

all P.B.26

GRUPE FRANÇAIS DE RHEOLOGIE

Bibliothèque

*in coll*

Cahiers  
du  
Groupe Français de Rhéologie

---

N° 2 - Tome I

AVRIL 1966

---

ÉDITÉ

PAR LE SERVICE DE DOCUMENTATION SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE  
DE L'ARMEMENT

MAGASIN DE VENTE : 2, AVENUE DE LA PORTE-D'ISSY, PARIS (15<sup>e</sup>)

1966

N° 2

Cahiers  
du  
Groupe Français de Rhéologie

---

N° 2 - Tome I

*AVRIL 1966*

---

## SOMMAIRE

---

	PAGES
J. MANDEL. — Avant-propos .....	33
J. P. BOMBLED. — Recherches sur les propriétés rhéologiques des suspensions minérales concentrées .....	35
G. SAYEGH. — Variation des modules de quelques bitumes purs et bétons bitumineux .....	51
G. W. SCOTT BLAIR et J. H. PRENTICE. — Sur l'emploi d'équations doublement logarithmiques pour décrire l'écoulement des suspensions telles que les crèmes laitières aux basses températures.....	75
Y. TCHENG. — Variation de la pression de l'eau interstitielle des sols saturés...	81
J. VERSTRAETEN et J. ROMAIN. — Essai d'interprétation visco-élastique du comportement des sols sous chargements répétés .....	87

---

## AVANT-PROPOS

---

Ce Cahier n° 2 contient les Conférences prononcées au cours du Colloque du 20 mai 1965, dont le thème était : *La Rhéologie des systèmes à deux phases, une phase solide, une phase liquide.*

Ce thème pouvait être développé dans deux directions.

Si les deux phases ne se séparent pas, le comportement rhéologique du milieu peut être identifié à celui d'un milieu homogène. La question est alors de savoir comment les proportions et natures des deux phases influent sur le comportement, c'est-à-dire sur la forme et les coefficients des équations rhéologiques.

Il n'en est plus de même lorsque les deux phases se séparent. Le comportement d'un élément ne peut plus alors être décrit globalement, ou il ne peut l'être qu'approximativement pendant une durée limitée. La notion même d'élément d'un tel milieu est ambiguë, puisque la masse liquide et la masse solide qui à un certain moment se trouvent à l'intérieur d'une même surface, ne sont plus, à un autre instant, limitées par la même surface. Un certain nombre de phénomènes connus sont liés à cette mobilité relative des phases : citons le phénomène sigma dans le sang, le tassement des argiles par expulsion de l'eau interstitielle, leur gonflement par absorption d'eau. Une conséquence remarquable des transferts de matière qui se produisent alors est que la viscosité apparente du milieu dépend des dimensions géométriques du domaine dans lequel s'opèrent ces transferts (vaisseau sanguin ou couche d'argile). On voit par là combien le comportement devient différent de celui d'un milieu à une phase.

C'est ce que l'on verra également par l'exposé de M. TCHENG qui rappelle l'influence bien connue de la pression de l'eau interstitielle dans les sols saturés. Les autres exposés se rattachent plutôt au premier sujet évoqué ci-dessus.

Nos amis belges et anglais ont bien voulu par leurs communications accroître l'intérêt de ce Colloque. Je tiens à les remercier particulièrement.

J. MANDEL,  
Président  
du Groupe Français de Rhéologie.

---

# RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES DES SUSPENSIONS MINÉRALES CONCENTRÉES (1)

par J. P. BOMBLED

CHEF DE LA SECTION RHÉOLOGIE AU LABORATOIRE DU C.E.R.I.L.H.

## RÉSUMÉ

Les systèmes à deux phases sont très fréquents dans la fabrication et l'utilisation du ciment. Le laboratoire de rhéologie du C.E.R.I.L.H. s'est spécialisé particulièrement dans l'étude des suspensions concentrées de matériaux argileux, siliceux ou calcaires dans l'eau. Ces pâtes sont des fluides plastiques ou de Bingham.

Les recherches effectuées ont permis de mettre en relief l'influence de la nature et de la teneur en liquide et l'importance fondamentale de la nature et surtout de la surface spécifique du solide. On a, d'autre part, étudié l'influence de quelques paramètres (température, pH...) et surtout l'addition d'électrolytes (floculation, défloculation, dilataance...).

## I. — INTRODUCTION

Les systèmes à deux phases peuvent être, par exemple :

TABLEAU I

PHASES		SYSTEME
DISPERSÉE	DISPERSANTE	
Solide	Liquide	Suspensions, pâtes
Solide	Gaz	Poudres fluidisées (transports, réactions chimiques) broyage à sec
Liquide	Liquide	Émulsions
Liquide	Gaz	Brouillards, aérosols
Gaz	Liquide	Mousses

Chacun de ces systèmes possède des propriétés rhéologiques particulières et peut intéresser de nombreuses industries.

Dans l'industrie du ciment nous pouvons rencontrer ces cinq formes :

— on trouve les *suspensions concentrées* sous forme de pâtes argilo-calcaires ou pâtes crues dans les usines employant le « procédé humide » dans lequel les matières premières sont injectées dans le four sous forme de boues.

On peut aussi trouver dans la zone de cuisson (clinkérisation) du four des suspensions de matière en cours de cuisson dans la phase liquide qui y apparaît.

D'autre part, lors de l'utilisation, les coulis, mortiers et bétons de ciment sont encore des suspensions.

— les *systèmes solide-gaz* sont aussi très courants puisque dans la plupart des cimenteries on transporte par fluidisation le ciment et les matières premières broyées à sec.

D'autre part, dans les broyeurs à boulets la matière et les corps broyants évoluent dans une atmosphère chargée de poussières dont il faut tenir compte (résistance de l'air...).

Enfin, il est probable que se développeront dans l'avenir des procédés de décarbonatation ou de clinkérisation sur matériaux fluidisés.

— on rencontre les *brouillards* chaque fois qu'il y a pulvérisation et c'est le cas pour le mazout dans les brûleurs des fours ou pour l'eau dans certaines opérations de granulation des poudres et aussi dans l'étuvage des produits en béton;

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 20 mai 1965.

— on peut trouver des *émulsions* dans le cas de certaines additions d'hydrofuges ou de résines organiques dans les mortiers ou bétons.

— enfin, les *mousses* interviennent dans la confection de bétons à gaz occlus dans lesquels on recherche soit la résistance au gel (par un effet de vase d'expansion ils peuvent mieux absorber l'augmentation de volume de l'eau lors de sa transformation en glace), soit la légèreté, soit l'isolation thermique ou phonique.

Nous ne nous occuperons ici que des suspensions minérales concentrées. Ces systèmes intéressent de nombreuses industries où l'on manipule des coulis, des boues, des barbotines et des pâtes telles que les industries céramiques, pétrolières, cimentières, pharmaceutiques, de produits de beauté, d'entretien ou alimentaires, des encres et peintures, etc.

Dans l'industrie cimentière ce sont essentiellement des suspensions de matériaux argileux, siliceux ou calcaires dans l'eau que nous avons à considérer et c'est, par conséquent, dans ce domaine que nous avons effectué la plupart de nos recherches.

Étant donné la nature des problèmes qui nous sont posés dans cette branche au laboratoire du Centre d'Études et de Recherches des Liants Hydrauliques (C.E.R.I.L.H.), ces travaux ont avant tout un caractère de recherche appliquée.

## II. — COMPORTEMENT RHÉOLOGIQUE DES SUSPENSIONS CONCENTRÉES

### 1 Classement rhéologique.

Si nous étudions l'écoulement de suspensions concentrées dans des canalisations comme l'illustre la figure 1 (obtenue pour une pâte argilo-calcaire) nous observons l'existence d'une pression minimale d'écoulement.

C'est que les suspensions minérales fortement concentrées en solide ne sont généralement pas newtoniennes, mais appartiennent au groupe des fluides plastiques ou de Bingham; elles satisfont à la relation :

$$F - f = u \frac{dv}{dz}, \quad (1)$$

$u$  étant leur viscosité plastique (mesurée en poise) et  $f$  leur seuil de cisaillement (exprimé en dynes/cm<sup>2</sup>).

$u$  et  $f$  sont les coefficients rhéologiques de la suspension. Pour les liquides classiques  $f$  est nul.

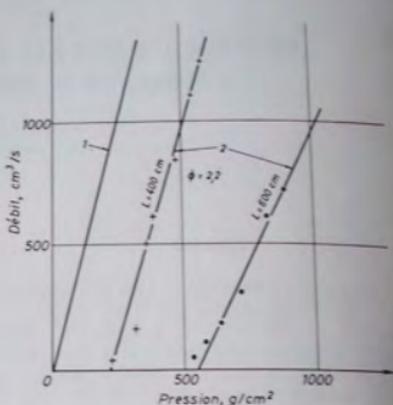


Fig. 1

1 : fluide newtonien (formule de Poiseuille);  
2 : fluides plastiques (résultats d'essais).  
(Régime laminaire)

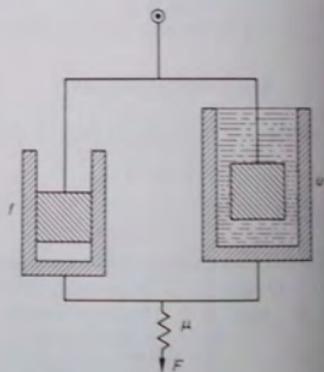


Fig. 2. — Corps plastique (Bingham)

La figure 2 rappelle le modèle mécanique correspondant assez bien au comportement de ces corps : il s'agit d'un frottement mécanique en parallèle

avec un amortisseur, l'ensemble étant en série avec un ressort.

L'expérience a montré que le seuil de cisaillement est la grandeur prépondérante.

Il intervient dans tous les problèmes de pompage, d'écoulement, de malaxage, d'extrusion, de moulage, d'injection, de sédimentation, d'adhérence, etc.

L'opposition aux déformations qu'entraîne l'existence du seuil de cisaillement peut être un élément favorable quand il s'agit, par exemple, de conserver l'homogénéité (béton, par exemple) ou la forme (démoulage avant durcissement) ou pour la sustentation de débris rocheux (boues de forage).

Au contraire ce peut être un facteur très gênant rendant difficiles des opérations telles que l'homogénéisation, le tamisage, la filtration ou le transport des suspensions.

Le seuil de cisaillement permet l'adhérence ou « le collage » des pâtes en couche plus ou moins épaisse. Cette propriété est utile pour les enduits et peintures, mais peut avoir un caractère gênant : c'est le cas, par exemple, du travail (labours, terrassements) dans les sols argileux très humides qui adhèrent aux outils et au matériel; c'est encore le cas dans les sècheurs ou les échangeurs où le collage peut entraver le cheminement de la matière.

## 2 Mesure des coefficients rhéologiques des suspensions.

Pour dissocier et mesurer les coefficients rhéologiques des suspensions nous utilisons un viscosimètre

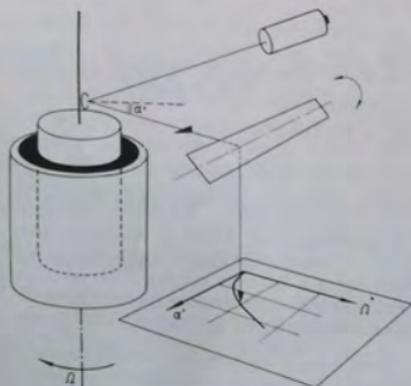


Fig. 3

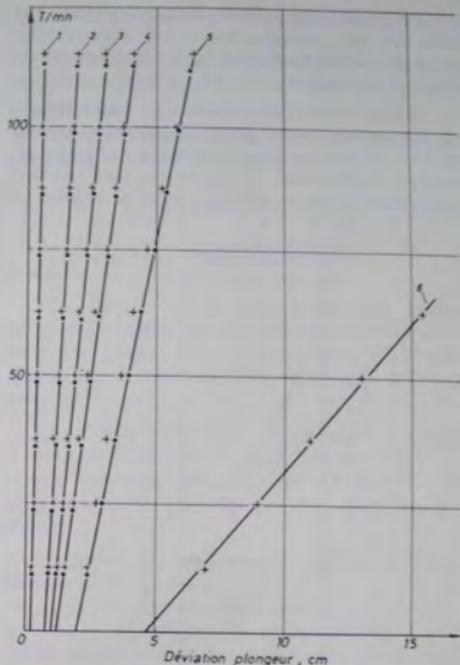


Fig. 4. — Rhéogrammes sur fluides binghamiens  
Calcicole broyé

	E/MS	VISCOSITÉ $\mu$ (poises)	SEUIL DE CISAILLEMENT $f$ (dynes/cm <sup>2</sup> )
1	0,50	0,85	30
2	0,40	2,15	115
3	0,375	3,80	140
4	0,36	5,50	185
5	0,35	8,55	295
6	0,30	20,00	720

à cylindres coaxiaux construit par notre laboratoire. Il est schématisé sur la figure 3.

En 1929, REINER et RIWLIN ont montré, en intégrant l'équation de Bingham, que dans ce type d'appareil la courbe expérimentale est une droite pour les fluides plastiques; ceci permet donc une mesure directe et facile des coefficients rhéologiques.

Notre réalisation a deux particularités : d'une part, la variation continue de la vitesse de la cuve et, d'autre part, l'enregistrement direct du rhéogramme.

Il en résulte que la durée de la mesure peut être faible ce qui permet d'éviter les inconvénients entraînés par des évolutions ou la sédimentation de certaines suspensions.

D'autre part, ce viscosimètre est bien adapté à nos besoins car l'espace annulaire est suffisant pour pouvoir étudier des pâtes contenant des grains de quelques millimètres : c'est le cas des mortiers d'injection; ou encore cela nous évite de tamiser les

### III. — ÉCOULEMENT DES SUSPENSIONS EN CANALISATION CYLINDRIQUE

#### 1 Écoulement à noyau.

L'application de l'équation déduite de l'hypothèse de Bingham permet d'écrire :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{Pr}{2ul} - \frac{f}{u} \quad (2)$$

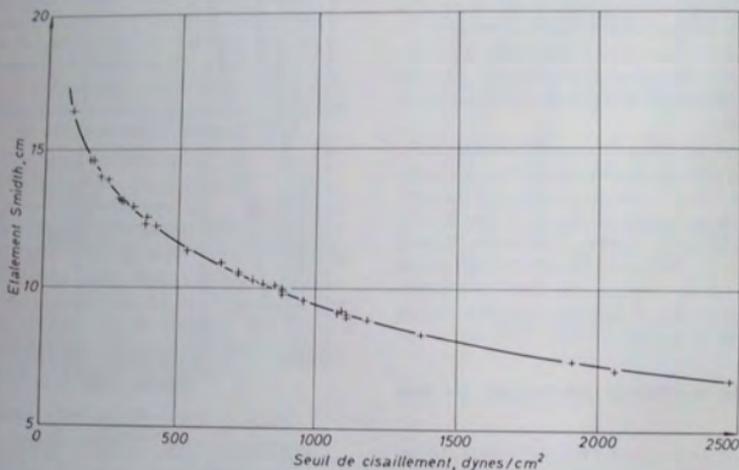


Fig. 5. — Relation entre le diamètre de l'étalement Smidth et le seuil de cisaillement

pâtes crues de cimenterie qui peuvent contenir des petits silix.

La figure 4 illustre des enregistrements obtenus avec cet appareil sur des suspensions de calcaire broyé.

En dehors des limites d'emploi du viscosimètre à cylindres coaxiaux on peut mesurer le seuil de cisaillement des pâtes par des méthodes d'écoulement, d'étalement, d'enfoncement, d'arrachement ou de traction. Beaucoup de ces principes sont à la base de nombreux tests rhéologiques de contrôle industriel.

La figure 5 illustre la relation entre le seuil de cisaillement et le diamètre de l'étalement au viscosimètre Smidth employé en cimenterie.

avec  $P$  = pression motrice s'exerçant sur toute la section de la conduite;

$\frac{dv}{dr}$  = gradient de vitesse;

$l$  = longueur de la conduite;

$u$  et  $f$  = coefficients rhéologiques de la pâte.

L'existence d'un terme négatif fait que le gradient de vitesse peut s'annuler : dans cette région la force due à la pression motrice  $P$  est insuffisante pour vaincre le seuil de cisaillement et les grains de la suspension resteront en repos relatif.

Dans ce cas, toute la partie centrale de la conduite se déplace « en bloc » comme l'illustre la figure 6 : c'est ce qu'on appelle l'écoulement à noyau.

On peut facilement remarquer ce phénomène lorsqu'on observe, en cimenterie, par exemple, l'écoulement d'une pâte argilo-calcaire dans un canal ouvert.

Le rayon du noyau étant la valeur de  $r$  pour  $\frac{dv}{dr} = 0$ , le calcul donne immédiatement :

$$r_n = 2 \frac{\beta l}{PR} \quad (3)$$

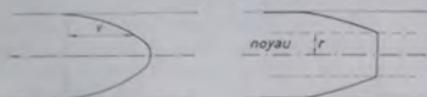


Fig. 6  
Fluide newtonien (répartition parabolique)      Fluide plastique (écoulement à noyau)

## 2 Pression minimale et critérium d'écoulement.

Comme la valeur maximale du rayon du noyau  $r_n$  est celui de la conduite  $R$ , il faut :

$$\text{soit :} \quad r_n \leq R,$$

$$2 \frac{\beta l}{PR} \leq 1,$$

d'où *théoriquement* la pression minimale d'écoulement :

$$P_0 = \frac{2\beta l}{R} \quad (4)$$

Pour qu'il y ait écoulement il faut  $P > P_0$ .

En pratique nous avons souvent trouvé pour  $P_0$  des valeurs assez différentes de celles données par la formule (4) probablement par suite d'effets perturbateurs (glissements, séparation de phases...).

La connaissance de la « pression de démarrage » est importante pour calculer le débit et la puissance des pompes. L'expérience nous a montré que  $P_0$  pouvait atteindre 80 à 90 % de la pression totale nécessaire pour transporter une pâte crue de cimenterie à une vitesse « économique ».

## 3 Répartition des vitesses.

La vitesse à la distance  $r$  de l'axe s'obtient en intégrant l'équation (2). Après calcul de la constante pour les conditions limites on obtient :

$$v = \frac{P}{4ul} \left( R^2 - r^2 \right) - \frac{\beta(R-r)}{u} \quad (5)$$

## 4 Débit de la canalisation.

Il s'agit de la généralisation de la formule de POISEUILLE qui a été établie pour les liquides visqueux.

Le calcul aboutit à l'équation de BUCKINGHAM-REINER :

$$Q = \frac{\pi PR^4}{8ul} \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{2\beta l}{PR} + \frac{1}{3} \left( \frac{2\beta l}{PR} \right)^4 \right) \quad (6)$$

terme correctif < 1

La présence du seuil de cisaillement a donc pour conséquence que le débit d'une canalisation en fluide plastique est toujours inférieur à celui qu'elle aurait avec un fluide newtonien de même viscosité dynamique.

La pratique n'a pas toujours vérifié la formule de BUCKINGHAM-REINER pour les matériaux que nous considérons : les débits mesurés sont souvent plus importants que ceux que l'équation (6) laisse prévoir.

Ceci est probablement dû aux effets perturbateurs déjà signalés et peut-être aussi au fait que les grains peuvent être relativement gros; il en résulte que les couches ont une épaisseur finie et non infiniment mince comme le voudrait l'intégration mathématique. La granularité du matériau doit donc intervenir et il y a dans ce domaine matière pour des recherches plus approfondies.

## IV. — ANOMALIES ET ÉVOLUTIONS DIVERSES DES SUSPENSIONS

Les suspensions concentrées que nous étudions peuvent présenter des anomalies ou des évolutions qui sont susceptibles d'en modifier considérablement le comportement rhéologique.

On rencontre particulièrement :

### 1 La thixotropie (COTTON et MOUTON, 1907; FREUNDLICH).

La suspension, assez rigide au repos, a l'aspect d'une gelée qui se trouve fluidifiée par agitation; la pâte reprend son état initial après un certain temps de repos.

C'est donc un phénomène réversible, caractérisé par une boucle dans des diagrammes enregistrés au viscosimètre à cylindres coaxiaux (fig. 7).

Le seuil de cisaillement d'une pâte thixotrope est bien défini, mais sa viscosité varie avec la vitesse d'écoulement ou l'énergie d'agitation ou en fonction de la durée du repos ou du mouvement.

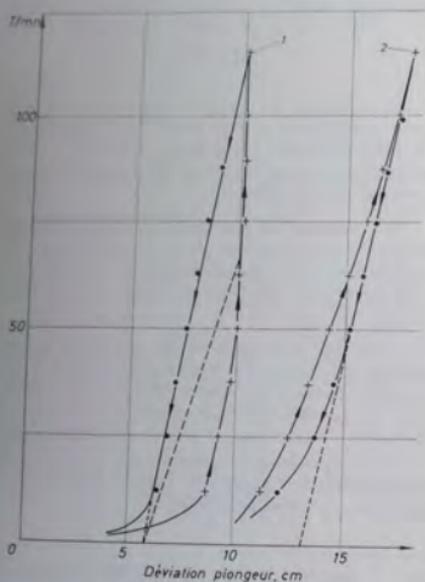


Fig. 7. — Rhéogrammes  
1 : argile broyée (thixotropie);  
2 : calcaire broyé (thixotropie inverse).

On admet que la thixotropie est due à une orientation des grains (que l'on sait superficiellement chargés) en des positions correspondant à une énergie potentielle minimale. L'agitation désorganise donc une structure qui se reforme après un certain temps de repos, durée variable en particulier avec les coefficients rhéologiques.

Nous n'avons observé la thixotropie que dans le cas de suspensions assez concentrées de matériaux de grande finesse (où les actions électriques superficielles sont prépondérantes) et, semble-t-il, surtout avec des grains de forme allongée ou lamellaire comme les argiles.

## 2 L'antithixotropie ou la thixotropie inverse.

Une autre anomalie que l'on a souvent comparée à la thixotropie est représentée sur le diagramme viscosimétrique par un effet inverse, c'est-à-dire que la courbe des vitesses décroissantes correspond à des efforts de cisaillement supérieurs à ceux de l'essai aux vitesses croissantes (fig. 7).

En réalité, cet effet n'est pas réversible et correspond presque toujours à une modification de la suspension pendant la mesure :

- soit une augmentation de la proportion d'éléments très fins par usure ou désagglomération des grains (la préparation par broyage à sec peut les compacter en « pastilles » assez résistantes) : la création de surfaces nouvelles augmente la proportion d'eau adsorbée au détriment de l'eau libre. C'est le cas de la courbe (2), figure 7;

- soit diminution de l'eau libre par fixation physique ou chimique (absorption, hydratation...);

- soit, enfin, modification de l'homogénéité (sédimentation ou ségrégation des grains).

## 3 Évolutions diverses.

Un certain nombre d'évolutions plus ou moins rapides peuvent entraîner des variations notables des coefficients rhéologiques des pâtes que nous étudions. Citons, par exemple :

- le gonflement et le vieillissement de certains matériaux et des argiles en particulier;

- la floculation ou la défloculation par des agents extérieurs ou par des éléments contenus dans l'une des phases de la suspension : c'est le cas des sels solubles ou des acides humiques contenus dans les sols;

- l'hydratation et la prise des liants hydrauliques : la figure 8 illustre ce phénomène.

## 4 La dilatance (REYNOLDS, 1885).

La dilatance n'est pas, à proprement parler, une anomalie des suspensions. Elle constitue une classe particulière de suspension sans seuil de cisaillement, mais dont la viscosité croît avec la vitesse de cisaillement.

Cependant, nous avons pu passer assez facilement, dans certains cas, d'une pâte plastique à une suspension dilatante et ceci par deux moyens :

- soit sur des suspensions de quartz en sur-broyant le matériau : malgré la grande finesse le seuil de cisaillement disparaît;

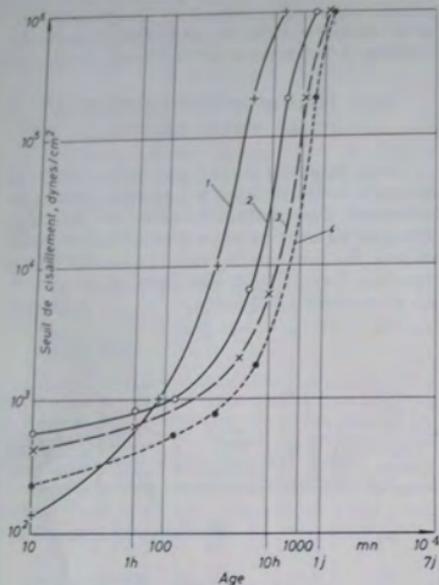


Fig. 8. — Variation du seuil de cisaillement d'un coulis en fonction du temps (essais effectués à 15° C)

Ciment PMF 2

- 1 : coulis témoin sans retardateur, E/C = 0,50 ;
- 2 : + 1 % acide phosphorique, E/C = 0,50 ;
- 3 : + 5 % d'argile Rylor } E/C = 0,70 ;
- + 1 % acide phosphorique }
- 4 : + 5 % d'argile Rylor } E/C = 0,85.
- + 1 % acide phosphorique }

— soit en défloculant énergiquement des suspensions de quartz ou de calcaire broyés et en diminuant corrélativement la teneur en eau. C'est ce qu'illustre la figure 9.

L'effet, observé par REYNOLDS, est dû au fait que les particules se placent suivant un arrangement où elles laissent le minimum d'espace intergranulaire ; tout cisaillement provoque une expansion de la masse avec appel de liquide des régions éloignées (assèchement du sable des plages autour d'un point où l'on exerce une pression) : cet apport ne s'effectue que lentement à cause de la faible perméabilité du milieu d'où la résistance observée, d'autant plus grande que la vitesse de cisaillement sera plus élevée.

Le phénomène de dilatance ne se produit qu'avec des grains parfaitement individualisés, c'est-à-dire entre lesquels il n'y a plus aucune force de cohésion : ils sont alors simplement soumis à la pesanteur et peuvent se « tasser » avec le minimum de vides

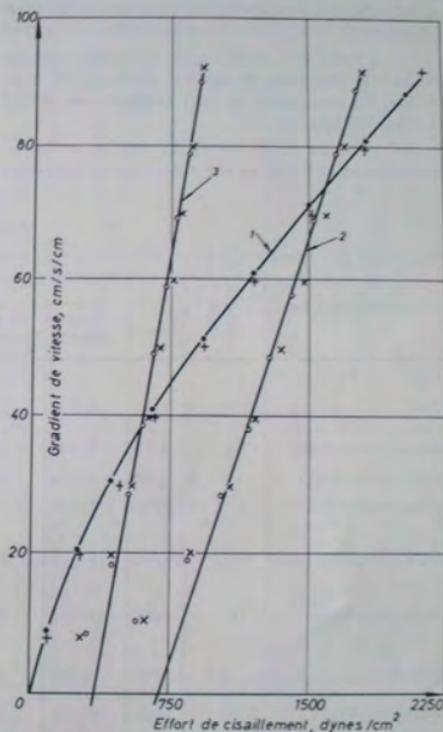


Fig. 9. — Quartz broyé  
Diagrammes au viscosimètre à cylindres coaxiaux

	COURBE 1	COURBE 2	COURBE 3
Surface spécifique du quartz (cm <sup>2</sup> /g) .....	8 300	4 800	4 800
Teneur en eau de la pâte (E/MS) .....	0,28	0,35	0,40
Addition .....	1 % pyrophos. de Na	—	—
Coefficients rhéologiques :			
— viscosité (poises) .....	Dilatant	13,4	7,25
— seuil de cisaillement (dynes/cm <sup>2</sup> ) .....	0	720	360

intergranulaires. Ceci peut se produire dans plusieurs cas :

— d'une part, dans des suspensions dont le matériau solide ne contient pas d'éléments très fins (qui, nous le savons, sont facteurs de cohésion par leurs effets de surface très marqués) : c'est le cas du sable des plages puisque les grains les plus petits sont entraînés;

— d'autre part, dans le cas du subroilage du quartz qui augmente la densité électronique à la surface des particules et peut produire des effets de répulsion importants;

— enfin, on arrive au même résultat en introduisant dans la phase aqueuse des ions convenables

qui, en s'adsorbant, permettent d'augmenter les forces répulsives entre les particules et aussi de diminuer la teneur en eau (fluidifiants).

## V. — INFLUENCE DES PROPRIÉTÉS DE LA PHASE LIQUIDE

Avec du quartz broyé à une finesse connue et constante nous avons préparé un grand nombre de suspensions dans différents liquides de propriétés physiques ou chimiques très diverses et nous avons mesuré les coefficients rhéologiques des pâtes obtenues. Une partie des résultats de ces mesures est groupée dans le tableau II.

TABLEAU II

MILIEU LIQUIDE	CARACTÈRE CHIMIQUE	CONSTANTES PHYSIQUES à 20° C				Rapport liquide solide (cm <sup>3</sup> /g)	COEFFICIENTS RHÉOLOGIQUES		OBSERVATION COULEUR de la pâte (le sable broyé est gris clair)
		Densité	Viscosité (poises)	T.S. (dynes/cm)	Constante diélectrique		Seuil de cisaillement (dynes/cm <sup>2</sup> )	Viscosité plastique (poises)	
Eau .....	(OH) P	1,0	0,010	72,7	81	0,40 0,80	250 < 30	5,5 < 0,3	Gris clair
Alcool méthylique ..	" "	0,79	0,006	22,6	33	0,40	450	13	
Alcool éthylique ...	" "	0,79	0,012	22,3	25 à 30 (à 25° C)	0,40	30	9	Gris très clair
Alcool isobutylique .	" "	0,80	0,039	22,8		0,40	0 (1)	27	
Glycérine .....	" "	1,26	~ 10,7	63,4	43	0,40	0 (1)	N.M.	Gris
Glycol .....	" "	1,11	0,173	47,7	41,2	0,40	0 (1)	45	
Acide formique ....	H "	1,22	0,017	37,6	58,5	0,40	440	20	Gris assez clair
Benzène .....	I	0,88	0,006	28,9	2,2	0,40 0,80	> 3 000 1 500	N.M. 18,5	Foncée
Nitrobenzène .....	A	1,20	0,018	43,9	36	0,60	~ 2 000	4,85	Noire
Tétrachlorure de carbone .....	I	1,59	0,009	26,8	2,24	0,80	> 3 000	N.M.	Très foncée
Sulfure de carbone ..	I	1,26	0,003	32,3	2,6	0,80	> 3 000	N.M.	
Acétone .....	A	0,79	0,003	23,7	31	0,45 0,80	935 25	7 0,3	Assez claire
Huile de paraffine .	I	0,85	~ 0,3	~ 30	2,2 à 4,7	0,40 0,90	> 3 000 2 200	N.M. 4,7	Très foncée

T.S. = tension superficielle.

N.M. = non mesurable, parce que trop élevée.

I = inerte.

Polaires | P = protolittique (fixe des protons);

| A = aprotolittique et ionisant.

(1) Ces suspensions sont newtoniennes.

Nous avons cherché s'il y avait certaines corrélations entre les propriétés du liquide et les caractères rhéologiques des suspensions de quartz.

### 1 La tension superficielle.

Contrairement à ce qui est souvent admis, nous n'avons trouvé aucune relation avec la tension superficielle. Ceci semble d'ailleurs assez logique car elle ne doit intervenir que s'il y a des surfaces de séparation avec l'air, c'est-à-dire si la teneur en liquide est insuffisante pour remplir tous les vides entre les grains.

Ces résultats sont en accord avec nos études précédentes sur des suspensions dans l'eau dont on avait fait varier la tension superficielle par l'addition de produits tensio-actifs.

Il existe en réalité un *problème de mouillage* : comme les matériaux siliceux, argileux ou calcaires ont une grande affinité pour l'eau (on connaît en particulier l'adsorption préférentielle des hydroxyles OH-) il existe à leur surface une couche d'eau, fortement adsorbée et le mouillage doit le plus souvent se réduire à une compatibilité entre l'eau et le liquide de la suspension.

### 2 La viscosité du liquide.

Nous n'avons pas trouvé non plus de corrélation entre la viscosité propre du liquide et les coefficients rhéologiques des suspensions *concentrées en solide*, sauf si la viscosité du liquide est grande (cas des huiles, par exemple) ou si la concentration en solide est très faible; mais alors on tend vers des fluides newtoniens.

La formule établie par EINSTEIN :

$$\gamma_s = \gamma_L (1 + 2,5 C) \quad (7)$$

avec :

$\gamma_s$  = viscosité de la suspension;

$\gamma_L$  = viscosité du liquide;

C = concentration du solide en volume,

ne peut s'appliquer qu'à des suspensions peu concentrées et pour des particules sphériques et sans action l'une sur l'autre.

De nombreuses modifications ont été apportées à cette formule en tenant compte de divers facteurs (forme des grains, mouvement brownien...), mais elle reste rarement applicable.

Il est intéressant de remarquer que les suspensions dans les *alcools purs* donnent des pâtes ayant un seuil de cisaillement très faible; et même

dans de nombreux cas le seuil de cisaillement est nul et les suspensions sont newtoniennes. Si les concentrations en solide sont grandes, les viscosités plastiques sont élevées et dans quelques cas la formule d'EINSTEIN s'applique assez bien.

Nous avons aussi étudié les suspensions dans des mélanges eau-alcool éthylique et l'expérience a montré que dans ce cas les coefficients rhéologiques

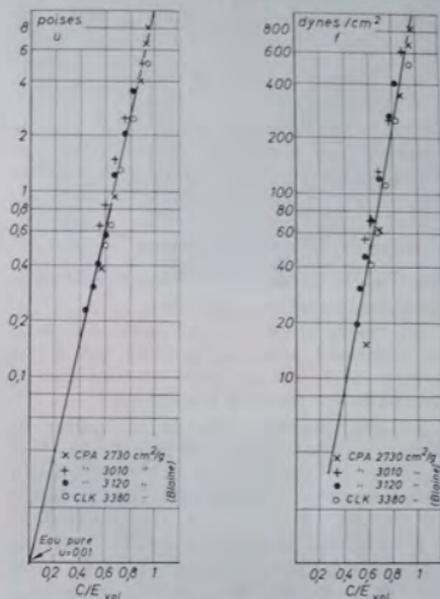


Fig. 10. — Influence de la concentration en volume sur les coefficients rhéologiques

sont toujours supérieurs à ceux des suspensions dans l'eau pure ou dans l'alcool absolu. La variation des coefficients rhéologiques en fonction des proportions du mélange passe donc par un maximum et ceci pour une teneur en eau très faible.

Rappelons, d'autre part, que dès 1887 ARRHÉNÍUS avait proposé la relation suivante :

$$\gamma_s = \gamma_L e^{kC} \quad (8)$$

avec les mêmes notations que ci-dessus et où  $k$  dépend du solide, du liquide et de la température.

La figure 10 montre la vérification de cette formule pour des pâtes de ciment dans l'eau (dans cet exemple  $k = 6,6$ ).

### 3 La constante diélectrique.

Enfin, nous n'avons pas trouvé de relation entre le pouvoir inducteur spécifique du liquide et les coefficients rhéologiques des pâtes.

On sait, en effet, que la constante diélectrique  $\epsilon$  intervient dans la relation d'HELMOLTZ donnant le potentiel  $\zeta$  de la double couche qui entoure les particules :

$$\zeta = \frac{4 \pi e d}{\epsilon} \quad (9)$$

avec :

$e$  = épaisseur de la double couche;

$d$  = densité de charges.

Ceci n'est cependant pas étonnant car la formation d'une atmosphère ionique autour des grains nécessite un liquide ionisé ou la présence d'électrolytes.

### 4 Aspect des différentes suspensions.

La nature du liquide influe sur l'aspect et la couleur des pâtes d'un même solide.

Le quartz utilisé dans les essais précédents était légèrement teinté en gris-bleu par le fer provenant de l'usure des corps broyants dans le broyeur à boulets servant à la préparation.

On peut remarquer que les suspensions du tableau II s'échelonnent d'une teinte très claire dans le cas de l'alcool (à seuil de cisaillement nul) jusqu'au noir pour les pâtes ayant des coefficients rhéologiques très élevés.

L'examen au microscope montre que dans ces derniers cas les grains sont groupés en agglomérats de surfaces très irrégulières pouvant former des cavernes (cf. fig. 13) qui absorbent la lumière. Inversement une suspension de grains de quartz très dispersés doit présenter (compte tenu de leur cassure vitreuse) de multiples facettes susceptibles de réfléchir une grande partie de la lumière reçue.

On peut comparer cet effet au broyage d'un corps poreux de couleur sombre (clinker de cimenterie, par exemple) lequel donne une poudre d'autant plus claire que les grains sont plus petits (les cavernes formées par les pores disparaissent).

## VI. — INFLUENCE DU SOLIDE

Le solide peut intervenir par sa nature ou sa composition et surtout par sa finesse de mouture, par la forme des grains et leur état de surface.

### 1 Nature du solide.

Nous avons étudié l'influence de la nature du solide en préparant des suspensions de différents matériaux dans l'eau : argiles, quartz, calcaire, ciments, laitiers broyés, métaux en poudre, graphite, soufre, etc., et comme ci-dessus nous avons mesuré les coefficients rhéologiques.

La première remarque que nous avons faite est qu'il y a une très grande différence entre les cas où il y a mouillage (matériaux calcaires, siliceux, argileux dans l'eau ou dans l'alcool par exemple) et le cas des pâtes dans lesquelles il n'y a aucune affinité entre le liquide et le solide (ou dans certains cas les couches adsorbées).

Ces dernières pâtes ont des coefficients rhéologiques très élevés et ressemblent beaucoup aux suspensions dans l'eau floculées par une addition d'ions convenables (cf. fig. 18). C'est ce qu'illustrent les figures 11, 12, 13 et 14.

### 2 Influence de la finesse du solide.

La finesse de mouture des matériaux pulvérulents peut être repérée par des analyses granulaires établies par diverses méthodes (tamisage, élutriation, lévigation, sédimentation...).

Cependant, lorsqu'il s'agit des suspensions (et évidemment des réactions chimiques, loi de WENZEL), les phénomènes sont liés à la surface de contact entre le solide et le liquide.

Il est donc souvent plus pratique d'avoir recours à la notion de surface spécifique (mesurée en  $\text{cm}^2/\text{g}$  ou en  $\text{cm}^2/\text{cm}^3$ ) qui est l'image de la surface totale des grains contenus dans l'unité de volume ou de masse du solide en poudre.

La mesure de la surface spécifique des poudres peut s'effectuer par perméabilimétrie (appareils de BLAINE ou de LEA et NURSE) ou par adsorption d'un gaz fixé physiquement en couche moléculaire (méthode B.E.T.).

Cette méthode mesure une surface qui tient compte des anfractuosités et des fissures des grains tandis que la perméabilimétrie donne la surface « circonscrite » : il y a toujours des écarts importants et la méthode B.E.T. fournit des valeurs supérieures (mais on se trouve la plupart du temps dans des domaines de mesures différents).



Fig. 11. — Suspension de quartz dans l'eau



Fig. 13. — Suspension de quartz dans du tétrachlorure de carbone

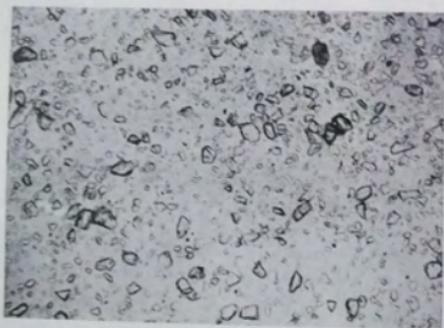


Fig. 12. — Suspension de quartz dans du glycol

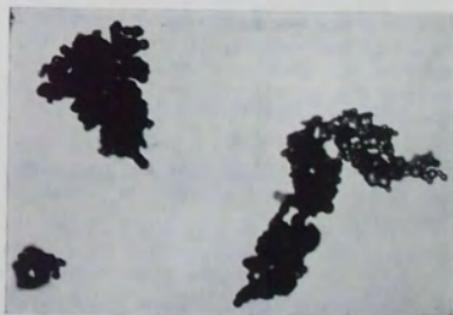


Fig. 14. — Suspension de soufre dans l'eau

La surface spécifique peut être reliée à la granularité par des relations théoriques ou empiriques :

— pour un ensemble de grains de même dimension et de forme régulière ou sphérique on trouve :

$$S = \frac{6}{\rho \Phi} \quad (6)$$

avec :

S = surface spécifique, en  $\text{cm}^2/\text{g}$ ;

$\rho$  = masse volumique de la poudre, en  $\text{g}/\text{cm}^3$ ;

$\Phi$  = diamètre équivalent des grains.

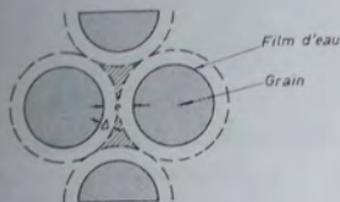


Fig. 15

On peut aussi employer la formule (10) pour une classe étroite, c'est-à-dire comprise entre deux dimensions peu éloignées (à condition que la répartition soit sensiblement linéaire) en prenant alors pour  $\Phi$  la moyenne arithmétique ou la moyenne logarithmique des deux dimensions extrêmes;

— pratiquement, pour une granularité étendue, en assimilant la courbe de répartition granulaire à une parabole, on peut appliquer la formule de KUHLESTEDT :

$$S = \frac{K}{\rho \sqrt{\Phi}} \quad (11)$$

K est une constante qui dépend du matériau et de la valeur choisie pour le diamètre  $\Phi$ .

Par exemple, pour le ciment  $K \approx 500$  si on prend pour  $\Phi$  le diamètre moyen (50 % des grains  $> \Phi$ ).

La surface spécifique conditionne la quantité d'eau liée ou adsorbée (c'est-à-dire rigidifiée dans la double couche) et par différence la teneur en eau « libre » ; c'est celle-ci qui déterminera l'écartement des grains entourés de leur hydrosphère et par conséquent leurs interactions.

Considérons un assemblage de sphères égales noyées dans un liquide susceptible de remplir tous les vides intergranulaires (fig. 15).

On peut, par la pensée, les imaginer recouvertes d'une couche uniforme d'épaisseur  $\Delta$ ; la distance intergranulaire minimale (et moyenne) sera  $\epsilon = 2 \Delta$ .

Si dans l'unité de volume la surface des sphères est S et la quantité d'eau E on pourra écrire :

$$\Delta = \frac{E - B}{S} \quad (12)$$

B étant le volume occupé par l'eau en dehors des sphères imaginaires solide + couche d'eau (zone hachurée); cette valeur est sensiblement constante pour des sphères égales.

Dans ces conditions on peut écrire que les distances entre les grains sont fonction du rapport  $\frac{E}{S}$ .

Si l'on fait l'hypothèse que les interactions entre les grains [quelle que soit d'ailleurs la nature véritable des forces qui s'exercent (1)] sont inversement

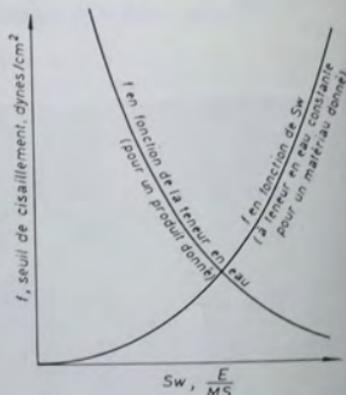


Fig. 16

proportionnelles au carré de leur distance on a en définitive :

$$f = \text{fonct.} \left( \frac{S^2}{E^2} \right) \quad (13)$$

C'est bien l'allure des courbes expérimentales que l'on observe (fig. 16).

(1) Ces forces ne s'exercent pas toujours en réalité entre grains, mais aussi entre grains chargés et ions présents dans la phase liquide.

Ceci est encore assez bien vérifié si on considère des solides de natures très différentes comme le montrent les exemples du tableau III. Les écarts observés sont inhérents à des différences provenant de la forme et de la surface des grains, de la constitution du solide, etc.

suspensions, d'une part, de sable de rivière roulé et, d'autre part, du même matériau concassé à même granularité, mais dont les grains sont très anguleux; ces sables étaient en suspension dans une huile minérale afin de ralentir la sédimentation. Le sable roulé a donné des viscosités plus faibles.

TABLEAU III

MATÉRIAU SOLIDE	S SURFACE SPÉCIFIQUE (cm <sup>2</sup> /g)	SEUIL DE CISAILLEMENT à teneur en eau constante $\frac{\text{eau}}{\text{mat. sol.}} = 0,40$ (dynes/cm <sup>2</sup> )	TENEUR EN EAU A SEUIL de cisaillement constant $f = 500 \text{ dynes/cm}^2$	$K = \frac{f}{S^2}$
Ciment Portland .....	2 500	250	0,35	$0,4 \times 10^{-4}$
Ciment au laitier .....	3 500	600	0,42	$0,5 \times 10^{-4}$
Gypse broyé .....	4 150	1 300	0,46	$0,76 \times 10^{-4}$
Clinker broyé .....	5 600	1 800	0,48	$0,57 \times 10^{-4}$
Calcaire broyé .....	8 000	2 100	0,50	$0,33 \times 10^{-4}$
Gypse broyé .....	9 250	3 000	0,52	$0,35 \times 10^{-4}$
Farine crue de cimenterie .....	~ 12 000	5 500	0,60	$0,38 \times 10^{-4}$
Kaolin .....	50 000 (1)	$2 \times 10^3$	1,05	$0,8 \times 10^{-4}$
Argiles de cimenteries .....	60 000 à 80 000 (1)	$4,2 \times 10^3$	1,3 à 1,5	$0,85 \times 10^{-4}$
Bentonite .....	100 000 (1)	$7 \times 10^3$	5,5	$0,7 \times 10^{-4}$

(1) Valeurs probables

### 3 Influence de l'état de surface et de la forme des grains.

L'expérience montre que la forme des grains et leur état de surface (vitreux, rugueux, poreux...) jouent aussi un rôle : ce sont, d'autre part, des éléments que les mesures de surface spécifique par perméabilimétrie ne reflètent pas suffisamment.

C'est la forme des grains qui conditionne la « plasticité » des pâtes argileuses en relation par ailleurs avec le rapport des coefficients rhéologiques  $\frac{f}{u}$ .

C'est la différence d'état de surface qui explique, en particulier, l'écart entre les coefficients rhéologiques, à teneur en eau égale, de suspensions de laitier ou de clinker broyés à même surface spécifique (mesurée).

Pour étudier l'influence de la forme des grains nous avons mesuré les coefficients rhéologiques de

## VII. — INFLUENCES DIVERSES

### 1 Floculation et défloculation.

Les phénomènes de floculation ou de défloculation ont une répercussion sur les coefficients rhéologiques des pâtes.

On sait que les particules minérales dans un milieu aqueux sont chargées négativement et en équilibre avec l'atmosphère ionique qui les entoure. Il en résulte que tout ce qui peut modifier l'état électrique de la suspension pourra entraîner des variations des coefficients rhéologiques.

C'est le cas des charges électrostatiques (provenant des opérations de broyage ou de manutention des poudres), des charges provenant de la rupture de l'architecture du solide (quartz, argiles...) ou encore d'ions adsorbés provenant du liquide ou d'électrolytes dissous.

La figure 17 illustre l'action de quelques adjuvants sur le seuil de cisaillement d'une pâte argilo-calcaire de cimenterie; il suffit, en général, de concentrations très faibles.

Les figures 18 et 19 montrent l'aspect d'une suspension de kaolin (agrandie 200 fois) floculée par une solution chlorhydrique (fig. 18) ou défloculée

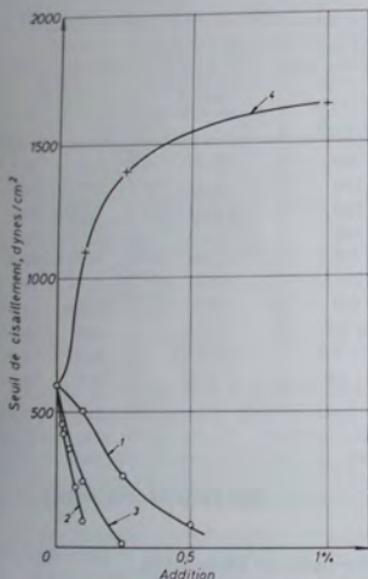


Fig. 17. — Floculation et défloculation

- |                                  |                   |
|----------------------------------|-------------------|
| 1 : silicate de soude .....      | } défloculation ; |
| 2 : métaphosphate de soude ..... |                   |
| 3 : pyrophosphate de soude ..... |                   |
| 4 : chaux .....                  |                   |

par une addition de pyrophosphate de sodium (fig. 19).

Ces actions sont bien connues des céramistes et des cimentiers qui abaissent la teneur en eau de leurs pâtes (à propriétés rhéologiques égales) en ajoutant différents « fluidifiants ».

Dans les suspensions floculées le rassemblement des grains emprisonne de l'eau dans les agglomérats

au détriment de l'eau libre; il en résulte, en particulier, un accroissement du seuil de cisaillement (et de la vitesse de sédimentation).

La floculation ou la coagulation, qui ont pour résultat d'augmenter les coefficients rhéologiques, sont le plus souvent des effets génants.



Fig. 18. — Suspension de kaolin floculée



Fig. 19. — Suspension de kaolin défloculée

## 2 La température.

La figure 20 montre la variation des coefficients rhéologiques de quelques suspensions en fonction de la température.

On peut remarquer que la viscosité plastique diminue légèrement jusqu'aux alentours de 30 ou 40° C puis augmente rapidement.

Le seuil de cisaillement n'est pas modifié jusque vers 40° C puis augmente ensuite de la même manière.

L'existence du minimum de viscosité résulte sans doute de la superposition de deux effets contradictoires :

— d'une part, l'abaissement de la viscosité du liquide;

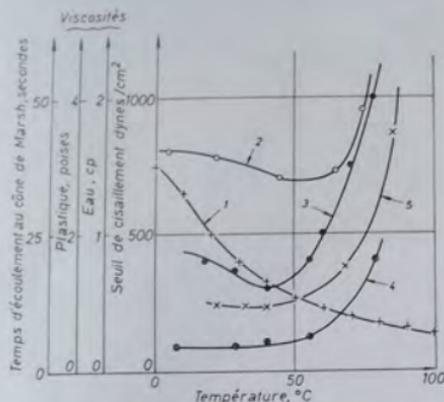


Fig. 20 — Influence de la température sur les caractéristiques rhéologiques des suspensions

- 1 : viscosité de l'eau pure ;
- 2 : viscosité plastique d'une pâte crue ;
- 3 : viscosité plastique d'un coagulé de CPA ;
- 4 : seuil de cisaillement ;
- 5 : temps d'écoulement au cône de Marsh.

— d'autre part, l'accélération de processus chimiques ou physiques tels qu'hydratation, gonflements..., qui sont générateurs de surfaces nouvelles.

L'expérience confirme bien d'ailleurs que l'échauffement a modifié la pâte qui ne revient pas à son état initial après refroidissement.

### 3 Le pH.

On a surtout étudié l'influence du pH sur les suspensions argileuses. Le pH est évidemment lié à la présence d'ions dans la phase aqueuse et rejoint par-là les remarques que nous avons faites sur

l'équilibre électrique dans la double couche diffuse de GOUY-FREUNDLICH.

Pour les pâtes argilo-calcaires de cimenterie, l'expérience montre que les coefficients rhéologiques passent par un minimum pour un pH compris entre 7 et 10; les acides flocculent ces suspensions. Les bases en excès augmentent aussi la consistance.

L'action des sels sera essentiellement liée à la force relative des acides et des bases. Excepté le cas des colloïdes protecteurs dont le mode d'action est différent, les défloculants sont presque toujours des sels d'acides faibles et de bases fortes.

Ce n'est d'ailleurs pas uniquement le pH qui agit et, à pH égal, les coefficients rhéologiques varient avec la nature des électrolytes (valence, mobilité des ions...) qui assurent le pH; pour un même anion ils varient avec la nature du cation.

## VIII. — CONCLUSION

En résumé, les caractéristiques rhéologiques des suspensions minérales concentrées sont fonction de nombreux facteurs. Cependant, quelle que soit la nature des forces de cohésion (électriques, mécaniques, capillaires...), ce sont des phénomènes essentiellement superficiels : l'expérience nous a bien confirmé que le seuil de cisaillement des pâtes, en dehors des problèmes d'affinité ou de mouillage, est surtout lié à la surface spécifique du solide et à la teneur en liquide. Il en résulte que les coefficients rhéologiques d'une pâte seront influencés par tout ce qui pourra modifier soit la granularité et la surface spécifique (broyage, malaxage violent, gonflement...), soit la teneur en eau (fixation par absorption physique ou réaction chimique...).

L'application qui en découle pour l'industrie est que, pour certains besoins, on pourra conférer à un produit en suspension une cohésion ou un seuil de cisaillement suffisant en le broyant plus finement, en le malaxant énergiquement (atomisation) ou en y incorporant des éléments très fins comme de la bentonite, du kieselguhr, du noir de fumée, des oxydes divers....

Enfin, l'application des considérations électriques doit permettre de résoudre les problèmes très divers (fluidification, floculation, dilatance, thixotropie...) qui peuvent se poser dans ce domaine.

# VARIATION DES MODULES DE QUELQUES BITUMES PURS ET BÉTONS BITUMINEUX (1)

par G. SAYEGH

ASSISTANT AU LABORATOIRE CENTRAL DES PONTS ET CHAUSSÉES

## RÉSUMÉ

On propose, dans cette étude, des fonctions visco-élastiques réduites (module complexe, fluage, relaxation) représentant les propriétés mécaniques de l'ensemble des bitumes purs et des bétons bitumineux à usage routier. Ces fonctions réduites sont déterminées, dans le domaine du comportement linéaire, en utilisant les courbes maîtresses (obtenues par un facteur de translation du type W.L.F.) rapportées au module instantané et relatives aux résultats d'essais de modules effectués au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées sur quelques bitumes purs et bétons bitumineux.

La courbe relative à un bitume pur ou un béton bitumineux sera définie à partir des courbes réduites par deux translations :

— une translation verticale dont la valeur est le module instantané  $E_{00}$ ;

— une translation horizontale dont la valeur est proportionnelle à la loi de variation du facteur de translation. Ce facteur de translation peut être défini à partir des mesures viscosimétriques.

## INTRODUCTION

Les éléments constituant un béton bitumineux se présentent sous trois phases :

1<sup>o</sup> une phase solide constituée d'éléments granulaires (gravier, sable, filler) ayant des dimensions

qui varient entre quelques  $\mu$  et plusieurs centimètres. Cette phase représente 90-95 % du béton;

2<sup>o</sup> une phase gazeuse constituée des vides qui restent dans le béton. Cette phase est de 2-8 % du béton;

3<sup>o</sup> une phase liquide-solide ayant des caractéristiques visco-élastiques qui est le liant. Ce liant est soit du bitume pur ou du goudron, soit un mélange des deux. Les bitumes sont des mélanges d'hydrocarbures ayant une composition chimique assez complexe.

C'est donc un corps hétérogène et complexe, difficile à étudier à l'échelle structurale. En effet, cette étude doit faire intervenir en plus de la mécanique des milieux granulaires, des phénomènes d'interface et de la visco-élasticité. Néanmoins sous sa forme macroscopique ce béton se comporte d'une façon visco-élastique assez simple. Nous constaterons qu'il suit des lois de comportement analogues à celles suivies par des corps plus « nobles » tels que les polymères et les élastomères.

Nous n'avons pas la prétention de présenter dans cette communication la contribution, à l'échelle structurale, au comportement du béton bitumineux de chacune de ces phases. En effet, cela n'entre pas dans notre programme d'étude; à savoir fournir au groupe de calcul rationnel des chaussées du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées les lois de variation des fonctions caractéristiques en vue de lui permettre l'élaboration d'une méthode de calcul des chaussées. Néanmoins, nous verrons qu'en suivant le raisonnement que l'on fait d'habitude dans

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 20 mai 1965.

l'étude des corps visco-élastiques à partir des mesures macroscopiques on arrive à déterminer des caractéristiques physiques allant même jusqu'à la structure des bitumes.

Nous parlerons tout d'abord de la méthode expérimentale mise au point au L.C.P.C. par C. HUET et permettant de déterminer les valeurs des modules complexes par la vibration d'une console. Nous présentons ensuite les résultats obtenus ainsi que l'exploitation des résultats, suivant des méthodes utilisées très couramment dans la visco-élasticité.

## I. — MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

La méthode expérimentale mise au point par C. HUET [1] est basée sur l'impédance mécanique d'une console visco-élastique soumise à des vibrations forcées. Comme l'a montré le Professeur MANDEL [2], l'utilisation de la transformation de CARSON dans les problèmes visco-élastiques permet de lier l'impédance mécanique d'une console visco-élastique à la valeur du module par les mêmes relations qui existent entre l'impédance mécanique d'une console parfaitement élastique.

Dans le cas de la flexion simple cette relation est de la forme :

$$Z^*(i\omega) = \frac{F_0}{z_0} e^{i\varphi} = \frac{E^*(i\omega) l}{\beta} \frac{u^3(1 + \operatorname{ch} u \cos u)}{\operatorname{ch} u \sin u - \operatorname{sh} u \cos u} \quad (1)$$

avec :

$$u^4 = \frac{M P \omega^2}{E^*(i\omega) l} \quad (2)$$

Pour les faibles valeurs de  $u$  (loin de la résonance) l'expression (1) s'écrit (en développant l'expression) sous la forme :

$$Z^*(i\omega) = \frac{F_0}{z_0} e^{i\varphi} = \frac{3 E^*(i\omega) l}{\beta} - \frac{33}{140} M \omega^2 \quad (3)$$

$F_0$  est l'amplitude de la force sinusoïdale;

$z_0$  est l'amplitude de la flèche sinusoïdale;

$\varphi$  est le déphasage entre  $F$  et  $z$ ;

$l$  inertie par rapport à l'axe perpendiculaire à la vibration;

$l$  longueur de la console;

$M$  masse de la console;

$\omega = 2\pi f$  pulsation de la vibration.

Il est alors facile connaissant  $F_0$ ,  $z_0$ ,  $\varphi$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $l$ , ainsi que les caractéristiques des pièces en mouvement et la raideur du vibreur, de déterminer la valeur du module complexe :

$$E^*(i\omega) = E_1 + iE_2$$

$E_1$  composante réelle du module, proportionnelle à l'énergie emmagasinée dans l'éprouvette et pouvant être restituée après chaque cycle;

$E_2$  composante imaginaire du module, proportionnelle à l'énergie dissipée dans l'éprouvette comme frottement interne après chaque cycle.

En appliquant une vibration déviée (flexion + torsion) à une éprouvette prismatique, C. HUET [1] a déduit que les impédances mécaniques couplées de flexion  $Z$  et de torsion  $T$  sont liées aux impédances découplées de flexion  $Z_0$  et de torsion  $T_0$  par une relation simple de la forme :

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= Z - \alpha \frac{Z}{T} \\ T_0 &= T - \alpha \frac{T}{Z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\alpha$  est un coefficient tenant compte de l'équipage mobile et de la pièce de liaison.

Il est donc possible de déterminer le module de YOUNG complexe et le module de cisaillement complexe à partir de la vibration déviée d'une telle éprouvette.

L'appareillage <sup>(1)</sup> consiste en un vibreur électrodynamique alimenté par un générateur basse fréquence par l'intermédiaire d'un amplificateur. La flèche est mesurée par un capteur inductif suivi d'un pont de mesure. Un oscillographe permet de mesurer le déphasage  $\varphi$ . Enfin, un groupe thermostatique permet d'avoir une température constante autour de l'éprouvette.

## II. — RÉSULTATS OBTENUS SUR UN BÉTON BITUMINEUX (FORMULE DU MANS)

Nous avons été amenés à étudier la linéarité du comportement de ce béton bitumineux et nous avons constaté que ce domaine est très réduit. Il se

(1) Pour plus de détails concernant l'appareillage et l'étalonnage voir [1].

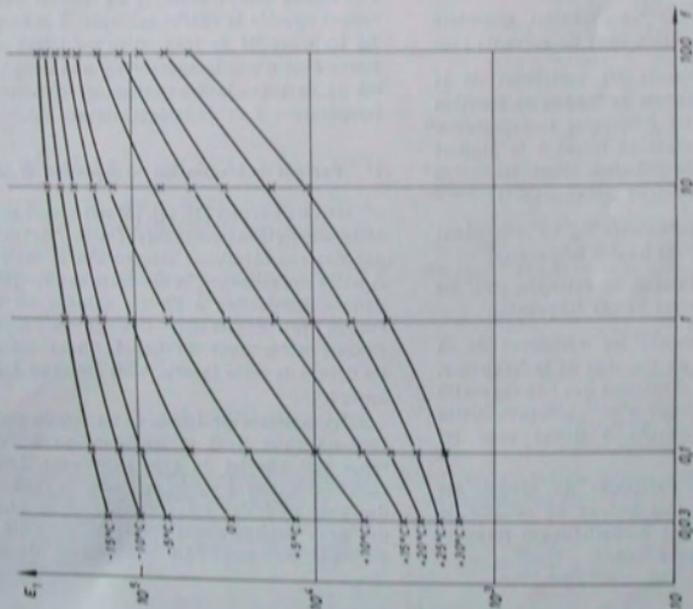


Fig. 1. — Module de Young complexe  
Béton Le Mans  
Isothermes de la partie réelle  $E_1 = E_1(\omega)$   
( $E_1$ , en bars;  $\omega$  en cycles/s)

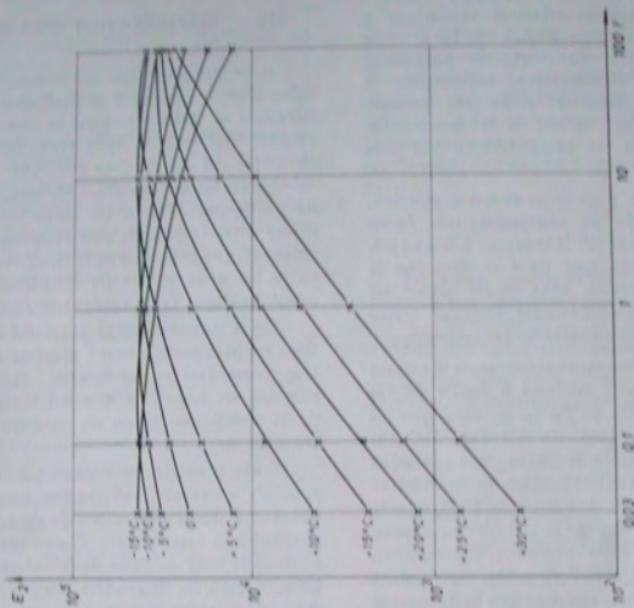


Fig. 2. — Module de Young complexe  
Béton Le Mans  
Isothermes de la partie imaginaire  $E_2 = E_2(\omega)$   
( $E_2$ , en bars;  $\omega$  en cycles/s)

limite à des déformations relatives inférieures à  $2.3 \cdot 10^{-3}$  pour des températures  $\geq 15^\circ \text{C}$ . Les charges appliquées sur une chaussée entraînent généralement des déformations supérieures à  $2.3 \cdot 10^{-3}$  et le comportement n'est plus linéaire. Il faudrait alors utiliser les lois de la visco-élasto-plasticité avec toutes les complications que cela implique.

Dans cette étude nous nous sommes astreints à rester à un niveau de contrainte très faible entraînant des déformations inférieures à  $2.3 \cdot 10^{-3}$ . En supposant, de plus, que dans ce domaine le comportement est linéaire, nous avons utilisé les équations de la visco-élasticité linéaire pour déterminer les différentes fonctions caractéristiques.

Quelle est la précision expérimentale de cette méthode? Le calcul des modules à partir de (3) nécessite la connaissance de  $F_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\varphi$ , ainsi que les caractéristiques mécaniques du vibreur. Or, ces caractéristiques sont déterminées avec une certaine précision expérimentale entraînant une erreur relative sur les valeurs du module de l'ordre de 15 % et cela pour  $15 \text{ gr} < \varphi < 80 \text{ gr}$  et pour  $E > 1\,000$  bars (pour l'éprouvette utilisée). Cette précision concerne un point expérimental. Pour l'ensemble des points expérimentaux nous avons constaté que la dispersion expérimentale ne dépasse pas les 10 %.

Les résultats obtenus sur ce béton, considéré comme un bon béton routier, sont les suivants :

La figure 1 représente les variations de la composante réelle du module de Young en fonction de la fréquence pour les différentes températures. Ces courbes sont analogues en forme à la plupart des courbes de module obtenues pour les corps visco-élastiques. On distingue notamment :

— une élasticité instantanée  $E_\infty$  correspondant aux faibles températures et hautes fréquences;

— une élasticité statique, ou retardée, pour les hautes températures et les basses fréquences.

La figure 2 représente les variations de la composante imaginaire en fonction de la fréquence. On distingue la zone de dispersion que l'on rencontre pour la plupart des corps visco-élastiques. Cette zone se déplace de gauche à droite pour les températures croissantes.

Les résultats des variations du module de cisaillement sont analogues à ceux du module de Young. Les courbes sont homothétiques (rapport d'homothétie moyen égal à 2,2).

Pour l'exploitation des résultats précédents il suffit d'avoir recours à la littérature de ces quinze dernières années concernant la visco-élasticité pour trouver tout ce dont nous avons besoin sur le plan théorique ou sur le plan pratique.

Nous constatons d'abord, comme c'est le cas de pratiquement tous les corps visco-élastiques et même diélectriques, le rôle réciproque joué entre la fréquence (ou le temps) de la charge et la température entre les deux points de transition vitreux  $T_g$  et caoutchoutique  $T_c$  du corps visco-élastique étudié.

On a donné à cette propriété différents noms dont les plus connus sont : principe de superposition temps-température, simplicité thermorhéologique, principe de réduction temps-température, principe de la courbe maîtresse ou principe du facteur de translation.

Cette propriété se traduit par la possibilité de ramener les résultats d'une fonction caractéristique obtenus à une température donnée  $T$  aux résultats obtenus à la température  $T_0$  par une translation des courbes le long de l'axe des abscisses dans un tracé bilogarithmique. En particulier, en ramenant les différentes isothermes d'une fonction caractéristique à la même température  $T_0$  on obtient une courbe unique appelée la courbe maîtresse à la température  $T_0$ . La quantité de translation qu'il faut appliquer pour passer d'une température  $T$  à la température  $T_0$  est le facteur de translation  $a_T$  (fonction de la température  $T$  et de la température  $T_0$ ).

### 1° Facteur de translation — Équation W.L.F.

Divers auteurs [3], [4], [5] ont essayé de déduire cette propriété macroscopique (facteur de translation) par des considérations structurales et moléculaires. A notre connaissance, la meilleure théorie qui semble donner satisfaction à l'heure actuelle est celle de Rouse [6] concernant une chaîne moléculaire flexible isolée dans un liquide. Sans entrer dans les détails de cette théorie, nous allons en donner un aperçu.

La molécule est divisée en un certain nombre de sous-molécules dont la configuration à l'état de repos suit une loi du type gaussienne. Lorsqu'un effort est appliqué sur la molécule, la configuration des sous-molécules est perturbée et la résultante des deux configurations donne la propriété visco-élastique au corps. Le mouvement de chaque

sous-molécule est défini par un coefficient de frottement  $f_0$ , avec :

$$f_0 = q \zeta_0 \quad (5)$$

$q$  est le nombre de monomères constituant la sous-molécule;

$\zeta_0$  est le coefficient de frottement monomérique qui correspond à la force moyenne par unité monomérique nécessaire à la chaîne pour se déplacer, gênée par ses voisins, à la vitesse unité.

Le temps de relaxation de la sous-molécule d'ordre  $p$  est donné par l'expression :

$$\tau_p = \frac{a^2 Z^2 \zeta_0}{6 \pi^2 \rho^2 kT} \quad (6)$$

$a$  longueur monomérique;  
 $Z$  degré de polymérisation;  
 $k$  constante de BOLTZMANN;  
 $T$  température °K.

Le facteur de translation  $a_T$  est le rapport entre  $\tau_p$  à la température  $T$  et  $\tau_p$  à la température  $T_0$ . On aura donc :

$$a_T = \frac{[a^2 \zeta_0]_T}{[a^2 \zeta_0]_{T_0}} \times \frac{T_0}{T} \quad (7)$$

Une fonction caractéristique  $H(\tau)$  à la température  $T$  s'écrit en fonction de la même fonction à la température  $T_0$  sous la forme :

$$H(\tau)_T = H(\tau)_{T_0} \times a_T \quad (8)$$

D'où la propriété de passer de la courbe  $H(T)$  à celle de  $H(T_0)$  par une translation de  $\text{Log } a_T$  dans un tracé bilogarithmique.

La forme de  $a_T$  peut être quelconque *a priori*. WILLIAMS, LANDEL et FERRY [7] ont constaté que, pour un très grand nombre de corps visco-élastiques et diélectriques,  $a_T$  a la forme suivante connue sous le nom d'« équation W.L.F. » :

$$\text{Log } a_T = \frac{-C_1(T-T_s)}{C_2 + T - T_s} \quad (9)$$

$T_s$  température de référence à laquelle les autres températures sont ramenées;

$C_1$  et  $C_2$  deux constantes déterminées à partir des résultats expérimentaux et dépendant de la valeur de  $T_s$ .

Ces mêmes auteurs ont constaté, de plus, que, lorsque la température de transition vitreuse des différents corps  $T_g$  est prise comme température de référence, les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont les mêmes et égaux à 17,44 et 51,6 pour un grand nombre de corps. Si l'on prend de plus  $T_s = T_g + 50^\circ \text{C}$  (plus facile à expérimenter qu'aux alentours de  $T_g$ ) l'expression (9) devient :

$$\text{Log } a_T = \frac{-8,86(T - T_s)}{101,6 + T - T_s} \quad (10)$$

La grande généralité de l'expression (9) ou (10) n'est pas une simple coïncidence. On peut, en effet, chercher la forme de  $a_T$  en analysant les différents termes constituant cette expression.

$\zeta_0$  peut être lié à la viscosité du polymère de faible poids moléculaire par une relation de la forme :

$$\zeta_0 = \frac{36 \eta}{n a^2 Z^2} \quad (11)$$

$\eta$  étant la viscosité à la température  $T$ ;  
 $n$  le nombre de molécules/C.C.,

et en remplaçant (11) dans (7) nous obtenons :

$$a_T = \frac{\left[ \frac{\eta}{n} \right]_T}{\left[ \frac{\eta}{n} \right]_{T_0}} \times \frac{T_0}{T} = \frac{n_{T_0} T_0}{n_T T} \times \frac{\eta_T}{\eta_{T_0}} \quad (12)$$

On peut admettre en première approximation  $\frac{n_{T_0} T_0}{n_T T} = 1$  et on aura alors  $a_T$  comme le rapport entre la viscosité à la température  $T$  à celle à la température  $T_0$ .

Il est admis actuellement que la viscosité de beaucoup de polymères admet une loi de variation du type EYRING de la forme :

$$\eta = A e^{\frac{B}{T - T_\infty}} \quad (13)$$

$A$  et  $B$  sont des constantes;

$T_\infty$  une température arbitraire située en dessous de la température de transition vitreuse.

D'où le facteur de translation, déterminé à partir de l'expression (7) :

$$a_T = \frac{n_{T_0} T_0}{n_T T} \times \frac{\eta_T}{\eta_{T_0}} = \frac{n_{T_0} T_0}{n_T T} \times e^{\frac{B}{T_0 - T_\infty} - \frac{B}{T - T_\infty}} \quad (14)$$

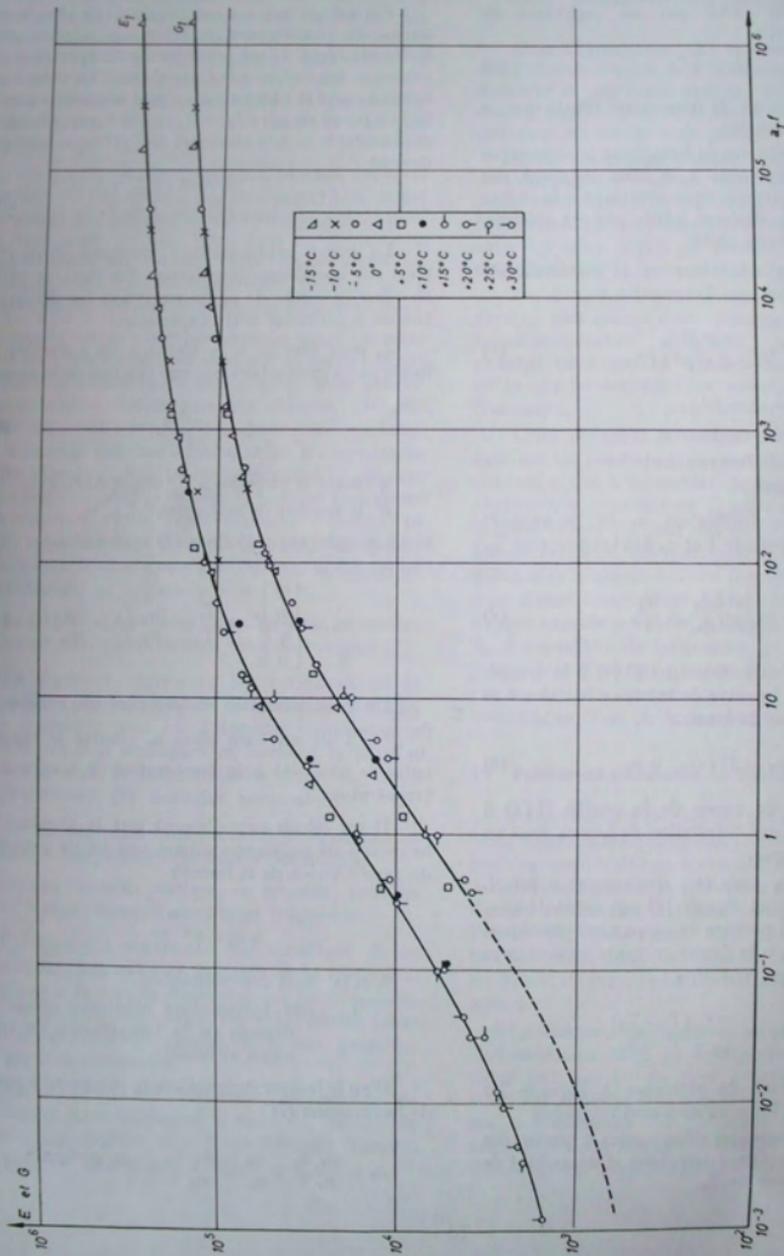


Fig. 3. — Courbes maîtresses à  $T_s = 15^\circ\text{C}$  des composantes réelles des modules complexes ( $E'$ , et  $G'$ , en bars;  $\nu'$  en cycles/s)

Nora. — Les pointillés sont extrapolés à partir du module de Young par homothétie

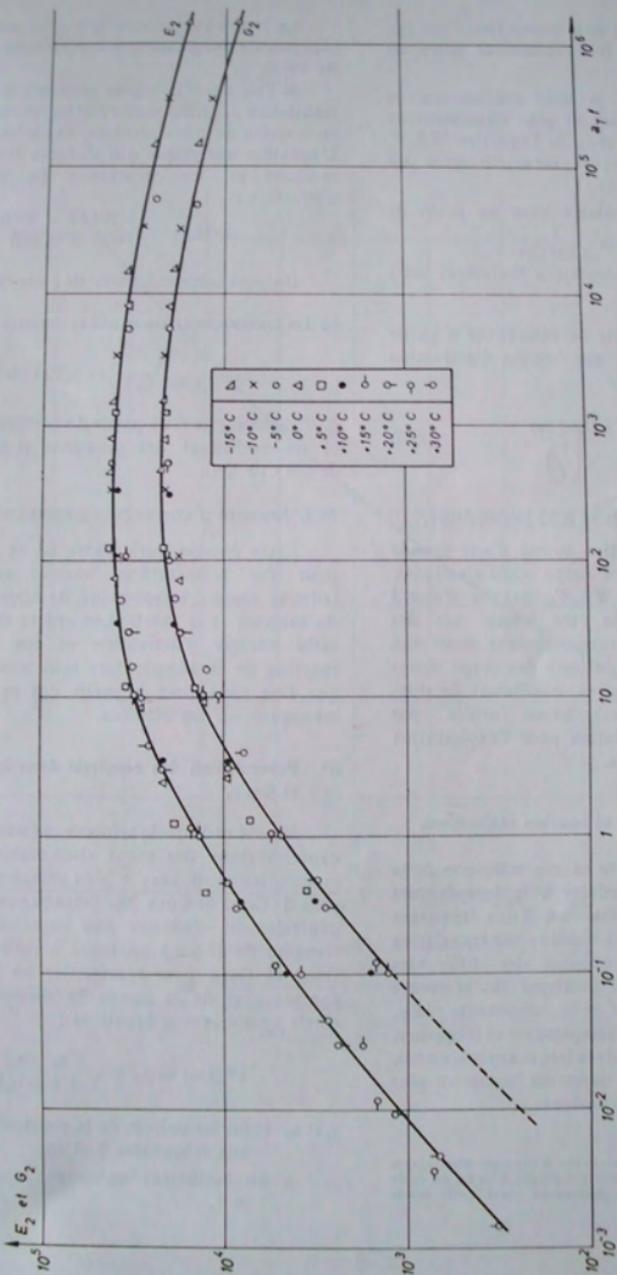


Fig. 4. — Courbes maîtresses à  $T_n = 15^\circ\text{C}$  des composantes imaginaires des modules complexes ( $E_2$  et  $G_2$ , en bars;  $a_1 f$  en cycles/s)  
Béton Le Mans

NOTA. — Les pointillés sont extrapolés à partir du module de Young par homothétie

L'expression (14) est de la même forme que (9), l'identification peut se faire facilement entre les deux expressions.

Il a été possible à la suite des travaux de DOOLITTLE, FOX et FLOYD et plus récemment de BUCHE [8], de relier  $C_1$  et  $C_2$  de l'équation W.L.F. à des grandeurs physiques caractéristiques du matériau. On démontre que :

— la fraction du volume libre au point de transition vitreux est :  $f_g = \frac{1}{2,303 C_1^{1/2}}$  ;

— le coefficient de dilatation thermique est :  $\alpha_f = \frac{1}{C_1^{1/2}}$ .

De plus, il est possible de déterminer à partir du facteur de translation une énergie d'activation de relaxation (1) définie par :

$$\Delta H_a = R \frac{a(\text{Log } a_T)}{d\left(\frac{1}{T}\right)} \quad (15)$$

R constante des gaz parfaits = 8,32 joules/deg.

Le facteur de translation  $a_T$  est d'une grande généralité pour l'étude des corps visco-élastiques. D'autre part, l'équation W.L.F., établie d'abord expérimentalement, semble être fondée sur des bases théoriques solides pouvant donner accès aux caractéristiques physiques intimes des corps visco-élastiques (énergie d'activation, coefficient de dilatation thermique...). Nous avons utilisé par conséquent cette représentation pour l'exploitation des résultats expérimentaux.

## 2° Application numérique et courbes maîtresses.

La figure 3 représente la courbe maîtresse de la composante réelle des modules à la température de référence de 15° C en fonction d'une fréquence réduite  $a_T f$ . Cette courbe est obtenue par translation le long de l'axe des fréquences des différentes isothermes pour couvrir l'isotherme de référence de 15° C. Ainsi, la variation de la composante réelle, fonction de deux variables : température et fréquence, est ramenée à une variation de la fréquence seulement, mais pour un domaine de variation beaucoup plus grand, à une température constante.

(1) Cette énergie d'activation est liée à l'énergie d'activation de l'écoulement visqueux par une relation simple. Elle lui est égale pour les températures qui nous intéressent dans cette étude (-25 à +50° C).

La figure 4 représente la courbe maîtresse de la composante imaginaire à la température de référence de 15° C.

Si l'on trace la valeur moyenne du facteur de translation  $a_T$  utilisé pour avoir les courbes maîtresses en fonction de la température, on obtient la figure 5. L'équation analytique qui s'adapte le mieux à ces résultats est une expression du type W.L.F. d'équation :

$$\text{Log } a_T = \frac{-9,4(T - 288)}{90 + T - 288} \quad (16)$$

On peut calculer à partir de cette expression :

a) LE COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE.

$$\alpha_f = \frac{1}{2,303 C_1 C_2} = 5,12 \cdot 10^{-4}/^{\circ}\text{C}.$$

Le calcul direct à partir du coefficient de bitume et du coefficient des granulats donne la valeur de  $5,8 \cdot 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ .

b) L'ÉNERGIE D'ACTIVATION DE RELAXATION  $\Delta H_a$ .

Cette énergie varie entre 64 et 30 kcal/mol/° pour des températures variant entre -10° C (admise comme température de transition vitreuse du bitume) et +30° C. Les ordres de grandeur de cette énergie d'activation et ses variations en fonction de la température sont analogues à ceux que l'on peut tirer à partir des mesures viscosimétriques sur les bitumes.

## 3° Présentation des résultats dans le plan de COLE et COLE.

Il a été utile quelquefois de présenter les résultats expérimentaux des corps visco-élastiques (modules et complaisance) dans le plan complexe appelé aussi plan de COLE et COLE [9]. Cette présentation permet généralement d'obtenir une expression analytique fonction de  $(i \omega \tau_0)$  analogue à celle proposée par COLE et COLE pour représenter les variations des composantes de la constante diélectrique (arc de cercle symétrique d'équation) :

$$\varepsilon^*(i \omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{1 + (i \omega \tau_0)^{1-\alpha}} \quad (17)$$

$\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_{\infty}$  étant les valeurs de la constante diélectrique aux fréquences 0 et  $\infty$  ;

$\alpha$  un coefficient numérique compris entre 0 et 1.

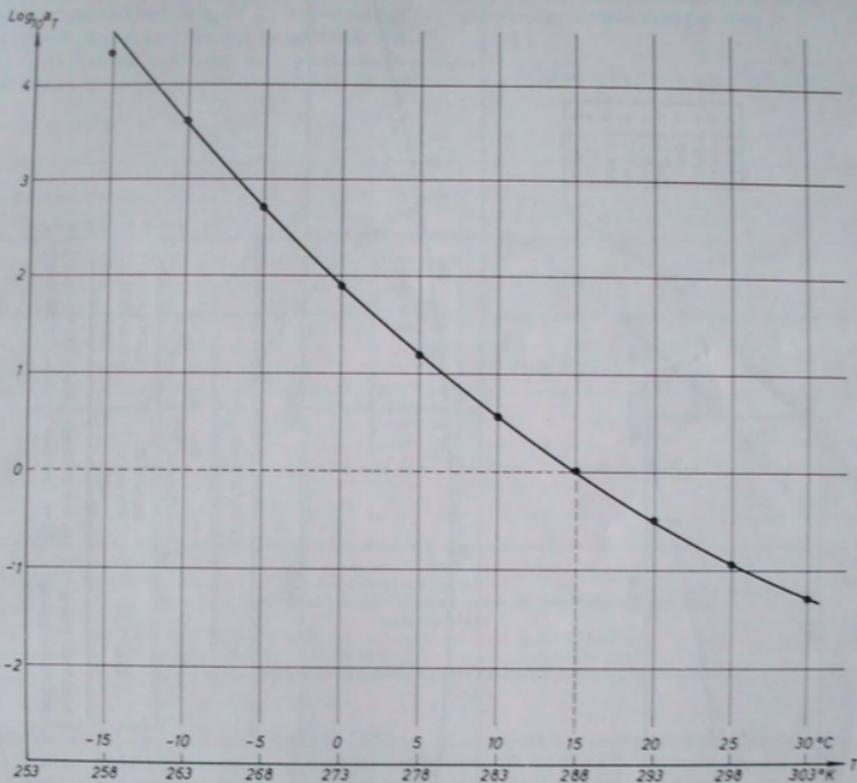
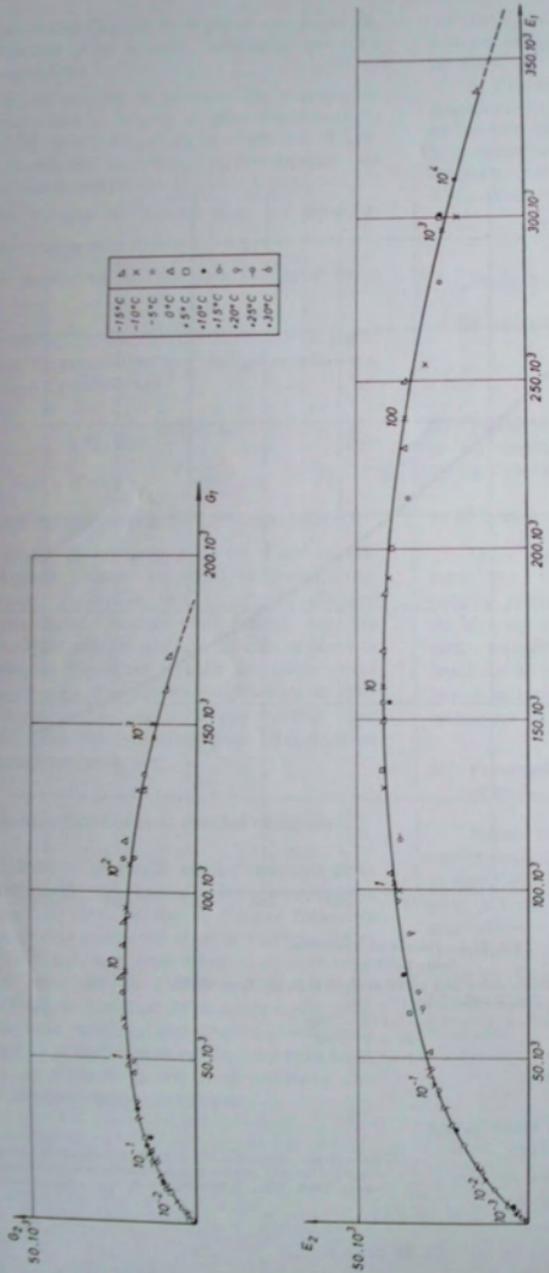


Fig. 5. — Facteur de translation  
Béton Le Mans

● valeur moyenne à partir de  $E_1(f)$  et  $G_1(f)$  [ $T_a = 15^\circ\text{C}$ ]  
— représente l'équation :

$$\text{Log}_{10} a_T = \frac{-9,4(T - 288)}{90 + T - 288}$$



-15°C	△
-10°C	×
-5°C	○
0°C	△
+5°C	□
+10°C	●
+15°C	○
+20°C	▽
+25°C	◇
+30°C	δ

Fig. 6. — Représentation des modules complexes dans le plan complexe  
Béton Le Mans

— courbes représentant l'équation :

$$M^*(f \omega) = M_s + \frac{M_{\infty} - M_s}{1 + 2(f \omega \tau)^{0.25} + (f \omega \tau)^{0.66}}$$

MODULE	MODULE STATIQUE (M <sub>s</sub> )	MODULE INSTANTANÉ (M <sub>∞</sub> )
Module de Young	E <sub>s</sub> = 1 000 bars	E <sub>∞</sub> = 380 000 bars
Module de cisaillement	G <sub>s</sub> = 500 bars	G <sub>∞</sub> = 190 000 bars

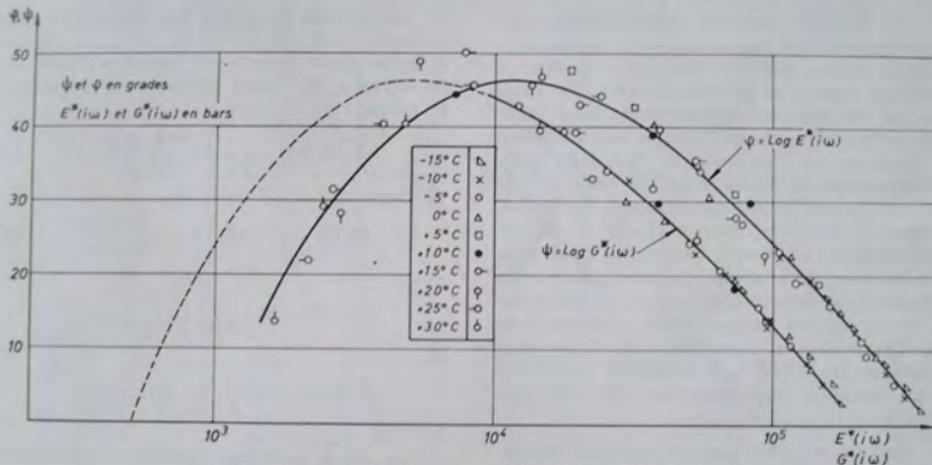
Cette présentation a eu quelques succès pour présenter les résultats de certains caoutchoucs [10], polyisobutylène... [11]. Il a été même possible de relier  $\tau_0$  (1) à la température par une relation du type EYRING (13) aussi bien pour les mesures visco-élastiques [11] que pour les mesures diélectriques [12].

Cette représentation nécessite forcément une extrapolation des valeurs de  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_\infty$ , extrapolation plus ou moins rigoureuse suivant la précision des mesures. D'autre part, pour certains corps, il existe plusieurs zones de dispersion et la recherche d'une

C. HUET [1] a constaté que  $\tau$  est lié à la température par une équation du type ARRHÉNÉIUS [analogue à l'expression (13) où  $T_\infty = 0$ ].

Les résultats que nous avons obtenus sur ce béton dans le domaine linéaire ont fait apparaître un module statique du béton bitumineux. Il faudrait donc ajouter à l'expression (18) un terme tenant compte du module statique d'où :

$$E^*(i\omega) = E_0 + \frac{E_\infty - E_0}{1 + \delta(i\omega\tau)^{-k} + (i\omega\tau)^{-h}} \quad (19)$$



représentation analytique s'avère inextricable. C'est pour ces raisons probablement que l'utilisation de ce plan n'est pas systématique pour représenter les variations des composantes des modules ou des complaisances.

C. HUET [1] a présenté les résultats expérimentaux de ce béton bitumineux dans ce plan (fig. 6). Il a obtenu des points répartis autour d'un arc non symétrique dont l'équation analytique s'écrit :

$$E^*(i\omega) = \frac{E_\infty}{1 + \delta(i\omega\tau)^{-k} + (i\omega\tau)^{-h}} \quad (18)$$

(1) A ne pas confondre  $\tau$ , avec  $\tau_p$  de la théorie de ROUSE,  $\tau$  est proportionnel au temps de relaxation.

Nous avons constaté de plus que  $\tau$  ne suit pas une loi du type ARRHÉNÉIUS simple, mais une loi du type EYRING (13).

Pour mieux représenter les résultats au voisinage de l'origine il est intéressant, comme l'a signalé HUET [1], de tracer les résultats dans l'espace de BLACK (fig. 7). On remarque la tendance de la courbe vers un module statique. D'après des essais récents effectués avec un appareillage approprié (articulation entre vibreur et éprouvette) pour éliminer l'effet des moments parasites qui existent dans la liaison rigide, nous avons constaté que :

— l'effet de la liaison élastique sur la valeur du module de YOUNG est négligeable tant qu'on reste

dans le domaine linéaire du comportement du béton bitumineux, c'est-à-dire pour les faibles déformations:

— l'effet de la liaison élastique sur la valeur du module de cisaillement est faible pour les basses températures et hautes fréquences, son importance se manifeste surtout pour les hautes températures et basses fréquences (zones des graphiques extrapolées).

#### 4° Détermination des différentes fonctions caractéristiques.

Les différentes fonctions caractéristiques d'un corps visco-élastique linéaire (module, complaisance, fonction fluage, fonction relaxation, spectre de relaxation, spectre de retardation) sont liées entre elles par des relations mathématiques faisant intervenir la transformation de FOURIER, transformation de LAPLACE, ou l'intégrale de STELTJES [13]. Théoriquement la connaissance de l'une de ces fonctions permet de déterminer toutes les autres. En général, ces calculs ne sont pas faciles à effectuer même lorsque l'on connaît l'expression analytique de la fonction. On a recours, par conséquent, à des méthodes d'approximation qui permettent d'effectuer ces transformations sur les valeurs expérimentales sans l'extrapolation nécessaire pour l'expression analytique. On trouve une abondante description de ces méthodes d'approximation dans l'ouvrage de FERRY [14].

Nous allons calculer quelques fonctions caractéristiques à partir des courbes maîtresses des composantes des modules.

#### a) DÉTERMINATION DES SPECTRES DE RELAXATION ET DE RETARDATION.

Le module complexe et ses composantes sont liés au spectre de relaxation par les relations suivantes :

$$E_1(\omega) = E_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau; \quad (20)$$

$$E_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} d\tau; \quad (21)$$

$$E^*(i\omega) = i\omega \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_0^{\infty} H(\tau) e^{-t\tau} d\tau. \quad (22)$$

L'expression (22) se transforme grâce à une étude analytique faite par FROSS et KIRKWOOD [15] sur les diélectriques et adaptée par GROSS [16] pour

les corps visco-élastiques en une relation analytique de la forme :

$$H(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow 1} = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^* (-\omega \pm i\epsilon) \\ = \pm \frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im } E_1(\epsilon \pm i\omega). \quad (23)$$

Ce calcul est encore très compliqué dans notre cas et nous avons préféré utiliser des méthodes d'approximation.

La méthode de seconde approximation est due à FERRY et col. [17]. En admettant que  $H(\tau)$  peut se mettre sous la forme  $A \tau^{-m}$  dans un petit intervalle de  $\tau$  [ $|m| < 1$ ], FERRY trouve pour l'expression du spectre :

$$H(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow 1} = A E_1 \frac{d \text{Log } E_1}{d \text{Log } \omega} \quad (24)$$

ou encore :

$$H(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow 1} = B E_2 \left[ 1 - \frac{d \text{Log } E_2}{d \text{Log } \omega} \right] \quad (25)$$

avec :

$$A = (2 - m) / 2\Gamma(2 - \frac{m}{2})\Gamma(1 + \frac{m}{2})$$

et :

$$B = (1 + |m|) / 2\Gamma(\frac{3 - |m|}{2})\Gamma(\frac{3 + |m|}{2}).$$

$m$  est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe  $\text{Log } H(\tau) = f(\text{Log } \tau)$  obtenue par une première approximation au point  $(\tau)$  [la première approximation s'effectue en faisant  $A = B = 1$  dans les expressions (24) et (25)];

$\Gamma$  est la fonction d'EULER.

Un calcul approché, dû à NINOMIYA et FERRY [18], des expressions (24) et (25) permet de calculer  $H(\tau)$  à partir des valeurs prises par  $E_1$  et  $E_2$  aux abscisses  $\omega, a\omega, a^2\omega, \frac{\omega}{a}$  et  $\frac{\omega}{a^2}$  ( $a$  constante telle que  $0,2 \leq \text{Log } a \leq 0,4$ ). On obtient alors :

$$H(\tau) = \frac{E_1(a\omega) - E_1(\frac{\omega}{a})}{2 \text{Log } a} - \frac{a^2}{(a^2 - 1)^2} \\ \times \frac{E_1(a^2\omega) - E_1(\frac{\omega}{a^2}) - 2E_1(a\omega) + 2E_1(\frac{\omega}{a})}{2 \text{Log } a} \Big|_{\frac{1}{\omega} = \tau} \quad (26)$$

et :

$$H(\tau) = \frac{2}{\pi} \left\{ E_2(\omega) - \frac{a}{(a-1)^2} \right. \\ \left. \times \left[ E_2(a\omega) + E_2\left(\frac{\omega}{a}\right) - 2E_2(\omega) \right] \right\} \left| \frac{1}{\omega} = \tau \right. \quad (27)$$

Nous avons utilisé (1) les formules (24), (25), (26) et (27) pour déterminer le spectre de relaxation

Les spectres  $H_E(\tau)$  et  $H_G(\tau)$  ont la même allure mais sont distincts. Ils peuvent être déduits l'un de l'autre par translation le long de l'axe des ordonnées. Translation égale, en gros, au rapport d'homothétie entre les courbes des modules. Enfin, l'allure de ces spectres est analogue à celle que l'on trouve pour d'autres corps visco-élastiques.

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus pour les spectres de relaxation avec ce que

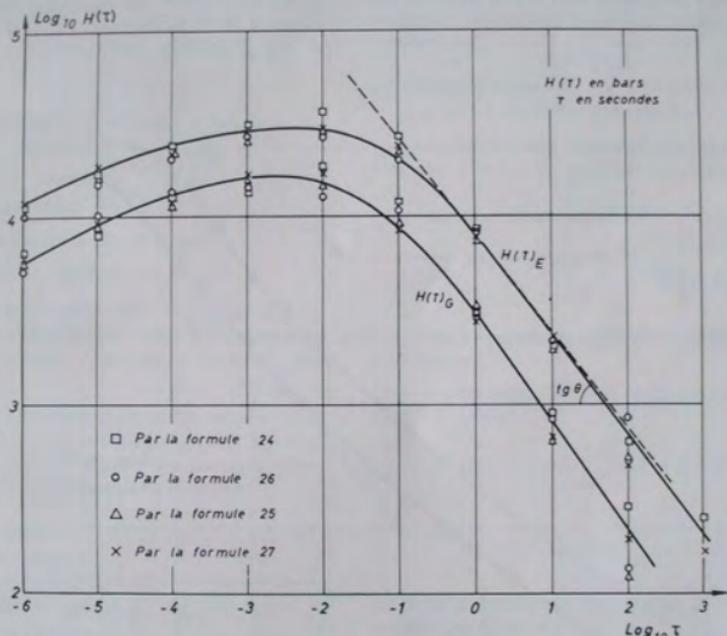


Fig. 8. — Spectres de relaxation à  $T_0 = 15^\circ \text{C}$  obtenus à partir des essais dynamiques par les formules (24), (25), (26), (27) Béton Le Mans

NOTA. — En pointillés, la droite de pente  $-\frac{1}{2}$  correspondant à la théorie de ROUSE

$H(\tau)$  à partir des composantes  $E_1$  et  $E_2$  et  $G_1$  et  $G_2$ . La figure 8 représente ces spectres. Les deux approximations sont pratiquement équivalentes. Le fait que les déterminations à partir de la composante réelle et de la composante imaginaire soient pratiquement les mêmes montre que les deux composantes sont liées entre elles et au spectre de relaxation par les relations de la visco-élasticité linéaire.

prévoit la théorie de ROUSE. L'expression du spectre déterminé d'après cette théorie pour des temps pas trop courts s'écrit sous la forme :

$$H(\tau) = \frac{aZn}{2\pi} \left[ \zeta_0 \frac{kT}{6} \right]^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

Dans le plan  $\text{Log } H(\tau) - \text{Log } \tau$  ce spectre se présente sous la forme d'une droite de pente  $-\frac{1}{2}$ . Il est possible de tirer, à partir du spectre de relaxation

(1) Pour les détails de calcul et d'autres méthodes d'approximation voir [19].

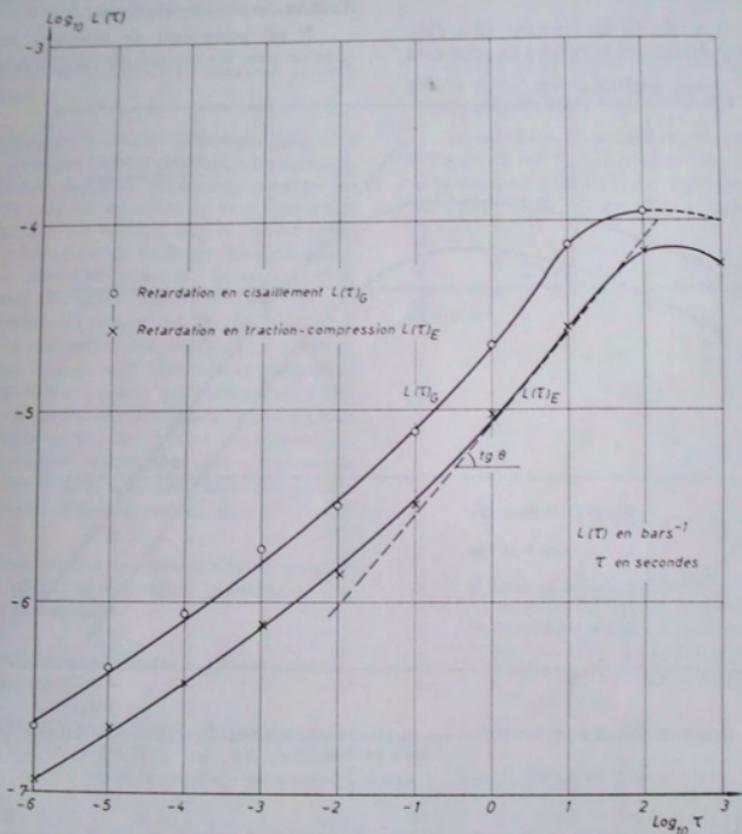


Fig. 9. — Spectres de retardation à  $T_s = 15^\circ \text{C}$  obtenus à partir des essais dynamiques par la formule (30)  
Béton Le Mans

NOTA. — En pointillés, la droite de pente  $\frac{1}{2}$  correspondant à la théorie de Rouse

où (28) est vérifiée, la valeur de  $\zeta_0$ . Un coefficient de frottement monomérique  $\zeta_0$  d'un corps aussi hétérogène que le béton bitumineux n'a pas de sens. Nous allons essayer de le déterminer pour le bitume constituant le béton bitumineux. Nous verrons plus loin que les courbes des modules des bitumes purs et des bétons bitumineux sont homothétiques

dans le rapport  $\frac{E_{\text{béton bitumineux}}}{E_{\text{bitume pur}}}$ . Il s'ensuit donc que le spectre de relaxation des bitumes est homothétique dans le même rapport, et c'est à partir de ce spectre que nous allons calculer  $\zeta_0$  par la formule :

$$\text{Log } \zeta_0 = 2 \text{Log } H(\tau) + \text{Log } \tau + \text{Log } \frac{6}{kT} + \text{Log } \frac{2\pi M_0}{a \rho N} \quad (29)$$

$\rho$  étant la densité;

$M_0$  poids moléculaire du monomère;

$N$  nombre d'Avogadro.

On trouve, tous calculs faits,  $\text{Log } \zeta_0 = 1,5$  pour  $T = 15^\circ \text{C}$  et la valeur trouvée pour la température de transition vitreuse, estimée à  $-10^\circ \text{C}$ , est  $\text{Log } \zeta_0 = 5$ .

Le tableau ci-dessous indique les valeurs de  $\zeta_0$  de différents polymères à la température de transition vitreuse  $T_g$  déterminées à partir des mesures visco-élastiques ou à partir des essais de diffusion.

POLYMÈRES	Log $\zeta_0$ à $T_g$
Polyméthacrylate de méthyle .....	5,47
Polyméthacrylate d'éthyle .....	6,22
Acétate de polyvinyle .....	4,29
Polysobutylène .....	3,97
Gaoucheou légèrement vulcanisé ....	4,66

La valeur de  $\zeta_0$  (1) du bitume est comparable donc à celle que l'on trouve pour des polymères purs.

Au moyen d'une approximation due à FERRY [14] le spectre de retardation peut être lié

au spectre de relaxation et aux composantes du module par la relation :

$$L(\tau) = \frac{H(\tau)}{\left[ E_1 \left( \frac{1}{\tau} \right) - E_2 \left( \frac{1}{\tau} \right) + 1,37 H(\tau) \right]^2 + \pi^2 H^2(\tau)} \quad (30)$$

Le calcul est simple et les résultats sont présentés sur la figure 9. On peut distinguer, comme pour le spectre de relaxation, la zone où la théorie de Rouse est vérifiée.

#### b) DÉTERMINATION DE LA FONCTION RELAXATION ET DE LA FONCTION FLUAGE.

La fonction de relaxation  $R(t)$  est liée aux fonctions  $H(\tau)$  et  $E^*(i\omega)$  par la relation suivante :

$$E_1(\omega) - R(t)_{t=\frac{1}{\omega}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} - e^{-\frac{1}{\omega\tau}} \right] H(\tau) d\tau \quad (31)$$

Comme calcul approximatif de cette expression l'on trouve :

— une approximation de CATSIF et TONOLSKY [20] qui donne :

$$R(t) = E_1(\omega)_{\omega=\frac{1}{t}} - H(\tau) \psi(m)_{\tau=t} \quad (32)$$

avec :

$$\psi(m) = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{m\pi}{2} - \Gamma(m),$$

$m$  étant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe  $\text{Log } H(\tau) = f(\text{Log } \tau)$ ;

— une approximation de NIMOMIYA et FERRY [18] qui donne :

$$R(t)_{t=\frac{1}{\omega}} = E_1(\omega) - 0,4 E_2(0,4 \omega) + 0,014 E_2(10 \omega) \quad (33)$$

La figure 10 indique les courbes de relaxation relatives aux modules de Young et de cisaillement obtenues par ces deux méthodes d'approximation. Les deux courbes ont pratiquement la même allure. Elles peuvent se déduire par homothétie l'une de l'autre comme c'est le cas des modules ou des spectres.

Nous remarquons que lors de l'application d'une déformation constante au béton bitumineux, la

(1)  $\zeta_0$  s'exprime en dynes-cm. Cela correspond à la force moyenne par unité monomérique nécessaire à la chaîne pour se déplacer, gênée par ses voisins, à la vitesse unité.

contrainte se relaxe bien, comme l'on devait s'y attendre, depuis une valeur initiale égale au module instantané  $E_{\infty}$  jusqu'à une valeur tendant vers le module statique  $E_0$ .

On sait que l'image de la fonction fluage est l'inverse de l'image de la fonction relaxation dans la

Il suffit donc de calculer numériquement  $F(t)$  (fonction fluage) à partir de  $R(t)$  ou inversement. La figure 11 montre la courbe représentative de  $F(t)$ .

Il est possible de déterminer l'expression exacte de la fonction fluage à partir de l'expression analytique de la complaisance si l'on peut trouver

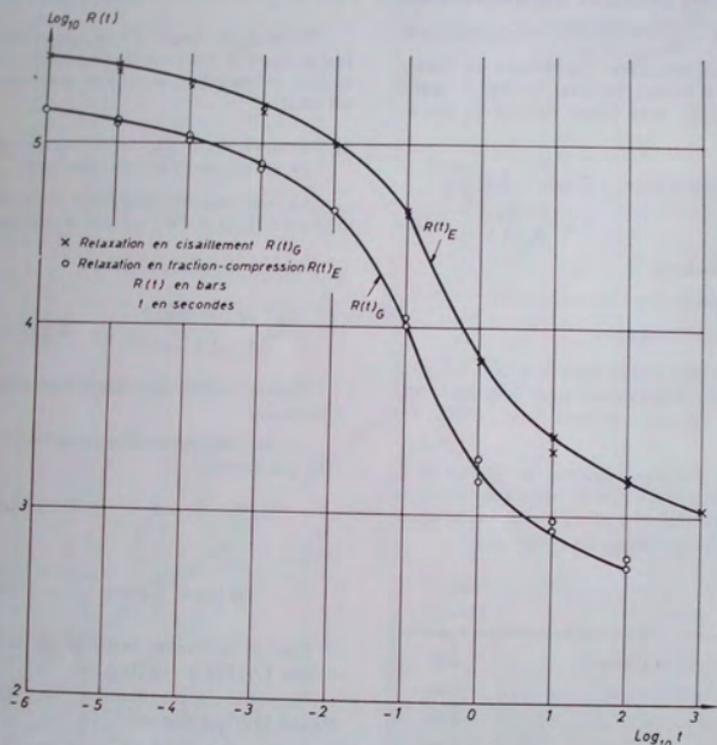


Fig. 10. — Fonctions de retardation à  $T_s = 15^\circ \text{C}$  obtenues à partir des essais dynamiques par les formules (32) et (33)  
Béton Le Mans

transformation de CARSON [21]. Dans le cas où la fonction fluage ou la fonction relaxation peuvent se mettre sous la forme  $A t^m$  ( $|m| < 1$ ) cela se traduit par la relation :

$$F(t) = \frac{\sin m \pi}{m \pi} \times \frac{1}{R(t)}, \quad (34)$$

$m$  étant la tangente à la courbe  $R(t)$ .

l'originale de l'expression de la complaisance où on a remplacé  $(i \omega)$  par  $p$ .

L'expression de la complaisance s'écrit :

$$J^*(i \omega) = \frac{1 + \delta (i \omega \tau)^{-k} + (i \omega \tau)^{-h}}{E_0 [\delta (i \omega \tau)^{-k} + (i \omega \tau)^{-h}] + E_{\infty}} \quad (35)$$

d'où :

$$F(p) = \frac{1 + A p^{-k} + B p^{-h}}{E_0 [A p^{-k} + B p^{-h}] + E_{\infty}} \quad (36)$$

Nous n'avons pas trouvé l'image d'une telle fonction dans les ouvrages spécialisés de calcul symbolique. Nous avons essayé de calculer directement l'originale en utilisant la formule d'inversion de MELLIN-FOURIER. Nous avons pu transformer l'intégrale complexe en une intégrale réelle, mais l'expression de cette intégrale est trop compliquée et ne peut pas se faire par un calcul classique.

trouve facilement dans les tables de transformation :

$$F(t) = \frac{1}{E_{\infty}} \times \left[ 1 + \delta \tau^{-k} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} + \tau^{-h} \frac{t^h}{\Gamma(h+1)} \right]. \quad (37)$$

C'est l'expression de la fonction fluage proposé par C. HUET [1] d'après ses premiers résultats ( $E_0 = 0$ ).

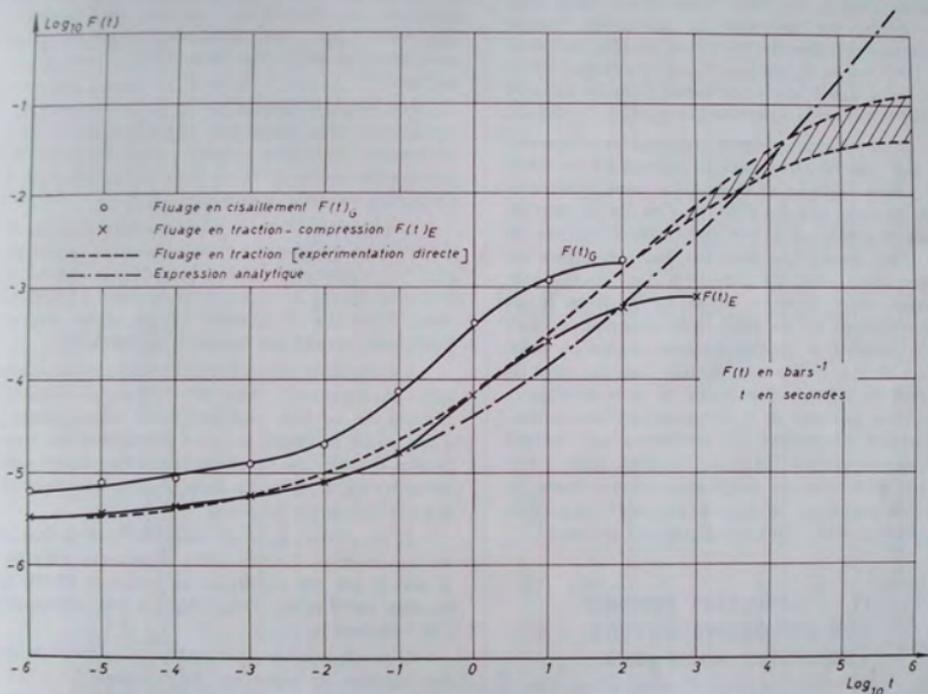


Fig. 11. — Fonctions de fluage à  $T_s = 15^\circ \text{C}$  obtenues à partir des essais dynamiques par la formule (34)  
Béton Le Mans

Il est possible de diviser l'expression (36) en deux parties suivant qu'on est aux temps courts et températures basses ou aux temps longs et températures hautes [22].

### 1 Temps court.

$E_0$  négligeable devant  $E_{\infty}$  dans l'expression (36), on obtient une expression dont l'originale se

### 2 Temps long.

On néglige  $1 + \delta (i \omega \tau)^{-k}$  devant  $(i \omega \tau)^{-h}$ . On obtient pour la fonction fluage une fonction de MITTAG-LEFLER.

Nous avons présenté sur la même figure les résultats obtenus par mesure directe par SOLEIMANI, assistant au L.C.P.C. sur le même matériau en traction.

Il est remarquable de constater que les différentes déterminations : [par l'expression (37), par calcul approché ou par mesure directe] sont en bon accord pour les temps courts jusqu'à 100 s, mais divergent ensuite.

Les résultats obtenus à partir des essais de module par la méthode d'approximation indiquent que la courbe de fluage tend vers une asymptote, comme c'est le cas dans l'essai direct. Mais cette asymptote, qui détermine la valeur du module statique, est différente. On trouve, en effet, la valeur de 1000 b pour  $E_0$  par la méthode dynamique, tandis que l'essai direct donne une valeur comprise entre 10 et 100 b suivant la valeur de la contrainte appliquée.

Nous pensons que cette différence peut provenir du fait que les déformations admissibles au cours des essais statique et dynamique sont différentes dans les deux cas. En effet, on s'est limité dans les essais dynamiques à une déformation relative de  $2.3 \cdot 10^{-3}$ , tandis que dans les essais statiques ces déformations sont de  $2.4 \cdot 10^{-4}$ . Or, nous avons constaté, lors de notre étude de la linéarité de comportement de ce béton que lorsqu'on s'écarte de la linéarité le module diminue (lorsqu'on passe de  $2 \cdot 10^{-3}$  à  $2 \cdot 10^{-4}$  le module diminue dans le rapport de 220 %). Une partie de cette divergence peut donc provenir de la différence de déformation. Il persiste néanmoins une différence plus grande que ce que prévoit l'écart de linéarité. Faut-il voir là une différence de comportement au fluage en traction simple et en flexion alternée ? Des essais en cours doivent nous renseigner sur ce sujet.

#### IV. — RÉSULTATS OBTENUS SUR DIFFÉRENTS BITUMES ET BÉTONS BITUMINEUX

##### 1° Résultats sur bitumes purs.

Nous avons étudié trois bitumes ayant les caractéristiques indiquées dans le tableau ci-après :

TYPE DE BITUME	PÉNÉTRATION à 25° C.	TEMPÉRATURE B et A	I.P.
60/70	67		
80/100	85	47	— 1
180/220	197	38	— 0,6

Nous avons tracé sur la figure 12 les variations des composantes du module de YOUNG des différents bitumes dans le plan de COLE et COLE. La fourchette, en haut du graphique, contient l'ensemble des points expérimentaux des différents bitumes. L'écart entre les deux courbes définissant cette fourchette est de l'ordre de grandeur de l'erreur expérimentale ( $\pm 15$  %). Pour voir si cette fourchette représente l'ensemble des bitumes purs nous avons comparé les résultats expérimentaux obtenus par d'autres chercheurs par des méthodes expérimentales complètement différentes de celle que nous avons utilisée.

Les résultats obtenus par KUHN et RIGDEN [23], par la résonance d'une lame métallique recouverte de bitume, de quatre bitumes ayant un indice de pénétration voisin de 0, se placent correctement à l'intérieur de cette fourchette.

Les résultats obtenus par THROWER [24] par la vibration en cisaillement d'une éprouvette en bitume (I.P. = — 2) se placent assez bien dans la fourchette proposée. Quant à ses résultats obtenus en traction-compression ils se placent autour d'une courbe légèrement décalée par rapport à la fourchette.

Ces résultats vont à l'encontre des constatations faites par BRODNYAN et ses coll. [25] sur les bitumes. D'après ces auteurs, tous les bitumes se comportent d'une façon analogue pour les fréquences pas trop faibles. Certains des résultats de ces chercheurs sont présentés sur la figure 12. Ils se placent correctement dans la fourchette proposée.

Il est remarquable de constater que la valeur de  $E_{\infty}$  trouvée d'après cette fourchette (30 000-35 000 b) est très proche de la valeur de 30 000 b proposée par VAN DER POEL [26] pour tous les bitumes à la fréquence  $\omega$ .

Il serait intéressant d'étudier le comportement des bitumes au voisinage de l'origine. En effet, les différences essentielles entre les bitumes doivent se manifester, suivant plusieurs chercheurs, au voisinage de l'origine. Malheureusement il n'est pas possible d'effectuer ces mesures avec suffisamment de précision par la méthode actuelle. Notre groupe s'occupe actuellement de l'étude d'appareillages appropriés permettant d'effectuer l'étude des modules des bitumes purs et de leurs fluages.

L'allure générale des résultats obtenus sur bitumes purs est la même que celle obtenue pour le béton du Mans. On peut même représenter les variations du module par une expression analogue à (19) en ajustant les valeurs des paramètres :  $E_{\infty}$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  et  $k$ .



L'expression qui s'adapte le mieux est :

$$E^*(i\omega) = \frac{33\,500}{1 + 2(i\omega\tau)^{-0,2} + (i\omega\tau)^{-0,6}} \quad (38)$$

(Dans la limite de nos essais nous n'avons pas trouvé un module statique de ces bitumes.)

Enfin, un facteur de translation d'équation :

$$\text{Log } a_T = \frac{-10,7(T-272)}{100 + T - 272} \quad (39)$$

représente correctement les résultats du bitume 80/100.

La fourchette que nous avons tracée semble représenter convenablement les variations des bitumes purs d'I.P. variant entre -2 et +1 pour les points pas trop près de l'origine. (Un bitume qui diffère de cela est un bitume soufflé d'I.P. = +5 essayé au Road Research Laboratory qui se place bien en dessous de cette fourchette). La variable qui caractérise le bitume sera alors sa susceptibilité thermique qui peut être définie par le facteur de translation  $a_T$ ,  $a_T$  pouvant être lié à son tour à la viscosité du bitume et de là aux caractéristiques d'essais courants.

### 2° Résultats sur bitume naturel (Trinidad).

Ce bitume se présente sous la forme d'une roche. Il contient, d'après la littérature, 36-38 % de filler (quartz et argile).

Les variations des composantes des modules de ce bitume sont représentées sur la figure 13 a. L'équation suivante peut représenter convenablement les résultats expérimentaux pour les températures basses et les fréquences hautes :

$$E^*(i\omega) = \frac{68\,000}{1 + 2(i\omega\tau)^{-0,20} + (i\omega\tau)^{-0,60}} \quad (40)$$

Pour les fréquences basses et températures hautes les points expérimentaux se décollent de la courbe pour se mettre autour d'une courbe plus symétrique.

L'expression du facteur de translation trouvée pour ce bitume est :

$$\text{Log } a_T = \frac{-12,5(T-288)}{90 + T - 288} \quad (41)$$

Ce bitume ne semble pas posséder un module statique dans la gamme de variation de T et de  $f$  que nous avons étudiée.

### 3° Résultats sur quelques bétons bitumineux.

La figure 13 b représente les variations du module complexe d'un béton bitumineux en provenance d'un chantier expérimental en Loir-et-Cher. L'équation analytique (1) qui représente le mieux ces résultats est :

$$E^*(i\omega) = 500 + \frac{250\,000}{1 + 2(i\omega\tau)^{-0,2} + (i\omega\tau)^{-0,60}} \quad (42)$$

analogue à celle déjà trouvée pour le béton du Mans et les bitumes purs, et la loi de variation du facteur de translation est :

$$\text{Log } a_T = \frac{-10,4(T-283)}{82 + T - 283} \quad (43)$$

La figure 13 c représente également les variations du module complexe d'un béton bitumineux ordinaire d'une route proche de Colmar.

L'équation analytique qui représente le mieux ces résultats est :

$$E^*(i\omega) = 1\,000 + \frac{240\,000}{1 + 2(i\omega\tau)^{-0,2} + (i\omega\tau)^{-0,6}} \quad (44)$$

et la variation du facteur de translation se présente par :

$$\text{Log } a_T = \frac{-9,6(T-293)}{87 + T - 293} \quad (45)$$

## V. — ÉQUATION RÉDUITE DES MODULES

Dans tout ce qui précède nous remarquons la ressemblance des allures des courbes présentant les variations des composantes du module complexe des bitumes purs, bitume fillérisé, béton Blois, béton Colmar et béton du Mans (équation analytique et graphique).

(1) La valeur du module statique dans cette expression est déterminée d'après la courbe maîtresse ou l'espace de BLACK.

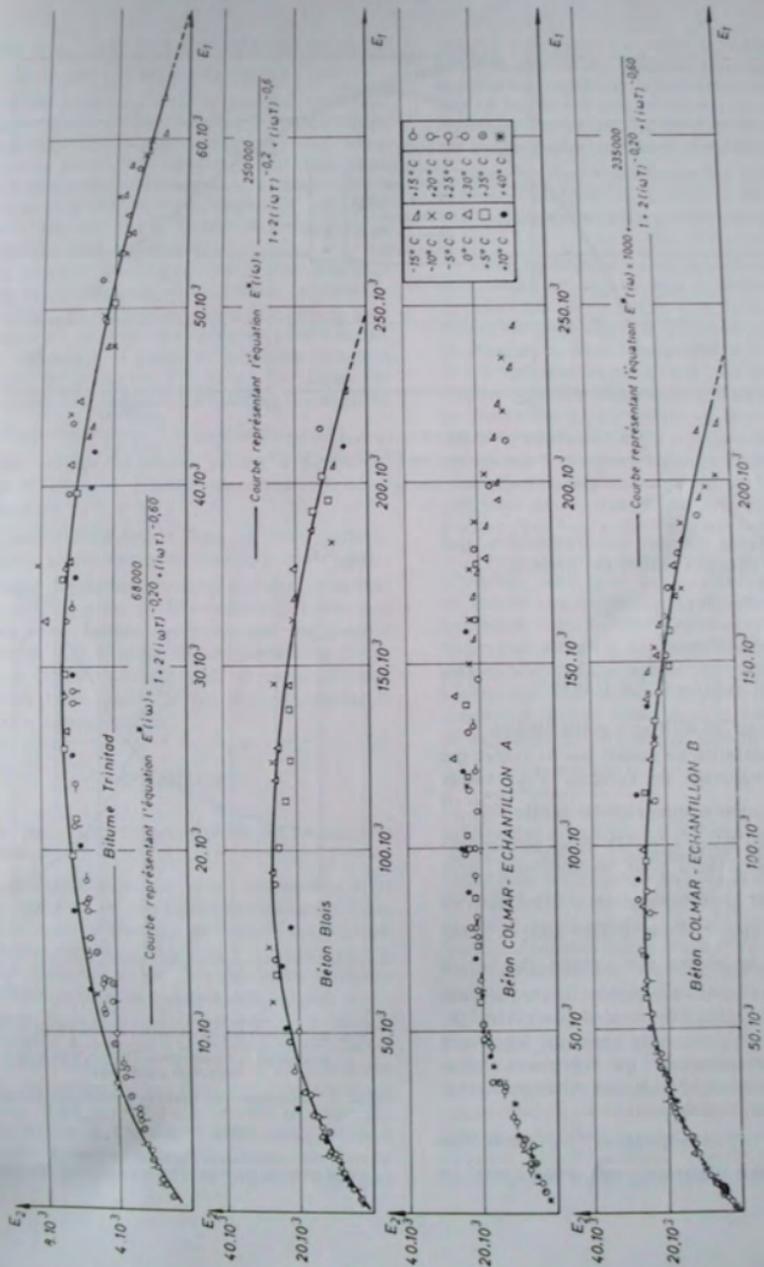


Fig. 13. — Représentation des modules complexes dans le plan complexe  
 Bitume de Trinidad, béton Blois, béton Colmar

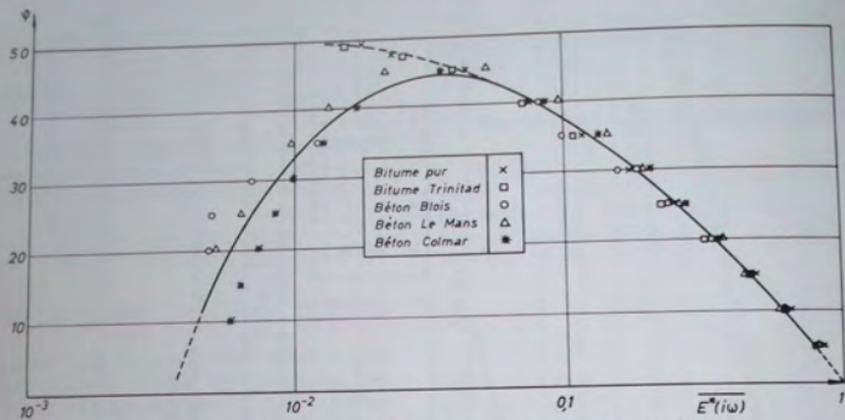


Fig. 14. - Module réduit des bitumes purs et des bétons bitumineux  
Représentation dans le plan  $\sigma = \text{Log } \bar{E}^*(i\omega)$  avec  $\bar{E}^*(i\omega) = \frac{E^*(i\omega)}{E_\infty}$

— courbe moyenne proposée pour le module réduit des bétons bitumineux

Nous pouvons conclure que l'expression, que nous appelons équation réduite des modules :

$$\frac{E^*(i\omega) - E_0}{E_\infty} = \frac{1}{1 + \delta(i\omega\tau)^{-k} + (i\omega\tau)^{-h}} \quad (46)$$

est la même pour les différents corps étudiés.

Cette présentation ne permet pas de voir ce qui se passe au voisinage de l'origine. Pour mieux apprécier cela nous avons tracé les points  $\frac{E^*(i\omega)}{E_\infty}$  dans l'espace de Black (fig. 14). Nous remarquons que les points obtenus pour les différents corps étudiés, et pour  $\frac{E^*}{E_\infty}$  compris entre  $3 \cdot 10^{-2}$  et 1, se placent bien autour d'une courbe unique. Pour  $\frac{E^*}{E_\infty} < 3 \cdot 10^{-2}$  le bitume pur s'écarte des bétons bitumineux (les bétons bitumineux ont un module statique que le bitume ne semble pas avoir). Or, c'est précisément dans cette zone que les ennuis mécaniques se manifestent et que la précision souffre. Des essais en cours adaptés aux bitumes doivent nous éclairer sur ces points.

Pour les bétons bitumineux  $\frac{E^*}{E_\infty}$  semble être valable (avec une dispersion assez grande) pour les

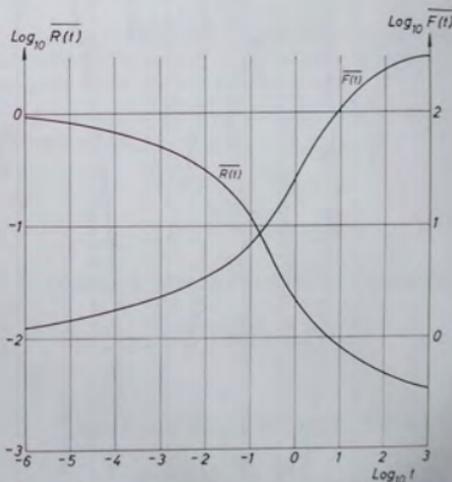


Fig. 15. - Fonction de relaxation réduite  $\left[ \bar{R}(t) = \frac{R(t)}{E_\infty} \right]$  et fonction de fluage réduite  $[ \bar{F}(t) = F(t) \times E_\infty ]$  des bétons bitumineux

NOTA. — Ces courbes sont relatives au coefficient de translation :

$$\text{Log } a_T = \frac{-9,4(T - 288)}{90 + T - 288}$$

Au cas où ce coefficient est différent il faut effectuer une translation le long de l'axe des abscisses

valeurs de  $\frac{E^*}{E_x} < 3 \cdot 10^{-2}$ . On peut même extrapoler une valeur de  $\frac{E_0}{E_x}$  de l'ordre de  $3,5 \cdot 10^{-3}$ .

Si cela est exact, ce qui devrait être vérifié sur d'autres formules de différentes compositions, l'expression du module complexe du béton bitumineux pourra être déterminée par deux paramètres : le module instantané  $E_x$  et la susceptibilité thermique. La susceptibilité thermique peut être définie à son tour par le facteur de translation  $a_T$  (fonction de deux paramètres).

Il s'ensuit alors que toutes les fonctions caractéristiques (spectre de relaxation, spectre de retardation,...) pour tous les bétons bitumineux sont semblables et peuvent être obtenues pour l'un des bétons bitumineux à partir de la courbe réduite à condition de connaître  $E_x$  et  $a_T$ . La figure 15 représente à titre indicatif les courbes de relaxation et de fluage réduites  $\frac{R(t)}{E_x}$  et  $F(t) \times E_x$ .

Pour obtenir les vraies valeurs à partir des courbes réduites on effectue deux translations le long des axes :

- une translation le long de l'axe vertical, déterminée par la valeur du module instantané  $E_x$ ;
- une translation le long de l'axe horizontal suivant la valeur de  $a_T$ . Les courbes réduites sont relatives à un facteur de translation obéissant à l'expression (16) et pour la température de 15° C. Pour une température différente et un  $a_T$  différent il faudrait faire subir aux courbes précédentes la translation correspondante.

## CONCLUSION

On peut tirer de cette étude les conclusions suivantes :

Le comportement du béton bitumineux n'est linéaire que pour les très faibles déformations. Dans l'usage courant, le domaine de linéarité est dépassé. Les résultats de cette étude sont valables pour le domaine linéaire, et ne le sont qu'en première approximation pour le domaine non linéaire.

Il est remarquable de constater que le facteur de translation s'applique à un corps aussi hétérogène que le béton bitumineux. Ce facteur de translation permet de ramener les résultats expérimentaux effectués à différentes températures et pour une gamme limitée de fréquences à un essai effectué à l'une des températures, mais dans une gamme très étendue de fréquences. Les grandeurs physiques

que l'on a pu calculer à partir du facteur de translation (coefficient de dilatation thermique, énergies d'activation, coefficient de frottement monomérique) sont en bon accord avec les valeurs trouvées dans la littérature concernant les bitumes et déterminées par des méthodes expérimentales différentes.

Les courbes représentant les variations des modules complexes de Young et de cisaillement semblent être homothétiques dans un rapport moyen de 2,2.

Tous les bitumes jeunes que nous avons essayés nous-mêmes ou trouvés dans la littérature d'indice de pénétration ( $-2 < I.P. < +1$ ) se placent dans le plan complexe autour d'une courbe globale unique (à l'exception d'un bitume soufflé d'I.P. = +5). Ce qui distingue les bitumes les uns des autres c'est leur susceptibilité thermique, définie par le facteur de translation  $a_T$ . Ce facteur de translation pourra être lié d'une façon simple à la viscosité du liant et par-là aux autres caractéristiques classiques de ce liant. D'autre part, la valeur du module instantané que nous avons trouvée est très proche de celle proposée par VAN DER POEL pour tous les bitumes.

Il est apparu que la présence de la phase solide (granulat) ainsi que de la phase gazeuse (vide) ne semble pas modifier essentiellement le comportement du liant. En effet, des courbes obtenues pour différentes formules de béton bitumineux ont les mêmes allures. Elles peuvent être déduites l'une de l'autre par homothétie. En particulier, toutes les courbes de bétons bitumineux jeunes se déduisent de la courbe de bitume par homothétie de rapport

$$\rho = \frac{E_x \text{ béton bitumineux}}{E_x \text{ bitume pur}}$$

L'équation analytique proposée par HUET (pour représenter les variations du module complexe du béton du Mans), à laquelle nous avons ajouté un terme pour tenir compte du module statique, semble représenter sous sa forme réduite la variation des modules complexes de l'ensemble des bétons bitumineux que nous avons étudiés. Il reste à vérifier cette généralité sur d'autres formules de bétons bitumineux. (Il semble déjà que le cas des bétons vieilliss s'écartent du cas général.)

Cette généralité d'application permet d'ores et déjà d'envisager la simplification des essais actuellement nécessaires pour déterminer les fonctions caractéristiques des bétons bitumineux. Ces fonctions sont données une fois pour toutes sous leurs formes réduites. Un matériau quelconque se trouve complètement caractérisé par la détermination de

son module d'élasticité instantané, d'une part (translation verticale de la courbe réduite) et, d'autre part, par sa susceptibilité thermique (translation horizontale de la courbe réduite).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. HUET. — *Étude par une méthode d'impédance du comportement visco-élastique des matériaux hydrocarbonés*. Thèse de Docteur-Ingénieur, Faculté des Sciences de Paris (1963).
- [2] J. MANDEL. — *Sur les corps visco-élastiques à comportement linéaire*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 241, pp. 1910-1912 (12/12/1955); *Application du calcul symbolique à l'étude des corps visco-élastiques*. Introduction à la rhéologie Persoz, Dunod, pp. 93-116 (1960).
- [3] F. SCHWARZL et A. J. STAUERMANN. — *Time-temperature dependence of linear viscoelastic behaviour*. J. of App. Phys., vol. 23, n° 8, pp. 838-843 (1952).
- [4] A. V. TOBOLSKY. — *Time-temperature superposition of viscoelastic polymers in the transition zone*. J. of App. Phys., 27, 673 (1956).
- [5] O. NOKADA. — *A note on the time-temperature reducibility of the relaxation and retardation spectra*. J. of Phys. Soc. Japon, 12, 1218 (1957).
- [6] P. E. ROUSE. — *A theory of linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers*. J. of Chem. Phys., vol. 21, n° 7, pp. 1272-1280 (7/1953).
- [7] M. L. WILLIAMS, R. F. LANDEL et J. D. FERRY. — *The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass forming liquids*. J. of Ame. Chem. Soc., 77, p. 3701 (20/7/1955).
- [8] F. BUECHE. — *Derivation of the W.L.F. equation from the mobility of molecules in molten glasses*. J. of Chem. Phys., vol. 24, n° 2 (2/1956).
- [9] K. S. COLE et R. H. COLE. — *Dispersion and absorption in dielectrics alternating current characteristics*. J. of Chem. Phys., vol. 9, pp. 341-351 (4/1941).
- [10] A. W. NOLLE. — *Dynamic mechanical properties of rubberlike materials*. J. of Polymer Sciences, vol. V, n° 1, pp. 1-54 (1950).
- [11] S. TAKAHASHI. — *Cole-Cole's circular arc rule on dynamic properties of viscoelastic materials*. J. of Coll. Sci., 9, pp. 313-320 (1954).
- [12] D. W. DAVIDSON et R. W. COLE. — *Dielectric relaxation in glycerol, propylene and n-propanol*. J. of Chem. Phys., vol. 19, n° 12, pp. 1484-1490 (12/1951).
- [13] B. GROSS. — *Mathematical structures of the theories of viscoelasticity*. Hermann et Cie, Paris (1953).
- [14] J. D. FERRY. — *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley and Sons, Inc. (1961).
- [15] R. M. FUOSS et J. K. KIRKWOOD. — *Electrical properties of solids, Dipole moments in polyvinyl chloride*. J. Ame. Chem. Soc., n° 63, pp. 385-394 (1941).
- [16] B. GROSS. — *On creep and relaxation*. J. of App. Physics, vol. 18, 212 (1947); vol. 19, 257 (1948).
- [17] J. D. FERRY et M. L. WILLIAMS. — *Second approximation method for viscoelastic materials*. J. of Coll. Sciences, 706, pp. 347-353 (1952).
- [18] K. NINOMIYA et J. D. FERRY. — *Some approximate equations useful in the treatment of linear viscoelastic data*. J. of Coll. Sci., 14, pp. 36-48 (1959).
- [19] G. SAYEGH. — *Contribution à l'étude des propriétés visco-élastiques des bitumes purs et des bétons bitumineux*. Thèse de Docteur-Ingénieur, Sorbonne (1965).
- [20] CATSIF et TOBOLSKY. — *Relations between functions of linear viscoelastic materials*. J. of Coll. Sciences, 10, 375 (1955).
- [21] J. MANDEL. — *Application du calcul opérationnel à l'étude des corps visco-élastiques*. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie. T. III, n° 4 (1958).
- [22] C. HUET et G. SAYEGH. — *Détermination par une méthode de vibrations forcées des modules complexes de Young et de cisaillement des enrobés bitumineux routiers*. Journées d'études du G.A.M.I. (5/1964).
- [23] S. H. KUHN et P. J. RIDGEN. — *Measurement of viscoelastic properties of bitumens under dynamic loading*. Proc. H.R.B., 38, pp. 431-463 (1959).
- [24] E. N. THROWER. — *Dynamic elastic properties of a bitumen* (communication privée). R.R.L., RM/3428 (3/1959).
- [25] J. BRODSKYAN et col. — *The rheology of asphalt. III : Dynamic properties of asphalts*. Trans. of the Soc. of Rheology, IV, pp. 279-296 (1960).
- [26] VAN DER POEL. — *A general system describing the viscoelastic properties of bitumens and its relation to routine test data*. J. of App. Che., vol. 4, part 5 (5/1954).

# SUR L'EMPLOI D'ÉQUATIONS DOUBLEMENT LOGARITHMIQUES POUR DÉCRIRE L'ÉCOULEMENT DES SUSPENSIONS TELLES QUE LES CRÈMES LAITIÈRES AUX BASSES TEMPÉRATURES (1)

par G. W. SCOTT BLAIR et J. H. PRENTICE

NATIONAL INSTITUTE FOR RESEARCH IN DAIRYING, SHINFIELD, READING (ANGLETERRE)

## RÉSUMÉ

Cet exposé traite de l'écoulement des crèmes laitières, dont les globules de graisse sont solides et pour lesquelles la relation entre la vitesse d'écoulement et la contrainte est monotone. Les actions de la contrainte et de l'écoulement sont indépendantes. On propose deux relations logarithmiques, l'une entre le nombre des liens détruits par la contrainte et cette dernière, l'autre entre la vitesse d'écoulement et celle du rétablissement des liens dû à l'attraction.

Le rapprochement de ces deux équations aboutit à une relation doublement logarithmique entre la contrainte et la vitesse d'écoulement. Selon l'allure de la courbe des forces potentielles, la théorie peut être appliquée aussi bien au rhéopaisissement qu'à la rhéofluidification.

## INTRODUCTION

A part une crème maigre pour café et une crème stérilisée relativement rare, toutes les crèmes laitières vendues au public pour la consommation domestique en Grande-Bretagne doivent contenir au moins 48 % de graisse. Ce pourcentage, beaucoup plus élevé que ce qui est habituel dans la plupart des pays continentaux, soulève des problèmes rhéologiques variés.

Il existe d'abondants renseignements empiriques sur les conditions thermiques de stockage nécessaires

pour donner une crème d'une consistance acceptable, mais l'industrie a du mal à croire que le rhéologue ne puisse pas donner un nombre unique pour la « viscosité » d'un échantillon de crème.

Le travail décrit dans le présent mémoire montre cependant qu'en excluant tout traitement à température élevée et tout procédé d'homogénéisation extrême, ces crèmes, quelquefois très épaisses, peuvent généralement être décrites avec une bonne précision, si elles sont examinées à une température à laquelle les globules de graisse ne sont pas liquides, au moyen de deux paramètres : une viscosité apparente et un « indice d'anomalie » qui définit l'écart au comportement newtonien.

## PARTIE EXPÉRIMENTALE

Deux types de consistomètres ont été employés. Tous deux utilisent des cylindres coaxiaux, mais dans l'un, le cylindre, suspendu à un fil de torsion, possède un moment d'inertie très élevé. On fait osciller ce cylindre dans la crème et on mesure l'amortissement de ses oscillations libres. Ces expériences ne sont pas décrites dans la présente note. Pour les expériences rapportées ici, il a été employé une technique de cylindres coaxiaux de type classique, le cylindre extérieur tournant et le couple sur le cylindre intérieur étant mesuré soit directement sur une échelle, soit, pour les contraintes faibles, au moyen d'un levier optique.

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 20 mai 1965.

La figure 1 montre une photographie de l'appareil et la figure 2 les courbes obtenues pour trois crèmes en portant le logarithme de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  en fonction du logarithme de la cisssion  $\tau$ . Ces courbes sont très typiques pour des crèmes « normales ». Il est remarquable qu'avec une teneur en graisse solide d'environ 50 %, ces crèmes soient liquides, ne montrent pas de seuil et possèdent une contrainte unique et reproductible pour chaque vitesse de

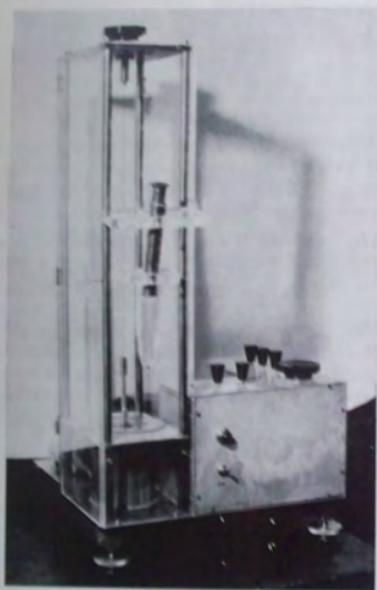


Fig. 1. — Viscosimètre à cylindres coaxiaux

cisaillement, c'est-à-dire aucune espèce de thixotropie ou effets d'hystérésis.

Par ailleurs, la figure 3 montre les courbes de quelques crèmes anormales et il est évident que, pour de tels échantillons, la situation est beaucoup plus complexe. Ces conditions ne seront pas discutées dans le présent mémoire.

Il est difficile de relier quantitativement les données rhéologiques à la structure microscopique de la crème. La figure 4 montre une microphotographie

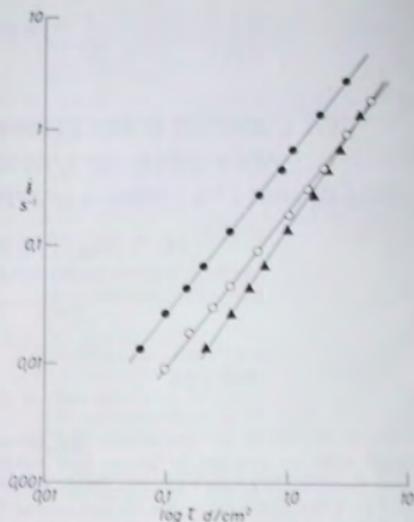


Fig. 2. — Courbes typiques pour des crèmes « normales »

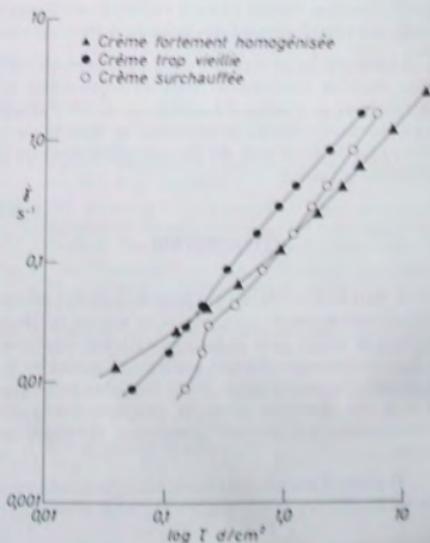


Fig. 3. — Courbes pour des crèmes « anormales »

d'une crème typique et il semble probable que la structure doit être mieux décrite en faisant intervenir des amas de différents ordres. Plutôt que des amas séparés de quelques globules, il faudrait considérer chaque amas associé à d'autres amas à l'intérieur d'amas plus grands, eux-mêmes associés lâchement à l'intérieur de groupes encore plus grands.

En général les liens (linkages) [terme que nous préférons à liaisons (bonds)] ne peuvent pas être très solides à un niveau d'association quelconque, sinon les crèmes montreraient des seuils d'écoulement, comme c'est le cas, en effet, lorsque les globules

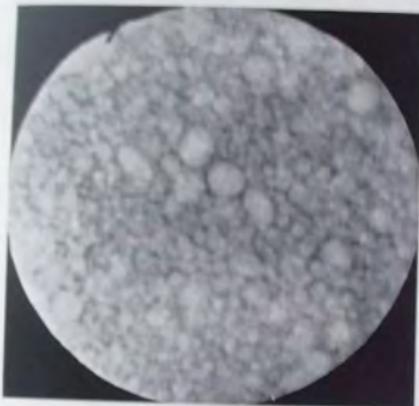


Fig. 4. — Microphotographie d'une crème typique

individuels tendent à fusionner ensemble avec rupture de la couche de protéine qui les entoure.

L'objet principal de la présente note est de rechercher une explication plausible de la raison pour laquelle les crèmes normales donnent lieu à des graphiques log-log, linéaires excellents dans un domaine aussi étendu de vitesses de cisaillement.

Dans l'étude de la plupart des suspensions, les expériences ont été faites pour une série de concentrations différentes et les paramètres rhéologiques sont par conséquent reliés à la concentration. Il est clair que cela ne peut pas être fait pour la crème. Une augmentation de la concentration ou une dilution du système modifient complètement la structure.

Les expériences pourraient, naturellement, être conduites à une série de températures différentes, comprenant celles auxquelles les globules de graisse sont liquides, mais cela n'aurait pas de sens de comparer directement les comportements d'une crème particulière à différentes températures, puisque la structure dépend beaucoup aussi, non seulement de la température, mais également de l'histoire thermique précédant la mesure.

## DISCUSSION

L'emploi de la représentation graphique de  $\log \dot{\gamma}$  en fonction de  $\log \tau$  pour les systèmes appelés maintenant rhéofluidifiants et rhéopaisissants a une longue histoire. La paternité en est généralement attribuée conjointement à DE WAELE [1] et à OSTWALD [2] et une première discussion sur la signification de tels diagrammes, donnée par REINER [3] est à l'origine de beaucoup des idées suivantes. Un grand nombre de courbes log-log, (comme elles vont être appelées maintenant) peuvent être trouvées dans un livre de PHILIPPOFF [4] (ces auteurs, naturellement, ne se restreignent pas aux liquides comme nous l'avons fait).

Il est généralement admis qu'aucune signification théorique ne doit être attribuée à de tels diagrammes. On peut s'attendre, en général, à obtenir approximativement une droite en traçant sur du papier doublement logarithmique un graphique qui était légèrement courbe en coordonnées ordinaires. Bien que, dans un petit intervalle, il existe une justification mathématique de ce point de vue, elle n'est pas valable lorsque la linéarité du graphique log-log, persiste dans un grand intervalle. DE WAELE lui-même a proposé que l'exposant de l'équation doublement logarithmique corresponde au volume relatif de la phase visqueuse déformable.

SCOTT BLAIR [5] a récemment proposé une explication approchée pour le cas particulier de fluides montrant une relation monotone entre cisssion et vitesse de cisaillement (c'est-à-dire sans hystérésis), mais, depuis la rédaction de ce mémoire (1), la théorie a été considérablement étendue et perfectionnée.

Le principe général est que, en dépit de la relation monotone, les actions de la cisssion et de la vitesse de cisaillement dans la destruction d'une

(1) Ce mémoire comporte une erreur malheureuse qui sera corrigée.

structure qui existe dans un matériau non contraint, sont essentiellement différentes. Cette indépendance de l'action de la contrainte et de celle de la vitesse de déformation constitue le thème central de l'étude proposée dans le présent mémoire.

Dans le cas d'une suspension telle qu'une crème à une température à laquelle les globules de graisse ne sont certainement pas liquides, la contrainte tend à briser les liens entre les globules. Il se peut que quelques liens ne puissent pas être rompus dans les conditions de l'expérience, mais, en général, quand la contrainte augmente, le nombre de liens destructibles tend à décroître progressivement et l'hypothèse la plus simple serait que cela se produise selon une loi exponentielle.

Pour qu'il y ait une relation monotone entre  $\tau$  et  $\dot{\gamma}$  et pas d'hystérésis, il faut qu'il y ait des forces entre les globules, qui, lorsqu'ils sont assez serrés l'un contre l'autre pendant un temps assez long, provoquent une restauration des liens. Le temps nécessaire à cela serait évidemment très court.

L'effet du cisaillement va être de tendre à empêcher la restauration des amas. Aux faibles vitesses de cisaillement, cet effet sera le plus marqué, car il y aura un grand nombre de liens. Lors d'une augmentation progressive de la vitesse de cisaillement, le nombre de réassemblages possibles diminuera et l'hypothèse la plus simple serait que ce mécanisme soit exponentiel. Ces deux mécanismes, ainsi, se ralentissent quand la contrainte et la vitesse de cisaillement sont augmentées.

Si les particules de graisse fusionnent réellement à un degré appréciable, nous avons le commencement de la formation du beurre et nous avons appelé ce mécanisme *barattage* (churning). Un barattage appréciable se décèle par l'apparition d'un seuil d'écoulement et de telles conditions ne seront pas examinées dans le présent mémoire.

Ces conceptions conduiraient aux deux équations :

$$-\frac{dn}{d\tau} = \frac{n}{\alpha} \quad \text{et} \quad -\frac{dn}{d\dot{\gamma}} = \frac{n}{\beta}$$

où  $n$  est le nombre de liens par unité de volume. Mais pour que ces deux équations soient vérifiées, il faudrait que le système soit newtonien, ce qui n'est pas le cas.

Une autre hypothèse simple, qui est celle exposée à la référence [5], est telle que la très petite force nécessaire pour briser chaque lien serait reliée

exponentiellement à la contrainte, avec la supposition correspondante appliquée à la vitesse de déformation.

Cela conduit aux équations :

$$-\frac{dn}{d\tau} = \frac{\alpha}{\tau} \quad \text{et} \quad -\frac{dn}{d\dot{\gamma}} = \frac{\beta}{\dot{\gamma}}$$

Si, comme dans le mémoire précédent, l'étude est restreinte à un intervalle moyen limité de contrainte et vitesse de cisaillement, ces équations méritent d'être considérées, mais elles ont l'inconvénient de conduire à un nombre infini de liens lorsque  $\tau$  et  $\dot{\gamma}$  sont nuls.

Il semble donc nécessaire de trouver une grandeur qui devienne infinie dans ces conditions, et il est clair que ce doit être l'inverse d'une fonction du nombre de liens qui sont en train de se rompre.

Considérant alors les effets de la contrainte, nous pouvons écrire :

$$-\frac{df}{d\tau} = \frac{a}{\tau} \quad (1)$$

Il est clair que nous devons rechercher une signification physique, non pour  $f$  lui-même, mais pour  $1/f$ . L'hypothèse la plus simple serait celle selon laquelle  $1/f$  serait une mesure de la fraction (comprise entre 0 et 1) de liens brisés pour une contrainte donnée  $\tau$ . L'expression est négative car  $1/f$  croît avec  $\tau$ , mais aucune signification ne doit être attachée à la limite  $\tau = \infty$ . Quand  $\tau = 0$ ,  $f$  devient infini et  $1/f$  devient nul.

L'intégration de l'équation (1) donne :

$$f = C - a \text{ Log } \tau.$$

Soit  $f_1$  la valeur de  $f$  pour  $\tau = 1$  dyne/cm<sup>2</sup>, c'est-à-dire pour  $\text{Log } \tau = 0$ .

Par suite :

$$C = f_1 \quad \text{et} \quad a \text{ Log } \tau = f_1 - f. \quad (2)$$

En considérant les effets de la vitesse de cisaillement, nous pouvons écrire :

$$-\frac{df}{d\dot{\gamma}} = \frac{b}{\dot{\gamma}} \quad (3)$$

qui devient par intégration :

$$b \text{ Log } \dot{\gamma} = f_2 - f, \quad (4)$$

où  $f_2$  est la valeur de  $f$  lorsque  $\dot{\gamma}$  a la valeur de  $1 \text{ s}^{-1}$ .

L'élimination de  $f$  entre les équations (2) et (4) donne :

$$A \dot{\gamma} = \tau^{a/b}$$

avec :

$$A = e^{b/c - f_0 \theta}$$

Ceci est l'équation-puissance vérifiée expérimentalement. Elle est, en réalité, incomplète. Nous devons y ajouter un terme tenant compte de la viscosité de la phase continue, mais ce terme sera habituellement petit. Sa présence cependant peut rendre compte de la chute de quelques courbes log-log, vers les vitesses de cisaillement les plus grandes.

Il a été montré que  $a$  et  $b$  n'ont pas besoin d'être constants pourvu que leur rapport le soit, mais l'hypothèse la plus simple est que chacun d'eux soit une constante. Il n'y a pas de raison non plus pour que des équations plus complexes, peut-être des équations-puissance, ne soient pas proposées à la place de celles qui ont été introduites ici. Nous avons suivi le principe d'OCCAM, cependant, en posant les hypothèses les plus simples en accord avec les faits.

Puisque  $f_1$  est probablement beaucoup plus grand que toutes les valeurs expérimentales de  $f$ , nous pouvons supposer que tous les liens brisables sont détruits quand :

$$a \text{ Log } \tau \approx f_1$$

Au-delà le système peut bien devenir un fluide vrai qui présenterait un graphique  $\tau/\dot{\gamma}$  linéaire dirigé vers l'origine comme OSTWALD l'avait prévu [2] (« Der Laminarast ») et comme certains auteurs l'ont annoncé en tant que résultat expérimental. Quelques-unes de nos courbes log-log, montrent, vers les vitesses de cisaillement élevées, une légère tendance à avoir une pente se rapprochant de l'unité, mais il n'est pas certain du tout que cela soit significatif.

Pour les liquides rhéopaisissants il n'y a pas de structure au repos, ou seulement une structure très faible. Les courbes potentiel-distance ont une forme différente de celles des systèmes rhéofluidifiants et l'effet d'une contrainte croissante va être d'agglomérer les particules dispersées, d'abord en grande quantité, puis à un taux décroissant exponentiellement. De même aux petites vitesses de cisaillement, le taux de formation des liens sera élevé à cause du temps de voisinage relativement long des globules, A une augmentation de la vitesse de

cisaillement correspondra une décroissance exponentielle de la vitesse de coagulation. Les équations applicables ici seront exactement analogues à celles qui ont été proposées pour les systèmes rhéofluidifiants, sauf que les signes — seront changés en + et que, au lieu de  $b/a > 1$  on aura pour les rhéopaisissants  $b/a < 1$ . Quand  $b = a$ , nous avons un fluide newtonien.

Il reste à formuler quelques réflexions sur la nature de l'équation-puissance elle-même (1).

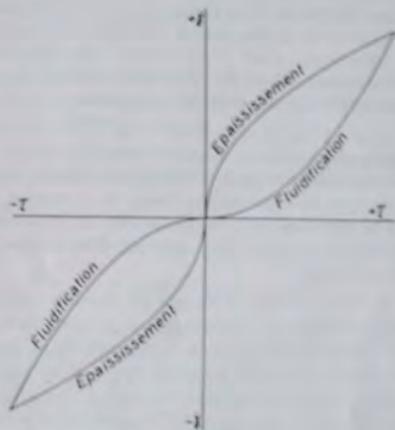


Fig. 5. — Paraboles montrant les conditions limites à l'origine

Ce qui suit est aussi vrai pour une équation-puissance quelconque à un seul terme que pour le cas particulier d'une parabole, de sorte que, pour simplifier, c'est cette dernière qui est présentée sur la figure 5 qui correspond à une relation parabolique entre  $\tau$  et  $\dot{\gamma}$  dans les cas où ils sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. On peut voir aisément sur cette figure, comme le montre d'ailleurs l'équation  $\tau^n = B \dot{\gamma}$ , que quand  $\tau$  est exactement nul,  $d\tau/d\dot{\gamma}$ , c'est-à-dire  $\tau/\dot{\gamma}$ , qui est la viscosité apparente, est infini pour un système rhéofluidifiant et nul pour un rhéopaisissant. De même quand  $\tau = \infty$ ,  $d\tau/d\dot{\gamma}$  est nul pour le premier système et infini pour le deuxième.

(1) La plupart de ces idées figurent implicitement ou explicitement dans le mémoire de REYNOLDS déjà cité [3].

C'est peut-être pour cette raison que REINER a décrit l'équation-puissance comme seulement une équation d'interpolation, mais en fait elle ne diffère de l'équation linéaire que sur un point important.

Pour un système newtonien la viscosité est indéterminée quand  $\tau$  est nul ou infini. La différence réside dans le fait que, avec l'équation-puissance donnée ci-dessus,  $B$  a des dimensions fonction de la valeur de  $N$ . Si la courbe est une parabole avec  $N = 2$ , les dimensions de  $B$  sont  $M^2 L^{-2} T^{-2}$  au lieu de celles d'une viscosité :  $ML^{-1} T^{-1}$ . La signification profonde de cette particularité a été discutée dans un livre de l'un de nous (SCOTT BLAIR [6]) et il n'est pas utile de la reprendre ici. Pratiquement ce qui est important, c'est l'impossibilité de comparer directement les viscosités apparentes de deux crèmes ayant différents exposants de contrainte.

Pour la rhéofluidification il est clair que, par définition,  $\dot{\gamma}$  doit croître plus vite que  $\tau$  et que ce doit être l'inverse pour le rhéopéaïsissement. Cela signifie que dans le premier cas,  $b > a$ , tandis que dans le deuxième  $a > b$ . L'effet de la vitesse de cisaillement est donc prépondérant dans le cas de la fluidification.

Il serait tentant d'essayer de montrer que les effets épaississant et fluidifiant de la contrainte et de la vitesse de déformation se contrarient, de façon que cette dernière soit toujours prépondérante pour les corps rhéofluidifiants et vice versa. Cela n'est pas possible, parce que la courbe potentiel-distance possède une forme différente pour chaque système particulier. La contrainte et la vitesse de cisaillement doivent agir dans le même sens pour n'importe quel matériau. Il pourrait apparaître encore à première vue, que la rhéofluidification puisse être représentée soit par les valeurs négatives de  $d\tau/d\dot{\gamma}$  et  $d\dot{\gamma}/d\tau$ , soit par l'inégalité  $b > a$ . Par définition, cependant, la rhéofluidification signifie que la vitesse d'accroissement de  $\dot{\gamma}$  avec  $\tau$  est elle-même croissante, quelle que soit la relation fonctionnelle qui les lie. S'il en est ainsi, la vitesse d'accroissement de  $\dot{\gamma}$  avec un paramètre  $f$  doit être supérieure à la vitesse d'accroissement de  $\tau$  avec le même paramètre. En d'autres termes,  $b$  doit être supérieur à  $a$ . L'inverse s'ensuit pour le rhéopéaïsissement.

Rien n'a encore été dit sur la distribution des résistances des liens. Il est difficile d'admettre qu'elle soit uniforme, mais il semble probable que,

dans un système tel qu'une crème, le nombre de liens existant à un instant donné dépende surtout de la contrainte et de la vitesse de cisaillement et, seulement accessoirement, de la distribution de leurs résistances. Il est visible que la grandeur  $f$ , dont l'inverse est une mesure de la proportion de liaisons rompues pour une contrainte ou une vitesse de cisaillement données, n'a été introduite que pour être ensuite éliminée de l'équation. Cette grandeur  $f$  a évidemment une grande importance, mais ne peut pas être déterminée à partir des courbes  $\log \tau / \log \dot{\gamma}$ , c'est-à-dire au moyen du dispositif expérimental employé pour le travail rapporté dans ce mémoire. Il est souhaitable que d'autres méthodes soient développées pour déterminer  $f$  directement.

Nous avons lu avec beaucoup d'intérêt l'article de DE VRIES [7] et notre pensée a été indubitablement influencée par son travail. Mais ses conditions expérimentales ont été très différentes des nôtres : non seulement il a travaillé sur des émulsions, mais aussi il a envisagé surtout les vitesses de cisaillement élevées, tandis que nos expériences concernent la région des faibles vitesses de cisaillement.

## REMERCIEMENTS

Nous sommes reconnaissants au Professeur J. N. HUNT et à M. A. GRAHAM d'avoir bien voulu avoir avec nous quelques discussions fructueuses, et au Dr M. JOLY d'avoir assuré la traduction française de ce texte.

## LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] DE WAELE A. — *Oil and Colour*, J. 6, 33 (1923) ; *Kolloid, Z.* 36, 332 (1923).
- [2] OSTWALD W. — *Kolloid, Z.* 36, 99, 157, 248 (1925); *ibid.*, 38, 261, etc. (1926).
- [3] REINER M. — *Naturwiss.*, 21, 294 (1933).
- [4] PHILIPPOFF W. — *Viskosität der Kolloide*, Dresden and Leipzig (1942).
- [5] SCOTT BLAIR G. W. — *Rheol. Acta*, 4, 53 (1965).
- [6] SCOTT BLAIR G. W. — *Measurements of Mind and Matter*, London (1950).
- [7] DE VRIES A. J. — *Rheology of Emulsions* (Ed. P. Sherman), Oxford (1963).

# VARIATION DE LA PRESSION DE L'EAU INTERSTITIELLE DES SOLS SATURÉS (1)

par Y. TCHENG

DOCTEUR ÈS SCIENCES  
INGÉNIEUR EN CHEF AU C.E.R.T.F.

## RÉSUMÉ

La résistance d'un sol dépend de la pression de l'eau interstitielle. Il importe donc de connaître la variation de cette pression.

La première partie de l'exposé traite le problème de la mesure et la seconde partie interprète les résultats d'essais.

Les sols essayés sont les suivants : sable, limon et argile.

Tous les essais s'effectuent à l'aide d'une presse triaxiale et la pression interstitielle est mesurée sous des contraintes sphériques et déviatoriques jusqu'à la rupture des éprouvettes.

\* \*

Lorsqu'un corps comporte deux phases dont l'une est solide et l'autre liquide, ses propriétés mécaniques dépendent, d'une part, de la forme du squelette solide, et, d'autre part, du pourcentage des vides remplis d'eau. Ces caractéristiques varient par ailleurs en fonction de la vitesse de l'application des charges. En effet, lorsque l'on applique une charge à ce corps complexe, l'eau interstitielle encaisse une partie, sinon la totalité de la charge, suivant la vitesse de l'application de cette dernière par rapport au coefficient de la perméabilité du milieu.

En matière de Mécanique des Sols il existe une loi simple dite de COULOMB dont l'énoncé est le suivant :

$$T = N \operatorname{tg} \varphi + c.$$

T est la résistance au cisaillement et N la contrainte normale. On appelle  $\varphi$  l'angle de frottement et c la cohésion du sol.

Cette formule est valable lorsque la pression interstitielle  $u$ , à tout moment et surtout pendant la rupture, est rigoureusement nulle; dans le cas contraire cette formule doit être amendée, d'après HVORSLEV, comme suit :

$$T = (N - u) \operatorname{tg} \varphi' + c'.$$

$\varphi'$  et  $c'$  sont appelés respectivement angle de frottement effectif et cohésion effective. En effet, quand on applique au sol une contrainte normale N, le squelette solide ne reçoit que  $N - u$ . La part de contrainte normale  $u$  encaissée par l'eau interstitielle ne produit aucune résistance au cisaillement supplémentaire puisque l'angle de frottement et la cohésion de l'eau sont inexistantes.

Le module de déformation ainsi que le coefficient de Poisson varient également; un essai rapidement exécuté, sans laisser à l'eau le temps de s'échapper donne un coefficient de Poisson égal à 0,5. On s'aperçoit tout de suite que la vitesse d'exécution de l'essai joue un rôle très important.

## INFLUENCE DE LA VITESSE D'ESSAI

Comme nous l'avons dit plus haut, suivant la vitesse de l'essai,  $u$  varie de N jusqu'à 0. La résistance au cisaillement obtenue, par exemple, d'un essai de cisaillement direct, varie donc de :

$$c \quad \text{à} \quad N \operatorname{tg} \varphi' + c'.$$

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 20 mai 1965.

L'essai de cisaillement est considéré comme suffisamment rapide lorsque  $u = N$  et on appelle le même essai « essai lent » lorsque  $u$  est pratiquement nul en tout point de chargement.

#### Pression de consolidation.

Une notion supplémentaire reste encore à définir, à savoir la pression de consolidation : un sol est dit consolidé à une pression de consolidation  $P_c$  lorsque l'on charge ce corps hydrostatiquement à la pression  $P_c$ , la pression interstitielle reste nulle. Si, par la suite, on cisaille ce sol triaxialement avec des étreintes latérales variables, on s'aperçoit que la résistance au cisaillement reste constante quelle que soit la valeur de cette étreinte latérale, c'est-à-dire que les cercles de Mohr correspondant à chaque essai ont tous le même diamètre. On a donc :

$$T = (N - u) \operatorname{tg} \varphi_u + c_u = c_u \quad \text{avec} \quad u = N.$$

$c_u$  est la cohésion apparente;

$\varphi_u$  angle de frottement apparent est pratiquement nul pour un essai rapide ( $u = N$ ).

Pour un sol consolidé, sa pression interstitielle varie proportionnellement à la charge hydrostatique  $\sigma_3$  :

$$u_0 = B(\sigma_3 - P_c).$$

$B$  varie de 0 à 1 suivant le degré de saturation. Pour un corps à deux phases,  $B$  est en principe égal à 1, c'est ce que nous avons constaté pour les sols que nous avons étudiés. Autrement dit, l'eau interstitielle encaisse le surplus de la pression hydrostatique par rapport à la pression de consolidation. Cette condition n'est réalisée que si l'eau n'a pas le temps de sortir. L'application pratique de cette propriété est intéressante car ceci nous permet de prélever des sols relativement imperméables tout en gardant la propriété *in situ*. En effet, lorsque l'on prélève un sol consolidé sous une certaine profondeur, l'échantillon extrait est soumis à la pression atmosphérique ( $\sigma_3 = 0$ ). L'eau interstitielle se met tout de suite en traction dont la valeur est égale à  $-P_c$ , et le squelette solide reste toujours sous la pression de consolidation  $P_c$ . L'échantillon ainsi prélevé est appelé « intact ».

En mécanique des sols la représentation schématique d'un système à deux phases est la suivante :

On assimile le squelette solide à un ressort noyé dans une membrane remplie d'eau. Si on

exerce sur la membrane une contrainte normale  $N$  avant que l'eau ne puisse s'échapper de la membrane qui est plus ou moins étanche, le liquide encaisse l'intégrité de la valeur de  $N$ , c'est-à-dire  $u = N$  et  $B = 1$ . Petit à petit l'eau est évacuée à travers la membrane jusqu'à ce que l'équilibre final soit atteint,  $u$  devient alors nul et le ressort encaisse la valeur totale de  $N$ ; on appelle cet équilibre final la fin de la consolidation, et la pression de consolidation de ce sol est égale à  $N$ .

Lorsqu'on décharge le sol la pression normale devient nulle, le ressort reste néanmoins comprimé à la pression  $N$ , du moins pendant un certain temps et l'eau interstitielle se met en traction  $u = -N$ . Le sol reste à son état de consolidation au fur et à mesure que l'eau ou l'air extérieur pénètre à travers la membrane dans le sol. La pression interstitielle croît et tend vers zéro, le ressort est de ce fait soulagé.

Un sol perméable ne peut pas posséder cette propriété puisque la pression interstitielle reste toujours nulle lorsque  $\sigma_3$  est nul. En schématisant on peut assimiler la perméabilité d'un sol à une sorte de mémoire; plus le sol est imperméable mieux il nous raconte son histoire passée. Un sol perméable ne nous renseigne pas sur la formation mécanique avant son prélèvement.

À quoi la connaissance de la pression interstitielle est utile dans la pratique ?

Pour répondre à cette question, nous citons deux exemples :

1° un talus en déblai est stable après son exécution. Puis, au bout d'un certain temps, le terrain s'effondre car la pression interstitielle qui était négative devient nulle dans le temps, la résistance au cisaillement diminue. Il aurait donc fallu calculer la stabilité de ce talus à long terme;

2° un barrage en terre après mise en eau commence à donner des signes de fatigue, car l'eau pénètre dans le corps du barrage, la pression interstitielle croît et la résistance au cisaillement de ce fait décroît. La stabilité devient ainsi précaire.

#### LOI DE LA PRESSION INTERSTITIELLE

Si on néglige le module de déformation du squelette devant celui de l'eau interstitielle qui est pratiquement incompressible, SKEMPTON a proposé la loi suivante concernant cette pression interstitielle :

$$u = B[(\sigma_3 - P_c) + A \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)].$$

Nous avons déjà vu la première partie de la formule  $B \cdot (\sigma_2 - P_c)$  que nous avons désignée par  $u_0$  qui est une augmentation de pression interstitielle en fonction de l'accroissement de la contrainte hydrostatique.

La deuxième partie de la formule correspond à l'augmentation de la contrainte déviatorique puisque  $\sigma_1 - \sigma_3$  est exactement le diamètre du cercle de Mohr correspondant à l'essai.

A est théoriquement égal à  $1/3$ .

En effet, l'augmentation de la pression interstitielle correspondant au déviateur devrait être, en principe, la valeur moyenne de l'augmentation des trois contraintes principales. Si on appelle  $u_d$  la pression interstitielle correspondant à la partie déviatorique :

$$u_d = 1/3 (\sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_3) = 1/3 (\sigma_1 - \sigma_3),$$

car dans un triaxial :

$$\sigma_2 = \sigma_3.$$

Il s'ensuit donc que pour un corps à deux phases parfaitement élastique la pression de la phase liquide est régie par la loi suivante :

$$u = P_c - \sigma_3 + 1/3 (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Cette formule est valable tout le long de l'essai, et même jusqu'au moment de la rupture; malheureusement elle n'est pas vérifiée pour les sols. Néanmoins, la formule correspondant aux sols peut être écrite comme suit :

$$u = B [P_c - \sigma_3 + A (\sigma_1 - \sigma_3)].$$

Notamment pour un sol saturé, B est bien égal à l'unité. Par contre, A varie suivant la nature du sol. Il est égal à 0,50 pour une argile et il est au maximum égal à 0,86 pour un limon, et à 0,2 pour un sable.

Avant d'aborder les résultats expérimentaux, nous allons décrire l'appareillage nécessaire pour la mesure de la pression interstitielle.

## APPAREILLAGE DE MESURE

La mesure de pression interstitielle dans des éprouvettes cylindriques s'effectue à l'aide de l'appareil triaxial. L'éprouvette est protégée par une

gaine étanche et le tout est placé à l'intérieur d'une cellule triaxiale remplie d'un liquide. On exerce une pression hydrostatique dans la cellule  $\sigma_3$ , un piston plongeur permet d'appliquer à l'éprouvette cylindrique le long de son axe une pression axiale  $\sigma_1$ . L'essai est poursuivi pour une étreinte latérale  $\sigma_2$  jusqu'à la rupture de l'éprouvette en faisant croître  $\sigma_1$ . La différence entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ , c'est-à-dire le déviateur, est le diamètre du cercle de Mohr correspondant à l'essai. Pendant l'essai, on mesure la pression interstitielle à l'aide d'un dispositif spécial. Il s'agit d'un manomètre à membrane métallique placé directement dans le socle de la cellule triaxiale, ce qui réduit le volume d'eau intermédiaire entre le capteur et l'éprouvette. Cette dernière est placée sur une pierre poreuse, laquelle est en liaison directe avec le manomètre traducteur de pression. Les déformations de la membrane métallique provoquées par la variation de la pression interstitielle sont mesurées à l'aide de jauges électriques enroulées sur un octaèdre régulier. L'un des deux sommets de cet octaèdre est fixe par rapport au socle de la cellule triaxiale et l'autre est solidaire de la membrane. Quand la membrane se déforme les fils électriques sont plus ou moins tendus, ce qui provoque une variation de résistance électrique. La réponse de ce traducteur de pression est pratiquement immédiate et la variation de pression est facilement décelable à l'aide d'un pont de WHEATSTONE.

L'essai s'effectue dans une pièce à température constante.

## PRÉPARATION DES ÉPROUVETTES

Le sol est consolidé à différents taux de pression, et, comme nous l'avons vu plus haut, la consolidation est considérée comme terminée quand la pression interstitielle devient négligeable; mais avant de procéder à la consolidation des éprouvettes il importe de saturer le sol. Cette opération n'est pas la plus simple; en effet, toute saturation incomplète entraîne une variation, parfois très importante, de la valeur de la pression interstitielle mesurée ou plus exactement B sera inférieur à 1, car la présence des bulles d'air compressible fait diminuer notablement u.

Le sol le plus délicat à saturer est l'argile. Nous allons décrire le processus de la préparation d'une éprouvette en argile :

— nous opérons d'abord à partir de l'argile en poudre, complètement desséchée, que nous plaçons

dans un cylindre perméable à l'eau. On porte le tout à 105° C dans une étuve, ensuite on met sous vide le cylindre rempli d'argile dans une cloche à vide où on introduit graduellement de l'eau dégazée. L'eau remonte par capillarité dans le sol et pendant toute cette opération le vide est maintenu. Enfin, on consolide l'échantillon ainsi saturé dans une cellule triaxiale.

## RÉSULTATS D'ESSAIS

Les sols essayés principalement ont été les suivants :

- argile de Provins;
- limon d'Orly;
- sable de Fontainebleau.

### a) Argile.

Par notre méthode de saturation nous avons toujours obtenu  $B = 1$  et  $A$  indiqué plus haut était égal à 0,5. Cette dernière valeur est constante depuis le début de l'essai jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

Si on porte sur l'ordonnée le rayon du cercle de MOHR et en abscisse  $1/2 (\sigma_1 + \sigma_2) - u$ , le point représentatif ainsi repéré correspond au sommet des cercles de MOHR. Si on suit le lieu géométrique de ce point (sommet des cercles de MOHR) pendant l'essai, on obtient des droites pratiquement verticales. Cette représentation est devenue d'ailleurs classique. Si on lie tous les points de rupture, c'est-à-dire les sommets des cercles de MOHR les plus grands, on obtient une droite faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe des  $X$ . On démontre facilement que  $\tan \alpha$  est égale à  $\sin \varphi'$ . Par ailleurs, en désignant par  $\beta$  l'angle que fait l'axe des  $X$  avec la droite joignant le point de départ de l'essai avec un point quelconque représentant le sommet du cercle de MOHR pour un instant déterminé au cours de l'essai, le coefficient  $A$ , à cet instant précis, peut être calculé d'après l'expression suivante :

$$A = 1/2 \left( 1 - \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

Cette formule n'est valable que si  $B = 1$ , c'est-à-dire pour un système à deux phases solide/liquide.

Quand  $A = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ , et quand  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $A = 0,5$ .

Ce dernier cas est celui des argiles de Provins dont les lieux géométriques des sommets des cercles de MOHR sont pratiquement des droites verticales.

### b) Limon d'Orly.

Nous avons reconduit les mêmes essais avec le limon d'Orly qui est beaucoup plus perméable que l'argile de Provins. La phase préparatoire reste identique à celle de l'argile. Pour ce matériau, le critère de rupture est difficile à apprécier; en effet, l'éprouvette continue à s'écraser sans cassure franche lorsque l'on fait croître la charge verticale, tandis que la pression interstitielle décroît régulièrement. Malgré cette difficulté apparente, la détermination de la résistance à la rupture est toutefois très facile, car sur la même représentation des graphiques que nous avons présentés plus haut, les points figuratifs des sommets des cercles de MOHR sont pratiquement sinon confondus, du moins asymptotiques à une droite qui est celle de COULOMB. La droite de COULOMB ainsi obtenue est l'enveloppe de tous les essais effectués sur un même sol malgré une dispersion apparente très grande des résultats.

En conclusion, pour le limon d'Orly,  $A$  ne semblerait pas être constant et la valeur de 0,86 que nous avons signalée est la valeur maximale pendant un essai.

### c) Sable de Fontainebleau.

$A$  est égal à 0,5 au début de l'essai puis tend vers zéro en cours d'essai et devient négatif si on poursuit l'essai continuellement.

Le même phénomène constaté pour le limon se reproduit avec le sable. Les courbes représentatives des sommets des cercles de MOHR sont asymptotiques à la droite de COULOMB nouvellement définie.

En conclusion, malgré la dispersion des essais, les résultats confirment d'une façon précise la loi de COULOMB-HVONSLÉV. Les sols peuvent être divisés en deux grandes catégories :

— la première catégorie de sols a une rupture franche et possède un coefficient  $A$  effectif constant depuis le début de l'essai jusqu'à la ruine de l'éprouvette;

— la seconde catégorie ne possède pas de rupture franche. Les éprouvettes se compriment

continuellement, mais malgré tout la droite de COULOMB reste unique, et dans ce cas particulier d'une seule éprouvette, on peut tracer la courbe intrinsèque; par contre, le coefficient A est essentiellement variable et il n'a pas de définition précise.

Notre exposé se limite à des systèmes à deux phases d'un sol entièrement saturé et consolidé isotropiquement. Les sols consolidés anisotropiquement donnent des résultats différents de ceux que nous venons de présenter.

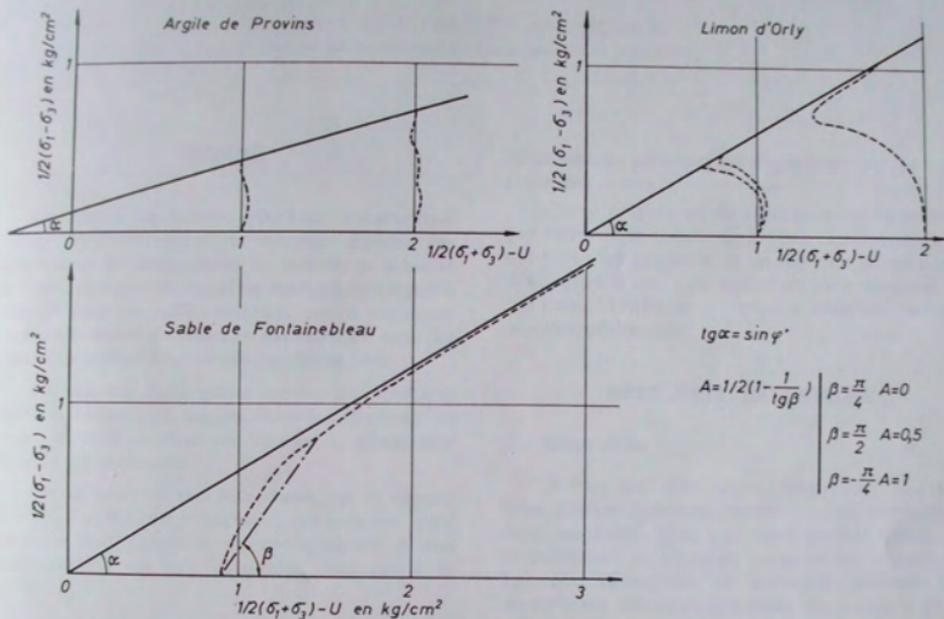


Fig. 1

# ESSAI D'INTERPRÉTATION VISCO-ÉLASTIQUE DU COMPORTEMENT DES SOLS SOUS CHARGEMENTS RÉPÉTÉS (1)

par J. VERSTRAETEN et J. ROMAIN

CENTRE DE RECHERCHES ROUTIÈRES, BRUXELLES (BELGIQUE)

## RÉSUMÉ

La théorie de la visco-élasticité linéaire rend compte qualitativement de certains aspects des phénomènes de déformation de massifs de sable et de limon, observés au cours de chargements répétés. Cette théorie ne suffit toutefois pas à expliquer quantitativement de manière satisfaisante tous les aspects du comportement des matériaux réels.

On examine dans quelle mesure les équations obtenues permettent, malgré leurs insuffisances, de rendre certains services en théorie du dimensionnement des chaussées.

Sur la base des résultats théoriques et expérimentaux acquis, de nouvelles hypothèses plus générales sont suggérées en vue d'aboutir à une représentation qui soit davantage conforme à la réalité.

## 1 INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans le cadre général des travaux exécutés au Centre de Recherches Routières en matière de dimensionnement des chaussées.

Elle a pour but de rechercher les hypothèses à formuler pour prévoir le comportement des massifs de sols lorsqu'ils subissent l'action des charges engendrées par les véhicules en circulation.

Les hypothèses qui sont généralement adoptées dans la mécanique des chaussées sont celles de la théorie classique de l'élasticité. Ces hypothèses sont toutefois insuffisantes pour rendre compte de certains phénomènes importants tels que ceux relatifs aux

déformations permanentes engendrées par la répétition des efforts.

On se propose ici de remplacer ces hypothèses par celles de la théorie de la visco-élasticité linéaire, qui sont plus générales, et de juger de la validité et des limites d'une telle opération en comparant les résultats théoriques à certains résultats obtenus expérimentalement.

## 2 RÉSULTATS THÉORIQUES

### 2,1 Généralités.

Alors que les corps élastiques, linéaires, homogènes et isotropes peuvent être caractérisés par deux constantes  $E$  et  $\nu$  appelées module d'élasticité et coefficient de Poisson, les corps visco-élastiques linéaires, homogènes et isotropes peuvent être caractérisés par deux fonctions du temps  $E(t)$  et  $\nu(t)$  appelées fonctions de relaxation.

Il résulte des travaux de J. MANDEL [1], [2] et de E. H. LEE [3] que la résolution des problèmes de visco-élasticité linéaire peut dans certains cas être considérablement simplifiée par l'utilisation du calcul symbolique. C'est ainsi que dans les problèmes où les forces d'inertie peuvent être négligées et où les conditions aux limites sont soit indépendantes du temps, soit exprimables sous la forme d'un produit de deux fonctions, l'une dépendant uniquement des coordonnées spatiales, l'autre dépendant uniquement du temps, la transformée de CARSON (2) de la solution

(2) On appelle transformée de Carson  $f^*(S)$  d'une fonction  $f(t)$ , l'expression :

$$f^*(S) = N \int_0^{\infty} f(t) e^{-St} dt.$$

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie, le 20 mai 1965.

cherchée peut s'obtenir très facilement. On pose un problème auxiliaire dont les données sont les mêmes que celles du problème réel à l'exception de la substitution de matériaux élastiques ( $E, \nu$  constants) aux matériaux visco-élastiques ( $E, \nu$  fonctions du temps). Il suffit alors de remplacer, dans la solution de ce problème auxiliaire, les constantes élastiques  $E$  et  $\nu$  par les transformées de CARSON des fonctions de relaxation  $E(t)$  et  $\nu(t)$  caractérisant réellement les corps, et de remplacer par sa transformée de CARSON la fonction du temps éventuellement introduite par les conditions aux limites. La transformation de MELLIN-FOURIER, transformation inverse de celle de CARSON, appliquée aux expressions ainsi obtenues, conduit à la solution des problèmes de visco-élasticité considérés.

Il résulte de ceci que la théorie de l'élasticité reste un outil mathématique important dans la résolution des problèmes de visco-élasticité.

## 2.2 Application au cas des massifs semi-infinis soumis à l'action de chargements répétés.

### 2.2.1 LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISÉS.

$E$ .....	Module d'élasticité d'un matériau élastique.
$E_j (j = 1, 2 \dots k-1)$	Modules d'élasticité des éléments du modèle (fig. 2).
$\nu$ .....	Coefficient de POISSON.
$E(t), \nu(t)$ .....	Fonctions de relaxation.
$p(t)$ .....	Charge, fonction du temps, appliquée au modèle.
$\lambda_j (j = 2 \dots k)$ .....	Coefficients de viscosité de TROUTON des éléments du modèle (fig. 2).

$$\tau_j = \frac{\lambda_j}{E_j}$$

$(j = 2, 3 \dots k-1)$ ..	Temps de retardation des cellules composant le modèle.
$e(t)$ .....	Déplacement vertical total.
$e_{m,n}$ .....	Déplacement vertical maximal au cours du $n^e$ cycle de chargement.
$e_{m,n}$ .....	Déplacement vertical minimal au cours du $n^e$ cycle de chargement.

$e_{r,n}$  .....

Déplacement vertical en retour au cours du  $n^e$  cycle de chargement.

$$C_j = \frac{K \alpha p_0}{E_j}$$

$$(j = 1, 2 \dots k-1).$$

$$C'_k = \frac{K \alpha p_0}{\lambda_k}$$

$$K = 2(1 - \nu^2).$$

$\Delta t$  .....

Intervalle de temps compté à partir du début du cycle en cours (fig. 1).

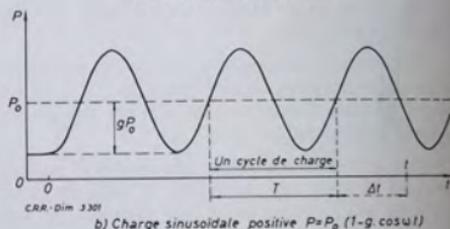
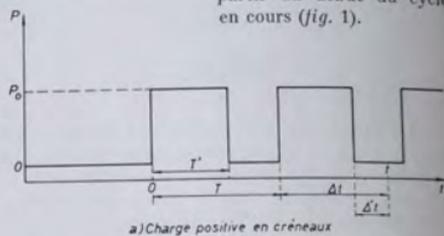


Fig. 1. — Modes de chargement périodique considérés

$\Delta t$ .....	Intervalle de temps compté, dans le cas d'une charge en créneaux, à partir de la suppression de la charge pendant le cycle en cours (fig. 1).
$g$ .....	Pour une sollicitation sinusoïdale positive, rapport de l'amplitude de la sollicitation à la valeur moyenne de celle-ci (fig. 1 b).
$\varphi_j (j = 2 \dots k-1)$ ..	Angle de phase de la réponse d'une cellule individuelle du modèle à une sollicitation sinusoïdale :

$$\operatorname{tg} \varphi_j = \omega \tau_j = \omega \lambda_j / E_j$$

$\varphi$  ..... Argument du module complexe  $E^+$  caractérisant le corps visco-élastique considéré.

$$D = \frac{K a p_0}{|E^+|}$$

$E^+$  ..... Module de YOUNG complexe du matériau, défini par :

$$\frac{\cos \varphi}{|E^+|} = \frac{1}{E_1} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\cos^2 \varphi_j}{E_j},$$

$$\frac{\sin \varphi}{|E^+|} = \sum_{j=2}^{k-1} \frac{\cos \varphi_j \sin \varphi_j}{E_j} + \frac{1}{\omega \lambda_k}$$

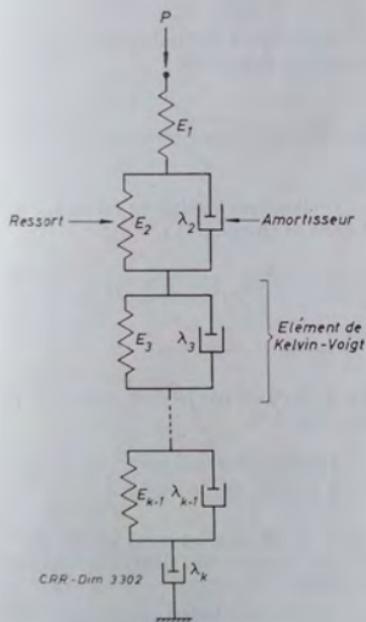


Fig. 2. — Modèle de BURGERS généralisé pour un système visco-élastique linéaire

## 2,22 HYPOTHÈSES.

Les massifs semi-infinis considérés sont supposés être :

— de masse négligeable (les forces d'inertie peuvent être ignorées);

— soumis à l'action d'une pression  $p(t)$ , uniformément répartie sur un cercle de rayon  $a$  de leur surface supérieure, qui est soit une fonction sinusoïdale positive du temps, soit une fonction positive du temps en forme de créneaux (fig. 1);

— visco-élastiques linéaires, homogènes et isotropes;

— de coefficient de POISSON invariable et représentés, en ce qui concerne les déplacements verticaux, par un modèle de BURGERS généralisé (fig. 2), c'est-à-dire caractérisés par des fonctions de relaxation  $\nu(t)$  et  $E(t)$  telles que  $\nu^*(N) = C^{te}$  et :

$$\frac{1}{E^*(N)} = \frac{1}{E_1} + \sum_{j=2}^{k-1} \frac{1}{E_j + N \lambda_j} + \frac{1}{N \lambda_k}, \quad (1)$$

où  $E_i$  et  $\lambda_i$  sont des constantes qui sont respectivement les modules d'élasticité et les coefficients de viscosité de TROUTON des éléments du modèle.

Dans l'expression (1) ci-dessus, le premier terme représente la contribution de l'élasticité instantanée, le deuxième terme celle de l'élasticité retardée et le troisième terme celle de la viscosité pure.

## 2,23 GRANDEURS CONSIDÉRÉES.

Les grandeurs considérées sont :

$e(t)$  : déplacement vertical en fonction du temps au centre de la surface chargée;

$e_{M,n}$  : valeur maximale de  $e(t)$  au cours du  $n^e$  cycle de chargement;

$e_{m,n}$  : valeur minimale de  $e(t)$  au cours du  $n^e$  cycle de chargement;

$e_{r,n}$  : déplacement vertical en retour au cours du  $n^e$  cycle de chargement :

$$(e_{r,n} = e_{M,n} - e_{m,n}).$$

Par cycle de chargement, il est entendu ici (fig. 1) l'intervalle de temps comprenant une période de mise sous charge suivie d'une période de décharge (dans le cas d'une charge en créneaux), ou l'intervalle de temps séparant deux passages successifs de la charge par sa valeur moyenne, dans le sens ascendant (dans le cas d'une charge sinusoïdale) (1).

(1) Ces choix des origines conventionnelles des  $n^e$  cycles de charge ont été faits de telle sorte que le minimum de déplacement au cours d'un cycle ait lieu après le maximum correspondant au même cycle, afin de donner un sens à la notion de déplacement en retour au cours d'un cycle.

Si les massifs étaient élastiques, l'expression du déplacement vertical serait donnée par :

$$e(t) = \frac{2(1-\nu^2)}{E} p(t) a \quad (\text{BOUSSINESQ [4]}) \quad (2)$$

Étant donné les hypothèses formulées, il résulte des considérations émises dans le paragraphe 2,1 que la transformée de CANSON  $e^*(N)$  du déplacement vertical  $e(t)$  est, dans le cas de massifs semi-infinis visco-élastiques, donnée par :

$$e^*(N) = K \frac{p^*(N)}{E^*(N)} \cdot a \quad (3)$$

où :

$$K = 2[1 - \nu^{*2}(N)] = C1^e.$$

La transformation de MELLIN-FOURIER, appliquée dans chaque cas à la relation (3), conduit aux résultats présentés ci-après.

Cas où  $p(t)$  est une fonction positive du temps en forme de crêteau (période :  $T$ ; durée d'une mise en charge :  $T'$ ), (fig. 1 a).

$$p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{pour } iT \leq t \leq iT + T', \\ 0 & \text{pour } iT + T' \leq t \leq (i+1)T \\ & \text{et pour } t < 0, \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n \dots).$$

La figure 3 a représente schématiquement la variation du déplacement vertical  $e(t)$  au cours du temps.

Les différentes grandeurs qui y apparaissent ont les valeurs suivantes (pour la signification des symboles voir section 2,21 et fig. 1 a) :

— déplacement vertical  $e(t)$  pendant la durée du maintien de la charge au cours du  $n^e$  cycle de chargement :

$$e_{n-}(t) = C_1 + \sum_{j=2}^{k-1} C_j \times \left\{ 1 + \left[ \frac{1 - e^{-\tau/\tau_j}}{1 - e^{-T/\tau_j}} (1 - e^{-nT/\tau_j}) - 1 \right] e^{\tau/\tau_j} e^{-\Delta t/\tau_j} \right\} + C'_k [T(n-1) + \Delta t]; \quad (4)$$

— déplacement vertical  $e(t)$  pendant l'absence de charge au cours du  $n^e$  cycle de chargement :

$$e_{n-}(t) = \sum_{j=2}^{k-1} C_j \frac{1 - e^{-\tau/\tau_j}}{1 - e^{-T/\tau_j}} (1 - e^{-nT/\tau_j}) e^{-\Delta t/\tau_j} + C'_k T' n; \quad (5)$$

— déplacement vertical maximal  $e_{m,n}$  au cours du  $n^e$  cycle de chargement :

$$e_{m,n} = C_1 + \sum_{j=2}^{k-1} C_j \frac{1 - e^{-\tau/\tau_j}}{1 - e^{-T/\tau_j}} (1 - e^{-nT/\tau_j}) + C'_k T' n; \quad (6)$$

— déplacement vertical minimal  $e_{m,n}$  au cours du  $n^e$  cycle de chargement :

$$e_{m,n} = \sum_{j=2}^{k-1} C_j \frac{1 - e^{-\tau/\tau_j}}{1 - e^{-T/\tau_j}} (1 - e^{-nT/\tau_j}) + C'_k T' n; \quad (7)$$

— déplacement vertical en retour  $e_{r,n}$  au cours du  $n^e$  cycle de chargement :

$$e_{r,n} = C_1 + \sum_{j=2}^{k-1} C_j \frac{(1 - e^{-\tau/\tau_j}) [1 - e^{-(T-\tau)\tau_j}]}{(1 - e^{-T/\tau_j})} \times (1 - e^{-nT/\tau_j}). \quad (8)$$

Cas où  $p(t)$  est une fonction sinusoidale positive du temps (fig. 1 b).

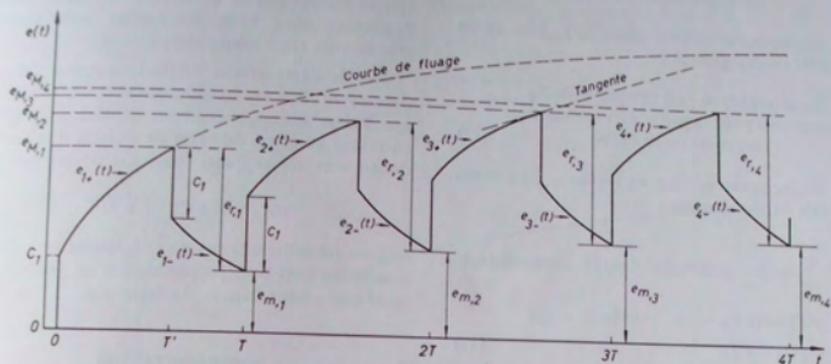
$$p(t) = \begin{cases} p_0 (1 - g \cos \omega t) & \text{pour } t \geq 0, (g \leq 1); \\ 0 & \text{pour } t < 0, \end{cases}$$

(Le facteur  $g$  est supposé assez proche de l'unité pour qu'il se produise une déformation en retour à chaque cycle.)

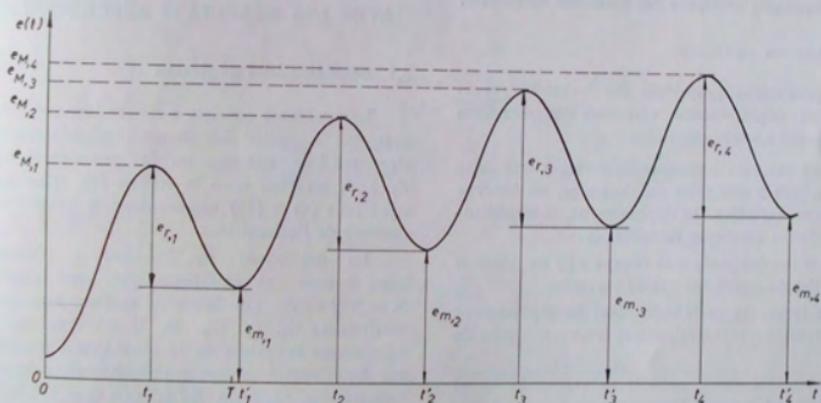
Les grandeurs calculées, représentées schématiquement sur la figure 3 b, ont les valeurs suivantes (pour la signification des symboles voir section 2,21 et fig. 1 b) :

— déplacement vertical  $e(t)$  :

$$e(t) = C_1 + \sum_{j=2}^{k-1} C_j [1 - (1 - g \cos^2 \varphi_j) e^{-t/\tau_j}] - gD \cos(\omega t - \varphi) + C'_k t; \quad (9)$$



a) Sollicitation en créneaux



C.R.R.-Dim 3 303

b) Sollicitation sinusoïdale positive

Fig. 3. — Allure générale du déplacement sous charge périodique dans le cas du modèle visco-élastique linéaire de la figure 2

— déplacement vertical maximal  $e_{m,n}$  au cours du  $n^{\text{e}}$  cycle de chargement :

Équation (9) où  $t$  est remplacé par  $t_n$ ,  
valeur de  $t$  pour laquelle  $e(t)$  est maximal  
au cours du  $n^{\text{e}}$  cycle; (10)

— déplacement vertical minimal  $e_{m,n}$  au cours du  $n^{\text{e}}$  cycle de chargement :

Équation (9) où  $t$  est remplacé par  $t'_n$ ,  
valeur de  $t$  pour laquelle  $e(t)$  est minimal  
au cours du  $n^{\text{e}}$  cycle; (11)

— déplacement vertical en retour  $e_{r,n}$  au cours du  $n^{\text{e}}$  cycle de chargement :

$$e_{r,n} = \sum_{j=2}^{k-1} C_j (1 - g \cos^2 \varphi_j) e^{-t'_n \tau_j} [1 - e^{-(t_n - t'_n) \tau_j}] + gD [\cos(\omega t'_n - \varphi) - \cos(\omega t_n - \varphi)] + C'_k (t_n - t'_n). \quad (12)$$

### 2,3 Conséquences pratiques des formules théoriques.

#### 2,31 CHARGE EN CRÊNEAUX.

Les principales propriétés des fonctions représentant les déplacements verticaux en fonction du temps sont les suivantes (fig. 3 a) :

— aux instants correspondant soit à une mise en charge, soit à une mise en décharge, on observe une brusque variation du déplacement, d'amplitude  $C_j$ ; c'est l'effet élastique instantané;

— aucune tangente à la courbe  $e(t)$  ne traverse cette courbe au cours des cycles suivants;

— la forme du cycle individuel du déplacement vertical tend asymptotiquement vers un cycle de régime;

— le déplacement vertical en retour au cours d'un cycle tend asymptotiquement en croissant vers une valeur correspondant au déplacement vertical en retour au cours du cycle de régime; il se stabilise donc à une valeur quasi constante donnée par :

$$e_{r,n} = C_1 + \sum_{j=2}^k C_j \frac{(1 - e^{-\tau/\tau_j}) [1 - e^{-(t - \tau)\tau_j}]}{1 - e^{-\tau/\tau_j}}; \quad (13)$$

— les différents types de déplacements verticaux considérés sont tous proportionnels au produit  $p_0 \cdot a$ .

Les principales propriétés des fonctions représentant les déplacements verticaux en fonction du temps sont les suivantes (fig. 3 b) :

— la présence dans l'expression de  $e(t)$  de termes transitoires et de termes de régime entraîne l'existence d'un cycle de régime vers lequel le mouvement tend asymptotiquement;

— le déplacement vertical en retour au cours d'un cycle tend asymptotiquement en croissant vers une valeur correspondant au déplacement vertical en retour au cours du cycle de régime; il se stabilise donc à une valeur quasi constante donnée par :

$$e_{r,n} = 2gD - C'_k T/2; \quad (14)$$

— les différents types de déplacements verticaux considérés sont tous proportionnels au produit  $p_0 \cdot a$  pour une valeur donnée du facteur  $g$ .

## 3

### CONFRONTATION DES RÉSULTATS THÉORIQUES AVEC LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

#### 3,1 Considérations générales.

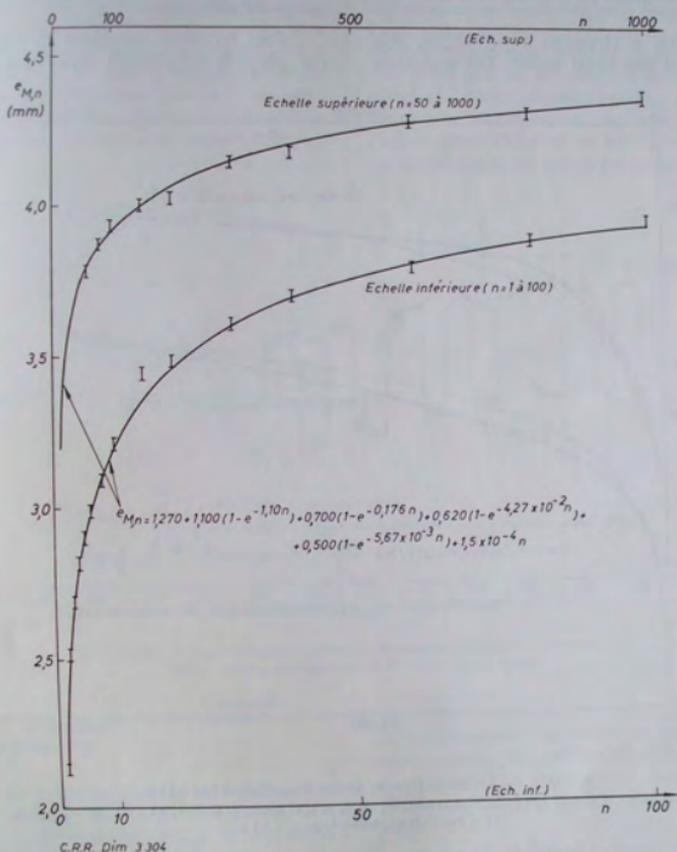
Le problème consiste à déterminer pour chaque matériau à partir des données expérimentales, si c'est possible, des valeurs des paramètres  $E_i$ ,  $\lambda_k$ ,  $E_j$ ,  $\lambda_j$ ,  $\nu$  figurant dans le modèle (1), telles que les équations (4) à (14) représentent le comportement observé de l'échantillon.

Le coefficient de Poisson  $\nu$  n'intervient dans toutes ces équations que par l'expression  $K = 2(1 - \nu^2)$ , qui figure en facteur dans tous les coefficients  $C_1$ ,  $C_j$ ,  $C'_k$ ,  $D$ . Il est donc exclu de déterminer la valeur de la constante  $\nu$  à partir de ces équations : on pourra seulement calculer les valeurs des rapports  $E_i/K$ ,  $\lambda_i/K$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Il sera toutefois aisé d'estimer ensuite les ordres de grandeur des modules  $E_i$  et  $\lambda_i$  en se rappelant que pour les sols essayés le coefficient de Poisson  $\nu$  semble voisin de 0,5 et que, par suite,  $K$  est de l'ordre de 1,5.

Comme il ressort des équations (4) à (14), le comportement du modèle choisi en fonction du temps dépend des variables sans dimensions  $t/\tau_j$ , c'est-à-dire des rapports du temps  $t$  aux temps de retardation  $\tau_j = \lambda_j/E_j$  des cellules individuelles qui

constituent le modèle. Pour une sollicitation de période donnée  $T$ , on peut distinguer des temps de retardation « courts » ( $\tau_j \ll T$ ) et des temps de retardation « longs » ( $\tau_j \gg T$ ).

de tels phénomènes sont le déplacement en retour  $\epsilon_{r,n}$ , la forme détaillée d'un cycle de déformation, la réponse à une mise en charge non instantanée. Par contre, les phénomènes à longue échéance (de



C.R.R. Dim 3304

Fig. 4. — Essai 6 M 115 (type a). Charge en créneaux ( $T = 4$  s;  $T' = 2,6$  s)

Sable de Noucelles :  $\phi = 61,8$  cm;  $p = 5,0$  kp/cm<sup>2</sup>;  $\gamma_s = 1,76$  t/m<sup>3</sup>;  $w = 13,3$  %  
( $I =$  résultats expérimentaux  $\pm 0,02$  mm)

Les phénomènes brefs (de durée inférieure à  $T$ ) dépendent essentiellement des termes à courts temps de retardation des équations correspondantes. (Les termes à longs temps de retardation restent quasi constants pendant de si courtes durées.) Des exemples

durées largement supérieures à  $T$ ; exemple : les déplacements cumulés  $\epsilon_{M,n}$  et  $\epsilon_{m,n}$ ) reflètent le comportement des termes à longs temps de retardation; pour de tels phénomènes, les termes à courts temps de retardation sont pratiquement stabilisés

à des valeurs proches de leurs valeurs asymptotiques et n'intervient donc que globalement par la somme de ces valeurs.

Les résultats d'expériences de chargements répétés dont nous avons pu disposer sont des types suivants [5]:

a) expériences à chargement périodique, soit en créneaux, soit sinusoïdal positif. Les grandeurs

avait pour consigne d'établir ou de supprimer la charge lorsque le déplacement variait de moins de 0,02 mm par minute (déplacement dit stabilisé). La figure 6 représente les résultats d'un tel essai. Ces expériences font intervenir partiellement les courts temps de retardation.

Tous les essais consistent en des chargements par plaques métalliques circulaires de différents

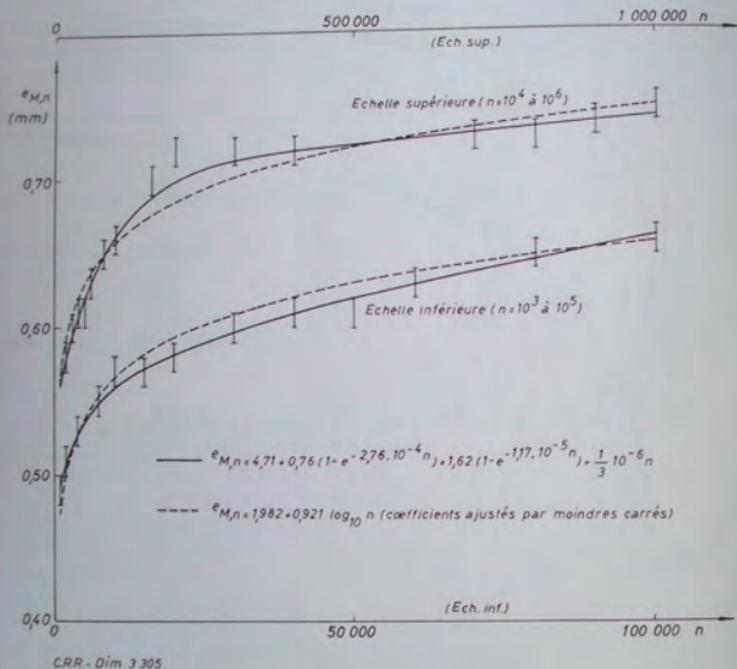


Fig. 5. — Essai G 26 (type a). Charge sinusoïdale ( $T = 0,12$  s)

Limon 4872 :  $\Phi = 43,7$  cm;  $p_{\max} = 0,54$  kp/cm<sup>2</sup>;  $p_{\min} = 0,27$  kp/cm<sup>2</sup>;  $\gamma_s = 1,721$  t/m<sup>2</sup>;  $w = 12,23$  %  
(l = résultats expérimentaux  $\pm 0,01$  mm)

mesurées ont été les déplacements cumulés maximaux ( $e_{M,n}$ ) et minimaux ( $e_{m,n}$ ) et donc leur différence  $e_{r,n}$ , après certains nombres de répétitions de charge. Des exemples de ce type de données sont illustrés aux figures 4 et 5. Ces expériences donnent accès aux longs temps de retardation;

b) des expériences à cycle variable, au cours desquelles les déplacements verticaux  $e(t)$  ont été notés à intervalles de temps imposés; l'opérateur

diamètres. Le déplacement vertical relatif cumulé à la surface sous le centre de la plaque va, en gros, de  $2 \cdot 10^{-4}$  à  $10^{-2}$  selon l'essai considéré.

Les chargements dits « en créneaux » n'ont naturellement pas pu être réalisés de façon rigoureuse; pratiquement, le temps nécessaire pour atteindre 95 % de la charge nominale a été de l'ordre du dixième de la période, la décharge étant un peu plus rapide. La perturbation ainsi introduite affecte

quasi exclusivement la réponse des termes à courts temps de retardation; elle n'a donc que peu d'importance pour les effets à longue échéance ( $\epsilon_{s,n}$ ,  $\epsilon_{m,n}$ ). Il n'en est pas de même, en principe, pour les phénomènes de courte durée (déplacement en retour et forme fine du cycle de déplacement); toutefois, on verra que les données d'expérience n'ont pas permis la détermination détaillée des termes à courts temps de retardation, de sorte que la progressivité de la mise en charge n'a pas constitué une gêne sérieuse dans l'analyse. De même, la sollicitation sinusoïdale a pu être approchée de façon largement suffisante.

en ce qui concerne les pressions, le domaine de linéarité dans lequel le modèle peut être utilisé. Ce domaine couvre les conditions réelles de sollicitations des sols sous les chaussées.

Comme il est prévu pour le modèle, le déplacement en retour observé tend à se stabiliser à une valeur limite caractérisant un cycle de régime. Cette stabilisation se produit en pratique après un très petit nombre de cycles. Comme les quelques premiers cycles expérimentaux présentent des anomalies attribuées à la mise en place de l'appareillage utilisé et du sol, la valeur de régime du déplacement en retour est la seule mesure digne

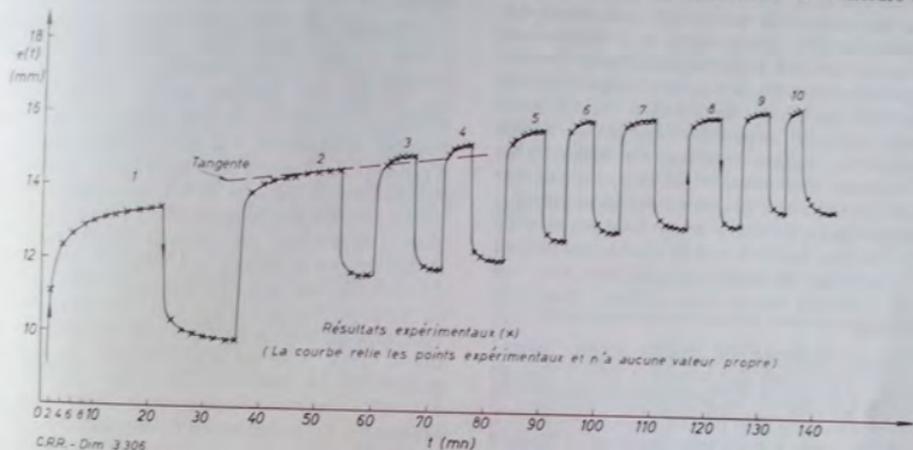


Fig. 6. — Essai H 2 (type b). Charge en créneaux (T moyen  $\approx$  10 mn)  
Limon sableux d'HEKELGEM;  $\Phi = 61$  cm;  $p = 1$  kp/cm<sup>2</sup>

### 3.2 Charge en créneaux.

Tous les essais de chargement en créneaux ont comporté la mesure des déplacements cumulés maximaux ( $\epsilon_{s,n}$ ) et minimaux ( $\epsilon_{m,n}$ ) et du déplacement en retour ( $\epsilon_{r,n}$ ). Dans le cas du modèle envisagé [éq. (6), (7) et (8)], ces trois types de déplacement sont proportionnels au produit  $p_0 \cdot a$ . Expérimentalement, cette proportionnalité est vérifiée dans le cas du déplacement en retour sur toute la gamme de pressions utilisées (jusqu'à 5 kp/cm<sup>2</sup>, mais seulement pour les faibles pressions (jusqu'à l'ordre de 1 kp/cm<sup>2</sup> pour le limon et 2 kp/cm<sup>2</sup> pour le sable) dans le cas des déplacements cumulés maximaux et minimaux. Ainsi se trouve délimité,

de confiance que l'on puisse obtenir pour ce type de déplacement. On doit donc se borner à conclure, à ce sujet, à un accord qualitatif entre le comportement du modèle et celui du matériau réel.

Les déplacements cumulés maximaux et minimaux sont équivalents du point de vue de la confrontation entre théorie et expérience, puisqu'ils ont une différence pratiquement constante. Il suffit donc d'analyser l'un d'eux, soit  $\epsilon_{s,n}$ . Son expression analytique (6), où le nombre  $n$  de répétitions est la variable, se présente comme un développement en série d'exponentielles complété par un terme linéaire éventuel, avec des coefficients  $C_1$ ,  $C_j$ ,  $C'_k$  tous positifs. Il est possible de déterminer des valeurs

approchées des paramètres  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C'_k$ ,  $\tau_j$  telles que le développement (6) s'adapte de façon très satisfaisante aux résultats expérimentaux. La courbe de la figure 4 illustre sur un exemple le résultat de ce travail. On a traité de cette façon une quinzaine d'essais relatifs à diverses situations expérimentales (sable ou limon; poids spécifique sec et teneur en eau variables; diamètres de plaques différents; pressions  $p_0$  différentes; chargements avec ou sans precharges); aucun n'a suscité de difficultés quant à la représentation des déplacements maximaux par un développement du type (6).

Pour éprouver la cohérence du modèle, on peut utiliser les valeurs des paramètres visco-élastiques, ainsi déduites de la confrontation du développement (6) avec les données expérimentales, pour estimer, d'après l'expression (8), la valeur correspondante du déplacement en retour. Le calcul a été fait pour plusieurs essais, et donne des résultats de l'ordre du double des valeurs mesurées. Ce désaccord ne peut toutefois être considéré comme critique, car on doit s'attendre à ce que les valeurs ainsi calculées des déplacements en retour soient trop grandes, du fait que les plus faibles temps de retardation ne sont pas connus et que les termes correspondants sont tous groupés et traités comme donnant lieu à l'élasticité instantanée.

Des phénomènes de courte durée, faisant intervenir l'évolution des termes à bref temps de retardation du modèle, ne peuvent être étudiés qu'à partir des essais du type (b) cité dans la section 3,1, à savoir les essais à cycle irrégulier dont la figure 6 présente un exemple. Les essais exploités ne peuvent malheureusement pas fournir de résultats quantitatifs détaillés, pour les raisons suivantes. D'une part, l'irrégularité du cycle de charge interdit d'appliquer en toute rigueur des formules établies dans le cas d'une charge périodique; tout au plus peut-on établir des estimations à partir d'une valeur moyenne de la durée du cycle. D'autre part, les déplacements n'ont pas été enregistrés continûment, mais mesurés à intervalles de deux minutes; les éléments du modèle correspondant aux plus courts temps de retardation ont, de ce fait, déjà subi la majeure partie de leur évolution au moment de la première mesure de chaque cycle et échappent ainsi à l'analyse. Il n'est, par exemple, pas possible de contrôler l'existence effective d'un terme d'élasticité instantanée (première propriété de la section 2,31). Néanmoins, des conclusions qualitatives importantes peuvent être tirées de l'analyse de données telles que celles de la figure 6.

Tout d'abord, on voit sur cette figure que, contrairement à la deuxième propriété du modèle théorique (section 2,31), les tangentes à la courbe représentant le déplacement sous charge, aux instants proches de la décharge, traversent la courbe représentant les cycles suivants. Tout se passe comme si, chaque fois que la charge est supprimée et qu'il se produit un déplacement en retour, le matériau subissait une modification lui permettant un déplacement supplémentaire au cycle suivant. Cet effet se manifeste sur la figure 6 par un glissement, l'un par rapport à l'autre, des courbes représentant les différents cycles.

D'autre part, on peut essayer de considérer comme complémentaires les informations partielles fournies par l'évolution du déplacement maximal  $\epsilon_{M,n}$  et par les quelques points expérimentaux relevés au cours de chaque cycle; les premières données permettent, d'après l'expression (6), d'estimer des temps de retardation égaux ou supérieurs à la période  $T$ , les deuxième données conduisent, d'après les expressions (4) ou (5), à une évaluation grossière des temps de retardation égaux ou inférieurs à la période  $T$ . L'existence d'une plage de recouvrement entre les domaines explorés doit, en principe, permettre un certain contrôle de la cohérence du modèle appliqué aux matériaux réels. On a ainsi constaté l'impossibilité de choisir globalement les paramètres du modèle (1) de façon à rendre compte simultanément, de manière acceptable, de la forme des demi-cycles individuels et de l'évolution des déplacements  $\epsilon_{M,n}$  et  $\epsilon_{m,n}$ . On n'a pas pu mettre en accord les formes des demi-cycles de charge et des demi-cycles de décharge, et les déplacements maximaux prévus par le modèle visco-élastique à partir de l'analyse des demi-cycles individuels sont de loin inférieurs aux maximums observés (par exemple, dans un rapport de 9 à 1 après 20 cycles pour l'essai illustré à la figure 6): une fois de plus tout se passe comme si la répétition de la mise en charge provoquait des déplacements supplémentaires étrangers au comportement visco-élastique linéaire. Ces déplacements supplémentaires pourraient même constituer la plus grosse partie des effets observés en ce qui concerne le déplacement maximal  $\epsilon_{M,n}$ .

Les désaccords notés dans les deux derniers alinéas ci-dessus ont été constatés dans nombre d'expériences du même type que celle illustrée à la figure 6.

### 3.3 Charge sinusoïdale positive.

Les essais à charge sinusoïdale positive ont été faits à plus courte période que les essais à charge en crêneau ( $T = 0,25$  ou  $0,125$  s au lieu de 4 s) et ont comporté un plus grand nombre de répétitions de charge que ces derniers ( $10^6$  au lieu de  $10^9$ ). De plus, les mesures de déplacements maximaux, minimaux et en retour n'ont été faites qu'à partir du millièmes cycle. Il en résulte que l'exploitation des mesures de déplacement maximal ne donnera accès qu'à des temps de retardation relativement plus grands (par rapport à la période) que dans le cas des charges en crêneau. Par suite, si l'on estime les paramètres du modèle à partir des valeurs mesurées de  $\epsilon_{M,n}$  et si l'on s'en sert comme précédemment pour calculer une prévision du déplacement en retour, il faut s'attendre à ce qu'une fraction des éléments du modèle, plus notable que dans le cas des charges en crêneau, soit indûment assimilée à des éléments à élasticité instantanée; ceci a pour effet d'accroître, plus que pour les charges en crêneau, la valeur prévue. Effectivement, on constate que la valeur ainsi calculée pour le déplacement en retour dépasse plus sensiblement la valeur observée que dans le cas des charges en crêneau. Elle la dépasse même tellement (jusqu'à 15 fois la valeur mesurée) qu'on est en droit de se demander si la méconnaissance du caractère retardé d'une partie de l'élasticité du modèle suffit à rendre compte de la différence.

Cette question se pose d'autant plus que si, à partir des mêmes valeurs estimées des paramètres du modèle, on calcule une prévision pour le déplacement élastique total (somme des déplacements élastiques, instantanés ou retardés, des divers éléments du modèle), on obtient pour les essais à charge sinusoïdale des résultats de l'ordre de dix fois plus grands que ceux relatifs aux essais à charges en crêneau. Il semble douteux que cette différence soit complètement explicable par le fait que la borne inférieure des temps de retardation accessibles à partir des résultats expérimentaux est plus basse dans le cas des essais avec charges en crêneau. Il se pourrait qu'une partie de l'explication se trouve de nouveau dans l'existence de tassements supplémentaires étrangers au modèle visco-élastique linéaire.

Comme dans le cas des charges en crêneau, l'examen des déplacements en retour observés n'apporte rien de plus que la constatation d'un accord qualitatif avec la prévision, déduite du modèle, d'une tendance à la stabilisation à une valeur quasi

constante. Cette stabilisation est déjà acquise lors de la première mesure (1 000<sup>e</sup> cycle), de sorte qu'il n'est pas possible de se servir du déplacement en retour pour estimer certains des courts temps de retardation.

Une remarque s'impose à propos de l'estimation des paramètres du modèle à partir des résultats expérimentaux pour  $\epsilon_{M,n}$ , telle qu'illustrée à la figure 5. L'équation (10), qui doit être utilisée à ce sujet, a une structure fort complexe car les inconnues  $\tau_j$  figurent implicitement dans  $\tau_j$  et dans  $t_n$ . Mais l'inévitable limitation aux grands temps de retardation vient ici à point : ceux qu'il est possible de déterminer à partir des résultats disponibles sont assez grands pour que dans (10) les  $\cos \tau_j$  puissent être négligés devant l'unité et que  $\cos(\omega t_n - \tau_j)$  se réduise pratiquement à une constante. Le développement (10) prend alors la forme d'une série d'exponentielles complétée par un terme linéaire, comme dans le cas des charges en crêneau et, comme dans ce cas, on n'a rencontré aucune difficulté à l'adapter aux données expérimentales. C'est une telle forme de développement qui est illustrée à la figure 5.

### 3.4 Remarques communes aux deux types de charges.

On utilise souvent (réf. [5] entre autres), pour représenter la relation entre déplacement maximal  $\epsilon_{M,n}$  et nombre  $n$  de répétitions, une loi empirique de la forme :

$$\epsilon_{M,n} = \epsilon_{M,1} + \beta \log n. \quad (15)$$

Il est bien connu que pareille « loi » représente excellentement certains essais, mais s'écarte notablement des valeurs expérimentales obtenues dans d'autres essais, sans que l'on ait pu établir un critère de validité de la relation. Nous avons constaté que chaque fois qu'une loi logarithmique du type (15) pouvait être adaptée aux données d'un essai, le développement en série d'exponentielles utilisé ici [(éq. (6), ou (10) simplifiée)] convenait au moins aussi bien; un exemple en est donné à la figure 5, où des courbes des deux types sont superposées aux données. En outre, dans des cas, comme celui de la figure 4, où une loi logarithmique n'est pas utilisable, le développement en série d'exponentielles à coefficients négatifs reste valable. Il faut en conclure que les développements du type (6) ou (10) ne s'opposent pas à une loi logarithmique mais, au contraire, la généralisent en augmentant le nombre

de paramètres disponibles et en donnant un sens à ces paramètres dans le cadre d'un modèle.

Enfin, on ne perdra pas de vue que des développements numériques tels que ceux figurant sur les figures 4 et 5 sont des approximations et n'ont qu'une valeur globale, illustrée par la courbe représentative. Il ne peut être question de tirer une conclusion quelconque de la comparaison de coefficients individuels : ceux-ci ne se rapportent qu'à des éléments d'un modèle et n'ont pas, individuellement, de signification physique pour le matériau réel.

## CONCLUSIONS

Le comportement calculé du modèle visco-élastique linéaire choisi (défini par le modèle de la figure 2 et par l'usage du principe de superposition de BOLTZMANN) et le comportement observé des sols essayés présentent des analogies qualitatives, mais aussi des désaccords caractérisés. Les points d'accord concernent l'allure générale des courbes traduisant les déplacements maximaux, l'allure générale des courbes représentant les demi-cycles de charge ou de décharge, la quasi-constance du déplacement en retour à partir d'un certain nombre de cycles, et le fait que, pour les pressions rencontrées sous une chaussée et pour les diamètres de plaques utilisés, les déplacements peuvent être considérés comme proportionnels au produit  $p_0 \cdot a$  (produit du rayon de la plaque de chargement par la pression maximale ou moyenne appliquée). Les points de désaccord concernent la forme détaillée des cycles charge-décharge et les relations entre les déplacements à brève échéance (au cours d'un cycle) et à longue échéance (effets cumulés). Sables et limous ne se distinguent pas dans cette comparaison.

Parmi les points de désaccord, le plus frappant et le plus facile à concevoir est en même temps le plus lourd de conséquences dans le dimensionnement pratique des chaussées. Il s'agit de l'évolution des déplacements cumulés maximaux au cours des répétitions de charge; rappelons que l'on a trouvé (section 3,2) un rapport de l'ordre de 9 à 1, après 20 cycles, entre résultats expérimentaux et prévisions théoriques basées sur les données tirées d'un cycle unique. Ce désaccord se comprend facilement si l'on considère que le comportement expérimental des sols sous chargements répétés comporte un tassement irréversible limité par une stabilisation

apparemment asymptotique, tandis que le modèle visco-élastique linéaire implique soit un fluage linéaire illimité (si le modèle de la figure 2 comporte un amortisseur libre), soit un retour élastique retardé complet en cas de suppression de la charge (si le modèle de la figure 2 ne comporte pas d'amortisseur libre).

En présence de ces constatations, on peut adopter deux attitudes, qui ne sont d'ailleurs pas irréductibles, selon que l'on recherche un critère empirique provisoire applicable au dimensionnement des chaussées ou que l'on désire comprendre physiquement le comportement d'un sol sous charges répétées.

L'attitude empirique consiste à reconnaître que l'on ne peut prétendre prévoir le comportement d'un sol sous l'effet de charges répétées en se basant sur des mesures effectuées dans le cas d'une mise en charge unique ou d'un petit nombre de cycles de charge. Mais on peut essayer de mettre au point un essai de chargements répétés qui soit à la fois reproductible et représentatif des conditions subies par le sol sous une chaussée. Pareil essai permettrait de prévoir directement, en fonction du nombre de répétitions, les déplacements cumulés sous l'effet de la circulation : il s'agirait de déterminer, à partir d'un certain nombre de points de mesure, des courbes telles que celles des figures 4 et 5 sans se soucier de la forme des cycles individuels de déplacement. Pour l'ingénieur qui procéderait ainsi, l'absence de cohérence théorique entre l'évolution des déplacements cumulés maximaux et la forme des cycles individuels de déplacement est sans importance si cette dernière peut être ignorée dans les calculs de dimensionnement. Bien entendu, il ne peut être question d'extrapoler sur un intervalle appréciable les résultats d'un essai de chargements répétés, c'est-à-dire de prolonger une courbe calculée, telle que celles des figures 4 et 5, pour des nombres de répétitions de charge exagérément supérieurs aux nombres effectivement réalisés au cours de l'essai.

Sur le plan pratique, la méthode décrite dans l'alinéa précédent revient à dissocier, dans le dimensionnement des chaussées, l'évaluation *a priori* des tassements permanents du sol, estimés empiriquement à partir d'un essai de chargements répétés, et celle de la distribution des contraintes qui prennent naissance à chaque application de la charge. Pour cette dernière, des études sont en cours au Centre de Recherches Routières, en vue de déterminer dans quelle mesure les propriétés élastiques seules ou les propriétés visco-élastiques linéaires (fig. 2)

permettraient d'approcher cette distribution de contraintes de façon suffisamment réaliste.

Il est possible que cette dissociation puisse conduire à des résultats pratiquement utilisables, du moins provisoirement, dans le dimensionnement des chaussures; mais cette voie ne peut être considérée comme définitivement satisfaisante. En effet, une compréhension réelle des phénomènes n'est pas atteinte, puisque le modèle linéaire tombe en défaut dès qu'il s'agit de prédictions quantitatives cohérentes pourtant sur de nombreux cycles (sauf, peut-être, en ce qui concerne le déplacement en retour, qui pourrait bien être, pour les matériaux considérés, le seul effet-type incarnant l'élasticité retardée à l'état pur). Ce modèle est donc trop grossier pour pouvoir être accepté tel quel, mais il est raisonnable de l'utiliser comme tremplin en cherchant à l'affiner. Le cadre théorique étant, rappelons-le, défini par le modèle de la figure 2 et l'utilisation du principe de superposition de BOLTZMANN, c'est sur l'une de ces deux hypothèses de base que devra porter la modification.

L'abandon ou la transformation du principe de BOLTZMANN n'aurait rien d'incongru puisqu'on a affaire, ici, à des déformations finies qui peuvent devenir importantes : il s'agit de substituer au formalisme linéaire, approprié au cas de déformations infinitésimales, une théorie plus générale des déformations finies.

Quant à la modification du modèle illustré à la figure 2, on peut l'envisager selon deux méthodes. D'une part, on peut chercher à représenter les faits expérimentaux par la superposition de deux types de déformations provisoirement indépendantes : la déformation décrite par le modèle visco-élastique linéaire et une déformation irréversible supplémentaire; cette dernière, à introduire d'abord de façon phénoménologique, pourrait être rapprochée d'un modèle à frotteurs secs ou à rochets. D'autre part, on peut attribuer un caractère variable (au cours des répétitions de charge) aux paramètres du modèle visco-élastique.

Quoique leurs mises en œuvre requièrent des techniques bien distinctes, ces deux voies d'approche (abandon du principe de BOLTZMANN ou modification du modèle) ne sont pas nécessairement foncièrement différentes sur le plan physique : la première met en œuvre un formalisme non linéaire portant sur un modèle continu, tandis que la seconde traite linéairement un modèle comportant un élément de discontinuité (élément rhéologique à fonctionnement

discontinu comme le frotteur sec, ou altération des propriétés physiques à chaque répétition de charge), mais rien n'impose *a priori* de préférer l'un ou l'autre procédé pour arriver à la description des phénomènes réels. Un exemple est fourni par le cas du ressort non linéaire, qui peut être approché par une suite de ressorts linéaires et de butées. Les deux méthodes méritent d'être explorées. Il est probable que leur relation mutuelle deviendra claire lorsque le phénomène physique sera bien compris. En attendant, le choix du procédé qui permettra de faire le premier pas vers cette compréhension reste avant tout affaire de commodité ou de préférence personnelle.

## REMERCIEMENTS

Nous remercions particulièrement M. P. OUTER, Dr Sc., Directeur du Centre de Recherches Routières, pour les discussions fructueuses que nous avons eues avec lui.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture (I.R.S.I.A.) pour l'aide financière qu'il nous a apportée dans l'exécution de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDEL. — *Sur les corps visco-élastiques à comportement linéaire*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, **241**, 1910-1920, Paris (1955).
- [2] J. MANDEL. — *Application du calcul symbolique à l'étude des corps visco-élastiques*. Chap. 5 du livre : B. PERSOZ, *Introduction à l'étude de la rhéologie*, Dunod, Paris (1960).
- [3] E. H. LEE. — *Stress Analysis for Viscoelastic Materials*. Conference on the Properties of Materials at High Rates of Strain, sponsored by the Institution of Mechanical Engineers, Westminster, 1957, Session 4, Paper 4.
- [4] V. J. BOUSSINESQ. — *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse*. Gauthier-Villars, Paris (1885).
- [5] J. REICHERT. — *Influence de la répétition des charges sur la déformabilité des couches de chaussures*. Comptes rendus du 5<sup>e</sup> Congrès International de Mécanique des Sols et Travaux de Fondations, 293-301, Dunod, Paris (1961).