établi a fait l'objet d'une étude

présente de grands avantages, comme le montre la figure 8 relative à un duralumin AU4G trempé vieilli à 200° C;

— le domaine des vitesses étudiées est considérablement élargi;

— les résultats d'essais, aussi différents que : écoulement, fluage et relaxation, sont très cohérents,

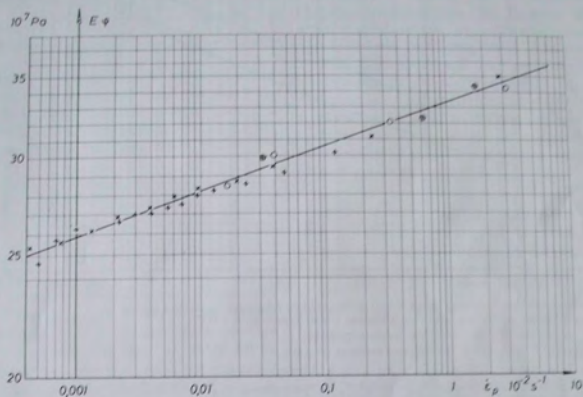


Fig. 8. — Fonction de viscosité φ
Duralumin AU4G trempé vieilli. Température 200° C

$$\varphi = [\tau \dot{\epsilon}_p]^n \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 27 \\ \tau = 1,72 \cdot 10^{-11} \text{ s} \end{array} \right.$$

○ ○ ○ ○	Quatre essais de fluage	$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_p = 3,4 \cdot 10^{-3}; \\ \epsilon_p = 4,3 \cdot 10^{-3}; \\ \epsilon_p = 4,7 \cdot 10^{-3}; \\ \epsilon_p = 4,7 \cdot 10^{-3}. \end{array} \right.$
⊙ ⊙ ⊙	Trois essais d'écroutissage	
× × ×	Un essai de relaxation	
+ + +	Un essai de relaxation	

$$\left\{ \begin{array}{l} 2,8 \cdot 10^{-3} < \epsilon_p < 3,7 \cdot 10^{-3}, \\ 3,4 \cdot 10^{-3} < \epsilon_p < 3,1 \cdot 10^{-3}. \end{array} \right.$$

spéciale [6] dont nous rappelons les conclusions essentielles :

— dans le domaine du fluage établi, caractérisé par de grandes valeurs de la déformation, la loi de comportement se réduit à :

$$\sigma = E \varphi(\dot{\epsilon}_p) = E [\tau \dot{\epsilon}_p]^n$$

τ et n sont habituellement déduits d'une série d'essais de fluage, mais l'emploi d'essais de relaxation

ce qui tend à prouver que les paramètres de Norton-Hoff ont bien une signification intrinsèque;

— un seul essai de relaxation permettrait même de définir ces paramètres avec une bonne précision.

Une première tentative d'application de ces résultats aux matières organiques a été effectuée sur une polyamide (le Nylatron GSM) à la température ambiante. Les résultats d'essais de fluage

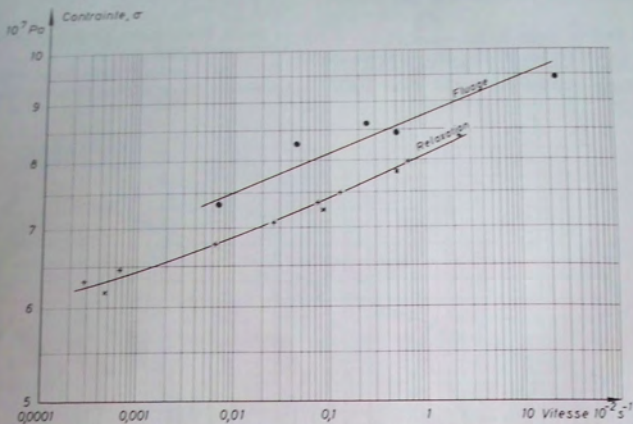


Fig. 9. — Essais de fluage et de relaxation en traction simple
Nylonon GS-M. Temperature 18° C.

Cinq essais de fluage } $\epsilon \approx 25 \cdot 10^{-4}$
 Deux essais de relaxation }
 Vitesse = { Fluage $\rightarrow \dot{\epsilon}$
 { Relaxation $\rightarrow -\frac{\dot{\sigma}}{E}$

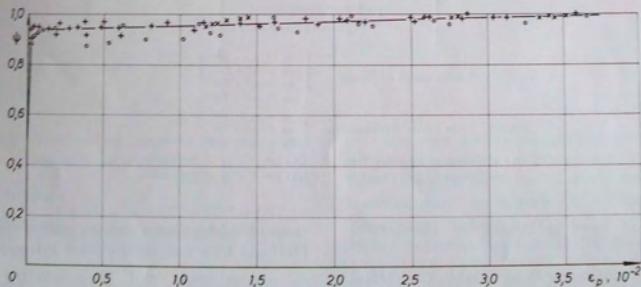


Fig. 10. — Fonction d'écroutissage ψ
Duralumin AU4G trempé vieilli. Temperature 200° C

$E = 6\,500 \cdot 10^7$ Pa; $\nu = 0,35$
 ++ Quatre essais de fluage;
 ●● Trois essais d'écroutissage;
 ×× Trois essais de relaxation.

et de relaxation sont consignés sur la figure 9, ils ne concordent pas. Il s'agit là d'un matériau visco-élastique-visco-plastique et, dans le dépouillement, la viscosité élastique a été ignorée; toutefois, il ne semble pas qu'un calcul correct des vitesses de déformation entraînerait la coïncidence des deux courbes. Une étude plus approfondie suivra ce « coup de sonde ».

3.3 Fluage primaire.

La fonction ψ qui caractérise le fluage primaire peut, elle aussi, être déterminée par des essais de relaxation. La fonction φ étant obtenue pour les grandes valeurs de la déformation, il suffit de calculer pour une même valeur du temps :

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E},$$

$$\psi = \frac{\sigma}{E \varphi(\varepsilon_p)}.$$

La figure 10 montre les résultats correspondant au duralumin, trempé vieilli à 200° C, déjà étudié en fluage établi (fig. 8). Chaque essai de relaxation ne couvre qu'un petit domaine de déformation plastique puisque ε_p varie peu, mais un ensemble d'essais de relaxation définit la fonction ψ avec la même précision que les essais d'écroutissage et de fluage. Une amélioration sera apportée par l'essai de relaxation multiple (succession de relaxations à déformations différentes sur une même éprouvette) actuellement à l'étude.

Une autre confirmation de la cohérence des essais de fluage et de relaxation est apportée par une méthode récente [7] de détermination du comportement en relaxation à partir de résultats d'essais de fluage. Cette méthode a donné de bons résultats pour un béton, un acier, un cuivre, un alliage d'aluminium et deux polymères organiques.

CONCLUSION

Les essais de relaxation constituent un moyen d'analyse particulièrement bien adapté à l'étude des effets de la vitesse de déformation plastique dans la rhéologie des solides. Leur utilisation dans les problèmes d'extrapolation paraît une application intéressante. Toutes les méthodes actuellement utilisées reposent sur des formules d'équivalence temps-température ou vitesse-température (paramètres de Dorn, Larson-Miller, Graham Wallace...), qui obligent à effectuer les essais à des températures différentes de celles correspondant aux applications envisagées. Une méthode basée sur les essais de relaxation éviterait le problème délicat de la température, elle serait fondée sur une seule hypothèse : l'existence d'une loi mécanique d'état isotherme implicite entre σ , ε_p et ε_p .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDEL. — *Séminaire de plasticité*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, N.T. n° 116, 1962, p. 13.
- [2] N. J. HOFF. — *Les fondements de la mécanique du fluage dans un corps métallique*, Conférences publiées par le département de mécanique de l'Institut Henri Poincaré, Paris, 1964.
- [3] J. LEMAITRE. — *La recherche des lois de comportement des matériaux de construction mécanique*, La Recherche Aérospatiale, n° 112, mai-juin 1966, p. 15.
- [4] A. MONTHULET. — *Amélioration des moyens et méthodes d'essais en plasticité-fluage*, Note technique O.N.E.R.A., n° 114, 1967.
- [5] G. DAWANCE, A. CHAGNEAU. — *Expériences de relaxation des contraintes dans le béton précontraint*, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n° 120, décembre 1957.
- [6] J. LEMAITRE. — *Sur la détermination des paramètres de Norton-Hoff*, C.R. Acad. Sci., Paris, t. 261, 1965, p. 3731.
- [7] T. C. HANSEN. — *Estimating stress relaxation from creep data*, Materials Research and Standard, 1964, t. 4, n° 1, p. 12.

REPRÉSENTATION DES MODULES ET COMPLAISANCES COMPLEXES DANS LES PLANS COMPLEXES ARITHMÉTIQUE ET LOGARITHMIQUE (1)

par C. HUET

DOCTEUR-INGÉNIEUR

ANCIEN ATTACHÉ DE RECHERCHE AU LABORATOIRE CENTRAL DES PONTS ET CHAUSSEES
INGÉNIEUR AU CENTRE TECHNIQUE DES TUILES ET BRIQUES

RÉSUMÉ

On étudie les propriétés remarquables de la représentation des modules et complaisances complexes des corps visco-élastiques linéaires dans l'espace de Cole-Cole et dans l'espace de Black.

Les modèles rhéologiques les plus employés y sont représentés par des courbes d'allures caractéristiques et s'y trouvent donc aisément identifiables.

La réciprocité entre fréquence et température s'y traduit par le fait que la courbe obtenue est globalement invariante dans un changement de température.

Quelques exemples d'application aux résultats de la littérature relatifs à divers matériaux visco-élastiques sont présentés.

INTRODUCTION

La représentation dans le plan complexe des modules et complaisances complexes des matériaux visco-élastiques linéaires présente un certain nombre de propriétés tout à fait remarquables que nous nous proposons d'étudier.

Ces propriétés s'étendent au plan de la détermination d'ordre zéro du logarithme du module ou de la complaisance complexes.

L'étude de ces propriétés conduit à une méthode élégante et sûre de résolution du problème de la détermination d'une expression mathématique

devant rendre compte de résultats expérimentaux, lesquels se présentent au départ sous la forme d'une masse de valeurs numériques correspondant à des valeurs différentes des paramètres fréquence et température.

Nous commencerons, après quelques rappels, par indiquer un certain nombre de propriétés générales. Nous passerons ensuite à un inventaire des courbes obtenues pour les modèles rhéologiques les plus employés. Nous terminerons par la présentation d'un certain nombre d'exemples concrets.

1 DÉFINITIONS ET RAPPELS

1,1 Définition du module et de la complaisance complexes.

Rappelons que si $f(t)$ et $r(t)$ sont les fonctions fluage et relaxation d'un corps visco-élastique linéaire, les module et complaisance opérationnels sont, par définition, les transformées de Carson :

$$f^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

et :

$$r^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} r(t) dt,$$

où $p = x + iy$ est une variable complexe.

En tant que transformées de Carson, ces fonctions sont holomorphes dans le domaine où la transformation est définie. Pour les fonctions fluage

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 17 mars 1966.

ou relaxation auxquelles nous avons affaire, ce domaine sera défini par $\text{Re}(p) > 0$.

L'on sait que la connaissance de l'une de ces deux fonctions permet de résoudre simplement tous les problèmes de visco-élasticité linéaire, en ramenant les équations intégré-différentielles de la théorie directe, à des équations algébriques ayant même forme que celles de l'élasticité, le seul problème étant en général celui de l'inversion de la solution ainsi obtenue.

L'on sait que cette inversion est immédiate dans un cas particulièrement important, qui est celui des vibrations forcées en régime sinusoïdal permanent, cas qui correspond à la seule méthode expérimentale que nous possédions pour l'exploration des temps de réponse très courts (inférieurs à une seconde par exemple).

Si ω est la pulsation du mouvement vibratoire sinusoïdal, l'originale est obtenue en faisant $p = i\omega$ dans les modules ou complaisances opérationnels figurant dans la solution, laquelle est alors exprimée dans la représentation complexe des mouvements sinusoïdaux.

Les modules et complaisances ainsi obtenus prennent le nom de modules et complaisances complexes.

Ils ont la signification physique du rapport de la contrainte complexe à la déformation complexe, ces deux dernières étant de même nature que dans le cas élastique auquel ces modules et complaisances complexes correspondent.

Par exemple,

— si :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t = \text{Im}(\sigma^+ e^{i\omega t}) = \text{Im}(\sigma_0 e^{i\omega t})$$

— et :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \theta) = \text{Im}(\varepsilon^+ e^{i\omega t}) = \text{Im}(\varepsilon_0 e^{i(\omega t - \theta)}),$$

le module d'Young complexe est défini par :

$$(1) \quad E^*(i\omega) = \frac{\hat{\sigma}_{ii}^+}{\hat{\varepsilon}_{ii}^+} = \frac{\sigma_{ii,0}}{\varepsilon_{ii,0}} e^{i\theta}$$

et la complaisance complexe correspondante par :

$$(2) \quad A^*(i\omega) = \frac{1}{E^*(i\omega)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{ii}^+}{\hat{\sigma}_{ii}^+} = \frac{\varepsilon_{ii,0}}{\sigma_{ii,0}} e^{-i\theta},$$

θ étant le déphasage entre contrainte et déformation.

1.2 Propriétés générales.

Comme pour les modules et complaisances opérationnels, il existe entre les modules et complaisances complexes les mêmes relations qu'entre les modules et complaisances qui leur correspondent dans le cas purement élastique.

L'une de ces fonctions, qui peut être obtenue expérimentalement, donne directement le module (ou la complaisance) opérationnel correspondant, lorsque l'on remplace purement et simplement $i\omega$ par p dans l'expression analytique qui la représente. Ceci montre tout l'intérêt des modules et complaisances complexes dont la connaissance définit, aussi complètement que celle des fonctions fluage et relaxation, le comportement d'un matériau visco-élastique, et qui sont, comme ces dernières, accessibles à l'expérience. De plus, elles présentent sur elles l'avantage de donner un accès direct au module opérationnel, et, par conséquent, à toutes les applications de celui-ci (en particulier, elles permettent le calcul des fonctions fluage et relaxation, ainsi que des spectres correspondants), et également la détermination de la réponse à une sollicitation variant dans le temps de façon quelconque.

Il faut noter que parties réelle et imaginaire de $h^*(i\omega)$ (1) ne sont pas indépendantes : elles se correspondent par une transformation de Hilbert.

$h^*(p)$ étant une transformée de Carson, et si p est la quantité imaginaire conjuguée de p , l'on sait que $h^*(p) = h^*(\bar{p})$. Il en résulte, quand $p = i\omega$, que h_1 est fonction paire de ω tandis que h_2 en est fonction impaire. Les relations liant h_1 et h_2 peuvent alors se mettre sous la forme (utilisée déjà par KRAMERS pour la dispersion optique, et par COLE-COLE pour la complaisance diélectrique) :

$$(3) \quad \begin{cases} h_1(\omega) = h(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{h_2(s)}{s^2 - \omega^2} ds, \\ h_2(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{h_1(s) - h(\infty)}{s^2 - \omega^2} \omega ds, \end{cases}$$

où les intégrales sont des parties principales au sens de CAUCHY.

Notons également que le fait que :

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^2 - \omega^2} = 0$$

entraîne que deux modules ou complaisances complexes dont les parties réelles diffèrent seulement

h^* représente indifféremment f^* ou ε^* .

d'une constante ou même partie imaginaire et réciproquement. De plus, si la partie réelle est constante, la partie imaginaire est nulle constamment et réciproquement.

2 LA REPRÉSENTATION DANS LE PLAN COMPLEXE

2.1 Plan complexe arithmétique (espace de Cole-Cole).

a) PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

Le module complexe $r^*(i\omega)$ et la complaisance complexe $f^*(i\omega)$ sont des fonctions complexes de la variable $i\omega$:

$$r^*(i\omega) = r_1(\omega) + ir_2(\omega) = |r^*(i\omega)| e^{i\theta},$$

$$f^*(i\omega) = f_1(\omega) - if_2(\omega) = |f^*(i\omega)| e^{-i\theta}.$$

Lorsque ω varie de 0 à l'infini (c'est-à-dire lorsque p décrit le demi-axe imaginaire pur positif), r^* et f^* décrivent deux courbes $r_2 = r_2(r_1)$ et $f_2 = f_2(f_1)$ dans le plan complexe.

Chacune de ces courbes, munie de son paramétrage en ω , constitue la représentation dans le plan complexe arithmétique (ou espace de Cole-Cole) du module ou de la complaisance complexes.

Les restrictions physiques qui pèsent sur la forme des fonctions originales $r(t)$ et $f(t)$ imposent à la forme et à la disposition de ces courbes un certain nombre de conditions.

Tout d'abord r_1, r_2, f_1, f_2 , et θ seront positifs : il en résulte que l'image de r^* sera située dans le premier quadrant du plan complexe, et celle de f^* dans le quatrième quadrant. On aura donc :

$$0 \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}.$$

De plus,

$$r^*(\omega = 0) = r(l = \infty), \quad r^*(\infty) = r(0),$$

$$f^*(0) = f(\infty), \quad f^*(\infty) = f(0),$$

étant réels, les courbes présentent chacune deux points d'arrêt sur l'axe réel, dont l'un pourra être rejeté à l'infini.

Le module complexe le plus général pouvant se mettre sous la forme :

$$r^*(i\omega) = r_\infty - \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{1 + i\omega\tau} d\tau,$$

on vérifie aisément que $r_1 = \text{Re}[r^*(i\omega)]$ est fonction non décroissante de ω , égale à r_0 pour $\omega = 0$, et à r_∞ pour $\omega = \infty$ ($r_\infty > r_0 \geq 0$).

De la même façon, on vérifie que la complaisance complexe la plus générale

$$f^*(i\omega) = r_\infty^{-1} + \int_0^\infty \frac{J(\tau)}{1 + i\omega\tau} d\tau$$

est telle que $f_1 = \text{Re}[f^*(i\omega)]$ est fonction non décroissante de ω , égale à r_∞^{-1} pour $\omega = \infty$ et à r_0^{-1} pour $\omega = 0$ ($r_\infty^{-1} > r_0^{-1} \geq 0$).

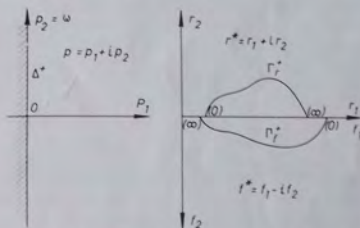


Fig. 1. — Plan des p , plan des r^* et f^* (espace de Cole)

Rappelons que $G(\tau)$ et $J(\tau)$ sont respectivement les spectres de relaxation et de retard du matériau considéré. Ils peuvent être discontinus et même discrets.

Notons enfin que, d'après les expressions ci-dessus, r_1, r_2, f_1, f_2 sont des fonctions continues de ω , bornées pour tout ω non nul et non infini. Il en résulte que les arcs $r_2(r_1)$ et $f_2(f_1)$ sont continus et bornés dans les mêmes conditions.

Cette représentation doit son nom d'espace de Cole et Cole à l'utilisation qui en a été faite par ces auteurs à propos de la complaisance diélectrique complexe.

b) RELATIONS ENTRE LES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES D'UN MÊME MATÉRIAU.

Nous avons vu que pour les fonctions opérationnelles et complexes, ces relations sont identiques à celles de l'élasticité. Elles définissent également

des transformations conformes les unes des autres, transformations qui conservent donc les angles.

Nous savons qu'aux opérations algébriques élémentaires correspondent des transformations géométriques simples qui sont l'addition vectorielle pour l'addition de nombres complexes, la similitude pour la multiplication et l'inversion symétrique pour la détermination du point représentatif de l'inverse d'un nombre complexe.

En particulier, module et complaisance complexes étant inverses l'un de l'autre, les figures les représentant dans le plan complexe se déduisent donc l'une de l'autre par inversion suivie d'une symétrie.

Pratiquement, on peut obtenir aisément l'un à partir de l'autre à l'aide d'un inverseur tel que,

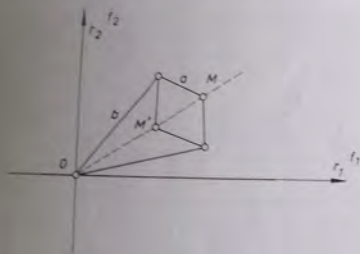


Fig. 2. — Inverseur de Peaucellier

par exemple, l'appareil de Peaucellier (M et M' se correspondent dans l'inversion de centre O et de rapport $k^2 - a^2$).

c) REPRÉSENTATION DES GROUPEMENTS.

Les groupements de modèles rhéologiques en série (ou en parallèle) se traduisant respectivement par une addition des complaisances (ou des modules) complexes élémentaires, la figure représentative de la complaisance (ou du module) résultant, s'obtiendra, par addition vectorielle point par point des figures représentatives des modules (ou complaisances) complexes élémentaires. Le module (ou la complaisance) résultant s'en déduira alors immédiatement par le procédé d'inversion géométrique précédemment décrit.

La méthode se montre particulièrement fructueuse pour des groupements d'un petit nombre

de modèles élémentaires (ce qui est le cas le plus fréquent lorsqu'on a à traduire des résultats expérimentaux qui ne sont généralement pas suffisamment raffinés pour que l'emploi d'un grand nombre de modèles élémentaires soit indispensable). On obtient en effet très rapidement par ce moyen l'allure de la variation du module résultant du groupement en série ou en parallèle de plusieurs modèles élémentaires, alors que l'analyse des variations de l'expression analytique obtenue, et rien même que la séparation en partie réelle et imaginaire, deviennent des opérations très rapidement laborieuses lorsque la dimension du groupement s'accroît, et ceci, dès les premières unités.

Si l'on a affaire à un groupement plus compliqué, formé de l'association en parallèle de groupements série ou réciproquement, on obtiendra aisément les courbes représentatives du module et de la complaisance complexe résultant par va-et-vient entre le plan des modules complexes et celui des complaisances complexes.

Nous verrons dans le prochain chapitre que ceci est rendu d'autant plus aisé que les courbes représentatives des caractéristiques complexes des modèles rhéologiques élémentaires les plus usuels possèdent des propriétés tout à fait particulières, tant pour leurs géométries que pour leur paramétrage.

2,2 Plan complexe logarithmique ou espace de Black.

La représentation dans le plan complexe arithmétique, si elle est très précieuse du fait de ses propriétés géométriques, présente cependant un inconvénient. En effet, les coordonnées étant arithmétiques et les valeurs des modules ou complaisances expérimentales pouvant varier de plusieurs puissances de 10, il en résulte que la précision du tracé devient rapidement très mauvaise pour les valeurs faibles (sur un seul graphique, on ne peut guère représenter dans ce plan les modules ou complaisances dont l'amplitude est inférieure au 1/100 de l'amplitude maximale représentée).

Or, les électriciens utilisent souvent, pour représenter les impédances électriques complexes, un autre espace appelé espace de Black. Les dimensions de cet espace sont, d'une part, le module de l'impédance complexe, porté en abscisses logarithmiques, et, d'autre part, son argument, porté en ordonnées arithmétiques.

Il s'agit donc de l'espace du logarithme de l'impédance complexe (et plus précisément de sa détermination d'ordre 0), puisque l'on sait que le logarithme d'un nombre complexe a le logarithme de son module pour partie réelle, et son argument pour partie imaginaire :

$$h^* = h_1 + ih_2 = |h^*| e^{i\theta}$$

$$\text{Log}_e(h^*) = \text{Log}_e |h^*| + i\theta.$$

Cet espace jouit d'un certain nombre de propriétés intéressantes, qui nous ont semblé justifier son introduction en Rhéologie pour représenter les modules et complaisances complexes.

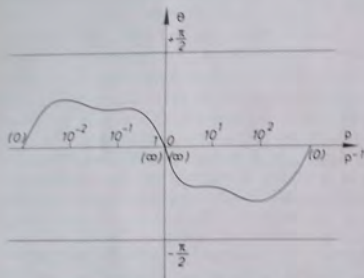


Fig. 3. — Plan des logs, r^* et log, f^* (espace de Black)

Dans notre cas, l'espace de Black sera donc défini en abscisse par une échelle logarithmique, celle du module du module ⁽¹⁾ (ou de la complaisance) complexe, et en ordonnée par une échelle arithmétique, celle de leur argument, limité pour le module complexe inférieurement par $\theta = 0$, et supérieurement par $\theta = \frac{\pi}{2}$ (respectivement $-\frac{\pi}{2}$ et 0 pour la complaisance).

En pratique, l'échelle logarithmique sera relative au logarithme décimal, et l'échelle arithmétique sera quelconque, ce qui modifiera la courbe par une affinité orthogonale parallèle à l'axe des ordonnées dont il faudra tenir compte dans l'étude des propriétés géométriques.

(1) Le premier module est pris au sens de « module », ou « amplitude », d'un nombre complexe, et le second au sens mécanique.

(Ainsi, si X représente en centimètres une unité du logarithme décimal, le graphique sera à l'échelle convenable si l'ordonnée Y de $\frac{\pi}{2}$ a pour mesure en centimètres :

$$Y = \frac{\pi X \log e}{2},$$

avec $\log e = 0,4343\dots$)

Cette représentation possède un certain nombre de propriétés générales indépendantes du modèle auquel on a affaire.

a) CONSERVATION DES ANGLES.

La détermination d'ordre zéro du logarithme étant analytique, en dehors de l'origine, ce logarithme définit une transformation conforme qui conserve les angles. Les angles seront donc conservés lorsque l'on passera de l'espace de Cole et Cole à l'espace de Black. En particulier, si la courbe globale présente dans l'espace de Cole et Cole un point d'arrêt sur l'axe réel, il en sera de même dans l'espace de Black, et la tangente au point d'arrêt y sera conservée.

Au voisinage du point origine de l'espace de Cole et Cole, qui est rejeté à l'infini dans l'espace de Black, on obtient alors des propriétés asymptotiques (la courbe admettant pour asymptote une parallèle à l'axe réel d'ordonnée égale à l'angle formé avec l'axe réel par la tangente à la courbe de l'espace de Cole et Cole).

b) PRÉCISION RELATIVE CONSTANTE DU TRACÉ.

L'échelle des abscisses est logarithmique, ce qui permet une représentation convenable des variations des modules et complaisances complexes sur toute l'étendue de ces variations (autant de puissances de 10 que l'on voudra). Les très faibles valeurs, ou les très grandes, y sont donc représentées avec une appréciation plus juste de leur importance. De plus, la précision relative du tracé et de la lecture est constante.

c) MODULE ET COMPLAISANCE COMPLEXES REPRÉSENTÉS PAR LA MÊME COURBE (À UNE SYMÉTRIE PRÈS).

En effet, de la relation $f^*, r^* = 1$, on tire immédiatement

$$\log f^* = -\log r^*.$$

Le module et la complaisance complexes sont donc représentés dans l'espace de Black par la même courbe représentative, à une symétrie près, dont on s'affranchit aisément. On peut donc lire simultanément, sur le même graphique, le module et la complaisance complexes : il suffit de disposer en abscisses sur ce graphique de deux échelles logarithmiques, orientées en sens opposés, et décalées de la quantité convenable. Ce décalage est nul lorsque l'on prend le module instantané comme unité.

Cette propriété permet en particulier une construction rapide, par relevé (en partie ou totalité), de la courbe inverse arithmétique (construite alors en polaires).

d) COMPARAISONS FACILES ENTRE MATÉRIAUX DE MODULES INSTANTANÉS DIFFÉRENTS.

Des courbes globales qui seraient homothétiques dans l'espace de Cole et Cole ne diffèrent, dans l'espace de Black, que d'une simple translation parallèle à l'axe des abscisses.

On peut ainsi comparer aisément des matériaux différant par leur module instantané (du fait, par exemple, de la présence de charges minérales), et vérifier s'ils présentent ou non le même comportement visco-élastique qualitatif.

Généralement, il sera alors intéressant de représenter les résultats dans ce que l'on peut appeler « l'espace de Black réduit », c'est-à-dire rapporté, soit au module instantané, soit au module statique (dont l'un est alors pris comme unité). La représentation dans cet espace permettra la comparaison aisée des comportements visco-élastiques proprement dits de matériaux présentant des modules statiques ou instantanés différents.

e) CONSTRUCTION RAPIDE DES FONCTIONS ALGÈBRIQUES OU RATIONNELLES DU MODULE.

Comme pour l'addition et la soustraction dans l'espace de Cole et Cole, le produit et le quotient de nombres complexes se traduisent dans l'espace de Black par l'addition ou la soustraction de vecteurs, et correspondent donc à des constructions très faciles.

L'élevation à une puissance, entière ou non, positive ou négative, se traduit par une homothétie dont le rapport est l'exposant, et le centre le point coté 1 sur l'axe réel (gradué suivant une échelle fonctionnelle logarithmique).

Ces propriétés peuvent s'appliquer, d'une part, à la construction de modèles analytiques dont les expressions sont des fonctions algébriques ou puissances de fonctions élémentaires dont la représentation dans l'espace de Black est connue, et, d'autre part, à partir de deux fonctions caractéristiques indépendantes, à la construction des quantités complexes correspondant à d'autres caractéristiques du comportement visco-élastique (par exemple, coefficients de Poisson, de Lamé, etc., à partir de module d'Young et module de compressibilité par exemple, ou toute autre combinaison). Par exemple, si l'on dispose des courbes représentant le module d'Young et le module de cisaillement, le vecteur joignant deux points de même paramètre sera égal à $\log [2(1 - \nu^*)]$, ν^* étant le coefficient de Poisson.

Dans les deux cas, on pourra être amené à passer alternativement de l'espace de Black à l'espace de Cole et Cole, et vice versa.

On peut se dispenser de ce va-et-vient en remarquant que dans l'espace de Cole et Cole, les droites verticales $\text{Re}(h^*) = C^{te}$ se déduisant les unes des autres par homothétie lorsque change la valeur de la constante, les courbes qui leur correspondent dans l'espace de Black s'en déduiront par translation. Il en est de même des courbes correspondant à $\text{Im}(h^*) = C^{te}$. Les courbes $\text{Re}(h^*) = C^{te}$ et $\text{Im}(h^*) = C^{te}$ constituent donc dans l'espace de Black des familles orthogonales de courbes parallèles (l'orthogonalité n'étant effective sur les graphiques que si les échelles sont celles définies plus haut).

Les couples de courbes qui se coupent sur la parallèle à l'axe réel d'ordonnée $\frac{\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à cette parallèle.

Il en résulte que l'on construira rapidement dans l'espace de Black un point dont on connaît la partie réelle et la partie imaginaire. Il suffira de disposer d'un « pistolet » dont la forme sera celle de la surface comprise entre l'axe réel et l'une des courbes ci-dessus.

Soit A le bec de ce pistolet (point d'intersection d'une telle courbe avec l'axe réel Δ_1). Soit M le point à construire d'affixe $r^*(a, b)$. Lorsque l'on réalise la coïncidence du bord rectiligne Δ du pistolet avec l'axe réel du graphique, de façon que A coïncide avec la graduation a de l'axe réel (gradué en r^*), le bord curviligne Γ du pistolet coïncide avec la courbe $r_1 = a = C^{te}$ de l'espace de Black, et permet donc son tracé.

En réalisant ensuite la coïncidence de Δ avec Δ_2/Δ_1 et d'ordonnée $\frac{\pi}{2}$, et du point A avec la graduation b de l'axe Δ_3 (gradué suivant la même échelle que Δ_1), le bord curviligne Γ du pistolet coïncide avec la courbe $r_2 = b = C^*$ de l'espace de Black et permet donc son tracé. L'intersection des deux courbes constitue le point M cherché, image du nombre complexe r^* , de parties réelle et imaginaire a et b .

Réciproquement, un nombre complexe r^* étant déterminé par son image M dans l'espace de Black, on obtiendra rapidement sa partie réelle a et sa partie imaginaire b , à l'aide du même pistolet, par la construction inverse de la précédente. La précision de cette détermination, indépendante

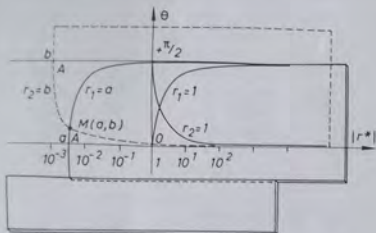


Fig. 4. — Construction de r^* dans l'espace de Black connaissant $r_1 = a$ et $r_2 = b$

de l'ordre de grandeur des valeurs, en sera toujours très bonne.

Il en résulte une construction aisée du point image M de la somme de deux nombres complexes r' et r'' déterminés par leurs images M' et M'' dans l'espace de Black. On déterminera a' , a'' , b' , b'' en appliquant deux fois la construction réciproque. On appliquera ensuite la construction directe sur les valeurs $a = a' + a''$ et $b = b' + b''$.

Ceci s'étend immédiatement à la somme d'un nombre quelconque de nombres complexes connus par leurs images dans l'espace de Black.

Une application importante de ceci consiste en la construction rapide, dans l'espace de Black, de modèles rhéologiques formés de l'association en parallèle (on opère alors dans l'espace du module) ou en série (on opère dans l'espace de la complaisance) de modèles élémentaires dont on connaît les courbes représentatives.

2.3 Problème général inverse : synthèse d'un modèle rhéologique.

Le problème se pose maintenant de la façon suivante : étant donnée une courbe du plan complexe, obtenue, par exemple, par relevés expérimentaux, en déduire une expression du module complexe ou, ce qui revient au même, un modèle rhéologique, représentatif de ces résultats.

Voyons de quelle façon les représentations dans le plan complexe peuvent nous permettre de résoudre ce problème.

Tout d'abord, il est clair que si les propriétés de cette courbe nous permettent de déterminer une expression analytique du module complexe, cette expression satisfera automatiquement aux diverses conditions (cf. chap. 1) qui restreignent le choix d'une telle expression (alors qu'il pourrait ne pas en être de même d'une expression obtenue par ajustements séparés des deux courbes représentant, par exemple, la partie réelle et la partie imaginaire en fonction de la fréquence).

Une question se pose ensuite : la courbe expérimentale sera cotée en fréquence, c'est-à-dire en ω . Si, par comparaison avec des modèles dont les courbes représentatives ont une géométrie connue, on a pu trouver un modèle qui semble convenable en ce qui concerne la courbe globale, on peut se demander si le paramétrage est correct, et il peut paraître nécessaire de procéder à une vérification de la coïncidence des deux paramétrages. On pourrait, en effet, imaginer qu'une même courbe globale puisse être paramétrée par deux distributions différentes de la fréquence. Or, il n'en est rien et la vérification de l'unicité est superflue : à une courbe globale donnée correspond une seule forme de la distribution du paramétrage.

En effet, on peut montrer que si Γ^+ est l'arc constituant la courbe globale, et si l'on connaît un module complexe $r^* = r_1^*(i\omega)$ appliquant sur Γ^+ le demi-axe imaginaire pur Δ^+ du plan des $p = \zeta + i\omega$, tous les modules complexes appliquant Δ^+ sur le même arc Γ^+ ont nécessairement la forme $r^*(i\omega) = r_1^*(i\omega\tau)$ où τ est une constante réelle positive arbitraire. L'arbitraire cesse dès que l'on fixe deux points en correspondance entre Δ^+ et Γ^+ (c'est-à-dire si l'on impose la cote ω d'un point déterminé de la courbe Γ^+).

La forme de la fonction $r^* = r^*(i\omega\tau)$ est donc bien déterminée de façon unique lorsque la forme et la position de l'arc Γ^+ sont donnés.

Δ^+ et Γ^+ se correspondant par r^* de façon biunivoque, on peut donc coter chaque point M de Γ^+ par la valeur de $\omega \tau$ qui lui correspond (module de l'axe du point transformé de M par l'application réciproque $r^{*(\cdot)}$).

On obtient ainsi un paramétrage de Γ^+ par la pulsation ω du mouvement sinusoïdal. Il résulte de ce qui précède que, lorsque la forme et la position de Γ^+ sont données, on obtient tous les paramétrages possibles en multipliant simplement ω par un facteur τ réel positif de valeur quelconque par ailleurs.

On remarquera encore que la distribution de ce paramétrage reste invariante dans toute transformation de l'arc Γ^+ qui conserve sa forme, c'est-à-dire qui ne fait que changer la position, l'échelle, ou les deux à la fois, à savoir les translations (parallèles à l'axe réel), les homothéties de centre l'origine, et le produit des deux. La distribution du paramétrage pourra alors être calquée sur celle d'un arc type qui sera la courbe de même forme et d'extrémités les points d'abscisses 0 et 1 sur l'axe réel. Nous appellerons « module complexe type » le module complexe correspondant à l'arc type, et qui sera égal en général à :

$$\frac{r^*(i\omega\tau) - r^*(0)}{r^*(\infty) - r^*(0)}$$

Par ailleurs, nous avons appelé « module complexe réduit » l'une des fonctions $\frac{r^*(i\omega\tau)}{r^*(\infty)}$ ou $\frac{r^*(i\omega\tau) - r^*(0)}{r^*(\infty) - r^*(0)}$ suivant les cas, l'un des points d'arrêt de la courbe correspondante étant alors le point d'abscisse 1 sur l'axe réel.

Les propriétés que nous avons décrites ici pour le module complexe s'étendent immédiatement à la complaisance (l'inversion-symétrie étant une transformation biunivoque).

Ces propriétés, et en particulier celle d'unicité de la distribution du paramétrage, s'étendent également immédiatement à l'espace de Black (la correspondance $\log_0 h^*$, détermination d'ordre zéro du logarithme, étant également biunivoque).

Cette propriété d'unicité est d'une importance fondamentale et élargit considérablement la signification et la portée de la représentation des modules et complaisances complexes dans les espaces de Cole et Cole ou de Black.

Elle donne par ailleurs énormément d'intérêt à l'inventaire des courbes représentatives des divers

modèles rhéologiques que l'on peut imaginer, puisque lorsque l'on aura trouvé un modèle dont la courbe globale pourra être amenée en coïncidence avec la courbe globale expérimentale, ce modèle constituera la solution unique du problème, objet de ce paragraphe, de la synthèse d'un modèle rhéologique adéquat.

Nous allons donc procéder maintenant à un tel inventaire, de façon non exhaustive bien entendu.

3 APPLICATION AUX MODÈLES RHÉOLOGIQUES USUELS

Les propriétés générales des espaces de Cole et Cole et de Black se révèlent d'un intérêt tout particulier lorsqu'on les applique à la description du comportement des modèles rhéologiques classiques. Nous allons voir, en effet, que les courbes obtenues sont, pour les modèles élémentaires, des figures géométriques simples (essentiellement des cercles et des droites) dont le tracé relève de la règle et du compas. Les règles de groupements énoncées plus haut permettent alors de fixer rapidement l'allure des courbes représentatives de modèles plus compliqués.

3.1 Modèles mécaniques.

Nous nommons ainsi les modèles formés de l'association de ressorts et d'amortisseurs linéaires, et, plus spécialement, parmi ceux-ci, ceux formés de groupements en série et en parallèle de tels éléments.

Le tableau I (1) résume les différentes caractéristiques de ces modèles et de leurs représentations dans les espaces de Cole et Cole et de Black.

Si on note par R le ressort, A l'amortisseur, // un groupement en parallèle, et — un groupement en série, on voit que l'on passe rapidement des figures représentant R et A à celles représentant les groupements en série ou en parallèle de ces modèles élémentaires.

Dans l'espace de Cole et Cole, R est représenté par un point sur l'axe réel, A par un demi-axe imaginaire pur (supérieur pour le module, inférieur pour la complaisance).

Le module du modèle de Voigt $V = R//A$ est donc représenté par le même demi-axe imaginaire supérieur décalé de R sur l'axe des abscisses.

(1) Pages 246 et 247.

Sa complaisance est représentée par le demi-cercle inverse de cette demi-droite (et qui passe donc par 0).

De même, la complaisance du modèle de Maxwell, $M = R - A$, décrit la demi-droite représentative de la complaisance de A décalée de R^{-1} . Le module décrit le demi-cercle inverse. On décale les abscisses des points d'arrêt de ces deux demi-cercles en réalisant les groupements $V - R$ ou $M // R$. L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion étant un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion, le module et la complaisance de chacun de ces modèles décrivent tous deux des demi-cercles. Ceci établit immédiatement l'équivalence de ces deux modèles, que l'on réunit sous le nom de modèle de Zener.

Les groupements $V - A$ et $M // A$ sont également équivalents et dérivent des courbes qui ont l'allure de la figure f (tabl. I) (asymptotes à un demi-cercle à une extrémité, à une demi-droite verticale à l'autre).

Parmi les groupements de M et de V entre eux, signalons le plus utilisé qui est le modèle de Burgers: $B = V - M \sim M // M$ (le signe \sim signifiant équivalent).

Le modèle de Burgers est à élasticité instantanée et à fluage indéfini: son module décrit une courbe partant de l'origine et possédant un second point d'arrêt sur l'axe réel; sa complaisance décrit une courbe possédant un point d'arrêt sur l'axe réel et dont l'autre extrémité est asymptote à une demi-droite verticale.

Dans l'espace de Black, les figures correspondant à ces divers modèles sont présentées en regard des premières. Comme on l'a vu, les courbes représentatives du module et de la complaisance sont symétriques par rapport à l'origine (il s'agit des valeurs réduites, rapportées à l'élasticité instantanée ou à l'élasticité statique, suivant le cas). Elles peuvent donc être obtenues l'une de l'autre par simple superposition.

Deux points de ces courbes ayant même argument en valeur absolue correspondent à la même valeur du paramétrage $\omega \tau$.

Pour les modèles les plus simples, les équations polaires du module et de la complaisance ont des formes remarquables, le module du module ou de la complaisance étant fonction simple des lignes trigonométriques de l'argument θ . Il en est de même du paramétrage $\omega \tau$. Ceci permet de construire rapidement les courbes correspondantes à l'aide d'une

table des valeurs trigonométriques naturelles, et de les coter de même.

On remarque que, tant dans l'espace de Black que dans l'espace de Cole et Cole, les tangentes aux points d'arrêt font des angles droits avec l'axe réel, sauf lorsqu'ils sont rejetés à l'infini, la direction asymptotique étant perpendiculaire à l'axe réel dans l'espace de Cole et Cole, et la branche correspondante de la courbe étant asymptote à la droite $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'espace de Black.

Ceci tient au fait que, pour ces modèles, l'axe imaginaire du plan des p est intérieur au domaine d'holomorphie, le pôle le plus rapproché correspondant au temps de relaxation ou de retard le plus long étant situé à distance non nulle de l'origine, sur le demi-axe réel négatif, et que $r^*(p)$ et $f^*(p)$ étant univalentes, leur dérivée n'est jamais nulle. Il en résulte qu'au voisinage de l'origine, la transformation est conforme et conserve les angles et donc, dans le cas présent, celui de Δ^+ avec l'axe réel, soit $\frac{\pi}{2}$. Il en est de même à l'infini.

Il en sera de même de tout modèle dont les spectres des temps de retard ou de relaxation ne présentent pas de point d'accumulation à l'origine ou à l'infini. Ce sera en particulier le cas pour tout groupement série et parallèle comportant un nombre fini d'éléments.

3.2 Modèle parabolique et dérivés.

Ce sont des modèles dont le constituant élémentaire est le corps à fluage parabolique, dont la fonction fluage est de la forme:

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \quad \text{où} \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Son module complexe est donné par:

$$r^*(i\omega\tau) = (i\omega\tau)^k = [f^*(i\omega\tau)]^{-1} = (\omega\tau)^k e^{ik\frac{\pi}{2}}.$$

On constate que son argument $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ est constant. Son image dans le cas complexe est donc une droite passant par l'origine et faisant avec l'axe réel l'angle α [la dérivée de $r^*(p)$ est en effet infinie à l'origine, si bien que l'angle droit formé, dans le plan des p , par l'axe imaginaire et l'axe réel n'est pas conservé].

TABLEAU I

NOM ET ÉTAT	SYMBOLE	EXPRESSION DES MODULES r^* ET COMPLAISANCES f^* COMPLEXES	CONSTRUCTION DANS L'ESPACE des Cole	CONSTRUCTION DANS L'ESPACE de Black	ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA COURBE	PARAMÉTRAGE DE LA COURBE
					ÉQUATION POLAIRE DE LA COURBE	
a) Ressort linéaire (solide)	R	$r^* = R$	Point isolé sur l'axe réel	Point sur l'axe réel	—	$\omega \tau$ quelconque
		$f^* = R^{-1}$	Point isolé sur l'axe réel		—	$\omega \tau$ quelconque
b) Amortisseur linéaire (liquide)	A	$r^* = i \omega \eta$ ou $r^* = R (i \omega \tau)$	Demi-axe imaginaire pur > 0	Positions obtenues sans construction Paramétrage lu directement sur l'échelle log. des modèles réduits	$r_1 = 0$ $\theta = \frac{\pi}{2}$	$\omega \tau = \frac{r_2}{R} = \frac{ r^* }{R}$
		$f^* = (i \omega \tau)^{-1}$ ou $f^* = (R i \omega \tau)^{-1}$	Demi-axe imaginaire pur < 0		$f_1 = 0$ $\theta = -\frac{\pi}{2}$	$\omega \tau = \frac{1}{R f_2} = \frac{1}{R f^* }$
c) Modèle de Kelvin-Voigt (solide)	V = R//A	$r^* = R_0 (1 + i \omega \tau)$	Demi-droite perpendiculaire axe réel	Position et paramétrage donnés par table trigonométrique	$r_1 = R_0$ $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$	$\omega \tau = \operatorname{tg} \theta $
		$f^* = \frac{R_0^{-1}}{1 + i \omega \tau}$	Demi-cercle centré sur axe réel		$f_1^2 + f_2^2 - R_0^{-1} f_1 = 0$ $R_0 f^* = \cos \theta$	
d) Modèle de Maxwell (liquide)	M = R - A	$r^* = \frac{R_\infty}{1 + (i \omega \tau)^{-1}}$	Demi-cercle centré sur axe réel	Position et paramétrage donnés par table trigonométrique	$r_1^2 + r_2^2 - R_\infty r_1 = 0$ $\rho = \cos \theta$	$\omega \tau = \operatorname{cotg} \theta $
		$f^* = R_\infty^{-1} [1 + (i \omega \tau)^{-1}]$	Demi-droite perpendiculaire axe réel		$f_1 = R_0^{-1}$ $\varphi = \frac{1}{\cos \theta}$	
e) Modèle de Zener (solide)	V - R ou M//R	$r^* = R_0 + \frac{R_\infty - R_0}{(1 + i \omega \tau)^{-1}} = \frac{1 + i \omega \tau'}{R_0^{-1} + R_\infty^{-1} i \omega \tau'}$	Demi-cercle centré sur axe réel	—	$r_1^2 + r_2^2 - (R_\infty + R_0) r_1 + R_\infty R_0 = 0$ $\cos \theta = \frac{\rho + \rho_0 \rho^{-1}}{1 + \rho_0}$	$\omega \tau + \frac{\rho_0}{\omega \tau'} = (1 - \rho_0) \operatorname{cotg} \theta$
		$f^* = R_\infty^{-1} + \frac{R_0^{-1} - R_\infty^{-1}}{1 + i \omega \tau'} = \frac{1 + i \omega \tau''}{R_0 + R_\infty i \omega \tau''}$	Demi-cercle centré sur axe réel		$R_0 R_\infty (f_1^2 + f_2^2) - (R_\infty + R_0) f_1 + 1 = 0$ $\cos \theta = \frac{\varphi + \rho_0^{-1} \varphi}{1 + \rho_0^{-1}}$	
f) Modèle de « Zener L » (liquide)	V' - A' ou M''//A''	$r^* = R'' \left[\frac{1}{1 + (i \omega \tau'_1)^{-1}} + (i \omega \tau'_2) \right]$	De I c par addition du vecteur d'affixe $i \omega \tau'_2$	—	—	$\omega \tau''$ a même valeur en un point de la courbe qu'au point de même abscisse du Maxwell M' (dans l'espace de Cole)
		$f^* = R''^{-1} \left[\frac{1}{1 + i \omega \tau'_1} + \frac{1}{i \omega \tau'_2} \right]$	De I b par addition du vecteur d'affixe $[i \omega \tau'_2]^{-1}$			$\omega \tau'$ a même valeur en un point de la courbe qu'au point de même abscisse du Voigt V' (dans l'espace de Cole)
g) Modèle de « Burgers L » (liquide)	V' - M' ou M''//M''	$r^* = \frac{R'_1}{1 + (i \omega \tau'_1)^{-1}} + \frac{R'_2}{1 + (i \omega \tau'_2)^{-1}}$	Par addition de I d + I d	—	—	Dans l'espace de Cole $\omega \tau'$ a même valeur en un point de la courbe qu'au point de même abscisse du Zener S : V' - R'_1
		$f^* = R'_1^{-1} [1 + (i \omega \tau'_1)^{-1}] + \frac{R'_2^{-1}}{1 + i \omega \tau'_2}$	Par addition de I d et I c			
h) Modèle de « Burgers S » (solide)	V''//M' ou V'' - V''	$r^* = R'_1 (1 + i \omega \tau'_1) + \frac{R'_2}{1 + (i \omega \tau'_2)^{-1}}$	Par I c + I d	—	—	Dans l'espace de Cole $\omega \tau''$ a même valeur en un point de la courbe qu'au point de même abscisse du Zener S : M''//R'
		$f^* = \frac{R'_1^{-1}}{1 + i \omega \tau'_1} + \frac{R'_2^{-1}}{1 + i \omega \tau'_2}$	Par I c + I c			

TABLEAU I — (Figures)


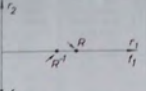
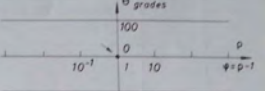

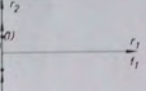
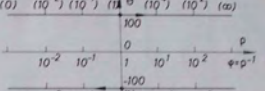

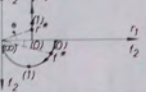
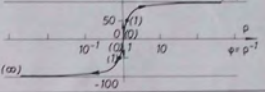

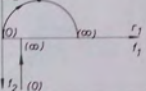
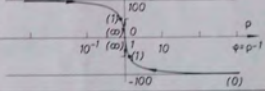
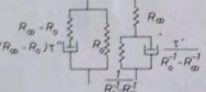
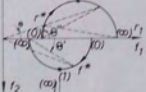
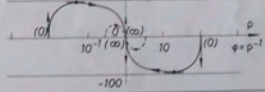
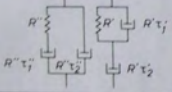
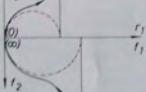
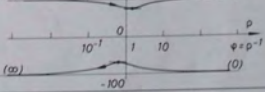
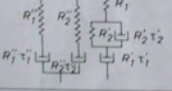
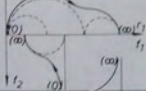
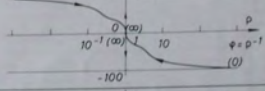
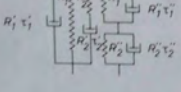
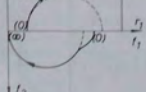
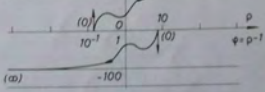
Iatogramme	Espace de Cole et Cole	Espace de Black
<p>a)</p> 		
<p>b)</p> 		
<p>c)</p> 		
<p>d)</p> 		
<p>e)</p> 		
<p>f)</p> 		
<p>g)</p> 		
<p>h)</p> 		

TABLEAU II

NOM ET ÉTAT	SYMBOLE	EXPRESSION DES MODULES r^* ET COORDONNÉES f^* COMPLEXES	CONSTRUCTION DANS L'ESPACE des Cole	CONSTRUCTION DANS L'ESPACE de Black	ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA COURBE		PARAMÉTRAGE DE LA COURBE
					ÉQUATION POLAIRE DE LA COURBE		
a)	P	$r^* = (i \omega + \tau)^2$ <small>cas 1</small>	A la règle	Droite horiz. Le paramétrage se déduit d'une échelle d'ordonnée $\pi/2$ par une X de centre 1 et de rapport $\pm k$	$r_2 = r_1 \lg x$; $x = k \frac{\pi}{2}$	$u \tau = \rho^{1/k}$	
		$r^* = (i \omega + \tau)^k$			$\rho = k \frac{\pi}{2}$		$\rho = R_2 / r^*$
b)	$C_0 = R_1 \cdot P$	$r^* = R_1 [1 + (i \omega + \tau)^2]$	A la règle	A l'aide d'une table trigonométrique. De même pour le paramétrage. Remarque : Deux points d'arguments équidistants de $\pi/2$ sont cotés par des valeurs de $\omega \tau$ inverses l'une de l'autre	$r_2 = (r_1 - R_1) \lg x$	$(\omega \tau)^k = \rho \frac{\sin \theta}{\sin x}$	
		$r^* = \frac{R_1}{1 + (i \omega + \tau)^k}$			Au compas	$\rho = \frac{\sin x}{\sin(x-\theta)}$	ou
c)	$C_0 = R_1 \cdot P$	$r^* = \frac{R_0}{1 + (i \omega + \tau)^k}$	Au compas	Deux points d'arguments équidistants de $\pi/2$ sont cotés par des valeurs de $\omega \tau$ inverses l'une de l'autre	$f_1 + f_1 - R_1' f_1 + R_1' f_0 \cotg x = 0$	$(\omega \tau)^k = \rho \frac{\sin \theta}{\sin x}$	
		$r^* = R_1^{-1} [1 + (i \omega + \tau)^k]$			A la règle	$\rho = \frac{\sin(x-\theta)}{\sin x}$	ou
d)	$C_0 = R_1$ ou C_0/R	$r^* = R_0 + \frac{R_0 - R_1}{1 + (i \omega + \tau)^k}$	Au compas	Idem.	$f_1 + f_1 - R_1' f_1 + R_1' f_0 \cotg x = 0$	$(\omega \tau)^k = \frac{\sin(x-\theta)}{\sin \theta} \frac{2\rho}{p}$	
		$r^* = R_1^2 + \frac{R_1^2 + R_1}{1 + (i \omega + \tau)^k}$			$\rho + \frac{2\rho}{p} = \frac{\sin(x-\theta) + 2\rho \sin(x-\theta)}{\sin x}$	ou	$(\omega \tau)^k = \frac{1}{p_0} (\omega \tau)^k$
e)	Modèle biparabolique série (liquide à renversement de fluage complète)	$r^* = \frac{R_0}{1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k}$	Par inversion à partir de f^*	Par points calculés sur f^*	Pas simple	—	
		$r^* = R_1^2 [1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k]$	Par addition vectorielle de II α et II ϵ				Pas simple
f)	Modèle biparabolique limite (solide)	$r^* = R_0 + \frac{R_0 - R_1}{1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k}$	Par translation à partir de II ϵ	Par points calculés	—	—	
		$r^* = \left[R_0 + \frac{R_0 - R_1}{1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k} \right]^{-1}$	Par inversion de r^*				
g)	Modèle biparabolique parallèle à élasticité instantanée	$r^* = \frac{R_0}{1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k}$	Par additions vectorielles et inversions-symétries successives	Par points calculés	—	—	
		$r^* = R_1^2 [1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k]^{-1}$					
h)	Modèle biparabolique parallèle limite	$r^* = R_0 + \frac{R_0 - R_1}{1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k}$	Par translation à partir de II ρ	Par points calculés	—	—	
		$r^* = \left[R_0 + \frac{R_0 - R_1}{1 + k(i \omega + \tau)^2 + (i \omega + \tau)^k} \right]^{-1}$					

TABLEAU II — (Figures)


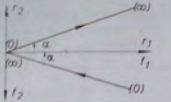
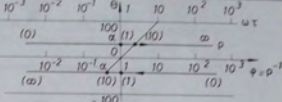

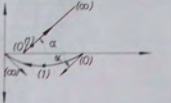
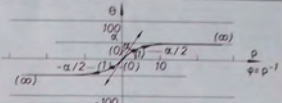

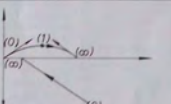
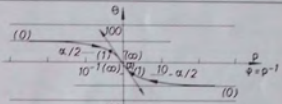
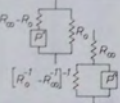
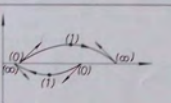
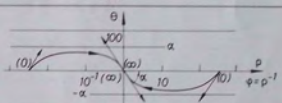

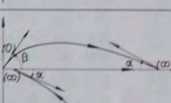
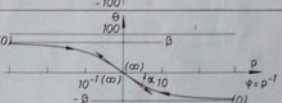
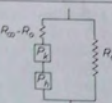
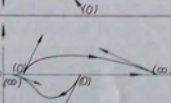
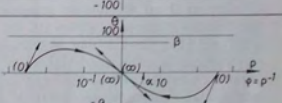

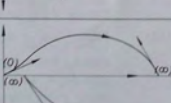
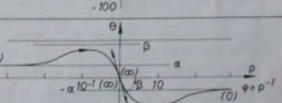
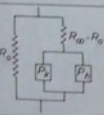
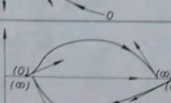
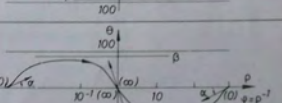
Idiogramme	Espace de Cole et Cole	Espace de Bode
<p>a)</p> 		
<p>b)</p> 		
<p>c)</p> 		
<p>d)</p> 		
<p>e)</p> 		
<p>f)</p> 		
<p>g)</p> 		
<p>h)</p> 		

TABLEAU III

NOM ET ÉTAT	SYMBOLE	EXPRESSION DES MODULES r^* ET COMPLEXANES f^* COMPLEXES	CONSTRUCTION DANS L'ESPACE des Cole	CONSTRUCTION DANS L'ESPACE de Black	ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA COURBE	PARAMÉTRAGE DE LA COURBE
					ÉQUATION POLAIRE DE LA COURBE	
1) Maxwell puissance k	M ^k	$r^* = \frac{R_0}{[1 + (i\omega\tau)^2]^k}$ $0 < k < 1$ $f^* = R_0^k [1 + (i\omega\tau)^2]^{-k}$		Par homothétie de centre k et de rapport $\pm k$ à partir de la courbe du Maxwell (paramétrage conservé des K)		
2) Voigt puissance k	V ^k	$r^* = R_0 [1 + (i\omega\tau)^2]^k$ $0 < k < 1$ $f^* = R_0^k [1 + (i\omega\tau)^2]^k$		A partir de la courbe du Voigt par homothétie de rapport $\pm k$		
3) Modèle Erbelle (Dillard, Hamon, Crouard...)	Ech	$r^* = R_0 \frac{(i\omega\tau)^{2N}}{(1 + i\omega\tau)^{2N}} \coth \left\{ \frac{R_0}{R_0} \operatorname{Arg sh} [(i\omega\tau)^{2N}] \right\}$ $= \frac{R_0}{[1 + (i\omega\tau)^2]^{2N}} \left[\frac{2}{1 - (i\omega\tau)^{2N} + (1 + i\omega\tau)^{2N}} r_0^* \right]$ $R_0 = 2R_1 \quad R_0 = R_1/N$		M ^{2N} jusque pour $p \approx R_0$ Pour $p = R_0$ la tangente fait l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe réel		

Il contient comme cas particulier le ressort pur, pour $k = 0$, et l'amortisseur newtonien, pour $k = 1$.

Il en résulte que les groupements série et parallèle de modèles de ce type contiennent comme cas particuliers des groupements série et parallèle des modèles mécaniques.

Comme il est possible de grouper des modèles paraboliques d'exposants différents, dont chacun est à lui seul équivalent à une distribution infinie et continue de modèles mécaniques en série ou en parallèle, on voit que les modèles basés sur l'élément parabolique pourraient se montrer extrêmement souples et se prêter à la synthèse du modèle correspondant à une courbe expérimentale donnée moyennant un nombre d'éléments constitutifs nettement plus petit.

Le tableau II (1) donne quelques exemples de modèles basés sur l'élément parabolique.

Les combinaisons d'un modèle parabolique avec un ressort en série ou en parallèle, que nous groupons sous le nom de modèles de Cole et Cole,

constituent une extension immédiate des modèles de Voigt et de Maxwell, les demi-cercles devenant des arcs de cercles sous-tendus par des angles au centre égaux à $k\pi$. Les tangentes aux points d'arrêt font avec l'axe réel des angles égaux à $k\frac{\pi}{2}$.


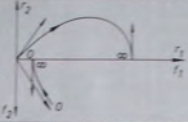
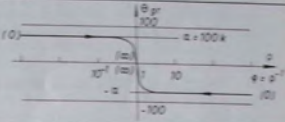

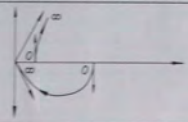
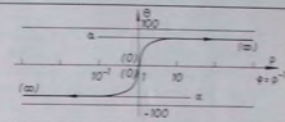
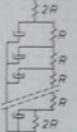
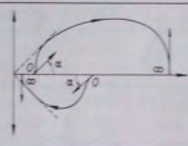
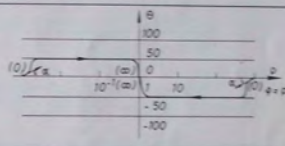
Lorsqu'on groupe en série des modèles paraboliques non dégénérés de degrés différents, le module et la complaisance s'expriment en fonction d'une somme de termes de la forme $(i\omega\tau)^{-k_j}$ ($0 < k_j < 1$). Il en résulte que le comportement à l'origine ($\omega = 0$) est commandé par l'élément correspondant à k_j maximal, soit k_n . La tangente fait alors l'angle $k_n\frac{\pi}{2}$ avec l'axe réel. Le comportement à l'infini ($\omega \rightarrow \infty$) est commandé par k_j minimal, soit k_1 . La tangente fait alors l'angle $k_1\frac{\pi}{2}$ avec l'axe réel ($k_1 < \dots < k_j < \dots < k_n$).

Le modèle e du tableau II, que nous appelons modèle biparabolique, est un exemple de ce type de groupement.

Si, au contraire, on effectue en parallèle le groupement de modèles paraboliques de degrés différents, le module et la complaisance

(1) Pages 248, 249.

TABLEAU III — (Figures)

Idiogramme	Espace de Cole et Cole	Espace de Bloch
<p>a)</p> 		
<p>b)</p> 		
<p>c)</p>  <p>(N)</p>		

s'exprimeront en fonction de termes de la forme $(i\omega\tau)^{k_j}$ ($0 < k_j \leq 1$). Il en résulte que le comportement à l'origine est commandé par k_j minimal, soit k_1 , et la tangente en r_1 fera l'angle $k_1 \frac{\pi}{2}$ avec l'axe réel. Le comportement à l'infini sera commandé par k_j maximal, soit k_n , et la tangente en r_n fera l'angle $k_n \frac{\pi}{2}$ avec l'axe réel.

La courbe des modules sera donc plus « gonflée » à gauche qu'à droite pour un corps justiciable d'un modèle du type série, et au contraire plus « gonflée » à droite qu'à gauche pour un modèle du type parallèle.

Lorsque le modèle série présente une élasticité instantanée et une élasticité statique respectivement non infinie et non nulle, les courbes au voisinage des points d'arrêt sont négatives toutes deux pour la courbe du module complexe. Pour la courbe de la complaisance (représentée dans le 4^e quadrant), cette courbe est négative au point d'arrêt correspondant à l'élasticité instantanée ($\omega \rightarrow \infty$), et positive au point d'arrêt correspondant à l'élasticité statique. Pour le biparabolique série, la courbe des

complaisances présente donc un point d'inflexion, alors que la courbe des modules n'en présente pas.

Ces propriétés sont également vraies pour le groupement en parallèle, mais les rôles joués par la complaisance et le module, d'une part, entre l'élasticité instantanée et l'élasticité statique, d'autre part, y sont inversés.

Ce caractère de dualité entre groupement série et groupement parallèle, d'une part, courbe des complaisances et courbe des modules, d'autre part, est d'ailleurs général.

3.3 Modèles divers.

Le tableau III présente quelques modèles particuliers n'entrant pas dans les catégories ci-dessus.

Tout d'abord, ce que nous avons appelé les « modèles de Voigt et de Maxwell puissance k ».

Leur équation est obtenue en élevant à la puissance k ($0 < k < 1$) les équations du modèle de Maxwell réduit et du modèle de Voigt réduit respectivement (le second de ces modèles a, par

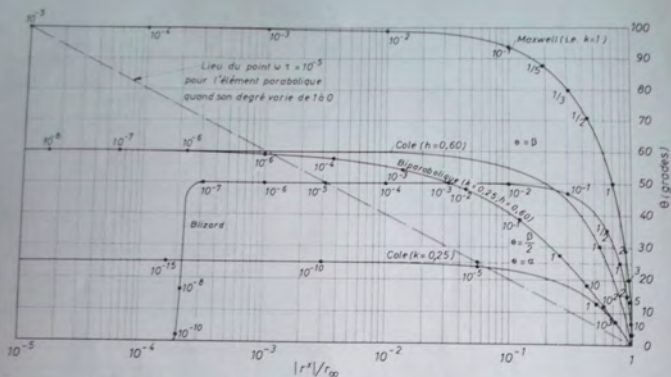


Fig. 5. — Modules complexes réduits des modèles de Maxwell, de Cole, de Blizard, et biparabolique représentés, avec leur paramétrage, dans l'espace de Black réduit

exemple, été utilisé par Cole et Cole pour représenter des résultats de compliance diélectrique). Leurs courbes représentatives s'obtiennent immédiatement, dans l'espace de Black, par homothétie de rapport k et de centre $(1, 0)$ sur la courbe du modèle mécanique auquel ils sont associés.

Ils ont un peu l'allure du modèle biparabolique dont l'un des éléments serait un amortisseur. Ils en diffèrent cependant par le fait que les comportements à l'origine et à l'infini sont inversés.

On pourrait construire de même les « Cole puissance h ». Pour le modèle série, les tangentes aux points d'arrêt dans l'espace de Cole et Cole seraient respectivement $kh \frac{\pi}{2}$ pour $\omega = 0$ et $k \frac{\pi}{2}$ pour $\omega \rightarrow \infty$. Leur courbe représentative dans l'espace de Black se déduit immédiatement de celle du modèle de Cole et Cole associé.

On peut, bien entendu, combiner à volonté de tels modèles, et généraliser autant qu'on le veut ces méthodes de construction, dans les limites fixées par les restrictions physiques imposées au comportement de ces modèles.

Signalons enfin un modèle utilisé par plusieurs auteurs et connu sous le nom de modèle de Blizard,

ou de Rouse, ou de Crussard, ou encore de modèle « échelle ».

Il s'agit d'un modèle mécanique à interactions.

Son équation s'écrit :

$$r^* = R_{\infty} \frac{(i \omega \tau)^{1/2}}{(1 + i \omega \tau)^{1/2}} \coth \left\{ \frac{R_{\infty}}{R_0} \operatorname{Arg} \operatorname{sh} [(i \omega \tau)^{1/2}] \right\},$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$r^* = R_{\infty} \frac{1}{[1 + (i \omega \tau)^{-1}]^{1/2}} \times \left(1 - \frac{2}{1 - [(i \omega \tau)^{1/2} + (1 + i \omega \tau)^{1/2}]^{2/R_0}} \right)$$

avec $R_{\infty} = 2R$, $R_0 = \frac{R}{N}$ (N étant le nombre de ressorts, assez grand en général).

Mise sous cette deuxième forme, l'équation de ce modèle montre que, pour N assez grand, le modèle se comporte comme un modèle de Maxwell à la puissance $1/2$. Ce comportement se modifie pour ω voisin de zéro, à l'extrême voisinage du module statique.

4 INTERVENTION DE LA TEMPÉRATURE

Les corps visco-élastiques linéaires ont, en général, un comportement qui dépend de la température. Les modules et complaisances complexes sont donc fonction, non seulement de la fréquence, mais encore de la température.

Si l'on trace dans le plan complexe les courbes représentatives des modules (ou complaisances) complexes à température constante, on pourrait s'attendre à ce que, *a priori*, les différentes isothermes forment une famille de courbes occupant tout ou partie du quart de plan où le module (ou la complaisance) est défini.

Or, l'expérience montre que, dans la plupart des cas, ces matériaux obéissent à une loi de réciprocité entre la fréquence et la température.

Dans le plan complexe, cette propriété se traduit par le fait que toutes les isothermes ci-dessus se recouvrent, pour former une courbe unique, globalement indépendante de la fréquence et de la température, dont dépend seule la position sur cette courbe, du point représentatif : lorsque la fréquence, ou la température, ou les deux, varient, le point représentatif du module complexe se déplace, mais est assujéti à rester sur la courbe globale ainsi définie.

Cette propriété conduit à des simplifications considérables dans les applications. En particulier, du point de vue analytique, il est aisé de montrer que l'existence de cette propriété impose que la fonction $h^* = h^*(i\omega, T)$ représentant les variations du module (ou de la complaisance) complexe en fonction de la pulsation et de la température, et qui est donc *a priori* une fonction de deux variables, se réduit à une fonction :

$$h^* = h^*[i\omega\tau(T)]$$

d'une seule variable $\omega\tau$, dans laquelle $\tau(T)$ seul est fonction de la température. Une telle variable prend le nom de « variable réduite ».

Il en résulte qu'en fonction du temps et de la température, les fonctions fluage et relaxation s'expriment, elles aussi, en fonction d'une variable réduite de la forme t/τ .

Lorsque l'on veut savoir si un matériau visco-élastique présente ou non cette propriété de réciprocité fréquence-température, la représentation dans le plan complexe constitue donc un critère particulièrement commode. Il suffit de reporter

dans le plan complexe les valeurs expérimentales obtenues pour différentes fréquences et différentes températures : si ces points se répartissent sur une courbe unique, la propriété est vérifiée. Pour conclure qu'il en est ainsi, il est bien entendu nécessaire que les nombres de points expérimentaux soient, pour chaque température, en nombre suffisamment élevé, et que les isothermes ainsi obtenues soient elles-mêmes suffisamment nombreuses et serrées. On constate alors que les isothermes se superposent, en se décalant progressivement, sur la courbe globale.

Aux températures suffisamment élevées, ceci peut n'être réalisé qu'en première approximation, ou même pas du tout à partir d'un certain moment.

Pour les substances macromoléculaires, on obtiendra alors en général, dans la zone des températures élevées, un meilleur ajustement des résultats expérimentaux à une courbe globale unique en portant dans le plan complexe la quantité $\frac{r^*}{\rho} T$ ou $\rho T f^*(i\omega)$ dans laquelle r^* est un module complexe, f^* une complaisance complexe, et ρ la masse spécifique du matériau à la température absolue T .

Les deux traitements sont d'ailleurs pratiquement identiques pour les intervalles de température non trop grands. Le deuxième devient cependant indispensable aux températures les plus élevées, lorsque le matériau présente un module statique du type « élasticité caoutchoutique ». Ce terme tient compte en effet de l'origine entropique de ce type d'élasticité : le module d'Young est alors proportionnel à la température absolue du fait que, dans l'expression de la variation d'énergie libre au cours de la déformation, la variation d'énergie interne (qui est essentiellement due aux déformations intervenant dans l'élasticité instantanée) peut être considérée comme négligeable par rapport au terme TdS (l'agitation thermique est alors, en effet, suffisante pour que les variations de configuration des unités cinétiques de grandes dimensions aient une part prépondérante dans la déformation du matériau, comme le montre le rapport, de l'ordre de 1/5 000, du module statique d'un caoutchouc à son module instantané).

Il en résulte donc que ce facteur ne doit plus être utilisé pour la partie de la courbe voisine du module instantané (les sources de déformation d'origine entropique étant gelées faute d'agitation thermique suffisante, l'énergie de déformation provient dans sa quasi-totalité de la variation, à

peu près indépendante de la température, de l'énergie interne qui devient alors prépondérante par rapport au terme $T\delta S$.

Lorsque l'on a déterminé, par l'analyse de la courbe globale, l'expression analytique du module ou de la compliance complexes en fonction de la variable réduite ($\omega \tau$), on en déduit les variations de $\tau(T)$ en fonction de la température par la relation :

$$2\pi\tau(T) = \frac{(\omega\tau)}{N(T)}$$

où N est, à la température T , la fréquence pour laquelle le module complexe a la valeur calculée par l'expression analytique pour la valeur de $\omega \tau$ choisie (par exemple $\omega \tau = 10^{-2}$).

On s'assure que τ est défini de façon unique le long d'une isotherme en répétant le calcul pour un nombre suffisant de valeurs de $\omega \tau$. La valeur retenue pour $\tau(T)$ sera alors la moyenne, et comportera l'indication de l'étendue de la dispersion. Si celle-ci est inacceptable, c'est que le modèle doit être perfectionné.

Lorsque l'on ne dispose pas d'expression analytique, on peut déterminer l'allure des variations de $\tau(T)$ en prenant une température de référence, ce qui nous fait retrouver le traitement de Ferry bien connu. $\tau(T)$ n'est alors pas entièrement déterminé par ce traitement puisqu'on ne peut alors calculer que le rapport :

$$a_T(T) = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)} = \left[\frac{N(T_0)}{N(T)} \right]_{\substack{E^* = C^* \\ \text{ou} \\ \omega\tau = C^*}}$$

qui est précisément la valeur de la variable a_T de Ferry.

5 APPLICATION A QUELQUES EXEMPLES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

La figure 6 présente quelques résultats obtenus expérimentalement par divers auteurs sur des matériaux constitués d'hydrocarbures lourds (bitumes, goudrons) mélangés ou non à des granulats minéraux.

Sur ces matériaux, on constate immédiatement que la réciprocity fréquence-température est vérifiée, la courbe étant globalement invariante par rapport à ce paramètre.

On constate de plus que les comportements sont du type biparabolique série, la valeur de k variant de 0,20 à 0,40 environ, suivant les matériaux, et la valeur de h de 0,25 à 0,90.

Comme le montre la comparaison avec des modèles biparaboliques cotés en $\omega \tau$, on voit que ces variations de forme des courbes obtenues s'accompagnent de modifications considérables dans ce que l'on appelle la « susceptibilité » à la température ou à la fréquence.

Certains de ces matériaux qui ont subi un vieillissement naturel se caractérisent par leur situation dans le bas du graphique ($h \approx k \approx 0,25$). Ceci recoupe bien le fait connu que la susceptibilité thermique diminue au cours du vieillissement.

La même propriété se retrouve sur les bitumes dits « soufflés », oxydés artificiellement par barbotage d'air à chaud (le bitume étant alors liquide et peu visqueux), et on constate que leur courbe est très proche de celle des bitumes vieillis. Il semble donc que le vieillissement soit dû, au moins en partie, à une oxydation. Il est peut-être possible d'en conclure alors que les bitumes préalablement oxydés vieilliront moins vite que les autres, ou même que les matériaux dont la courbe se situe vers le bas du graphique seront non seulement relativement peu susceptibles à la température, mais encore au vieillissement.

Un autre exemple est constitué par les résultats obtenus par Ferry sur deux caoutchoucs, l'un vulcanisé au soufre, l'autre réticulé par irradiation gamma (1), et sur le polyisobutylène.

La forme des courbes obtenues rappelle celle du modèle échelle, mais s'en écarte par les valeurs des exposants.

Le comportement asymptotique pour $\omega \rightarrow 0$ est parabolique, ce qui est en accord avec le modèle de Cole et Cole parallèle utilisé par M. THOMAS pour rendre compte d'essais de relaxation sur des matériaux similaires.

A l'aide des résultats du chapitre 4, on voit d'ailleurs que ce modèle pourrait assez aisément être perfectionné, d'une part, par l'introduction d'un deuxième élément parabolique en parallèle avec le premier et de degré supérieur à 0,5 qui rendrait compte du fait que les courbes dépassent la droite $\theta = 50$ grades, et, d'autre part, par l'introduction

(1) Ces résultats nous ont été fort aimablement communiqués par M. THOMAS.

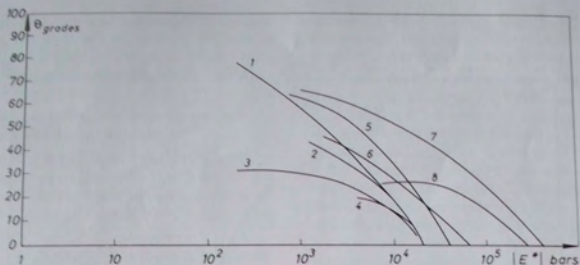


Fig. 6. — Espace de Black : modules d'Young complexes de divers hydrocarbures (d'après des résultats obtenus par différents auteurs)

- 1 : bitume - newtonien ; 2 : bitume - routier ; 3 : bitume soufflé ;
 4 : bitume extrait d'un enrobé vieilli cinq ans sous le trafic ; 5 : goudron de houille ;
 6 : asphalte naturel (mélange naturel de bitume et de farine minérale) ; 7 : béton bitumineux ;
 8 : autre béton bitumineux vieilli huit ans sous le trafic

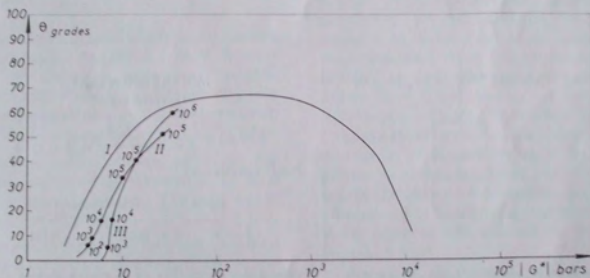


Fig. 7. — Espace de Black : modules de cisaillement complexes de divers élastomères (d'après des résultats de Ferry)

- 1 : polyisobutylène ; 2 : caoutchouc naturel réticulé par rayons X ;
 3 : caoutchouc naturel vulcanisé au soufre

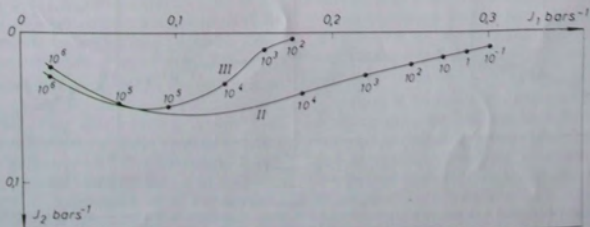


Fig. 8. — Espace de Cole : complaisances complexes de deux caoutchoucs naturels

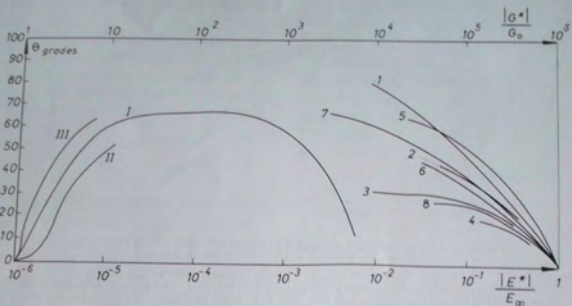
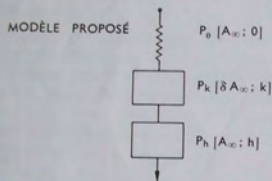


Fig. 9. — Espace de Black : modules complexes réduits des matériaux précédents (rapportés à l'élasticité instantanée pour les hydrocarbures, et à l'élasticité statique pour les élastomères)



[Courbe cotée en valeurs de la variable réduite $\omega \tau$ (depuis $1/3 \cdot 10^{-3}$ jusqu'à $3 \cdot 10^3$)]

MODULE COMPLEXE représenté par

$$E^*(i\omega) = \frac{E_{\infty}}{1 + \delta(i\omega\tau)^k + (i\omega\tau)^h}$$

Points calculés par

$$E_{\infty} = \frac{1}{A_0} = 405\,000 \text{ bars;}$$

$$\delta = 2; \quad k = 0,25; \quad h = 0,60;$$

valeurs des paramètres de la courbe globale déterminées à partir de la courbe expérimentale.

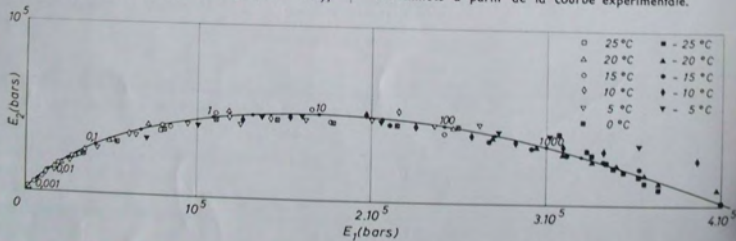


Fig. 10. — Espace de Cole
Exemple d'ajustement d'un modèle biparabolique à des résultats expérimentaux obtenus sur un béton bitumineux. La réciprocity fréquence-température apparaît directement.

d'un ressort en série, rendant compte de l'élasticité instantanée de tels élastomères, dont on sait que le module correspondant est de l'ordre de 30 000 bars, comme l'indiquent, par exemple, les résultats obtenus par NOLLE.

Sur tous les exemples ici présentés, on constate l'existence d'une élasticité instantanée.

Ceci, qui est dû à la constitution physique de la matière, est un résultat général. Les modèles qui sont dépourvus d'élasticité instantanée n'ont donc d'intérêt que pour l'introduction dans des groupements.

Par contre, il n'y aura pas toujours forcément de module statique, beaucoup de matériaux visco-élastiques pouvant présenter un comportement asymptotique de liquide quand $\omega \rightarrow$ tend vers zéro.

CONCLUSION

Nous espérons avoir réussi à faire sentir l'intérêt présenté par les espaces de Cole et Cole et de Black pour l'étude des corps visco-élastiques linéaires, notamment pour la synthèse de modèles rhéologiques rendant compte quantitativement des comportements observés à l'échelle macroscopique.

Il faut insister sur ce dernier point, du fait que dans la construction d'un tel modèle, on ne se place, tout au moins au départ, que d'un point de vue purement phénoménologique.

Il faut également remarquer que cette synthèse n'est que celle d'un modèle mathématique, et que la position du rhéologue est ici beaucoup plus agréable que celle de l'électricien cherchant à réaliser la synthèse d'un réseau électrique devant posséder un comportement prédéterminé, et qui ne dispose pour cela que de résistances, de selfs et de capacités dont les propriétés, transposées dans le domaine électrique, correspondent à celles des éléments mécaniques étudiés plus haut.

Le rhéologue n'est pas soumis à ces restrictions d'ordre physique, puisqu'il ne cherche pas à réaliser un objet concret, mais simplement à donner une expression mathématique rendant compte quantitativement du comportement d'un matériau. Il est clair que, dans cette perspective, tout modèle « mathématique » satisfaisant aux restrictions, d'ailleurs très larges, imposées par la thermodynamique des matériaux visco-élastiques linéaires, peut être considéré comme satisfaisant, les seuls

critères restant l'adéquation aux résultats, la souplesse et la commodité (c'est-à-dire, en dernière analyse, l'économie des paramètres).

Dans la mesure toutefois où cette recherche d'un modèle n'est pas forcément liée à la synthèse d'un modèle « mécanique », dans le sens restrictif où nous l'avons défini, il peut arriver que l'on puisse envisager de relier les résultats de cette synthèse à des considérations physiques sur la structure du matériau et sur les mécanismes de déformation. Il semble que ceci ne devra se faire qu'après coup, de façon à se laisser guider par la forme mathématique des résultats obtenus, sous peine, au lieu d'explicitier les comportements macroscopiques par les phénomènes microscopiques, de ne faire qu'introduire à l'échelle microscopique les comportements qui nous sont familiers à l'échelle macroscopique.

Une précision fera mieux sentir la difficulté : on sait que le comportement visco-élastique linéaire dépend de deux fonctions caractéristiques indépendantes, qui peuvent être, par exemple, les modules de cisaillement et de compressibilité. Ces deux fonctions étant indépendantes peuvent être représentées par des modèles mécaniques fort différents. Or, ces fonctions caractérisent toutes deux le même élément de matière qui ne peut donc être conçu sous forme de deux groupements différents de ressorts et d'amortisseurs, si bien qu'une interprétation éventuelle basée sur ces groupements pourra se montrer très hasardeuse, comme le montrent les résultats de la démarche contraire qui aboutissent à des résultats très spéciaux et de généralité fort limitée.

Il semble que la difficulté soit levée si l'on se contente de la représentation mathématique, qui devra alors être la plus simple possible, sans chercher à la ramener à un modèle purement mécanique. Ce modèle mathématique pourra alors être conçu sans difficulté comme représentant deux aspects, parmi d'autres, de la même réalité physique et laissera par conséquent le champ libre à une interprétation physique véritable.

Dans la mesure où la construction d'un modèle mathématique adéquat est justement une condition nécessaire et préalable à toute interprétation physique (qui ne peut évidemment être faite sur la masse de données numériques que constituent les résultats bruts de l'expérimentation), il apparaît que les facilités que donnent, pour ce faire, les espaces complexes dont nous avons esquissé les propriétés, devraient se montrer utiles, aussi bien au physicien

soucieux d'analyser le comportement profond de la matière, qu'au technicien devant prévoir le comportement macroscopique, tant statique que dynamique, d'une structure dans laquelle figurent des matériaux visco-élastiques, dont il devra faire entrer le comportement dans les équations du problème particulier qu'il a à résoudre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. S. COLE et R. H. COLE. — *Dispersion and absorption in dielectrics*. J. Chem. Phys., 0,341 (1941).
- [2] H. A. KRAMERS. — *La diffusion de la lumière par les atomes*. Atti Cong. dei Fisici, Como, Conv. 545 (1927).
- [3] D. W. DAVIDSON et R. H. COLE. — *Dielectrics relaxation in glycerol, propylene and n-propanol*. J. Chem. Phys., vol. 19, n° 12, pp. 1484-1490 (décembre 1951).
- [4] B. GROSS. — *Ladder structures for representation of viscoelastic systems*. J. of Polymer Science, vol. XX, pp. 123-131 (1956).
- [5] C. HUET. — *Étude par une méthode d'impédance du comportement visco-élastique des matériaux hydrocarbonés*. Thèse, Paris (1963); Annales des Ponts et Chaussées (décembre 1965).
- [6] B. PERSOZ et alii. — *Introduction à l'étude de la rhéologie*. Éditions Dunod (1960).
- [7] J. MANDEL. — *Sur les corps visco-élastiques à comportement linéaire*. C.R. A.Sc., t. 241, pp. 1910-1912 (19 décembre 1955).
- [8] J. MANDEL. — *Application du calcul opérationnel à l'étude des corps visco-élastiques*. Cahier du Groupe Français d'Études de Rhéologie, t. III, n° 4 (1958).
- [9] J. MANDEL. — *Mécanique des milieux continus*, t. II, annexe XXI, Gauthier-Villars, éditeur (1966).
- [10] H. CARTAN. — *Théorie des fonctions analytiques*. Hermann (1961).

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS VISCO-ÉLASTIQUES DES BÉTONS BITUMINEUX PAR UNE MÉTHODE D'ÉBRANLEMENTS PAR CHOC (1)

par W. BISMUTH et R. BLANC

RÉSUMÉ

On détermine, par une méthode d'ébranlements brefs, la vitesse et l'amortissement d'ondes longitudinales se propageant dans les bétons bitumineux.

Le montage expérimental permet d'enregistrer en fonction du temps le déplacement de l'extrémité libre d'un barreau lorsque l'autre extrémité reçoit une percussion axiale.

On en tire directement la vitesse de propagation de l'onde. Par différentiation de la fonction déplacement, on obtient la forme de l'impulsion de contrainte et l'on en déduit, moyennant des hypothèses que l'on précise, l'amortissement dans le matériau étudié.

INTRODUCTION

Le but de notre travail a été d'étudier la vitesse de propagation et l'amortissement d'une onde longitudinale se propageant dans des barreaux de différents bétons bitumineux par une méthode d'ébranlements brefs.

1

PRINCIPE

On produit à l'extrémité C d'un barreau cylindrique AC une percussion axiale qui engendre la propagation d'une impulsion de compression (fig. 1). Si la pression n'excède pas la limite d'élasticité du barreau, la vitesse de propagation d'une onde plane sera $c = \sqrt{E/\rho}$. Cette relation suppose que la

pression est uniforme sur toute section transversale du barreau; ceci ne peut être vrai que pour des impulsions longues par rapport au diamètre de la barre.

Pendant le temps dt où la force est appliquée, une longueur $c \cdot dt$ est comprimée et le reste est au repos. L'impulsion de contrainte se propagera le long de la barre avec la vitesse c . Lorsque cette impulsion atteint l'autre extrémité libre A du barreau, elle se réfléchit et on montre qu'elle donne en retour une impulsion de dilatation, laquelle se réfléchit à son tour sur l'extrémité initiale B en donnant une nouvelle impulsion de compression et le processus recommence (fig. 2). L'impulsion parcourra un aller et retour de la barre de longueur l en un temps $2l/c$. D'où un procédé sûr et simple de mesure de la vitesse de propagation c de l'onde de contrainte dans le barreau.

En réalité, au cours de sa propagation dans la barre, la longueur de l'impulsion croît avec la distance parcourue, comme conséquence du frottement interne. Nous en tirerons un procédé de calcul de l'amortissement α .

2

MONTAGE EXPÉRIMENTAL

La figure 3 montre le schéma de l'ensemble et la figure 4 une photographie du montage. Il est semblable dans son principe initial à celui décrit par DAVIES.

Les impulsions sont produites à une extrémité du barreau par un marteau pendulaire, et les déplacements de l'autre extrémité sont décelés par un capteur capacitif.

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 20 janvier 1966.

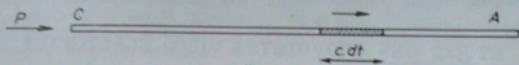


Fig. 1

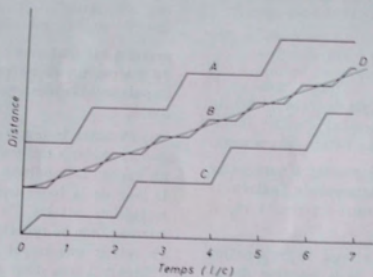


Fig. 2. — Diagrammes schématiques déplacement-temps des extrémités libres A et C, du point milieu B et du centre de gravité D du barreau

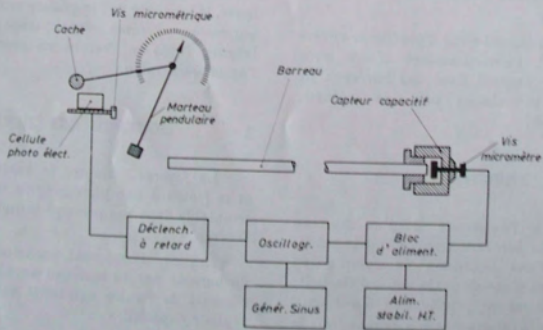


Fig. 3. — Schéma synoptique

2.1 Marteau pendulaire.

Il est monté sur un socle à vis calantes, muni d'un niveau. On peut ainsi régler aisément sa position de manière que le vecteur percussion soit bien porté par l'axe du barreau.

Afin de pouvoir visualiser le début du phénomène ou tel tronçon ultérieur que l'on désire, il est donc nécessaire de pouvoir introduire à volonté un nouveau retard faible et précis, dans le déclenchement de l'oscillographe. La gamme de ce retard additif devra s'étendre d'une fraction de la durée

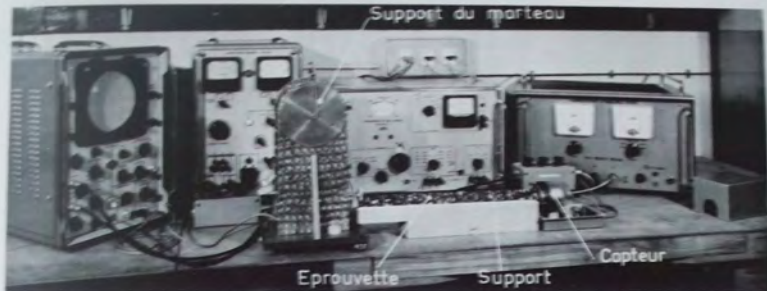


Fig. 4. — Photographie du montage

L'axe de rotation du marteau est monté sur de petits roulements à billes. Une aiguille solidaire de cet axe permet de repérer sa rotation par rapport à une graduation fixe : on peut de la sorte reproduire des chocs de même énergie.

2.2 Cellule photo-électrique.

Un cache est solidaire de l'axe du marteau. Il permet, un peu avant la position du choc, de couper le flux lumineux fourni par une petite ampoule électrique à une cellule photorésistante.

La fixation approuvée du cache permet un premier réglage de l'obturation. Un réglage fin est obtenu par déplacement de l'ensemble cellule-source par une vis micrométrique.

2.3 Déclencheur à retard.

Le dispositif précédent fournit un élément dont la résistance électrique subit une élévation brusque (de quelques dizaines d'ohms à quelques dizaines de kilohms) à un instant aussi voisin que l'on veut de celui du choc. Toutefois, cet écart de temps dépend de la vitesse du marteau, donc de l'énergie du choc.

de balayage de l'écran de l'oscillographe à plusieurs fois cette durée. Ce résultat est obtenu par le dispositif électronique suivant que nous avons conçu à cet effet (fig. 5). Il fournit une impulsion électrique avec un retard fonction directe de la constante de temps RC, choisie par ajustement du potentiomètre R.

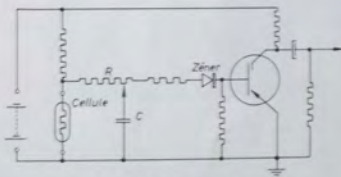


Fig. 5. — Déclencheur à retard

2.4 Le capteur capacitif.

Le capteur capacitif plan-parallèle représenté sur la figure 6 fonctionne sur le même principe que celui décrit par DAVIES. Toutefois, d'importantes modifications ont été apportées pour tenir compte de la section à peu près carrée du barreau, de son hétérogénéité, de l'imprécision de ses cotes, de sa

tendance à la fois à fluer sous une pression faible et à se fissurer, le plus souvent invisiblement à l'intérieur, sous une contrainte plus élevée.

maintient l'armature isolée parallèle à l'armature à la masse constituée par l'extrémité métallisée du bout de la barre.

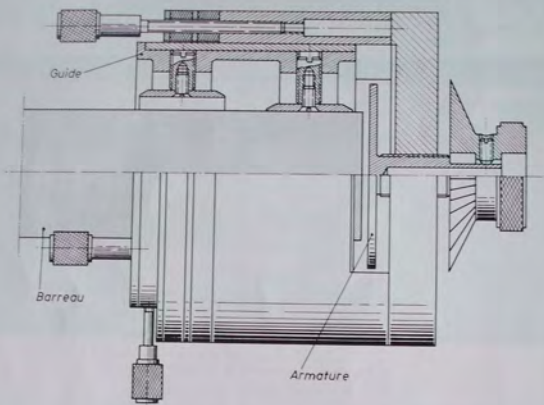


Fig. 6. — Le capteur capacitif

Sur le barreau un guide cylindrique est fixé à l'aide de deux ensembles de quatre vis à 90°, dont les têtes sont des rondelles libres en rotation : les quatre antérieures recouvertes de caoutchouc, les quatre postérieures striées. Leur serrage adéquat

La distance interélectrode en fin de course du condensateur ainsi formé est ajustable par vissage de l'armature grâce au bouton micrométrique isolant.

2.5 Bloc d'alimentation.

Conformément au principe décrit plus haut, le capteur capacitif est alimenté par l'intermédiaire d'un bloc d'alimentation qui se réduit au schéma de principe de la figure 7 dont les valeurs R et C seraient variables.

La capacité c variable du capteur est associée en parallèle à un condensateur de capacité fixe plus élevée C et l'ensemble soumis à une haute différence de potentiel continu fixe à travers une résistance de valeur élevée R, de sorte que la constante de temps RC de l'ensemble ainsi formé soit grande devant la durée totale du phénomène; la variation de charge de l'ensemble peut alors être négligée. Si, de plus, la variation relative de distance interélectrode du/u reste faible devant l'unité, on montre facilement que la variation de tension dV

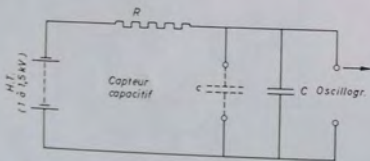


Fig. 7. — Bloc d'alimentation. Schéma de principe

permet à la fois la fixation du guide en translation et son orientation coaxiale précise avec le barreau. Sur ce guide peut coulisser le support du microphone par un ajustement glissant sans frottement. Ce support porte le corps isolant du capteur qui

aux bornes communes des condensateurs est directement proportionnelle à la variation de distance interélectrode :

$$dV = \frac{V \cdot c}{C \cdot u} du.$$

Donc, si on suppose que l'électrode isolée reste fixe par inertie au cours de l'expérience, la variation de distance interélectrode représente le déplacement de l'extrémité de la barre. Il suffit d'attaquer avec la tension dV un oscillographe cathodique balayant à vitesse constante pour en obtenir l'enregistrement directement sur l'écran après amplification convenable (cf. fig. 8, 9 et 10).

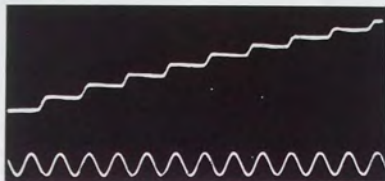


Fig. 8. — Enregistrement à l'oscillographe du déplacement en fonction du temps de l'extrémité libre d'un cylindre d'acier de 1,50 m de long et de 2 cm de diamètre (période de la sinusoïde de référence : 0,4 ms)

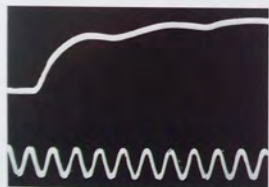


Fig. 9. — Enregistrement à l'oscillographe du déplacement de l'extrémité d'un barreau carré (A) de béton bitumineux, de 0,50 m de long et de 1,5 cm de côté (période de la sinusoïde de référence : 0,2 ms)

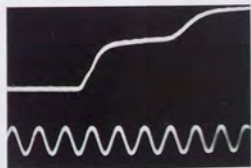


Fig. 10. — Enregistrement à l'oscillographe du déplacement de l'extrémité d'un barreau carré (B) de béton bitumineux, de 0,50 m de long et 3 cm de côté (période de la sinusoïde de référence : 0,1 ms)

3 THÉORIE DE LA MÉTHODE

Si, dans un barreau visco-élastique, la contrainte à l'extrémité excitée est $\sigma_0 \cos \omega t$, à la distance x elle sera

$$\sigma_0 e^{-\alpha x} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

où α est le coefficient d'amortissement.

Une impulsion de contrainte peut être représentée par une intégrale de Fourier de la forme :

$$(1) \quad \sigma(0, t) = \int_0^{\infty} A \cos(\omega t + b) d\omega,$$

où A et B sont des fonctions de ω qui définissent la forme de l'impulsion.

À la distance x , le long du barreau, l'impulsion sera :

$$(2) \quad \sigma(x, t) = \int_0^{\infty} A e^{-\alpha x} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + b \right] d\omega.$$

Pour certains solides visco-élastiques linéaires, α et c sont tous deux fonctions de ω , et l'intégrale

doit, en général, être évaluée numériquement; pour les bétons bitumineux, Mme CHEZEAUX et M. BISMUTH ont montré que les variations de c avec la fréquence sont assez faibles et que α est sensiblement une fonction linéaire de la fréquence; on peut donc écrire :

$$\alpha = \alpha_1 \omega$$

avec :

$$\alpha_1 = C^{te}.$$

En posant $t_1 = t - \frac{x}{c}$ l'équation (2) devient :

$$(3) \quad \sigma(x, t_1) = \int_0^{\infty} A e^{-\alpha \omega t_1} \cos(\omega t_1 + \beta) d\omega.$$

On peut montrer qu'il est licite d'admettre pour l'impulsion un front vertical quand l'amortissement croît régulièrement avec la fréquence, de

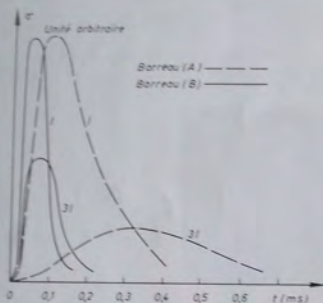


Fig. 11. — Formes de l'impulsion après parcours de $l = 0,50$ m et $3l = 1,50$ m dans deux barreaux (A) et (B) de longueur l

sorte que les composantes de hautes fréquences de l'intégrale de Fourier soient atténuées rapidement et à condition de ne relever la nouvelle forme de l'impulsion qu'à des distances grandes devant la longueur de l'impulsion initiale; on aura donc :

$$A = C e^{\beta} \quad \text{et} \quad \beta = 0$$

$$(4) \quad \sigma(x, t_1) = A \int_0^{\infty} e^{-\alpha \omega t_1} \cos \omega t_1 \cdot d\omega.$$

On peut intégrer facilement cette équation, et l'on obtient :

$$\sigma(x, t_1) = \frac{A \alpha x}{\alpha^2 x^2 + t_1^2}$$

La valeur maximale de la contrainte à la distance x est donc

$$\sigma_M = \frac{A}{\alpha x^2}$$

le maximum de la contrainte décroît proportionnellement à la distance parcourue. La demi-largeur Δ de l'impulsion, c'est-à-dire l'intervalle entre les deux

instants auxquels l'impulsion à la distance x est $\frac{1}{2} \sigma_M$, est donnée par :

$$\sigma(x, t_1) = \frac{1}{2} \sigma_M.$$

ce qui donne :

$$(5) \quad \Delta = 2 \alpha x.$$

Δ croît donc linéairement avec x . Si l'on connaît la forme de l'onde à une distance donnée x le long du barreau, l'équation (5) permet de déterminer α . Pour éliminer les erreurs résultant de ces approximations on a utilisé, pour déterminer α , les différences entre les demi-largeurs des impulsions à deux distances x_1 et x_2 . L'équation (5) donne en effet :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{x_2 - x_1},$$

où Δ_1 et Δ_2 sont les demi-largeurs aux distances x_1 et x_2 respectivement.

À une extrémité libre de la barre, l'impulsion de compression se réfléchit comme une impulsion de tension de la même forme. La vitesse de particule y est donc double de la vitesse de particule associée à l'onde incidente seule au sein du barreau. Ainsi, la relation entre le déplacement u de l'extrémité de la barre et la contrainte σ dans l'impulsion qui lui correspond est :

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho c \frac{du}{dt}.$$

Pour obtenir la forme de l'impulsion de contrainte, nous avons effectué une différentiation numérique de la fonction observée $u(t)$, ainsi, la figure 11 donne la représentation graphique de l'impulsion de contrainte σ à des distances de parcours $l = 50$ cm et $3l = 150$ cm pour deux barreaux (A) et (B) de betons bitumineux étudiés.

4 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Les résultats ont porté sur des éprouvettes fournies par l'Administration des Ponts et Chaussées.

(A) Une éprouvette de composition suivante :

- basalte : grain de diamètre 2 mm 79 %;
- bitume : 80/100 6 %;
- filler 15 %;
- module de richesse, 3,4.

Éprouvette de section carrée de 1,5 cm de côté et de 50 cm de long. Après coulage dans un moule fabriqué spécialement, l'éprouvette avait été pressée sous 55 kg/cm².

(B) Une éprouvette de composition suivante :

- pierres de la Durance, grain de diamètre : 15 mm 94 %;
- bitume 6 %.

Barreau de section carrée de 3 cm de côté et de 50 cm de long. Découpé à la scie dans une plaque.

L'extrémité recevant le choc était recouverte d'un carré de tôle d'acier mince. Le matériau étant isolant, l'extrémité du détecteur était revêtue soit d'une feuille d'or appliquée, soit d'un petit carré de laiton mince rectifié.

Ces enregistrements et courbes nous ont permis de déterminer c et α_1 avec une assez bonne précision, ainsi nous avons :

- barreau (A).... $\left\{ \begin{array}{l} c = 1\,450 \text{ m/s,} \\ \alpha_1 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-1}; \end{array} \right.$
- barreau (B).... $\left\{ \begin{array}{l} c = 2\,870 \text{ m/s,} \\ \alpha_1 = 0,175 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot \text{cm}^{-1}. \end{array} \right.$

CONCLUSION

Les résultats obtenus par cette méthode d'ébranlements brefs concordent sensiblement avec ceux obtenus par la méthode de phase dans laquelle le barreau est excité par des vibrations entretenues.

Cette méthode présente l'avantage de s'appliquer à des matériaux visco-élastiques qui, lorsqu'ils sont excités périodiquement, vibrent avec une amplitude insuffisante pour mesurer des différences de phase.

BIBLIOGRAPHIE

- HOPKINSON B. — *A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the compact of bullets*. Phil. Trans. Roy. Soc., vol. 213 A, 1914.
- DAVIES R. M. — *A critical study of the Hopkinson pressure bar*. Phil. Trans. Roy. Soc., vol. 240 A, 1948.
- KOLSKY H. — *Stress waves in solids*. Clarendon Press, Oxford, 1953.
- BODNER S. R. et KOLSKY H. — *Stress wave propagation in lead*. Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, 1958.
- BISMUTH W. — *Etude du comportement des corps visco-élastiques par une méthode de phase*. Thèse Fac. Sci. Univ., Aix-Marseille, 1962.
- Mlle AUBERT M. et BISMUTH W. — *Détermination des caractéristiques visco-élastiques de bétons bitumineux*. C.N.R.S., Centre Rech. Phys. Marseille, note n° 768, 1964.
- BLANC R. H. — *Méthodes électriques de mesure d'une onde de contrainte dans les solides*. C.N.R.S., C.R.P., Marseille, Sémin. Méca. Acoust., note n° 824, 1965.

SUR L'HÉSITATION AU FLUAGE (1)

par L. BRUN et A. ZAOUI

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

RÉSUMÉ

L'hésitation au fluage consiste en l'arrêt momentané de la déformation de fluage (en traction simple), à la suite d'une décharge partielle. Dans des études théorique (analyse de l'aptitude à l'hésitation de modèles visco-plastiques) et expérimentale (essais sur fils de cuivre) on s'attache à déterminer l'influence de certains paramètres. Elles sont suivies de deux essais d'interprétation des expériences sur le cuivre par des modèles visco-plastiques et par la théorie des dislocations.

INTRODUCTION

Dans certaines conditions de contraintes, l'arrêt des vibrations superposées à une contrainte constante (traction simple sur fil de cuivre) provoque l'arrêt apparent de la déformation de fluage. C'est incidemment, au cours des recherches visant à interpréter cette observation, que fut mis en évidence l'effet suivant [1] : une décharge partielle du modèle de Schwedoff (élément de Maxwell en parallèle avec un patin) provoque l'arrêt suivi d'une reprise plus ou moins différée du fluage. A la suite d'une enquête bibliographique ([2], [3]) qui confirma la réalité de ce phénomène connu sous le nom d'hésitation (en anglais « incubation ») fut entreprise l'étude systématique, tant expérimentale que théorique, dont nous rendons compte ici.

Nous examinons d'abord dans le détail (chap. 1) le comportement des modèles « simples » constitués d'un patin P en parallèle avec un modèle visco-élastique V. Il apparaît qu'ils décrivent convenablement les résultats des expériences de CARBEKER et coll. sur fils de plomb [2].

Par contre, les expériences sur fil de cuivre (2) (chap. 2) échappent à la description précédente.

L'étude s'achève (chap. 3) sur deux tentatives d'interprétation de ces dernières :

— par des modèles visco-plastiques plus complexes;

— par la théorie des dislocations.

1 ÉTUDE DES MODÈLES VISCO-PLASTIQUES SIMPLES

Nous envisageons des modèles élasto-visco-plastiques à une dimension composés de ressorts, d'amortisseurs linéaires et de patins à frottement sec.

A l'instant initial, un tel modèle est au repos et exempt de contraintes. On le soumet à la traction σ_1 constante jusqu'à l'instant τ , puis on diminue celle-ci brusquement de $\Delta\sigma (> 0)$ et on la maintient constante à la nouvelle valeur :

$$\sigma_2 = \sigma_1 - \Delta\sigma > 0 \quad (\text{décharge partielle}).$$

On se propose d'étudier l'effet de la discontinuité de traction.

1.1 Cas du modèle visco-élastique seul.

Le trajet de charge à considérer ici est en fait un peu plus général (3). Il est décrit par la formule :

$$(1,1-1) \quad \sigma(t) = s(t) - \Delta\sigma Y(t - \tau) > 0, \quad \forall t > 0,$$

(2) Effectuées par A. ZAOUI.

(3) Car la réponse en contrainte de la composante V d'un modèle complexe au chargement décrit dans l'introduction est en général représentée par la figure 1.

où Y est la fonction de Heaviside et $s(t)$ une fonction continue de t (fig. 1). En vertu de la linéarité du modèle V , de fonction de retard $f(t)$, on a :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \Delta \sigma f(t) Y(t - \tau),$$

avec :

$$(1.1-2) \quad \varepsilon(t) = f^+ s(t) + \int_0^t f(t-u) s(u) du$$

$$G^+ = G(0^+), \quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

En $t = \tau$, l'allongement $\varepsilon(t)$ subit la discontinuité :

$$[\varepsilon] = -\Delta \varepsilon = -\Delta \sigma f^+.$$

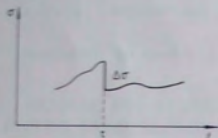


Fig. 1. — Trajet de charge de V

Plusieurs cas se présentent :

a) si $f^+ \neq 0$,

$$\Delta \varepsilon \neq 0;$$

b) si $f^+ = 0$,

$$\Delta \varepsilon = 0.$$

Donc ε est continu en $t = \tau$. (1.1-2) indique après dérivation qu'il en est de même de $\dot{\varepsilon}$.

Par suite $\dot{\varepsilon}$ subit la discontinuité :

$$[\dot{\varepsilon}] = -\Delta \dot{\varepsilon} = -\Delta \sigma f'^+.$$

et l'on a :

$$(1.1-3) \quad \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}(t) - \Delta \sigma f'(t) Y(t - \tau).$$

Ainsi b) donne lieu à l'alternative suivante :

b₁) $f'^+ = +\infty$: il existe alors τ' tel que $\dot{\varepsilon}(t) < 0$, $\forall t \in]\tau, \tau']$, ce qui implique :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} [\varepsilon(\tau + h) - \varepsilon(\tau)]/h < 0.$$

b₂) $f'^+ < \infty$:

— si $\Delta \sigma > \dot{\varepsilon}(\tau) f'^+$ (1), les conclusions (1.1-4) et par suite (1.1-5) subsistent (2);

— si $\Delta \sigma < \dot{\varepsilon}(\tau) f'^+$, il existe τ' tel que

$$\dot{\varepsilon}(t) > 0, \quad \forall t \in]\tau, \tau'].$$

V sera dit du type A ($V = V_A$) si

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(h)/h = +\infty.$$

Cette définition englobe les cas a) et b₂). Dans le cas contraire ($f^+ = 0$ et $f'^+ < \infty$) V sera dit du type B ($V = V_B$).

On voit que pour $V = V_A$, (1.1-5) a toujours lieu. Pour $V = V_B$, (1.1-5) n'a lieu que si $\Delta \sigma > \dot{\varepsilon}(\tau) f'^+$.

En conclusion, une décharge instantanée partielle $\Delta \sigma$ provoque dans les modèles A, au moins temporairement, une recouvrance partielle. Il n'en est de même dans les modèles B que pour une décharge suffisante.

La figure 2 représente les résultats lorsque $\sigma(t) = \sigma_2$, $t < \tau$, d'où

$$\dot{\varepsilon}(\tau) = \sigma_2 f'(\tau)$$

et

$$\sigma(t) = \sigma_2, \quad t > \tau.$$

1.2 Modèle visco-élastique en parallèle avec un patin.

On note :

$$\sigma(\tau^-) = \sigma^-, \quad \sigma(\tau^+) = \sigma^+.$$

On suppose que :

$$\sigma(t) > k, \quad \forall t > \tau,$$

et, dans une première analyse, que :

$$(1.2-1) \quad \Delta \sigma = \sigma^- - \sigma^+ < 2k.$$

La figure 1, qui décrit la loi de chargement du modèle, décrit également l'évolution de la traction σ dans V car $\sigma_2(t) > 0$, $\forall t < \tau$. En outre $\sigma_2^- = k$, d'où $\sigma_2^+ = \sigma^- - k$.

(1) Hormis le cas de l'amortisseur pur, cette circonstance peut se présenter sans nuire au respect de la condition $\sigma(\tau^-) > 0$ (cela tient au fait que $f'(0) < 0$ $\forall t$).

(2) $f(t)$ est continue, $\forall t > 0$.

Montrons qu'en aucun cas (1,1-5) ne peut être vérifié. En effet, cela signifierait que la vitesse de déplacement du patin change de signe en $t = \tau$ de sorte que :

$$(1,2-2) \quad \sigma_p^- = -k, \\ \sigma_p^+ = \sigma^- - \sigma_p^- = \sigma^- + k.$$

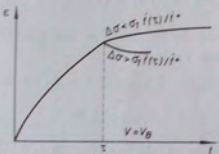
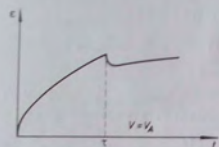
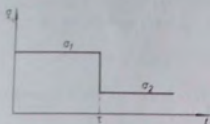


Fig. 2. — Réponse de V à un trajet de charge en escalier

Or, l'inégalité

$$\sigma_p^+ = \sigma_p^- + \Delta \sigma_p > \sigma_p^- = \sigma^- - k$$

rapprochée de (1,2-2) donne une conclusion contraire à (1,2-1).

Le type du modèle visco-élastique et l'amplitude de la décharge déterminent dès lors le comportement de l'ensemble :

— nous avons vu que, si V est du type A ($V = V_A$), $\Delta \sigma_V > 0$ implique (1,1-5). Il résulte donc de ce qui précède que $\Delta \sigma_V = 0$, c'est-à-dire que le patin absorbe la totalité de la décharge ($\sigma_p^+ = k - \Delta \sigma$). Il est immobilisé et V évolue en relaxation jusqu'à l'instant $\tau + \theta$ où le frottement

atteint la valeur k. L'allongement reprend pour $t > \tau + \theta$. On dit qu'il y a « hésitation » du modèle, θ est la durée de l'hésitation (fig. 4);

— nous avons vu également (§ 1,1) que si $V = V_A$ la condition $\Delta \sigma > \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+$ implique (1,1-5). On a donc nécessairement :

$$\Delta \sigma_V < \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+.$$

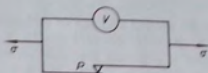


Fig. 3. — Modèle (V, P)

Si $\Delta \sigma_V < \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+$, $\dot{\epsilon}(\tau^+)$ est > 0 , par suite $\sigma_p^+ = k$ de sorte que :

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_V + \Delta \sigma_P (= 0) < \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+.$$

Si $\Delta \sigma_V = \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+$, on a

$$\dot{\epsilon}(\tau^+) = 0, \quad \sigma_p^+ \leq k$$

et :

$$\Delta \sigma = \Delta \sigma_V + \Delta \sigma_P (\geq 0) \geq \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+.$$

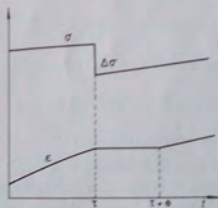


Fig. 4. — Hésitation dans le modèle (V, P)

Sous une autre forme, à l'exclusion du cas sans intérêt où V est un amortisseur pur :

— si $\Delta \sigma < \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+$ aucun arrêt ne se produit après la décharge;

— si $\Delta \sigma > \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+$ le frottement σ_p tombe dans le patin à la valeur k ($\Delta \sigma - \dot{\epsilon}(\tau)/\dot{f}^+$), et on retrouve le phénomène de l'hésitation;

— si $\Delta \sigma > 2k$ [toujours avec $\sigma(t) > k$, $t > \tau$, donc $\sigma^-(\tau) > 3k$] la condition (1,2-1) est enfreinte. En $t = \tau$ le frottement passe de la valeur k à $-k$,

et V doit absorber l'excès $\Delta \sigma - 2k$ de la décharge. Désignant désormais par V_A , un V_A tel que $f^+ \neq 0$, V_A , un V_A tel que $f^+ = 0$, $f^+ = +\infty$, il se produit alors soit un retrait instantané si $V = V_A$, soit un retrait différé si $V = V_A$, ou $V = V_B$. Puis le système entre en hésitation.

Le tableau I reproduit l'aspect qualitatif des résultats précédents pour des chargements en créneau dissymétrique.

En résumé, chaque fois que la décharge supposée intégralement appliquée au seul modèle V dans son état à l'instant τ provoque une contraction partielle instantanée ou différée de V, alors il y a hésitation du modèle visco-plastique.

Certains types de modèles présentent un effet remarquable : toutes choses égales d'ailleurs, l'hésitation ne se produit que pour une amplitude suffisante de la décharge partielle.

1.3 Propriétés de l'hésitation.

Nous nous limitons aux cas du chargement de la figure 2 et $\Delta \sigma < 2k$. Avec les notations :

$$s_i = \sigma_i - k \quad (i = 1, 2)$$

et

$$s_2/s_1 = \lambda \quad (0 < \lambda < 1)$$

le temps d'hésitation θ vérifie l'équation :

$$(1,3-1) \int_{\tau}^{\tau+\theta} r(\tau + \theta - u) f'(u) du = 1 - \lambda \quad (1),$$

[$r(t)$ fonction de relaxation de V].

- θ est donc de la forme $\theta = \mathcal{T}(\tau, \lambda)$;
- à λ fixé, \mathcal{T} est fonction croissante de τ .
- à τ fixé, \mathcal{T} est fonction décroissante de λ .

Enfin, on peut préciser l'allure de la courbe $\theta(\tau)$ au voisinage de $\tau = 0$ (resp. $\tau = \infty$) car elle ne dépend que du comportement de V au voisinage de $t = 0$ (resp. $t = \infty$).

a) τ est voisin de zéro.

a) $f^+ \neq 0$, $\theta(0)$ est la valeur minimale de θ notée θ_m . Elle est donnée par :

$$(1,3-2) \quad f^+ r(\theta_m) = \lambda.$$

Compte tenu des relations :

$$(1,3-3) \quad f^+ r^+ = f^{\infty} r^{\infty} = f^{\infty} \int_0^{\infty} r(t) dt = 1 \quad (1)$$

où $f^{\infty} = f(\infty)$ on voit que :

- si $f^{\infty} = \infty$, θ_m est fini;
- si $f^{\infty} < \infty$, $\theta_m = \infty$, $\forall \lambda < f^+ / f^{\infty}$.

b) $f^+ = 0$, $f^+ < \infty$. L'hésitation n'a lieu que pour $\tau \geq \tau_m$, avec τ_m solution de

$$(1,3-4) \quad \dot{f}(\tau_m) / f^+ = 1 - \lambda.$$

On retrouve le fait qu'elle n'a pas lieu (tabl. I) si $\lambda > 1 - \dot{f}^+ / f^+$.

c) $f^{\infty} = \infty$, $f^{\infty} = 0$. Cas limite à la fois pour a) et b). En effet :

$$\theta_m = \tau_m = 0.$$

β) τ est élevé :

a) $\dot{f}^{\infty} > 0$. Lorsque τ tend vers l'infini, θ tend en croissant vers la valeur limite θ_M solution de

$$(1,3-5) \quad \int_0^{\theta_M} r(t) dt = (1 - \lambda) / \dot{f}^{\infty}.$$

En vertu de la dernière des égalités (1,3-4), $\theta_M < \infty$ existe toujours.

b) $f^{\infty} < \infty$. La droite $\tau = \tau_M$ où τ_M vérifie :

$$(1,3-6) \quad f(\tau_M) = \lambda f^{\infty}$$

est asymptote à la courbe $\theta = \theta(\tau)$. On a $\theta = \infty$, $\forall \tau > \tau_M$.

Pour $f^+ = 0$, τ_m ne peut être nul (5).

c) $f^{\infty} = \infty$, $f^{\infty} = 0$. Cas limite à la fois pour β a) et β b).

τ_M et θ_M sont tous deux infinis :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta(\tau) = \infty.$$

Les résultats sont rassemblés dans le tableau II.

REMARQUE. — Aucun modèle V à un nombre fini de ressorts et amortisseurs ne peut figurer dans les cas a c) et β c).

$$(1) \text{ Si } f^+ = 0 \text{ on a } f^+ \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} r(t) dt = 1.$$

(2) Si $f^+ \neq 0$ et $\lambda < 2 - f^+ / \dot{f}^+$ alors $\tau_m = 0$, c'est-à-dire $\theta = \infty$, $\forall \tau > 0$. Ce cas doit correspondre à $\theta_m = \infty$. En effet, puisque $2 - \lambda < 1/\lambda$, $\forall \lambda > 0$, on a $\lambda < 2 - f^+ / \dot{f}^+$ qui implique le résultat d'après a a).

(1) Certains calculs et raisonnements sont reportés en Annexe I.

TABLEAU I

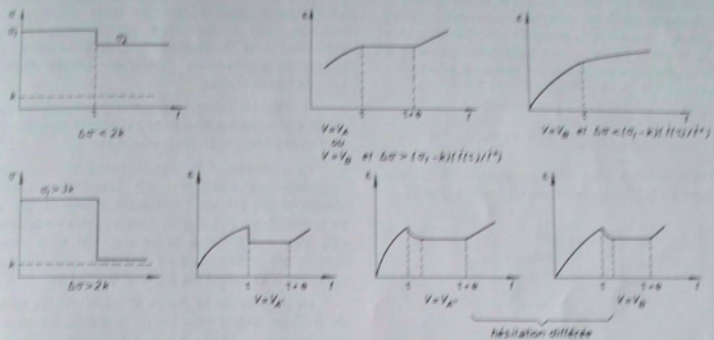
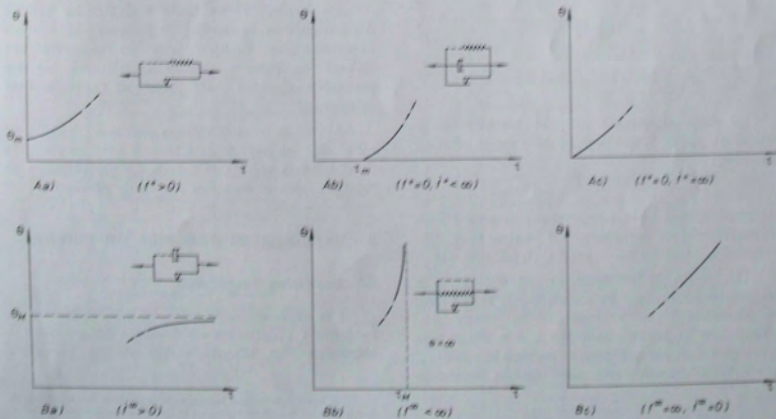


TABLEAU II



1.4 Applications.

I. — Il existe une seule catégorie de V possédant la particularité suivante : quel que soit l'instant τ de la décharge partielle, pour des valeurs convenables de σ_1 et σ_2 l'hésitation se poursuit indéfiniment, bien que la traction finale σ_2 soit supérieure au seul k du patin (décharge partielle). Il s'agit de V à élasticité instantanée ($f^+ > 0$) et fluage limité ($f^\infty < \infty$).

σ_1 et σ_2 sont assujettis à la condition :

$$(\sigma_2 - k)/(\sigma_1 - k) < f^+/f^\infty.$$

Un ressort en série avec un modèle de Kelvin est l'exemple le plus simple d'un tel modèle (fig. 5).

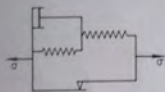


Fig. 5

II. — Si $f(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, (modèle parabolique),

$$f(t) = (\sin \alpha \pi / \alpha \pi) t^{-\alpha} \quad (\text{cf. [4], p. 9}).$$

Posant $\mu = \frac{\theta}{\tau + \theta}$ et reportant dans (1,3-1), il vient :

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \mu^{-\alpha} \int_0^1 u^{-\alpha} (1 - \mu u)^{\alpha-1} du = 1 - \lambda.$$

Le premier membre est une fonction de μ seulement, $g_\alpha(\mu)$, θ , qui dépend de τ par la relation implicite :

$$g_\alpha(\theta/\tau + \theta) = 1 - \lambda,$$

est proportionnel à τ . Ce résultat est en accord avec les conclusions du paragraphe 1,3 puisque le modèle participe à la fois des cas αc) et βc) (cf. tabl. II).

III. — En [2] CARREKER et coll. ont étudié le comportement d'un fil de plomb recuit sous l'effet du chargement en créneau de la figure 6 a. L'hésitation se produit pour $t > t_0 + \tau$. Outre que la traction n'est pas initialement portée à la valeur σ_1 , t_0 est suffisamment élevé pour que la surcharge

$\sigma_1 - \sigma_2$ se superpose à un régime où la vitesse de fluage est sensiblement constante. On peut ainsi lui comparer la vitesse de fluage en fin d'hésitation ($t > t_0 + \tau + \theta$) pour un même niveau de traction. L'expérience montre que les deux vitesses sont voisines. Cela ne contredit pas la présence d'un mécanisme de frottement sec que suggère par ailleurs le phénomène, nettement observé dans ce cas, de l'hésitation.

Il est ainsi naturel de tenter un rapprochement qualitatif entre les résultats expérimentaux et ceux de l'étude théorique du paragraphe 1,3.

Le modèle V qui convient comporte nécessairement en série un amortisseur (fluage établi) et un ressort [déformation instantanée lors de la surcharge (1)]. Enfin, l'incurvation de la courbe $\varepsilon(t)$ pour $t > t_0$ exige la présence en série avec le modèle de Maxwell d'un système visco-élastique composé d'au moins un élément de Kelvin.

Le modèle de la figure 8, où V est un modèle de Burgers, est le plus simple à s'accorder avec les caractéristiques de la figure 6 b.

Il s'accorde également bien avec la courbe de la figure 7. V répond, en effet, aux hypothèses αa) et βa); d'où il résulte (cf. § 1,3) qu'il existe des durées minimale $\theta_m > 0$ et maximale $\theta_M < \infty$ de l'hésitation.

En Annexe II on tente d'ajuster les valeurs des paramètres du modèle de Burgers aux données expérimentales. Compte tenu du caractère peu élaboré du modèle et des incertitudes sur les paramètres l'accord entre théorie et expériences est satisfaisant.

Ainsi que nous le verrons plus loin (chap. 3), un tel accord est impossible à réaliser avec les résultats d'expériences sur fils de cuivre. La considération de modèles plus compliqués s'avérera nécessaire.

2 EXPÉRIENCES SUR FILS DE CUIVRE

2.1 Conditions d'expérience.

Les expériences réalisées en vue de mettre en évidence « l'hésitation au fluage » ont consisté à soumettre des fils de cuivre recuits (diamètre

(1) Cette déformation instantanée ne pourrait être entièrement décrite par un ressort en série avec le modèle visco-plastique puisque la décharge en $t_0 + \tau$ (cf. fig. 6 b) n'est accompagnée d'aucune contraction appréciable.

(1) Il peut être représenté par une distribution continue de modèles de Kelvin en série.

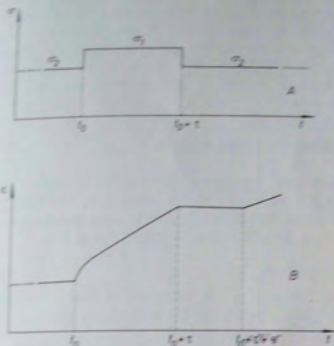


Fig. 6. — Reproduktion de l'aspect de la figure 2 (p. 141 de [2])

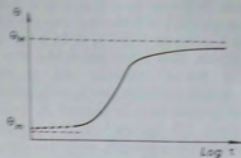


Fig. 7. — Fig. 3 (p. 143 de [2]) (en pointillés, partie non observée)

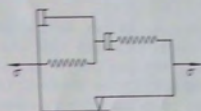


Fig. 8

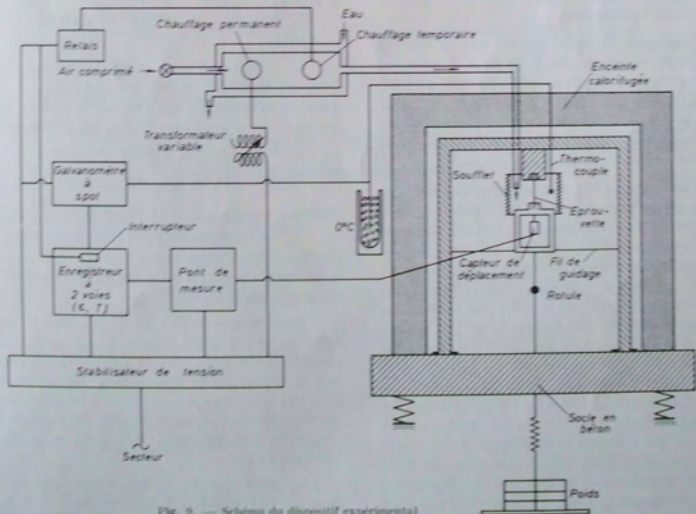


Fig. 9. — Schéma du dispositif expérimental

$\phi = 0,5$ mm, longueur $L = 3$ cm) à une traction simple (contrainte σ_1), et à imposer une discontinuité négative de contrainte ($\sigma_2 - \sigma_1 < 0$) au bout d'un temps τ variable. Des essais préalables ont permis d'évaluer la limite élastique du matériau à $4,3$ kg/mm²; dans le domaine plastique la déformation de fluage est limitée dans la gamme de contraintes comprises entre $4,3$ kg/mm² et $6,2$ kg/mm², et illimitée au-delà. On a adopté, pour tous les essais, la même valeur de σ_2 ($\sigma_2 = 8,65$ kg/mm²), seuls variant les paramètres τ et σ_1 . La température a été réglée autour de 26° C.

2.2 Dispositif expérimental (fig. 9).

Les fils étant serrés aux deux extrémités, les déplacements autres qu'axiaux sont éliminés grâce à un dispositif mécanique simple de guidage sans frottement (par fils d'acier tendus). La traction est exercée par poids amovibles, suspendus à un ressort de faible raideur, destiné à filtrer les chocs parasites; le ressort est relié à l'ancrage inférieur de l'éprouvette par deux tiges, articulées par double rotule. L'ensemble est monté sur un socle en béton, reposant sur « vibrachocs », afin d'isoler le système des vibrations extérieures.

L'allongement du fil est mesuré par un capteur inductif de déplacement relié à un pont de mesure; l'indication en est reportée sur un enregistreur continu à suivre de spot (à double voie), dont le papier se déroule à vitesse constante. Ce système de mesure permet d'apprécier des déformations de 10^{-4} .

Pour assurer une régulation thermique correcte — indispensable pour des essais de fluage —, on a fait circuler de l'air faiblement comprimé dans un soufflet entourant l'éprouvette. Cet air est préalablement chauffé par deux lampes au carbone; l'une, de puissance réglable, est allumée en permanence, l'autre est commandée par l'indication de température subie par l'éprouvette (la tension aux bornes d'un thermocouple, dont les jonctions froides sont à 0° C, est reportée sur un galvanomètre à spot; le spot entraîne une cellule photo-électrique solidaire d'un scripteur à des fins d'enregistrement, et le déplacement de la cellule actionne un interrupteur qui commande l'allumage de la lampe par l'intermédiaire d'un relais). De plus, de l'eau circule en permanence autour du récipient qui contient les lampes; cette circulation d'eau sert, d'une part, à amortir les variations de température

extérieure, d'autre part, à assurer, comme source froide, une régulation \pm dans les deux sens \pm (chaud-froid) de la température. Enfin, l'ensemble du montage mécanique est placé à l'intérieur d'une enceinte calorifugée. On a ainsi pu régler la température à 26° C, à quelques dixièmes de degré près.

2.3 Résultats expérimentaux.

On peut distinguer deux séries d'essais: les essais à τ constant, et les essais à σ_1 constant. A σ_2 constant, la courbe de fluage est \pm parabolique \pm ($\epsilon = \epsilon_0 + kt^n$), d'exposant faible: $n \approx 0,05$.

a) τ constant.

a) Pour $\tau = 2$ h, la figure 10 donne une idée des positions relatives des différentes courbes $\epsilon(t)$ pour différents σ_1 .

Cependant, on ne s'est intéressé qu'à la partie postérieure à l'instant τ de la décharge partielle; à cet effet, les courbes tracées sur la figure 11 ont toutes été rapportées à la même origine: elles représentent donc $\epsilon(t) - \epsilon(\tau^+)$ en fonction de $(t - \tau)$.

L'examen de la figure 11 conduit aux remarques suivantes:

— quel que soit $\sigma_1 > \sigma_p$, les courbes se situent au-dessous de la courbe correspondant à $\sigma_1 = \sigma_2$ (pas de décharge). Elles s'en écartent d'autant plus, sans jamais se recouper, que σ_1 est plus grand;

— à partir de σ_1 assez grand

$$(\sigma_1 \geq \sigma_1 = 9,7 \text{ kg/mm}^2),$$

toutes les courbes sont confondues en $\epsilon_0(t - \tau)$;

— à l'intérieur de l'éventail défini par les deux courbes limites ainsi mises à jour, on peut noter la présence de points d'inflexion sur les courbes situées dans une plage intermédiaire.

Pour tenter d'aboutir à des conclusions plus précises, on a alors soustrait des indications des courbes de la figure 11 la déformation représentée par la courbe limite inférieure $\epsilon_0(t - \tau)$, en mettant celle-ci sur le compte d'un écoulement visco-élastique, ne dépendant que de la contrainte actuelle σ_p . Les nouvelles courbes (fig. 12) sont plus faciles à interpréter:

— pour $\sigma_1 \neq \sigma_p$, les courbes sont, dès le début, à concavité négative (domaine A): il n'y a pas d'« hésitation »;

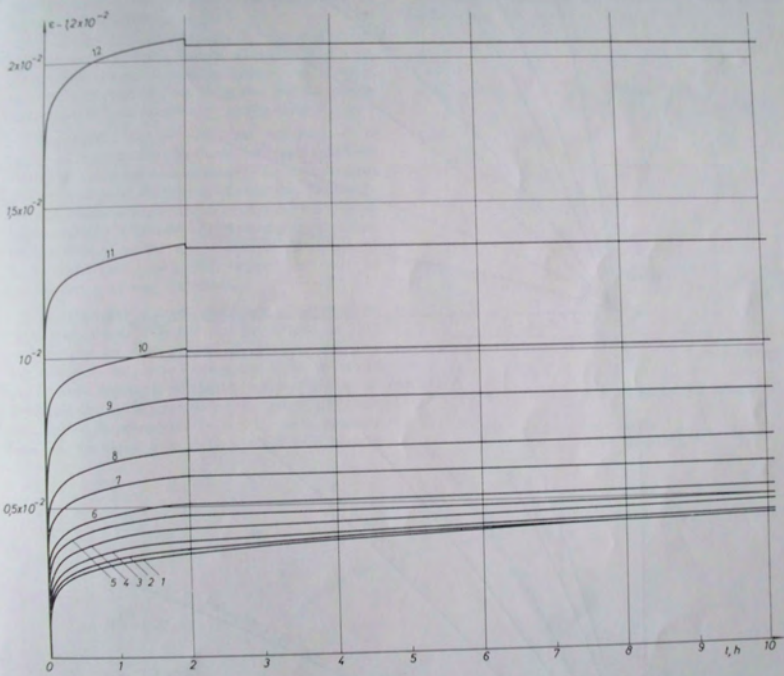


Fig. 10. — Résultats expérimentaux (σ_1 variable, σ_2 et τ constants)

$\sigma_1^1 = 8,65 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^2 = 8,68 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^3 = 8,72 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^4 = 8,79 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^5 = 8,85 \text{ kg/mm}^2$
$\sigma_1^6 = 8,91 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^7 = 9,04 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^8 = 9,16 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^9 = 9,42 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^{10} = 9,67 \text{ kg/mm}^2$
$\sigma_1^{11} = 10,18 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_1^{12} = 11,20 \text{ kg/mm}^2$	$\sigma_2 = 8,65 \text{ kg/mm}^2$		

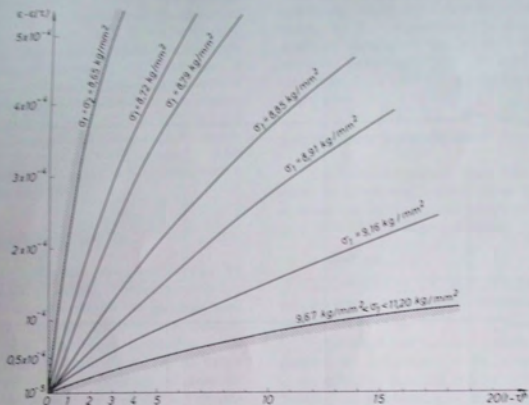


Fig. 11. — Comparaison des courbes de fluage après décharge partielle (mêmes τ et σ_1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = 2 \text{ lt;} \\ \sigma_1 = 8,65 \text{ kg/mm}^2; \\ 8,65 \text{ kg/mm}^2 < \sigma_1 < 11,20 \text{ kg/mm}^2. \end{array} \right.$$

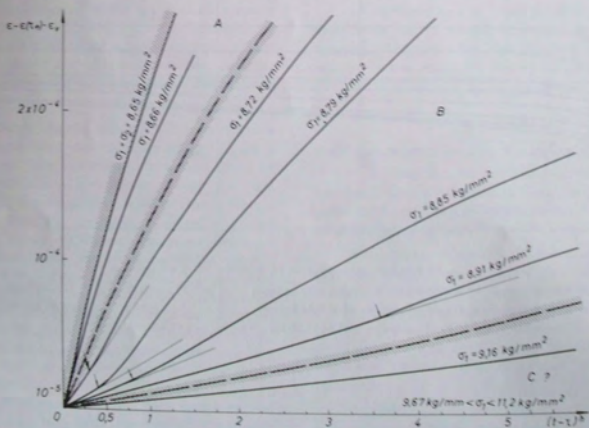


Fig. 12. — Mise en évidence de trois régimes distincts de déformation après décharge partielle, suivant σ_1 (τ et σ_0 fixes)

— pour des σ_1 plus élevés, on observe un départ linéaire suivi d'une rapide accélération, la concavité des courbes redevenant bientôt négative (domaine II). On peut ainsi apprécier, avec une bonne précision, l'instant $\tau \rightarrow 0$ du décollement de la droite de départ : c'est le temps θ que nous qualifierons de « temps d'hésitation »;

— l'existence d'un troisième domaine C de contraintes (pour des σ_1 grands, mais inférieurs à σ_1), à l'intérieur duquel la portion linéaire est indéfinie (pas de « reprise »), est suggérée par la rapide croissance de θ en fonction de σ_1 (fig. 13).

Cependant, elle ne peut être affirmée — ni exclue — formellement, la durée des essais ayant été limitée à une vingtaine d'heures; on a seulement observé que, pour de tels σ_1 , et dans les limites du temps d'observation, la reprise était inexistante — ou imperceptible : le décollement de la droite de départ est, en effet, d'autant moins marqué que l'instant de la reprise est plus grand, ce qui rend difficile l'appréciation de temps θ élevés.

§) Une série d'essais analogues a été conduite pour $\tau = 30$ mn. Mais elle n'a pas permis de tirer des conclusions aussi nettes, la déformation, une fois défalquée la partie « visqueuse », ne se faisant pas à vitesse constante pendant le temps d'hésitation. Il semble que cette circonstance heureuse, qui avait facilité l'étude précédente ($\tau = 2$ h), ne se produise que pour des temps τ élevés ($\tau \geq 1$ h 30 mn), lorsque

des phénomènes transitoires ont atteint une vitesse d'équilibre.

b) σ_1 constant ($\sigma_1 = 8,72$ kg/mm²).

On a étudié la variation de θ , mesuré suivant la méthode précédente, en fonction de τ pour σ_1 et σ_2 fixés (fig. 14).

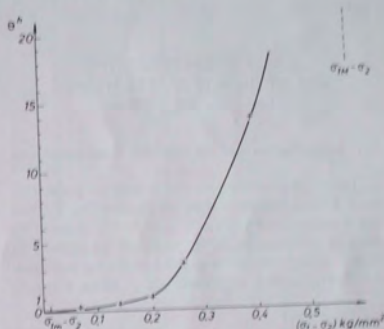


Fig. 13. — Influence de σ_1 sur le temps d'hésitation θ

($\tau = 2$ h;
 $\sigma_2 = 8,65$ kg/mm²,
 $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ kg/mm².)

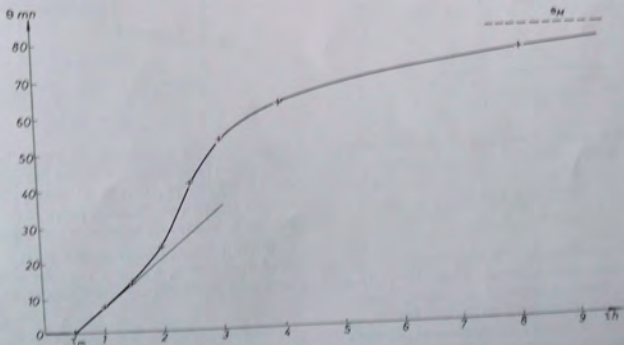


Fig. 14. — Influence de τ sur θ (résultats expérimentaux)

($\sigma_1 = 8,72$ kg/mm²,
 $\sigma_2 = 8,65$ kg/mm².)

On observe que θ est nul pour $\tau < \tau_m$, puis croît très vite pour tendre vraisemblablement vers une limite finie θ_m .

Une étude complète aurait nécessité l'établissement de telles courbes pour différentes valeurs de τ_p . On en trouvera cependant une prévision tant dans l'étude précédente, que dans les interprétations qui suivent.

3. ESSAIS D'INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES SUR FILS DE CUIVRE

3.1 Interprétation par les modèles visco-plastiques.

3.1.1 Si nous prenons τ et non λ comme paramètre dans l'étude des propriétés de l'hésitation, l'allure des courbes $\theta = \theta(\mu)$, où $\mu = 1 - \lambda$ mesure le taux de décharge, se déduit aisément du tableau II (chap. 1). La figure 15 rassemble tous les cas possibles. $\theta(\mu)$ est fonction croissante de μ . Elle s'annule

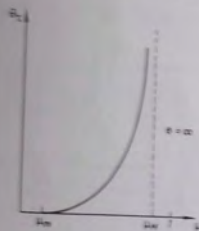


Fig. 15

pour $0 < \mu \leq \mu_m(\tau)$ et est infinie pour $\mu_m(\tau) < \mu < 1$. En outre :

$$\mu_m(\tau) = 0 \Leftrightarrow V = V_m,$$

$$\mu_m(\tau) < 1 \Leftrightarrow f' < \infty.$$

Or, les expériences sur le cuivre indiquent que de faibles décharges n'altèrent pas le régime d'écoulement, mais seulement sa vitesse, tandis que des décharges partielles plus fortes provoquent un changement de régime apparemment définitif (zone C ?) sans pour autant que le fluage illimité cesse d'être présent à tous les niveaux de décharge partielle.

On serait tenté de rendre compte de ces propriétés à l'aide d'un modèle [V, P] du type étudié au paragraphe 1.2 en série avec un modèle purement visco-élastique V' . Nous avons vu (application 1, § 1.4) que, dans ces conditions, V est nécessairement à fluage limité, de sorte que V' doit contribuer à la totalité du fluage illimité. Mais d'autres résultats d'expériences — la persistance d'un fluage illimité, déformation faite de la partie purement visqueuse, l'existence d'au moins trois régimes distincts — s'opposent à une telle interprétation. Il faut donc rechercher un modèle dans lequel il y a un couplage entre les éléments responsables de la plasticité et ceux qui déterminent en partie le fluage illimité.

Considérons, par exemple, l'assemblage de la figure 16 : un modèle [V, P] en série avec un modèle de Maxwell (paramètres v' et G'), le tout en parallèle avec un amortisseur $[\eta']$. $f(t)$ est la fonction de retard de V où $f(\infty) < \infty$ (fluage limité), σ'_v et σ'_η sont les tractions dans V et P .

On se place dans les conditions

$$\sigma_1 > \sigma_2 > K = k(1 + \eta'/v') \quad (3),$$

et l'on pose :

$$\lambda = (\sigma_2 - k)/(\sigma_1 - k),$$

$$\mu = 1 - \lambda = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 - k).$$

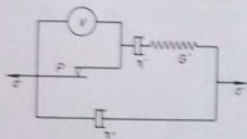


Fig. 16

En $t = 0$ le modèle est au repos. Les courbes de la figure 17 décrivent l'évolution des contraintes σ' dans [V, P] (ou $[\eta', G']$) et σ'' dans $[\eta']$ lorsqu'on exerce la traction constante σ_1 jusqu'en $t = \tau$. τ est choisi $> t_p$, instant où le patin se met à glisser.

σ' croît constamment de 0 à $\sigma'(\tau) > k$, tandis que σ'' décroît de σ_1 à $\sigma_1 - \sigma'(\tau)$. En $t = \tau$, σ tombe à la valeur $\sigma_2 (> K)$. σ' tend vers la limite :

$$\sigma'(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma'(t) = \frac{\eta'}{\eta' + v'} \sigma_2 = \frac{k}{K} \sigma_2.$$

(1) Décharge partielle si $\sigma_2 > K$, totale si $\sigma_2 = K$. K est la borne inférieure des valeurs de σ telles que dans une expérience de fluage sous la traction σ le patin ne se bloque jamais.

indépendante du comportement de $[V, P]$ car $f(\infty) < \infty$.

Remarquons que σ' est continue en $t = \tau$ puisque l'amortisseur et le patin P interdisent la contraction instantanée de $[G']$:

$$\sigma'(\tau^+) = \sigma'(\tau^-) = \sigma'(\tau).$$

En conséquence, si $V = V_B$ (cf. définition, § 1,1), le patin ne peut se bloquer pour $t = \tau$ car cela imposerait :

$$\sigma'_{v'}(\tau^+) < \sigma'_{v'}(\tau^-) \quad \text{et} \quad \sigma'_{p'}(\tau^+) \leq \sigma'_{p'}(\tau^-),$$

donc :

$$\sigma'(\tau^+) = (\sigma'_{v'} + \sigma'_{p'}) (\tau^+) < \sigma'(\tau^-).$$

L'étude d'un modèle de ce type est reporté au paragraphe suivant, et nous supposons ici que $V = V_A$.

Notons $G_{bl}(l)$ ($l > \tau$) la valeur que prendrait à l'instant l la grandeur G liée à l'un des éléments du modèle dans l'hypothèse où le patin resterait bloqué pour $l \geq \tau$. Si l'évolution réelle vérifie cette hypothèse :

$$G_{bl}(l) = G(l).$$

On voit que $\sigma'(\tau)$, $\dot{\sigma}'_{v_{bl}}(\tau^+)$ et $\sigma'_{v_{bl}}(\infty)$ ne dépendent que de τ et σ_1 .

Si l'on pose :

$$\sigma'(\tau) = l(\tau, \sigma_1),$$

$$\dot{\sigma}'_{v_{bl}}(\tau^+) = m(\tau, \sigma_1) < 0,$$

$$\sigma'_{v_{bl}}(\infty) = n(\tau, \sigma_1),$$

où l et n sont des fonctions croissantes de τ et σ_1 , on vérifie que :

$$k < l(\tau, \sigma_1) < \frac{k}{K} \sigma_1,$$

$$m(t_0, \sigma_1) = n(t_0, \sigma_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \dot{\sigma}'_{bl}(\tau^+) &= \sigma_2 / \gamma_1'' - \sigma'(\tau) \frac{\gamma_1'}{\gamma_1''} + \frac{\gamma_1''}{\gamma_1'} \\ &= \frac{1}{\gamma_1''} \left[\sigma_2 - \frac{K}{k} l(\tau, \sigma_1) \right]. \end{aligned}$$

Le comportement réel du modèle pour $l > \tau$ dépend des valeurs relatives de $\dot{\sigma}'_{bl}(\tau^+)$ et $\dot{\sigma}'_{v_{bl}}(\tau^+)$,

d'une part, de $\sigma'(\infty)$ et $\sigma'_{v_{bl}}(\infty) + k$, d'autre part (2).

— Si $\dot{\sigma}'_{bl}(\tau^+) > \dot{\sigma}'_{v_{bl}}(\tau^+)$, c'est-à-dire :

$$\frac{G'}{\gamma_1''} \left[\sigma_2 - \frac{K}{k} l(\tau, \sigma_1) \right] > m(\tau, \sigma_1),$$

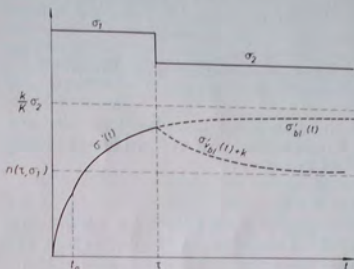


Fig. 17. — Dans le cas représenté ci-dessus il n'y a pas de blocage du patin de la figure 16

il n'y a pas d'hésitation en $t = \tau$. Les conditions sur m et l impliquent qu'il existe toujours une valeur $\mu'(\tau, \sigma_1)$ de μ avec $0 < \mu'$ telle que :

— pour tout $\mu \in (0, \mu')$ le patin ne se bloque pas en $t = \tau$;

— pour tout $\mu \in (\mu', 1)$ le patin se bloque en $t = \tau$ (2).

— La condition :

$$\sigma'(\infty) < \sigma'_{v_{bl}}(\infty) + k$$

est suffisante pour que le patin soit immobilisé au bout d'un temps fini [sinon on aurait $\sigma'(\infty) = \sigma'_{v'}(\infty) + k > \sigma'_{v_{bl}}(\infty) + k$].

Elle se traduit encore par :

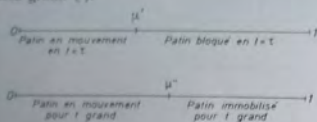
$$\frac{k}{K} \sigma_2 < n(\tau, \sigma_1) + k.$$

(1) Dans la discussion il est plus commode de supposer τ et σ_1 fixés et σ_2 variable tandis que, dans les expériences, τ et σ_1 étaient fixés et σ_2 variable.

(2) μ' est le taux de décharge associé à la solution σ_2 de l'équation :

$$\frac{G'}{\gamma_1''} \left[\sigma_2 - \frac{K}{k} l(\tau, \sigma_1) \right] - m(\tau, \sigma_1) = 0.$$

Il existe donc toujours une valeur $\mu^* (\tau, \sigma_1) (< 1)$ de μ telle que pour tout $\mu \in (\mu^*, 1)$ le patin soit à l'arrêt au bout d'un temps fini et pour tout $\mu \in (0, \mu^*)$ le patin soit en mouvement pour tout t assez grand (1).



On a alors deux circonstances possibles selon les valeurs relatives de μ' et μ^* qui dépendent elles-mêmes de τ et σ_1 :

a) $\mu' < \mu^*$.

— Pour $\mu^* < \mu < 1$ il y a à la fois hésitation en $t = \tau$ et immobilisation définitive au bout d'un certain temps. Cela signifie que le patin se bloque définitivement en $t = \tau$.

— Pour $\mu' < \mu < \mu^*$, l'hésitation en $t = \tau$ est temporaire.

— Pour $\mu < \mu'$, le patin ne se bloque jamais.

b) $\mu' > \mu^*$.

— Les cas extrêmes sont inchangés.

— Pour $\mu^* < \mu < \mu'$ un phénomène nouveau, inverse en quelque sorte de l'hésitation au fluage plastique, se produit : le mécanisme de la déformation plastique ne se bloque pas en $t = \tau$, mais il se bloque plus tard.

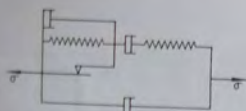


Fig. 18. — Modèle à blocage différé

On retrouve sur la figure 12 les trois régimes A, B, C qui correspondent au cas a). Par contre, le régime intermédiaire du b) ne semble pas jusqu'ici

avoir été observé. Il se présente dans le modèle relativement simple que nous étudions pour finir (1).

3,12 SUR L'HÉSITATION AU BLOCAGE DU MÉCANISME PLASTIQUE.

Ce modèle (fig. 18) est l'illustration la plus élémentaire du cas $V = V_n$. Le patin ne s'immobilise jamais en $t = \tau$ de sorte que $\mu' = 1$. La circonstance b) du paragraphe précédent se trouve toujours réalisée. Par contre, un des régimes extrêmes a disparu. Seuls subsistent les deux régimes :

— $0 \leq \mu \leq \mu^*$: pas de blocage de P ;

— $\mu^* \leq \mu \leq 1$: blocage définitif de P au bout d'un temps fini supérieur à τ .

3,2 Interprétation par la théorie des dislocations.

On peut représenter de la façon imagée suivante les résultats des expériences sur le cuivre (chap. 2) : mise à part une déformation visco-élastique, la déformation est provoquée par deux mécanismes distincts (1) et (2) dont le blocage se fait pour des décharges différentes, ce qui définit au moins trois domaines :

— pour des décharges faibles, aucun des mécanismes n'est bloqué : ils continuent de fonctionner tous deux, quoique à moindre vitesse (domaine A) ;

— pour des décharges plus importantes (domaine B), le mécanisme (1) est seul bloqué pendant un certain temps, le mécanisme (2) continuant de fonctionner — à vitesse de déformation constante pour des τ grands. On peut penser que c'est le jeu du mécanisme (2) qui permet, au bout du temps θ , le déblocage du mécanisme (1) : il est possible, on l'a vu, que pour toute une gamme de contraintes, le seul jeu du mécanisme (2) ne suffise pas à déblocquer, au bout d'un temps fini, le mécanisme (1) (domaine C) ;

— enfin, pour de fortes décharges, les deux mécanismes sont définitivement bloqués : seule subsiste une déformation visco-élastique.

(1) La condition énoncée étant suffisante, mais non nécessaire, μ^* est en fait inférieur au taux de décharge qui correspond à la solution σ_1 de l'équation $\frac{k}{K} \sigma_1 - n(\tau, \sigma_1) = k = 0$.

(1) Il n'est pas évident a priori que l'on puisse trouver pour tout modèle du type $V = V_n$ des valeurs de τ et σ_1 telles que $\mu^*(\tau, \sigma_1) < \mu^*(\tau, \sigma_1)$. Nous nous contenterons de signaler la condition :

$\frac{f^* - f^*}{G} < \frac{n^* - n^*}{\sigma_1 + \sigma_1} < \frac{f^* - f^*}{f^*}$, suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Cette représentation trouve une caution physique dans l'essai d'interprétation suivant (1), fondé sur la théorie physique des dislocations [5].

3.21 RAPPEL.

On sait que les dislocations sont, dans les corps cristallins, à la fois les agents de la déformation plastique et des obstacles à la poursuite de cette déformation. Lors du fluage, deux modes de déplacement des dislocations interviennent simultanément :

— le glissement simple des dislocations dans leur plan de glissement, après création par des sources de Frank et Read;

— le glissement dévié ou la montée des dislocations hors du plan de glissement initial.

Cette distinction induit les différences quantitatives et qualitatives suivantes :

a) le déclenchement d'une source de Frank et Read exige, dans le cas d'activation thermique, que la boucle en formation parcoure une distance de l'ordre de l'écart moyen l entre dislocations : par conséquent, les actions à vaincre par une telle boucle, mesurées par une contrainte moyenne σ_F , comptent, en plus des actions à distance, communes à toutes les dislocations, des actions de contact importantes, comme celles mises en jeu par la réaction de HINSCH [6].

Au contraire, les dislocations effectuant un glissement dévié ou une montée n'ont à parcourir que de faibles distances (crans, pincements...), de l'ordre de la distance interatomique b . Pour se déplacer, elles n'ont donc à vaincre que dans une très faible mesure les actions à courte distance (ordinairement, $l \approx 10^4 b$) : les actions à vaincre sont donc principalement : les actions à distance, mesurées par une contrainte σ_0 , avec $\sigma_0 < \sigma_F$;

b) le jeu des sources de Frank et Read a pour effet d'augmenter la densité N de dislocations, et donc les contraintes internes. Ainsi, ce premier mécanisme de déformation participe principalement au durcissement.

(1) Cette interprétation est due à J. ZARBA (Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique). Elle pourrait s'enrichir de distinctions plus fines (permettant notamment de prévoir l'effet de blocage différé annoncé au paragraphe précédent), mais qui ne modifieraient pas, dans son principe, l'explication globale qui est donnée ici.

Par contre, le second mécanisme (glissement dévié) n'augmente pas la densité N ; il tend même à la diminuer, ou, ce qui revient au même, à relâcher les contraintes internes : en effet, les dislocations qui s'échappent, par ce processus, des plans de glissement principaux, relâcheront les contraintes internes dans ces plans et pourront s'annihiler par rencontre avec des dislocations de signe opposé appartenant aux systèmes en jeu sur les plans secondaires, ou former des murs stables sans contrainte à distance (polygonisation, mosaïques...). Ainsi, ce second mécanisme participe principalement au radoucissement.

3.22 CONSÉQUENCES.

On peut alors, à partir des courbes globales $\sigma_F(l, \sigma_1)$ et $\sigma_0(l, \sigma_1)$ d'un essai de fluage sous la contrainte σ_1 , tirer quelques prédictions qualitatives concernant le comportement après décharge partielle.

Remarquons auparavant que la courbe $\sigma_F(l, \sigma_1)$ est limitée supérieurement par σ_1 , puisque c'est l'écart $(\sigma_1 - \sigma_0)$ qui commande la création des dislocations. Ainsi la courbe $\sigma_F(l)$, qui est croissante, tend vers une limite inférieure ou égale à σ_1 , qui correspond à une densité d'équilibre des dislocations.

Imposons, à l'instant τ , la décharge $(\sigma_1 - \sigma_2)$; plusieurs cas sont à envisager (fig. 19) :

— si $\sigma_2 > \sigma_F(\tau, \sigma_1)$: il n'y a aucun changement qualitatif de régime : les deux mécanismes continuent de fonctionner, quoique avec une moindre activité (domaine A);

— si $\sigma_F(\tau, \sigma_1) > \sigma_2 > \sigma_0(\tau, \sigma_1)$: il y a « blocage » des sources de Frank et Read (en fait, le terme de « blocage » est abusif, et donne seulement une représentation moyenne d'un phénomène statistique); mais le glissement dévié se poursuit : par suite, la densité de dislocations diminue sous l'effet du radoucissement, seul actif; donc σ_F et σ_0 diminuent. Lorsque — et si (possibilité d'un domaine C) — σ_F atteint σ_2 , les sources de Frank et Read sont remises en mouvement, au terme de ce temps d'hésitation (domaine B). A nouveau, les deux actions contradictoires (« radoucissement » et « durcissement ») jouent simultanément;

— si $\sigma_2 < \sigma_0(\tau, \sigma_1)$: les deux mécanismes sont définitivement bloqués. Seule peut se poursuivre une déformation visco-élastique, qu'on peut vraisemblablement mettre sur le compte de la « viscosité » des joints de grains.

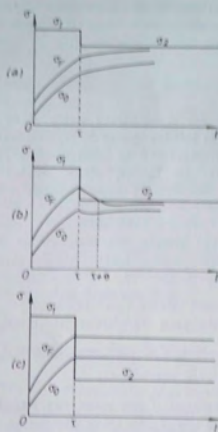
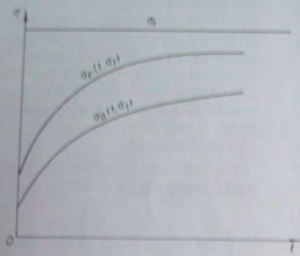


Fig. 19. — Hésitation au fluage : interprétation physique (dislocations)

(a) : $\sigma_1 > \sigma_2$ (τ, σ_1) (b) : σ_2 (τ, σ_1) > σ_1 > σ_0 (τ, σ_1) (c) : σ_1 (τ, σ_1) > σ_2

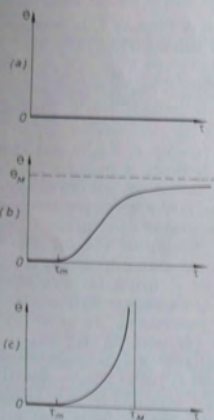


Fig. 20. — Influence de τ sur θ (prévision)

(a) : $\sigma_2 \geq \sigma_1$ (∞, σ_1)
 (b) : σ_2 (θ_2, σ_1) > $\sigma_1 \geq \sigma_0$ (∞, σ_1)
 (c) : σ_1 (∞, θ_1) > σ_2 (θ, σ_1)

Le même schéma permet de prévoir l'influence du temps τ d'imposition de la contrainte supérieure σ_1 sur le temps d'hésitation (fig. 20).

Les raisonnements ont été faits, pour plus de clarté, pour σ_1 constant : ils se transposent sans difficulté au cas où c'est σ_2 qui reste constant.

3,3 Conclusion.

Les deux interprétations que nous venons de donner ne s'attachent pas à décrire exactement les mêmes aspects des résultats expérimentaux. La première tient surtout compte du fluage illimité, la seconde tient en plus de l'identité apparente des courbes de réponse (ramenées à une même origine pour $t = \tau$) à des décharges suffisamment élevées, pour τ et σ_2 constants. D'où la présence de deux mécanismes plastiques dans cette dernière, contre un seul dans la première. Il est néanmoins remarquable que les trois régimes distincts A, B, C puissent s'interpréter à l'aide d'un seul patin.

ANNEXES

I. — Annexe au paragraphe 1,3.

Désignons par s (au lieu de σ_v) la traction dans V .

On a :

$$s(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{t^*} r(t-u) \varepsilon(u) du,$$

et pour le trajet de charge en escalier :

$$(1) \quad s(t) = s_1 f^+ + r(t) + s_2 \int_0^{t^*} r(t-u) \dot{f}(u) du(t), \\ \forall t > \tau.$$

L'hésitation s'achève en $t = \tau + \theta$ déterminé par la condition :

$$s(t + \theta) = s_2 = \sigma_2 - k.$$

Par suite :

$$(2) \quad \int_{\tau}^{\tau+\theta^*} r(t+\theta-u) \dot{f}(u) du = 1 - \lambda \\ (0 < \lambda = s_2/s_1 < 1)$$

ou :

$$(2^*) \quad \int_0^{\theta^*} r(\theta-u) \dot{f}(\tau+u) du = 1 - \lambda.$$

Compte tenu de l'identité :

$$(3) \quad \int_0^{t^*} r(t-u) \dot{f}(u) du = 1 - f^+ r(t)$$

(2) s'écrit encore :

$$(2^*) \quad f^+ r(\tau + \theta) + \int_0^{\tau} r(\tau + \theta - u) \dot{f}(u) du = \lambda.$$

Conséquences :

— Si à θ constant on augmente τ , comme $\dot{f}(t)$ est fonction décroissante de t , le premier membre de (2^{*}) décroît. On le maintient donc constant en faisant croître à la fois θ et τ . Autrement dit à λ fixé θ est fonction croissante de τ .

— On obtient (1,3-2) en faisant $\tau = 0$ dans (2^{*}).

— (2^{*}) implique :

$$\dot{f}(\tau) \int_0^{\tau} r(u) du < 1 - \lambda < 1.$$

Si $f^+ = 0$, le premier membre de l'inégalité est minore par :

$$\dot{f}(\tau) \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} r(u) du = \dot{f}(\tau) \dot{f}^+.$$

Ainsi, il ne peut y avoir hésitation pour $\tau < \tau_m$.
solution de :

$$(4) \quad \dot{f}(\tau_m) \dot{f}^+ = 1 - \lambda.$$

On montre que :

$$\dot{f}(\tau) \neq 0, \quad \forall \tau > \tau_m.$$

— On obtient de même (1,3-5) en observant que si $\dot{f}^\infty > 0$

$$\dot{f}^\infty \int_0^\infty r(u) du = 1,$$

et (1,3-6) en établissant à partir de (2^{*}) l'inégalité :

$$r^\infty [f(\tau + \theta) - f(\theta)] < 1 - \lambda,$$

où

$$r^\infty f^\infty = 1.$$

II. — Annexe au paragraphe 1,4.

Les données de [2], p. 140, relatives aux expériences sur fil de plomb ainsi que la courbe supérieure de la figure [2], p. 141, permettent de déterminer les caractéristiques du modèle proposé dans l'application III du paragraphe 4 (fig. 8) pour interpréter les résultats.

V possède la fonction de fluage :

$$f(t) = \alpha (11 + t/3 - 7 e^{0,22t}).$$

α est un facteur qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour la suite.

L'unité de temps ($t = 1$) vaut $\frac{20}{11}$ mn (1).

De f on déduit r par la formule de la page 13 de [4] :

$$r(t) = \beta (0,29 e^{-0,02t} + 0,60 e^{-0,932t}).$$

Le seuil k du patin s'obtient à partir des vitesses de fluage établi pour $t \simeq t_0 + \tau$ et $t > t_0 + \tau + \theta$

(1) Dans toute la suite $\dot{f}(x) = \frac{d}{dx} G(x)$.

(1) Nous ne reproduisons pas ici les détails des calculs qui conduisent à l'expression de \dot{f} . L'unité choisie pour t permet l'ajustement direct avec la figure 2, p. 141, de [2].

(fig. 6 b). Alors que $\sigma_2 = 456$ p.s.i. (Pound/sq.inch), $\sigma_1 = 468$ p.s.i., on trouve :

$$k \simeq 449 \text{ p.s.i.} \quad (1 \text{ p.s.i.} \simeq 6,90 \cdot 10^{-2} \text{ bar}).$$

La courbe $\theta(\tau)$ de la figure 7 est relative à $\sigma_2 = 550$ p.s.i.,

$$\sigma_1 = 570 \text{ p.s.i.}, \quad \lambda = (550 - k)/(570 - k) \simeq \frac{10}{12}.$$

Pour cette valeur de λ on déduit de (1,3-2) et (1,3-5) que :

$$\theta_m \simeq 0,4,$$

c'est-à-dire :

$$\theta_m \simeq 0,4 \times \frac{20}{11} \text{ mn} = 0,73 \text{ mn};$$

$$\theta_m \simeq 4,$$

c'est-à-dire :

$$\theta_m \simeq 7,3 \text{ mn}.$$

Les valeurs données en [2] sont $\theta_m < 0,16$ mn, $\theta_m \simeq 10$ mn.

La concordance entre théorie et expérience est satisfaisante.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BRUN. — *Sur l'hésitation du fluage*. C.R.A.S., 260, pp. 4421-4423 (1965).
- [2] CARREKER, LESCHEN et LUBAHN. — *Transient plastic deformation*. American Institute of Mining and Metallurgical Engineer. Technical Publication, n° 2477 (sept. 1948).
- [3] ONAT et WANG. — *The effect of incremental loading on creep behavior of metals*. Creep in structures. Springer Verlag, p. 132 (1962).
- [4] J. MANDEL. — *Application du calcul opérationnel à l'étude des corps visco-élastiques*. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, t. III, n° 4, pp. 5-35 (1958).
- [5] J. FRIEDEL. — *Les dislocations*. Gauthier-Villars (1956).
- [6] SAADA. — *Thèse* (1960).

LA RHÉOLOGIE DES SYSTÈMES A BASE DE CARBOHYDRATES MACROMOLÉCULAIRES (1)

par Y. NEDONCHELLE et R. A. SCHUTZ

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE CHIMIE DE MULHOUSE
LABORATOIRE DE CHIMIE MACROMOLÉCULAIRE APPLIQUÉE AUX TEXTILES

RÉSUMÉ

Ces systèmes ne sont pas newtoniens vrais. Pour 2 à 4 décades de gradients de vitesse on peut décrire le comportement par $\tau = KD^n$. En utilisant des cylindres coaxiaux on peut calculer le gradient réel D à partir du gradient apparent D^* par le facteur A tel que $D = D^* \cdot A$, où :

$$A = \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{a \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^a \right]}$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$K = \frac{k_0}{D_0^n}$$

et en tenant compte de la concentration C et de la température absolue T que :

$$\tau = K_0 \cdot e^{ac + \frac{K_1}{D_0} + c \cdot \text{Log} \left(\frac{D_0}{D_1} \right)}$$

A gradient tendant vers 0, le comportement tend à devenir newtonien, de même à gradient infini; en représentation doublement logarithmique $\log \tau = f(\log D)$, la courbe représentative se situe asymptotiquement entre deux droites parallèles correspondant aux viscosités limites, en passant par un point d'inflexion de coordonnées τ_0, D_0

remarquable. Par changement de coordonnées on peut également traduire le comportement par une relation de type :

$$\log \frac{\tau}{D} = f(\log \tau \cdot D)$$

soit \log « viscosité apparente » en fonction du « travail d'écoulement ».

INTRODUCTION

Les systèmes à relativement forte concentration de carbohydrates macromoléculaires sont assez peu étudiés, bien qu'utilisés en tonnages importants dans les industries textiles, papetières et autres.

Ceci tient au fait que les physico-chimistes préfèrent les solutions diluées — pour lesquelles ils espèrent trouver des molécules quasi indépendantes — et les polymères fondus.

Notre objet est d'étudier ces systèmes en soi, pour ce qu'ils sont.

Pour débiter, nous nous sommes intéressés depuis plusieurs années aux empois d'amidon, puis nous avons étendu notre travail à l'étude des autres carbohydrates macromoléculaires natifs ou transformés.

Pour des raisons de présentation, nous nous proposons également de commencer notre exposé par le cas des empois d'amidon.

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 14 décembre 1966.

1,1 L'empois : définition.

Les amidons se présentent sous forme de grains composés principalement de deux polymères du glucose, l'amylose et l'amylopectine dont le PM peut atteindre et dépasser 500 000.

Par chauffage dans l'eau, les grains gonflent puis éclatent en libérant leur contenu et formant ainsi une espèce de solution de macromolécules d'amylose et d'amylopectine : l'empois d'amidon.

concentration est plus élevée et la température plus basse.

Le phénomène se présente ainsi : si l'on fait subir à l'empois une augmentation, puis une diminution de la vitesse de cisaillement, la courbe représentant les variations de D en fonction de τ forme un cycle (voir fig. 1 a).

Ce phénomène est gênant, car nous ne pouvons l'étudier valablement avec notre matériel; pour éliminer son influence on peut, avant de faire des mesures, soumettre l'empois à une série de variations de gradients : à chaque parcours la surface du cycle diminue et tend à devenir négligeable.

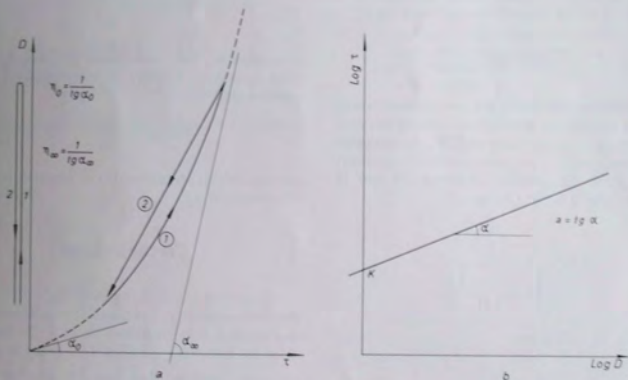


Fig. 1

1,2 Comportement rhéologique de l'empois.

1,21 GÉNÉRALITÉS (voir fig. 1).

Les empois semblent avoir un comportement rhéologique du type newtonien généralisé, en effet :

- d'une part, la viscosité varie d'une façon continue avec la vitesse de cisaillement;
- d'autre part, on ne peut mettre en évidence une contrainte limite d'écoulement, même pour des solutions très concentrées.

En outre, les empois sont thixotropes; le phénomène étant d'autant plus important que la

Enfin, troisième aspect du comportement des empois, c'est qu'ils rétrogradent ou se prennent en gel lorsqu'on les maintient à basse température (en dessous de 30 à 40° C).

Ces deux phénomènes, thixotropie et rétrogradation, imposent un certain nombre d'obligations dans l'étude du comportement rhéologique de l'empois :

- travailler au-dessus de 50° C pour éviter la rétrogradation;
- faire décrire plusieurs cycles pour diminuer l'influence de la thixotropie;
- ne pas utiliser de concentration supérieure à 8 % pour les amidons natifs, car au-delà la

thixotropie reste trop importante pour pouvoir être négligée.

1.22 CARACTÉRISATION DU COMPORTEMENT RHÉOLOGIQUE.

Les empois ayant un comportement rhéologique newtonien généralisé, comment caractériser ce comportement ?

Cependant, cette relation est souvent considérée avec méfiance pour trois raisons au moins :

1° la plupart des fonctions donnent sensiblement des droites sur un court intervalle, si l'on considère les variations en échelles logarithmiques;

2° suivant la nature du produit, et en particulier dans le cas des empois, suivant le degré de polymérisation de l'amidon, la pente a varie. a n'étant

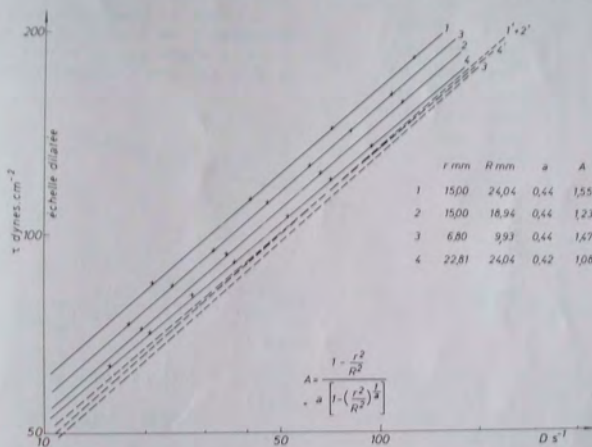


Fig. 2. — Amidon de riz 5 %, 70° C

Il est certes possible de représenter graphiquement les variations de D en fonction de τ , mais on ne peut pas dire qu'il soit facile d'extrapoler τ_0 et τ_∞ sur de tels graphiques.

Cependant, dès 1923, FARROW avait remarqué que, dans le cas des empois, on obtenait une droite en portant sur un graphique $\log D$ en fonction de $\log \tau$ ce qui laisserait supposer un comportement correspondant à l'équation

$$\log \tau = \log K + a \log D$$

ou

$$\tau = KD^a;$$

avec $a = 1$, le système est newtonien.

pas une constante, l'équation ne semble pas homogène à première vue;

3° aux limites, quand la vitesse de cisaillement tend vers 0 ou l'infini, la relation devient absurde.

Pourtant, dans le cas des empois d'amidon, cette relation se vérifie bien pour des vitesses de cisaillement comprises entre 1 et 1 000 s^{-1} avec de légers écarts pour les gradients les plus faibles et, de plus, l'application de cette relation au calcul des vitesses de cisaillement dans l'entrefer cylindrique des viscosimètres permet de calculer une correction d'entrefer qui se vérifie expérimentalement (fig. 2). En effet, on peut démontrer (B1, B2) que le gradient réel D_0 est lié au gradient D^* calculé pour les

liquides newtoniens dans le même entrefer par la relation :

$$D_p = D^* \cdot A$$

où :

$$A = \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{a \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^a}$$

A étant le facteur de correction.

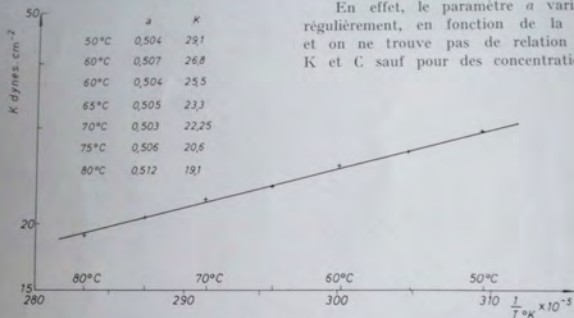


Fig. 3. — Émulse 3 %

La figure 2 montre l'application de cette correction : 1, 2, 3, 4, valeurs obtenues avec des cylindres coaxiaux de rayons variables en considérant les systèmes comme étant newtoniens :

$$\left(D^* = \frac{2 \Omega}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right) \quad (\Omega, \text{vitesse angulaire})$$

1', 2', 3', 4', les valeurs corrigées en appliquant la correction $D_p = A \cdot D^*$.

Cette relation, $\log \tau = \log K + a \log D$ permet, d'autre part, d'aborder avec profit l'étude de l'influence de la température et de la concentration sur le comportement des empois.

1.23 INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE (fig. 3).

Il y a déjà bien longtemps que l'on s'est aperçu que la viscosité des empois d'amidon à gradient de vitesse constant variait en fonction de la température suivant une relation du type :

$$\eta = \eta_0 \cdot e^{\frac{K_a}{RT}}$$

Si l'on trace les rhéogrammes $\log \tau = f(\log D)$ à différentes températures, on s'aperçoit que a est un paramètre indépendant de la température, alors que K varie, lui, selon la relation :

$$K = K_0 \cdot e^{\frac{K_a}{RT}}$$

L'étude de l'influence de la concentration donne des résultats moins nets (fig. 4).

En effet, le paramètre a varie peu, mais régulièrement, en fonction de la concentration et on ne trouve pas de relation simple entre K et C sauf pour des concentrations comprises

entre 2 et 5 % où l'on trouve une relation du type :

$$\log K = \log K_0 + BC,$$

soit :

$$K = K_c \cdot e^{BC}$$

1.24 NOUVELLE EXPRESSION DU COMPORTEMENT RHÉOLOGIQUE DE L'EMPOIS.

Enfin, l'un des points les plus intéressants de cette relation est le problème de l'homogénéité dimensionnelle; en effet, pour que $\tau = KD^a$ devienne homogène, il faut que K ne soit pas un paramètre simple, mais une fonction de a .

Or, si on laisse rétrograder un empois concentré (20 % amidon) dépolymérisé, par une enzyme, sa viscosité augmente au cours du temps, et son diagramme $\log \tau = f(\log D)$ évolue en donnant un faisceau de droites. Au début, l'empois est sensiblement newtonien (pente = 1), puis après un certain temps, la pente des droites diminue; si l'on calcule alors K et a pour chaque courbe, on peut faire un graphique (fig. 5) $K = f(a)$ et on s'aperçoit

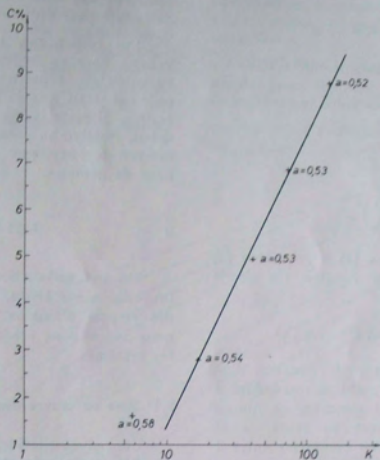


Fig. 4

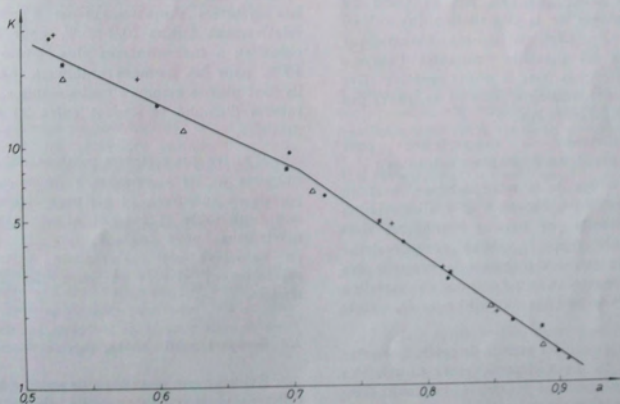


Fig. 5. — Variation de K et a au cours de la rétrogradation

que K varie en fonction de a suivant une relation du type :

$$(1) \quad \text{Log } K = \text{Log } K_0 - x a$$

pour a entre 1 et 0,7, ce qui permet aussi d'écrire :

$$(2) \quad \log K = -a \log D_0 + \log \tau_0$$

ou :

$$K = \frac{\tau_0}{D_0^a}$$

d'où :

$$(3) \quad \tau = \tau_0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^a$$

Le passage de l'équation (1) à l'équation (2) peut paraître osé, mais la relation (3) s'écrit également :

$$\log \tau - \log \tau_0 = a (\log D - \log D_0)$$

sur un graphique en \log , \log c'est l'équation d'un faisceau de droites ayant le point correspondant à $\log D_0$, $\log \tau_0$ comme point commun, ce qui se vérifie bien expérimentalement au cours de la rétrogradation pour des pentes comprises entre 1 et 0,7. Au-delà de 0,7, discontinuité.

Cette relation entre K et a , valable au cours de la rétrogradation, ne l'est pas au cours du phénomène inverse de la dégradation (hydrolyse) enzymatique. En effet, la cuisson enzymatique d'amidon avec des quantités croissantes d'enzyme conduit à des empois dont la droite représentative montre une pente croissante, mais on ne trouve pas de relation simple entre K et a .

Cette différence de comportement peut s'expliquer à partir des hypothèses suivantes :

— dans le cas de la rétrogradation, tout du moins au début du phénomène, il y a association des macromolécules par liaisons hydrogènes sans modification du rapport volume occupé/volume libre. Dans ce cas, seule change la grosseur des particules en suspension, ce qui entraîne une variation de a alors que la position du point « τ_0 , D_0 » reste invariable.

REMARQUE. — Ceci permet de croire que cette position de « τ_0 , D_0 » dépend, entre autres, des paramètres extérieurs tels que « concentrations effectives » et « températures ».

Par contre, la relation n'est pas vérifiée dans le cas d'une dégradation enzymatique, car au cours de

cette dégradation les particules résultant de la coupure d'une seule macromolécule initiale ont plus de facilité pour s'hydrater par solvation.

Par conséquent, le rapport volume occupé/volume libre va augmenter, ce qui entraîne une variation de la position de « τ_0 , D_0 » identique à celle qui serait causée par une variation de concentration. Il reste la dernière objection formulée au début, relative au passage aux limites; nous allons essayer de l'expliquer par l'étude des systèmes à base de gommés.

2

LES GOMMES

Dans un certain nombre de domaines industriels (impression sur tissus, encollage) on utilise à côté des empois d'amidon des solutions de gommés; nous avons donc été amenés à étudier également ces systèmes.

2.1 Mise en œuvre des gommés.

Ces polysaccharides qui sont, les uns fortement ramifiés à longues branches (gomme arabique, adragante) et les autres quasi linéaires à ramifications très courtes (guar et caroube) donnent des systèmes visqueux, même à concentrations relativement faibles (0,2-1,5 % pour les guar et caroube); à concentrations plus élevées (atteignant 10 % pour les gommés arabiques, par exemple), ils sont utilisés comme « épaississants ». Les températures d'emploi se situent entre 20 et 60° C en pratique.

Il arrive que certaines gommés arabiques soient soumises à des « cuissons » poussées, effectuées parfois en autoclave, ce qui produit une hydrolyse non négligeable et conduit à des systèmes quasi newtoniens pour autant que la préparation en autoclave ait été réalisée à températures suffisamment élevées et pour des durées prolongées.

2.2 Comportement rhéologique.

Évidemment, d'un type de gomme à l'autre les différences de comportements rhéologiques sont importantes. Mais, même pour un type donné, d'une qualité à l'autre, les comportements sont encore très variés.

Il n'est matériellement pas possible de présenter l'éventail complet de ce qu'on peut rencontrer. C'est pourquoi nous nous limiterons ici à un cas typique dont l'allure générale de comportement rhéologique se retrouve pour toutes les gommés : il s'agit de systèmes à base de guar aux concentrations comprises entre 3 ‰ et 3 % pour laquelle on a déjà un produit qui s'apparente à un gel, bien qu'il n'en soit pas un, comme nous le verrons plus loin.

Par ailleurs, en représentation doublement logarithmique, les courbes semblent tendre vers une droite, quand le gradient de vitesse appliqué augmente.

Mais il est impossible de trouver une relation simple pour exprimer l'influence de la concentration à température constante sur ce comportement.

De même l'influence de la température dépend du gradient de vitesse considéré : l'énergie

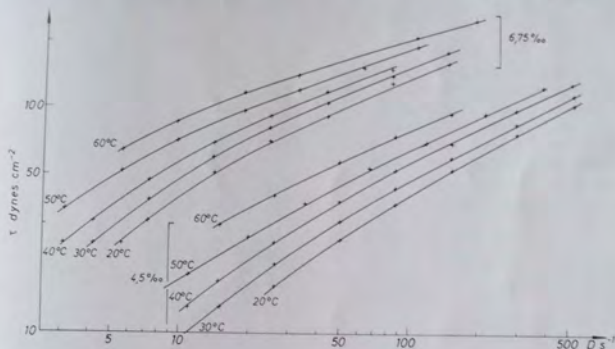


Fig. 6. — Guar 23727

2.21 ALLURE GÉNÉRALE.

Le comportement rhéologique est beaucoup plus compliqué que celui des empois d'amidon. En effet, en échelle doublement logarithmique $\log \tau = f(\log D)$ on n'obtient pas de droite. Mais on ne peut pas non plus mettre en évidence de contrainte limite d'écoulement aussi faible soit-elle : il ne s'agit donc pas de plasticité.

Ainsi, bien qu'à 3 ‰ de concentration en gomme, la pâte obtenue ait l'aspect d'un gel, elle s'écoule très lentement dès l'application des plus faibles contraintes : dans un récipient sa surface libre devient toujours plane et horizontale en quelques heures.

2.22 DIFFICULTÉS DE CARACTÉRISATION.

En représentation classique $D = f(\tau)$ ou inverse, $\tau = f(D)$, il n'est pas possible d'extrapoler aux valeurs $D = 0$ ou $D = \infty$ pour atteindre τ_0 et τ_{∞} .

d'activation d'écoulement dépend de D sans qu'il soit possible de trouver expérimentalement de relation simple entre ces deux grandeurs.

2.23 HYPOTHÈSES DE TRAVAIL.

Ces difficultés nous ont amenés à penser au problème général.

Il paraît en effet logique de penser que pour de tels produits (ne présentant pas de seuil de plasticité), la viscosité tend vers une limite quand D tend vers 0, et vers une autre limite quand D tend vers l'infini.

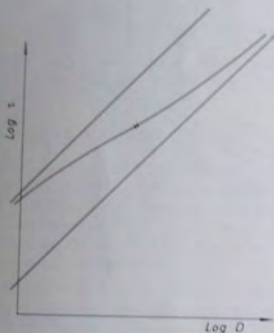
De tels corps se déformant par hypothèse au moindre déséquilibre des contraintes, il semble qu'il soit possible de considérer le comportement à gradient nul comme étant aussi inaccessible que le comportement à gradient infini. Ceci nous conduit à préférer encore dans ce cas une représentation en $\text{Log } \tau = f(\text{Log } D)$. Le comportement à gradient

nul étant représenté par une asymptote au même titre que le comportement à gradient infini.

Les deux asymptotes sont parallèles à la première bissectrice.

Le comportement rhéologique du produit étant représenté par une courbe évoluant entre ces deux asymptotes et passant par un point d'inflexion.

Pour faciliter le maniement de cette courbe, on peut procéder à un changement de coordonnées par rotation d'axes de $\frac{\pi}{4}$.



Ainsi, dans le cas des empois d'amidon, les mesures effectuées se situeraient dans une zone suffisamment proche et encore voisine du point d'inflexion pour que la courbe expérimentale puisse être confondue avec la tangente au point d'inflexion, d'où l'allure linéaire apparente pour les gradients explorés.

Dans le cas des gommés guar, on se trouve davantage dans la zone à gauche du point d'inflexion.

Les paramètres τ_0 et D_0 donnés pour les empois (§ 1,24) seraient les coordonnées du

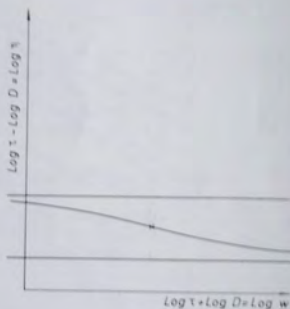


Fig. 7

A un facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ près, on arrive à la représentation (fig. 7, droite) :

$$\log \frac{\tau}{D} = f(\log \tau \cdot D);$$

or :

$$\frac{\tau}{D} = \text{viscosité « apparente »}$$

et $\tau \cdot D$ correspond au travail d'écoulement.

Cette manière de voir les choses présente l'avantage d'être abordable par le biais de modèles mathématiques connus pour atteindre les coordonnées et la pente au point d'inflexion.

La seconde hypothèse de travail, c'est que les courbes obtenues à partir de nos résultats expérimentaux correspondent à un tronçon de cette courbe théorique.

point d'inflexion. Ils correspondent à des valeurs de l'ordre $\tau_0 = 5\,000$ dynes/cm² et $D_0 = 9\,500$ s⁻¹.

CONCLUSIONS

Évidemment, pour vérifier ces hypothèses, il faudrait explorer des domaines de gradients de vitesse qui nous sont pour le moment inaccessibles, faute d'appareils adéquats. S'il est pensable de pouvoir gagner plusieurs décades vers les valeurs inférieures de gradient de vitesse, par contre, pour les gradients élevés, de nouveaux problèmes vont s'ajouter : effets de température, turbulence.

Toutefois, cette hypothèse de travail permet de saisir d'une façon générale les comportements des solutions macromoléculaires.

STRUCTURE DES LIQUIDES ET PROCESSUS D'ÉCOULEMENT (1)

par D. BOURGOIN

SERVICE DE BIOPHYSIQUE, INSTITUT PASTEUR, PARIS

RÉSUMÉ

La définition du coefficient de viscosité apparente étant rappelée, ainsi que le mode de représentation de sa variation avec la température, on donne comme exemples de comportements ceux des solutions des systèmes laurate de potassium-chlorure de potassium-eau et alginate de sodium-chlorure de calcium-eau.

On interprète ces comportements en approfondissant au préalable les origines du phénomène de l'écoulement. Deux notions essentielles sont dégagées de l'examen des théories de BORN et GREEN, de celle de MOONEY et de celle d'EYRING : structure du liquide et processus moléculaire d'écoulement.

Des exemples sont développés à partir du comportement rhéologique de solutions des deux systèmes mentionnés ci-dessus.

INTRODUCTION

Pour étudier les propriétés d'écoulement d'un liquide, on le place généralement entre deux cylindres coaxiaux, l'un tournant, l'autre étant relié à un dispositif permettant de mesurer le moment du couple développé par le laminage du liquide. Si le liquide est une substance à faible poids moléculaire, le couple développé est directement proportionnel à la vitesse de rotation, du moins tant que celle-ci est compatible avec un écoulement non tourbillonnaire du liquide; on dit alors que l'écoulement est de type newtonien. Au contraire, si le liquide

est un polymère fondu ou une solution macromoléculaire concentrée, le couple n'est plus directement proportionnel à la vitesse de rotation; s'il croît plus lentement que celle-ci, on dit que l'écoulement est rhéofluidifiant, tandis que s'il croît plus vite que la vitesse de rotation, l'écoulement est du type rhéoépaississant. Il existe aussi des cas où le couple ne dépend pas seulement de la vitesse de rotation, mais aussi de l'histoire antérieure du liquide (cas de la thixotropie).

Partant du moment du couple mesuré, pour une vitesse de rotation donnée, compte tenu des dimensions des cylindres et de leur écartement, on définit un coefficient de viscosité apparente du liquide. Ce coefficient de viscosité dépend, en général, de la vitesse de cisaillement du liquide et de la température de celui-ci.

Il arrive souvent que si l'on étudie la variation du logarithme de la viscosité en fonction de l'inverse de la température absolue, on trouve que cette variation est linéaire et cela rappelle les systèmes de réactions chimiques où un processus d'activation met en jeu une énergie E indépendante de la température et est de la forme

$$V = V_0 e^{-\frac{E}{RT}}$$

où V_0 est une vitesse de réaction.

Pour vous donner deux exemples de variations de viscosité, je vous présenterai des mesures effectuées sur des solutions du système : laurate de potassium-chlorure de potassium-eau, puis sur des solutions du système alginate de sodium-chlorure de calcium-eau en fonction de la vitesse de cisaillement et de la température.

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 14 décembre 1966.

Les figures 1 et 2 vous donnent un aperçu du comportement en écoulement des solutions du

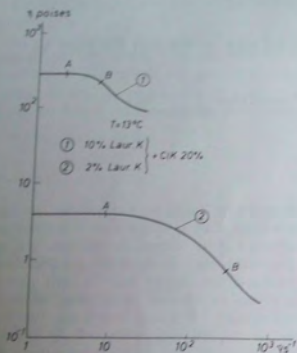


Fig. 1. — Comportement en viscosité de solutions de laurate de potassium en présence de chlorure de potassium

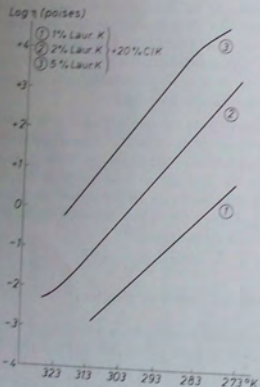


Fig. 2. — Sensibilité de la viscosité de solutions de laurate de potassium à la température

premier système. Vous y remarquerez, en particulier, l'existence de trois intervalles de vitesse de

cisaillement où les régimes d'écoulement sont différents; en outre, la linéarité des variations du logarithme de la viscosité en fonction de l'inverse de la température absolue n'existe que dans un domaine restreint de température.

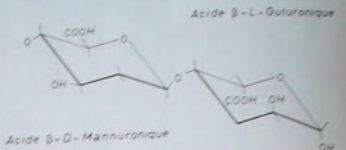


Fig. 3. — Enchaînement des monomères constitutifs des anions alginates

Quant au second système (on rappelle sur la figure 3 l'enchaînement des monomères constitutifs

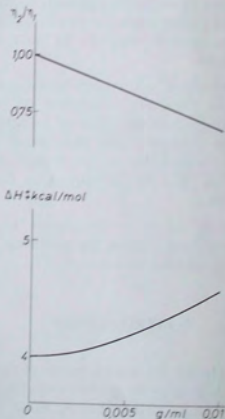


Fig. 4. — Variations des propriétés d'écoulement de solutions d'alginate de sodium dans l'eau distillée en fonction de la concentration en ce dernier. η_0/η_1 est le rapport des coefficients de viscosité pour les vitesses de cisaillement de $47,3 s^{-1}$ et de $5,8 s^{-1}$. L'écart à l'unité de ce rapport caractérise le comportement non newtonien de l'écoulement

de l'anion alginate), les principaux traits du comportement rhéologique de ses solutions aqueuses en absence d'électrolytes simples sont rapportés sur la figure 4, en fonction de la concentration en

alginate de sodium, et le comportement rhéologique de solutions contenant $5,3 \text{ mg/cm}^3$ d'alginate de sodium à la température de 30°C en présence de diverses concentrations de chlorure de calcium est représenté sur la figure 5.

Pour l'interprétation de ces comportements on ne peut pas se contenter d'utiliser des règles comme celle de STAUDINGER $[\eta] = KM^a$, ou de l'application de théories hydrodynamiques concernant le mouvement de particules à peu près indépendantes les unes des autres et où la viscosité du solvant est supposée être la même que celle déterminée sur le solvant pur, l'exemple le plus classique étant la relation d'Einstein

$$\eta = \eta_0 (1 + 2,5 \varphi)$$

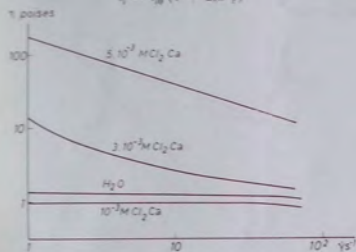


Fig. 5. — Variation du coefficient de viscosité de solutions à $5,3 \text{ mg/cm}^3$ d'alginate de sodium en fonction du logarithme de la vitesse de cisaillement et pour différentes concentrations en chlorure de calcium

où η_0 est la viscosité de la solution et φ : la fraction volumique des particules sphériques dissoutes dans le solvant de viscosité η_0 . Il est préférable, je pense, d'essayer de comprendre l'origine du phénomène de viscosité. Pour cela, le plus simple est d'examiner les théories proposées, pour expliquer la viscosité des liquides purs.

Considérons d'abord la théorie de BORN et GREEN [1]. Ces auteurs considèrent que le phénomène de viscosité est avant tout le résultat d'une déformation de la distribution au repos des molécules les unes par rapport aux autres sous l'effet de la vitesse de cisaillement et qu'il ne peut donner d'indication sur le processus d'écoulement. Ils aboutissent à une expression du coefficient de viscosité :

$$\eta = \frac{1}{30} \int \nu(r) \Phi(r) r^2 dr,$$

où $\nu(r)$ est le premier terme du développement de la fonction de distribution $n_2(r, \dot{\gamma})$, $\dot{\gamma}$ étant la vitesse de cisaillement; $\nu(r)$ est de la forme :

$$n_2^1 \left(\frac{m}{hT} \right)^{\frac{1}{2}} C(r) n_2(r, 0);$$

$n_2(r)$ étant elle-même de la forme :

$$n_2^1 e^{-\frac{\Phi(r)}{kT}};$$

$\Phi(r)$ étant la fonction de l'énergie potentielle entre deux molécules;

$C(r)$ étant sans dimensions et n_1 la probabilité par unité de volume de trouver une molécule dans une position donnée.

Une autre théorie est celle de MOONEY [2]. D'après cette théorie l'origine des forces de cisaillement est une déformation de la structure du liquide considéré un instant comme un solide et elle explique le processus de relaxation qui permet au solide d'être un liquide. Ce processus de relaxation est engendré par les fluctuations de densité du liquide sous l'effet d'ondes thermiques élastiques. Lorsque la densité d'un microvolume est suffisamment petite, la rigidité de ce microvolume s'annule, et les contraintes disparaissent.

MOONEY aboutit à une représentation de la viscosité de la forme :

$$\eta = \frac{A}{G_1} \exp \left[B G_2 \varepsilon^2 \right],$$

avec :

$$A = \frac{2,30 \cdot 10^{-9} M^3 D^3}{(\beta D)^2},$$

M est la masse moléculaire;

D est la densité;

β la compressibilité adiabatique;

$$B = \frac{1,322 \cdot 10^{-8} M}{T \beta D};$$

$$G_1 = \frac{(1 - \rho^2) G_2^{\frac{1}{2}}}{(1 - 2\rho)(7 - 5\rho)},$$

où ρ est le coefficient de Poisson;

$$G_2 = 1 + \frac{2(1 - 2\rho)}{1 + \rho} \quad \rho \leq 0,5,$$

ε : valeur critique de la dilatation volumique pour que la rigidité disparaisse (quelques % $\varepsilon < 2$).

Enfin, EYRING [3] donne du processus d'écoulement l'image que voici : le liquide est constitué de files de molécules orientées suivant la direction de l'écoulement. A l'intérieur de ces files les molécules sont distantes de λ_3 . Ces files sont groupées en plan d'égales vitesses, la distance entre les files

Il en découle que :

$$\frac{d \text{Log } \eta}{d \left(\frac{1}{T} \right)} = \frac{\Delta H_1}{R} + T$$

si l'on admet que α est indépendant de T.

Ce qu'il faut retenir de ces trois théories, c'est que les deux premières mettent l'accent sur la déformation de la structure du liquide au repos, tandis que la troisième met l'accent sur le processus même de l'écoulement, sans tenir compte d'une modification de structure provoquée par ce dernier.

Ce double aspect de l'écoulement des liquides va être présenté sur les deux systèmes précédemment mentionnés.

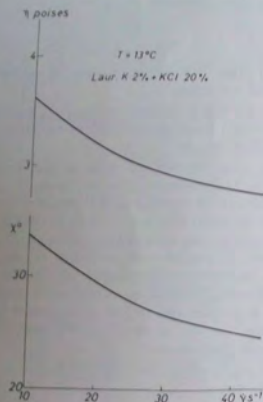


Fig. 6. — Variations simultanées de l'angle d'extinction et de la viscosité d'une solution de laurate de potassium à 2 %, en présence de chlorure de potassium à 20 %.

étant λ_2 et les plans étant distants de λ_1 . Les molécules à l'intérieur d'une file se déplacent par sauts de longueur λ , la fréquence de ces sauts respecte la différence de vitesse moyenne entre les plans. Au cours de ces sauts, l'énergie mécanique acquise par la molécule est transformée en énergie calorifique.

EYRING aboutit à la formule suivante :

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\arg \text{sh } \beta \dot{\gamma}}{\beta \dot{\gamma}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda \lambda_2 \lambda_3}{2 k T}$$

et :

$$\beta = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} 2 k' \right)^{-1}, \quad k' = K \frac{k T}{k} \exp - \frac{\Delta F_1}{k T},$$

où ΔF_1 est appelé énergie libre d'activation.

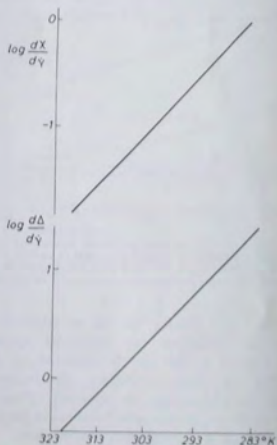


Fig. 7. — Sensibilité de l'angle d'extinction et de la biréfringence à la vitesse de cisaillement en fonction de l'inverse de la température absolue

Pour le système laurate de potassium-chlorure de potassium-eau, on voit, d'après la figure 6, que, pour une vitesse de cisaillement suffisante, les variations de viscosité sont accompagnées d'une variation semblable de la direction d'anisotropie optique et la figure 7 montre que la signification de la chaleur d'activation d'écoulement n'est pas

limitée aux seuls phénomènes de viscosité, mais s'applique aussi aux propriétés optiques du système en écoulement.

De même, c'est à partir de remarques sur les variations des propriétés optiques des solutions du système alginate de sodium-chlorure de calcium-eau que nous avons été amenés à étudier plus en détail leurs propriétés d'écoulement. La figure 8 vous montre les modifications des propriétés rhéoptiques sous l'influence des ions calcium.

L'exploration de la sensibilité de la viscosité des solutions vis-à-vis de la température ou de la

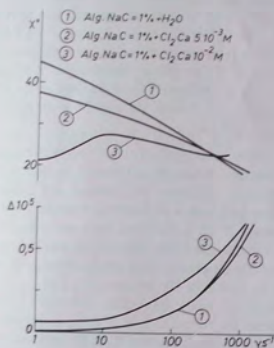


Fig. 8. — Comportement rhéoptique de solutions d'alginate de sodium, en présence ou non de chlorure de calcium

vitesse de cisaillement présente un intérêt, soit pour connaître l'ordre de grandeur des temps de relaxation des processus moléculaires d'écoulement, ou celui de leur énergie d'activation, soit même pour obtenir des informations sur la structure des solutions étudiées.

Ainsi, sur la figure 9, nous avons une idée du degré de concordance entre les variations effectives de la viscosité d'une solution de savon et les variations calculées par la formule d'EYRING en prenant pour α : $1,01 \cdot 10^{-4}$ cm²/g et pour β : 0,28 s. Cette correspondance montre que, qualitativement, on retrouve l'allure des variations, mais l'accord quantitatif est loin d'être parfait.

L'étude des variations de la chaleur d'activation d'écoulement en fonction de la concentration en laurate de potassium révèle, ainsi qu'on le voit

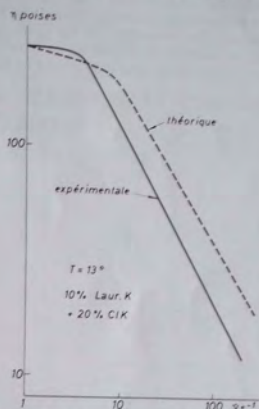


Fig. 9. — Comparaison entre variation du coefficient de viscosité d'une solution de laurate de potassium avec la vitesse de cisaillement et la variation de ce même coefficient suivant la théorie d'EYRING

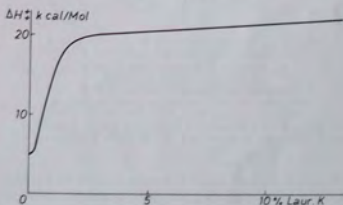


Fig. 10. — Variation de ΔH^* de solutions de laurate de potassium en fonction de la concentration en ce dernier

sur la figure 10, un changement de structure des solutions. En schématisant, on peut dire qu'au-dessous d'une concentration en laurate de potassium de 2% ces solutions sont du type solutions concentrées. C'est pour des solutions de ce type que les relations établies par PHILIPPOFF [4] s'appliquent.

De même, dans un travail récent qui est publié dans *Rheologica Acta* [5], portant sur les propriétés de structuration des ions calcium vis-à-vis des solutions d'alginate de sodium, l'étude systématique des variations, d'une part, de la viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement et, d'autre part, de la chaleur d'activation en fonction

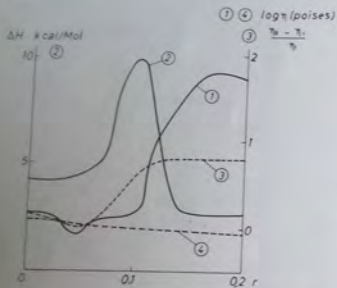


Fig. 11. — Comportement rhéologique à la température de 30°C d'une solution d'alginate de sodium à 5,3 mg/cm³ en fonction de r , rapport entre le nombre d'ions calcium et de groupements carboxyliques présents dans la solution

- 1: variation du coefficient de viscosité pour la vitesse de cisaillement de 5,8 s⁻¹;
- 2: variation de l'enthalpie d'écoulement;
- 3: caractérisation du régime non newtonien de l'écoulement par le rapport

$$\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta}$$

où η_1 et η_2 sont les coefficients de viscosité relatifs aux vitesses de cisaillement de 1 et 11 s⁻¹;

- 4: variation du coefficient de viscosité de la même solution d'alginate

en fonction de la concentration en NaCl.

Pour cette courbe le paramètre porté en abscisse représente le tiers du rapport des ions sodium aux groupements carboxyliques de manière que la force ionique soit la même que pour les solutions de Cl₂Ca correspondantes

premier plan dans les phénomènes d'écoulement, à savoir : la structure des liquides et le processus d'écoulement.

Il nous apparaît difficile de suivre GREEN dans sa conception de ne voir dans le processus d'écoulement qu'un élément secondaire dans l'explication des phénomènes de viscosité, car sa théorie ne montre pas clairement comment il peut calculer quantitativement la modification de la fonction de distribution sous l'influence de la vitesse de déformation.

Si l'on peut reprocher à EYRING d'avoir donné une idée assez mystérieuse de l'origine des forces permettant aux molécules de se déplacer les unes par rapport aux autres et de ne pas envisager l'influence de la structure sur la valeur de l'énergie d'activation, je pense, néanmoins, qu'il est intéressant de conserver l'idée d'une relaxation s'effectuant par sauts moléculaires et dont la fréquence dépend de l'intensité des forces de cisaillement auxquelles est soumis le liquide.

La théorie de MOONEY fait intervenir à la fois la modification de structure et explicite le phénomène de relaxation. Comme la théorie de MAXWELL, elle donne une image facilement compréhensible de l'écoulement d'un liquide. A mon avis, il y aurait lieu de développer cette théorie en envisageant des changements de structure, c'est-à-dire une modification de la fonction de distribution qui ne soit pas nécessairement celle du solide déformé. Quant au phénomène de relaxation, il n'est pas inconcevable qu'au cours de la dilatation d'un élément de volume déformé, la différence entre l'état initial et l'état final ne se réduise pas à quelques sauts moléculaires suffisants pour annihiler les contraintes initiales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BORN M. et GREEN H. S. — *Proc. Roy. Soc.*, A **190**, 455 (1947).
- [2] MOONEY M. — *Transaction of the Society of Rheology*, **I**, 63 (1957).
- [3] REE T. et EYRING H. — Dans *Rheology*, Acad. Press, **11**, 83 (1958).
- [4] PHILIPPOFF W. — *Transaction of the Society of Rheology*, **IV**, 159 (1960).
- [5] BOURGOIN D. et FASBENDER H. — *Rheologica Acta*, **6**, 65 (1967).

BRÈVE NOTE
SUR
LE CALCUL DES CONTRAINTES DANS LES ÉPROUVETTES TUBULAIRES
EN TORSION ÉLASTOPLASTIQUE
A PROPOS D'UNE ERREUR

par Anatole POPOFF

INGÉNIEUR-DOCTEUR

Dans le traité « Étude de la plasticité et application aux métaux » du regretté B. JAOUÏ [1], à la page 176, on relève une formule erronée relative aux calculs des contraintes dans les tubes soumis à la torsion élastoplastique. Elle aurait pour but de généraliser la formule bien connue de P. LUDWIK [2] applicable seulement aux barres rondes non évidées et que nous écrivons avec JAOUÏ sous sa forme la plus connue :

$$(1) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2\pi r^3} \left(3C + \varphi \frac{dC}{d\varphi} \right).$$

τ_{\max} : contrainte maximale de cisaillement au contour de la section de la barre ronde;

r : rayon de la section;

C : couple de torsion appliqué;

φ : angle de torsion de la barre sur une longueur donnée.

En reprenant la démonstration de LUDWIK, l'auteur du traité aboutit à un résultat erroné :

$$(2) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2\pi (r_o^3 - r_i^3)} \left(3C + \varphi \frac{dC}{d\varphi} \right).$$

r_o, r_i : rayons extérieur et intérieur de la section annulaire du tube.

La vérification des calculs a permis de rétablir la solution correcte :

$$(3) \quad \tau_{\max} r_o^3 - \tau_{\min} r_i^3 = \frac{1}{2\pi} \left(3C + \varphi \frac{dC}{d\varphi} \right).$$

τ_{\max}, τ_{\min} : contraintes extrémales aux contours extérieur et intérieur du tube.

La formule (3) contient deux inconnues τ_{\max}, τ_{\min} et par conséquent ne permet pas, à elle seule, de connaître la contrainte maximale que l'on se propose d'évaluer.

Dans le domaine purement élastique, en vertu de la proportionnalité entre les déformations et les contraintes et de leur répartition linéaire suivant le rayon de la section, on a

$$(4) \quad \frac{dC}{d\varphi} = \frac{C}{\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\tau_{\max}}{\tau_i} = \frac{r_o}{r_i}$$

et les formules (1) et (2) donnent les solutions classiques [3] :

$$(5) \quad \tau_{\max} = \frac{16C}{\pi D^3}$$

pour les barres rondes et

$$(6) \quad \tau_{\max} = \frac{16C}{\pi D_o^3 \left(1 - \frac{D_i^4}{D_o^4} \right)}$$

pour les tubes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dunod, Paris (1965).

[2] P. LUDWIG. — *Elemente der Technologischen Mechanik*, J. Springer, Berlin (1909). Voir

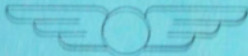
également : A. NADAI. — *Plasticity*, pp. 126-128 (1931) et *Theory of Flow and Fracture of Solids*, pp. 346-349, McGraw-Hill, N.Y. (1950).

[3] Voir, par ex. : S. TIMOSHENKO. — *Résistance des matériaux*, vol. 1, pp. 257 et 261, Béranger, Paris et Liège (1947).

GROUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Bibliographie

SEDCAR



INSTRUMENTS