

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES
DU SEDOCAR

GRUPE FRANÇAIS de RHÉOLOGIE

Bibliothèque

Cahiers
du
Groupe Français de Rhéologie

N° 1 - Tome I

Septembre 1965

ÉDITÉ

PAR LE SERVICE DE DOCUMENTATION SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
DE L'ARMEMENT

MAGASIN DE VENTE : 2, AVENUE DÉ LA PORTE-D'ISSY, PARIS (15^e)

1965

N° 1

SOMMAIRE

	PAGES
J. MANDEL. — Avant-propos	1
J. LECLERC. — Modèle de Bingham généralisé et rhéologie des métaux usuels	3
J. MANDEL. — Énergie élastique et travail dissipé dans les modèles	9
H. D. BUI. — Dissipation d'énergie dans une déformation plastique	15
B. NAYROLES. — Possibilités théoriques de simulation analogique discrète du mouvement des structures élastoplastiques	21
F. SCHLOSSER. — Étude expérimentale du domaine élastique d'un milieu pulvérulent.....	25

AVANT-PROPOS

La publication des Cahiers du Groupe Français d'Études de Rhéologie a été interrompue, en 1961, au moment où cette collection commençait à être connue et appréciée en France et à l'étranger. Cette disparition a été unanimement regrettée, mais ce n'était qu'une éclipse provisoire.

Constitué en association depuis juillet 1964, le Groupe Français de Rhéologie a la possibilité, grâce à l'appui bienveillant du Service de Documentation Scientifique et Technique de l'Armement, de faire paraître à nouveau les Cahiers sous une forme à peine différente de l'ancienne. La nouvelle série portera le nom de Cahiers du Groupe Français de Rhéologie. Ainsi se manifestera la vitalité du Groupe et la continuité de ses recherches. Tel n'est pas cependant notre véritable objectif.

L'originalité de la Rhéologie est dans sa diversité. Non seulement ses applications intéressent des secteurs aussi distants les uns des autres que la métallurgie, l'industrie du pétrole et la fabrication des peintures par exemple, mais encore les études rhéologiques font appel à des chercheurs de tendances et d'origines très différentes : physiciens, chimistes, biologistes, mécaniciens, etc. Nous formulons le souhait que les Cahiers permettent aux uns et aux autres de se comprendre et de s'apprécier mutuellement, et que du rapprochement de leurs points de vue jaillissent de nouveaux progrès de la science rhéologique et de ses applications.

J. MANDEL,

Président du Groupe Français de Rhéologie.

MODÈLE DE BINGHAM GÉNÉRALISÉ ET RHÉOLOGIE DES MÉTAUX USUELS (1)

par J. LECLERC

Ingénieur de Recherches à l'ONERA

INTRODUCTION

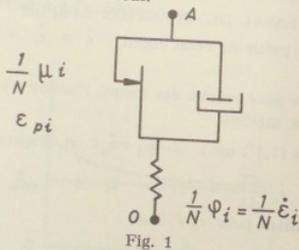
Les analogies de comportements d'une éprouvette cylindrique soumise à des efforts axiaux, et du modèle de Bingham que nous généralisons tout en conservant sa simplicité, s'étendent qualitativement, comme nous le montrerons, à tous les essais axiaux fondamentaux.

Le succès de ce modèle dans les principaux tests, allié à la simplicité de sa définition, en fait l'intérêt. Ces résultats incitent tout naturellement à le perfectionner, sans trop le dénaturer, pour améliorer encore la qualité des analogies.

Nous montrerons plus précisément, après avoir défini le modèle de Bingham généralisé, que l'écrouissage, l'hystérésis dû aux contraintes résiduelles, et en particulier l'effet Bauschinger, d'une part, le comportement viscoplastique et les lois de fluage d'autre part, peuvent être interprétés honorablement par ce modèle simplement défini, comme nous allons le voir, par une fonction caractéristique et une constante.

DÉFINITION DU MODÈLE DE BINGHAM

Nous appelons « modèle élémentaire » de Bingham le modèle représenté ci-dessous.



(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie le 19 novembre 1964.

Ce modèle est constitué d'un ressort de raideur prise égale à $\frac{1}{N}$, N désignant le nombre de modèles élémentaires contenus dans le modèle de Bingham proprement dit; en série avec le ressort et en parallèle l'un vis-à-vis de l'autre, un dash-pot et un patin. Nous désignons par ϵ_{pi} le déplacement du piston par rapport au cylindre; ϵ_{pi} est compté positivement de O vers A (fig. 1) de même que le déplacement ϵ de A, attache mobile du système, l'autre attache O, étant fixe. On désigne par $\frac{\sigma_i}{N}$ la force s'exerçant sur le piston; elle est par hypothèse proportionnelle à $\frac{\dot{\epsilon}_{pi}}{N}$, le facteur de proportionnalité est choisi égal à 1. Le patin dont la vitesse de glissement est aussi égale à $\dot{\epsilon}_{pi}$ exerce sur l'extrémité libre du ressort une force constante égale à $\frac{\mu_i}{N}$, caractéristique de ce patin, et du signe de $\dot{\epsilon}_{pi}$. La tension du ressort est en valeur absolue égale au moins à $\frac{\mu_i}{N}$ s'il y a glissement. Si cette tension a une valeur absolue inférieure, le patin entraîne le blocage du système patin-dash-pot.

N.B. — Le choix de l'unité pour la raideur du modèle complet et pour la constante de chaque dash-pot est loisible quelles que soient cette raideur et cette constante d'amortissement (choisie égale), avec des unités convenables de temps et de force (ou de longueur) ce choix ne se justifie que par la simplicité des formules définissant le comportement.

La mise en parallèle d'une suite discrète de N modèles élémentaires ne différant que par les grandeurs μ_i constitue le modèle de Bingham proprement dit. Rien n'empêche de ranger les modèles élémentaires suivant des valeurs non décroissantes de μ_i . Soit $n(\mu_i)$ le nombre de modèles élémentaires de même valeur μ_i et posons : $n(\mu) = n(\mu_i)$ pour $\mu_i \ll \mu < \mu_{i+1}$ et $\Theta(\mu) = \frac{n(\mu)}{N}$ avec $N = \sum n(\mu_i)$. La fonction $\Theta(\mu)$ définit l'histogramme de distribution des μ_i .

Nous appelons modèle de Bingham généralisé la limite du modèle discret lorsque $\Theta(\mu)$ devient une fonction

continue, non nulle dans l'intervalle (μ_1, μ_2) . On introduira la fonction $\theta(\lambda) = \sum_1 \Theta(\mu_1)$. Ce sera une fonction continue dans le modèle généralisé.

Pour établir une comparaison des comportements d'une éprouvette cylindrique de métal usuel et du modèle de Bingham généralisé, nous faisons correspondre par égalité :

a) l'effort total T appliqué (positif de O vers A), au quotient $\frac{\sigma}{E}$ de la contrainte axiale nominale $\sigma = \frac{P}{S_0}$ dans l'éprouvette (de section initiale S_0) et du module d'élasticité E ;

b) l'allongement commun à tous les modèles élémentaires à l'allongement relatif ϵ de l'éprouvette.

N.B. — On notera qu'une telle schématisation ne donne aucune image de la contraction de Poisson ;

c) la plus petite valeur μ_1 de l'intervalle des valeurs de μ pour lesquelles $\theta \neq 0$, à l'allongement correspondant à la limite élastique (relative à l'état recuit de l'éprouvette).

$$\text{Donc : } \mu_1 = \frac{(\sigma) \text{ lim. élast.}}{E}$$

d) la plus grande valeur μ_2 de l'intervalle précédent, à l'allongement lors de l'entrée dans la zone de fluage secondaire.

Enfin, il est essentiel de supposer que l'état neutre du modèle dans lequel toutes les tensions des ressorts sont nulles, correspond à l'état recuit de l'éprouvette.

Nous allons maintenant établir les relations existant entre les grandeurs précédemment introduites, lorsqu'on suppose que l'état initial est l'état neutre et que T a un signe constant. Les forces d'inertie ne seront pas prises en compte dans le modèle. On comparera ensuite les comportements dans les trois essais axiaux fondamentaux :

1. Essai de traction simple à vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = \text{Cte}$.

2. Essai de relaxation dans lequel la déformation ϵ est bloquée $\dot{\epsilon} = \text{Cte}$.

3. Essai de fluage à contrainte $\sigma = \text{Cte}$.

RELATIONS FONDAMENTALES

Soit $\lambda(t)$ la plus grande valeur de μ_1 concernée à l'instant t par un glissement du patin dans une évolution $\epsilon(t)$ monotone.

Soit $t(\lambda)$ la fonction inverse de $\lambda(t)$. ϵ étant la somme de l'allongement du ressort et du glissement ϵ_{pl} pour le modèle caractérisé par $\mu_1 < \lambda(t)$, on a :

$$(1,1) \quad \epsilon = \int_{t(\mu_1)}^t \varphi(\mu_1, t) dt + N \left[\frac{\varphi(\mu_1, t)}{N} + \mu_1 \right]$$

Les glissements naissants se feront sans chocs, de sorte que $\varphi(\lambda(t), t) = 0$ d'où il résulte :

$$(1,1') \quad \dot{\epsilon} = \lambda(t)$$

et par conséquent :

$$(1,1'') \quad \dot{\epsilon} = \dot{\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mu_1, t) + \varphi(\mu_1, t)$$

pour $\mu_1 < \lambda(t)$.

Exprimons, d'autre part, que T est égale à la somme des efforts appliqués aux modèles glissants $[\mu_1 < \lambda(t)]$ et des tensions des ressorts des modèles bloqués $[\mu_1 > \lambda(t)]$.

$$(1,2) \quad T = \sum_1 \left[\frac{1}{N} \varphi(\mu_1, t) + \frac{1}{N} \mu_1 \right] n(\mu_1) + \frac{1}{N} \lambda \sum_1 n(\mu_1)$$

$\mu_1 < \lambda$ $\mu_1 > \lambda$

ou :

$$(1,2') \quad T = \int_0^\theta [\varphi(\theta, t) + \lambda(\theta)] d\theta + \lambda [1 - \theta]$$

Cette formule conserve un sens pour le classique modèle de Bingham, l'intégrale étant alors prise au sens de Stieltjes. Intégrons par parties et posons : $Q(\lambda) = \int_0^\lambda [1 - \theta(\mu)] d\mu$;

$$\text{il vient : } (1,3) \quad T = Q(\lambda) + \int_0^\theta \varphi(\theta, t) d\theta$$

avec la définition : $\varphi(\theta_1, t) = \varphi(\mu_1, t)$

et : $\varphi(0, t) = 0$.

En dérivant par rapport au temps et en combinant avec (1,3) il vient la formule fondamentale :

$$(1,4) \quad T = Q(\lambda) + \dot{\lambda} - \frac{dT}{dt}$$

ESSAI DE TRACTION SIMPLE

(à partir de l'état recuit) $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 = \text{Cte}$

Prenons pour origine des temps, l'instant où la limite élastique est atteinte.

D'après (1,1') on a $\lambda - \mu_1 = \dot{\epsilon}_0 t$ et d'après (1,4) :

$$(1,4') \quad \dot{\epsilon}_0 \frac{dT}{d\lambda} + T = Q(\lambda) + \dot{\epsilon}_0$$

dont la solution pour $\dot{\epsilon}_0 \neq 0$ est :

$$(2,1) \quad T(\lambda) - \mu_1 = \int_{\mu_1}^\lambda \frac{1}{\dot{\epsilon}_0} (\mu - \lambda) [Q(\mu) + \dot{\epsilon}_0] d\mu$$

et pour $\dot{\epsilon}_0 = 0$: $T(\lambda) = Q(\lambda)$.

Or $T(\lambda)$ définit la courbe d'écroutissage $\sigma(\epsilon)$ à vitesse infiniment petite. Pour un matériau justiciable du modèle, la fonction introduite $Q(\lambda)$ est donc fournie par un essai de traction infiniment lent à partir de l'état recuit.

D'après (2,1) on a :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\epsilon}_0} = \int \frac{\mu}{\lambda} e^{-\frac{\mu}{\lambda}(\mu - \lambda)} \left\{ 1 + \frac{\lambda - \mu}{\dot{\epsilon}_0} [Q(\mu) + \dot{\epsilon}_0] \right\} d\mu$$

Ce terme étant toujours positif, l'allure des courbes $T(\lambda, \dot{\epsilon}_0)$ est la suivante (fig. 2) :

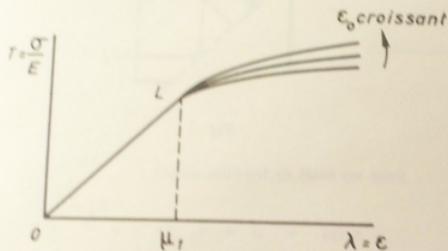


Fig. 2. — Point L : limite élastique

Cette allure est conforme à celle des courbes expérimentales de traction simple.

ESSAI DE RELAXATION ($\dot{\epsilon} = \epsilon_0 = \text{Cte}$)

D'après (1,1') : $\epsilon = \lambda = \epsilon_0$, donc $\dot{\lambda} = 0$ et d'après (1,4) : $T + \frac{dT}{dt} = Q(\epsilon_0)$; soit : $\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-t}$ avec : $T_0 = Q(\epsilon_0)$, T_∞ désigne l'effort initial au blocage et T_∞ l'effort qui tend à s'établir. Ces résultats sont conformes qualitativement à l'expérience.

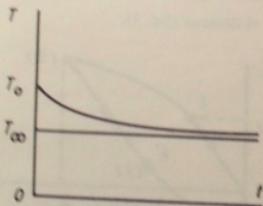


Fig. 3

ESSAI DE FLUAGE A CONTRAINTE CONSTANTE

$$\left(\frac{\sigma}{E} = T_0 = \text{Cte} \right)$$

On suppose comme dans l'essai de traction simple que l'état initial est l'état neutre.

De (1,4) il résulte : (2,2) $\frac{d\lambda}{dt} + Q(\lambda) = T_0$. Comparons avec l'équation de la courbe d'écroutissage : $-T(\lambda) + Q(\lambda) = 0$.

Si donc, dans un graphique, on porte ϵ ou λ en abscisses et en ordonnées soit $T(\lambda)$ ou $\frac{\sigma}{E}$, soit $-\frac{d\lambda}{dt}$ ou V (vitesse de déformation), on obtient des courbes parallèles entre elles (fig. 4).

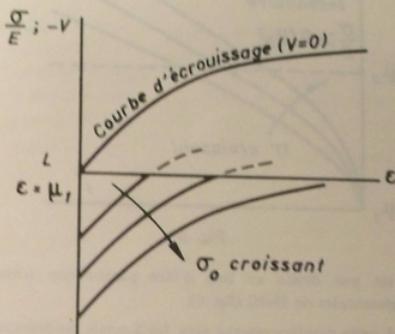


Fig. 4

Ces résultats sont approximativement confirmés par l'expérience.

Considérons les courbes de déformation en fonction du temps $\epsilon(t)$.

Elles présentent un point inflexionnel, d'après (2,2), pour $\frac{dQ}{d\lambda} = 0$, c'est-à-dire lorsque $1 - \theta = 0$, soit lorsque $\lambda = \mu_2$.

Affectons les grandeurs relatives à cette valeur de λ d'une astérisque, alors : $V^* = \dot{\lambda}^* = T - Q(\mu_2)$.

LOI DE FLUAGE LORSQUE $\epsilon > \mu_2$

D'après (1,3) :

$$T_0 = Q(\mu_2) + \int_0^1 \varphi(\theta, t) d\theta$$

d'où, en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{\sigma} = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\theta, t) d\theta,$$

et en utilisant (1,1') :

$$\dot{\sigma} = \int_0^1 (\dot{\epsilon} - \dot{\varphi}) d\theta = \dot{\epsilon} - T_0 + Q(\mu_2)$$

La courbe $\epsilon(t)$ se raccorde donc à la tangente inflexionnelle de pente $T_0 - Q(\mu_2)$ par une droite. C'est cette droite qui correspond au fluage établi ou secondaire, qui est ainsi bien interprété (fig. 5). Il reste la fonction $V^* = T - Q(\mu_2)$,

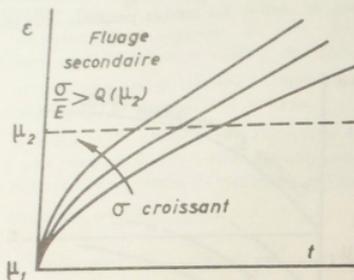


Fig. 5

qui est une droite au lieu d'être parabolique (courbes expérimentales de Hoff) (fig. 6).

A cette dernière réserve près, les 3 essais fondamentaux sont bien interprétés avec le modèle de Bingham généralisé, dont l'équation de comportement pour les lois $\epsilon(t)$ non décroissantes, l'état initial étant l'état neutre, est l'équation (1,4), équation que l'on peut d'ailleurs écrire, en introduisant la constante A définissant le rapport de l'unité de temps choisie à l'unité de temps pratique :

$$A \frac{d}{dt} (\epsilon - \frac{\sigma}{E}) + Q(\epsilon) - \frac{\sigma}{E} = 0.$$

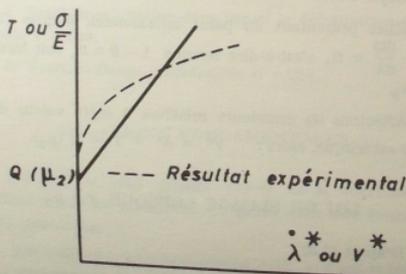


Fig. 6

Pour le premier retour en arrière à partir de $\epsilon = \lambda(t_0)$, aboutissement d'un essai d'écroutissage (à vitesse négligeable), l'état du système est entièrement caractérisé par la connaissance des tensions des ressorts des systèmes élémentaires, soit $x(\mu_1)$.

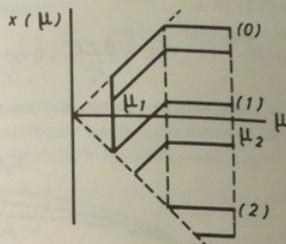


Fig. 7

Pour un essai de traction simple :

$$x(\mu) = \mu + \dot{\epsilon}_0 (1 - e^{-\frac{\mu - \lambda}{\dot{\epsilon}_0}})$$

Donc ici : $x(\mu) = \mu$. Les patins $\mu < \lambda_0$ sont donc tous au seuil du glissement.

Si on diminue T à partir de $t = t_0$, les patins cessent tous simultanément de glisser et les tensions $x(\mu)$ diminuent toutes de la même quantité : $-\Delta\epsilon$. Le diagramme $x(\mu)$ se déplace donc en translation suivant les x négatifs jusqu'à la configuration (1) (fig. 7), où un de ses points touche la droite $x = -\mu$, et qui correspond au glissement en sens inverse du modèle élémentaire correspondant ($\mu = \mu_1$). Au-delà de la configuration (2), on a à nouveau : $\lambda = |\epsilon|$. Entre (1) et (2), l'apparition du glissement est exprimée par une autre relation entre $\lambda\epsilon$, à savoir : $\Delta\epsilon + 2\lambda = 0$. La succession de l'écroutissage jusqu'à $\epsilon = \lambda_0$ et du retour en arrière est illustrée par conséquent dans le diagramme [T ou $\frac{\sigma}{E}$, ϵ] ci-dessous (fig. 8).

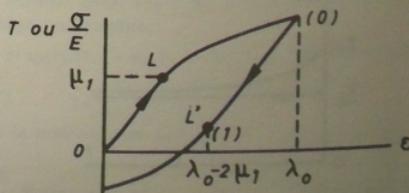


Fig. 8

De (0) à (1) : $T = \sum x_i = -\Delta \epsilon \int_0^1 d\theta = -\Delta \epsilon$. On a bien interprété l'effet Bauschinger.

CONCLUSION

Hormis la schématisation trop grossière de la loi de fluage $v^*(T)$, la confrontation qualitative du modèle avec

les résultats expérimentaux essentiels peut être jugée satisfaisante. La détermination de la valeur optimum de A sera faite en exploitant les propriétés démontrées. Il reste à perfectionner ce modèle sans le dénaturer.

ÉNERGIE ÉLASTIQUE ET TRAVAIL DISSIPÉ DANS LES MODÈLES (1)

par J. MANDEL

Ingénieur Général des Mines

Professeur à l'École Polytechnique et à l'École Nationale Supérieure des Mines

Les modèles rhéologiques font apparaître des relations énergétiques remarquables souvent bien vérifiées par les corps naturels. On envisage ici des modèles viscoplastiques formés de patins et d'amortisseurs et des modèles élastoplastiques formés de patins et de ressorts (2). Les patins étant supposés à résistance constante, on établit dans les deux cas une formule simple donnant le travail dissipé par le frottement solide (patins). La comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus par G. I. TAYLOR montre que, pour les métaux, si l'hypothèse de la résistance constante est souvent assez bien vérifiée, on doit plus généralement, comme le font prévoir les courbes d'écroutissage des monocristaux, imaginer des patins dont la résistance est fonction croissante du déplacement.

Les résultats que nous présentons constituent un complément énergétique à l'étude de B. PERSOZ sur les modèles viscoplastiques et élastoplastiques [2].

1 MODÈLES VISCOPLASTIQUES

On considère des modèles analogues au modèle de Kelvin (fig. 1), ou au modèle de Maxwell (fig. 2), ou des

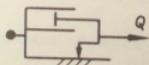


Fig. 1

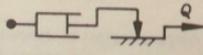


Fig. 2

combinaisons de tels modèles. Q désigne la force appliquée

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie le 19 novembre 1964.

(2) Nous laissons de côté les modèles visco-élastiques formés d'amortisseurs et de ressorts. Pour ceux-ci la question du partage du travail en énergie élastique et travail dissipé a été résolue dès 1952 par Staverman et Schwarzl [1].

au modèle, q le déplacement de son point d'application. Si les patins sont à résistance constante, PERSOZ a montré qu'il existe entre Q et \dot{q} une relation univoque (la même à la charge et à la décharge) représentée par une courbe AP (fig. 3).

Désignons par ϵ la déformation d'un amortisseur, par σ la force correspondante, par y le glissement d'un patin et par r la force correspondante. Appliquons au système de patins et d'amortisseurs le théorème des travaux virtuels, en prenant comme vitesses les vitesses réelles ($\dot{q}, \dot{\epsilon}, \dot{y}$) et comme forces les variations ($dQ, d\sigma, dr$) des forces réelles. Nous obtenons, en intégrant le long de l'arc AP :

$$\int \dot{q} dQ = \Sigma (\int \dot{\epsilon} d\sigma + \int \dot{y} dr)$$

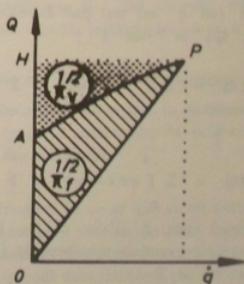


Fig. 3

Mais si les patins sont à résistance constante : $dr = 0$ lorsque $\dot{y} \neq 0$, donc les intégrales $\int \dot{y} dr$ sont nulles.

Si les amortisseurs sont linéaires :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma}{\mu}$$

Si en outre l'état initial ($Q=0$) est neutre,

$$(\sigma_0 = 0, \tau_0 = 0) :$$

$$\int \dot{\epsilon} d\sigma = \frac{\sigma^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \sigma \dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \pi_v$$

π_v désignant la puissance dissipée par viscosité ($\pi_v = \sigma \dot{\epsilon}$) dans l'état représenté par P.

Par conséquent, avec les hypothèses ci-dessus précisées, l'aire APH (fig. 3) représente la moitié de la puissance dissipée par la viscosité dans l'état P.

Comme la puissance totale dissipée dans l'état P est $Q\dot{Q}$, double de l'aire OPH, la puissance dissipée par le frottement solide π_f est le double de l'aire OPA, comprise entre la courbe AP et la corde OP.

2 MODÈLES ELASTOPLASTIQUES

On considère des modèles analogues au modèle de Kelvin (K, fig. 4), ou au modèle de Maxwell (M, fig. 5), ou des combinaisons de tels modèles. On désigne par ϵ la déformation d'un ressort, par σ la force correspondante, γ , τ étant comme précédemment les variables relatives aux patins. Le théorème des travaux virtuels permet d'écrire les deux relations :

$$Q d q = \sum (\sigma d \epsilon + \tau d \gamma)$$

$$q d Q = \sum (\epsilon d \sigma + \gamma d \tau)$$

d'où l'on déduit, les intégrales étant prises entre l'état initial noté 0 (où q est nul par définition, mais pas nécessairement Q) et l'état 1 :

$$(1) \int_0^1 q d Q = \sum \left(\int_0^1 \epsilon d \sigma \right) + \sum \left(\int_0^1 \gamma d \tau \right)$$

$$(2) \int_0^1 Q d q - q d Q = \sum \int_0^1 \sigma d \epsilon - \epsilon d \sigma + \sum \int_0^1 \tau d \gamma - \gamma d \tau$$

En désignant par A l'aire O1H, par B l'aire O1K (fig. 6), les premiers membres de (1) et (2) sont respectivement A et B-A.

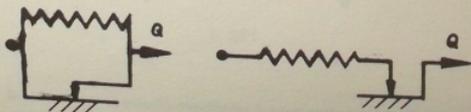


Fig. 4

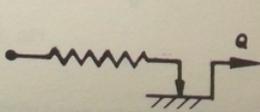


Fig. 5

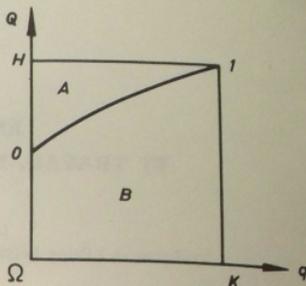


Fig. 6

Nous supposons que les patins glissent sous une force constante, que la charge Q varie d'une façon monotone entre Q_0 et Q_1 et que les forces τ varient aussi de façon monotone. D'après l'étude de PERSOZ, cette propriété n'est pas universellement vérifiée, c'est-à-dire vérifiée par tous les patins dans les groupements les plus généraux, mais elle est vérifiée par tous les patins dans les groupements dits « mixtes » décomposables en modèles K et modèles M placés en série ou en parallèle. Dans ces conditions le glissement γ d'un patin reste nul tant que τ n'a pas atteint le seuil du patin, ensuite il devient différent de zéro mais τ reste constant, donc, dans tous les cas $\gamma d \tau = 0$, d'où $\int_0^1 \gamma d \tau = 0$.

Nous supposons les ressorts à élasticité linéaire :

$$\sigma = \sigma_0 + k \epsilon$$

a) Si l'état initial est neutre ($\sigma_0 = 0, \tau_0 = 0, Q_0 = 0$)

$$\int \epsilon d \sigma = k \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$$

$$\int \sigma d \epsilon - \epsilon d \sigma = 0$$

Alors, d'après la formule (1), l'aire A représente l'énergie élastique des ressorts dans l'état 1 :

$$(3) A = W(\sigma_1)$$

et d'après la formule (2), l'aire B-A est le travail dissipé D par le frottement des patins, dans le passage de l'état initial à l'état 1 :

$$(4) B - A = D = \sum \int_0^1 \tau d \gamma$$

Le travail dissipé D est donc égal à l'aire comprise entre l'arc O1 et l'arc de courbe symétrique du précédent par rapport au milieu de la corde O1, ou encore au double

de l'aire comprise entre l'arc O1 et sa corde.

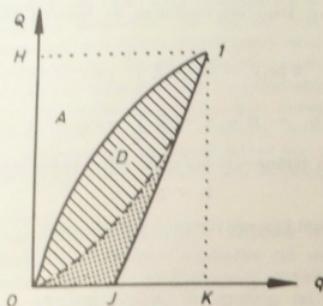


Fig. 7

En ce qui concerne l'énergie élastique dans l'état 1, représentée par l'aire A, une partie seulement de cette énergie est récupérable à la décharge : elle est représentée sur la figure 7 par l'aire du triangle K1J. Le reste, c'est-à-dire l'aire pointillée sur la figure 7, est la somme du travail dissipé au cours de la décharge et de l'énergie élastique correspondant aux contraintes résiduelles dans l'état relatif au point J.

b) Lorsqu'il existe des contraintes initiales σ_0 :

$$\int \epsilon d\sigma = k \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_0) \epsilon$$

$$\int \sigma d\epsilon - \epsilon d\sigma = \int \sigma_0 d\epsilon = \sigma_0 \epsilon$$

Par conséquent, $W(\sigma_1 - \sigma_0)$ désignant l'énergie élastique correspondant aux variations $\sigma_1 - \sigma_0$ des contraintes entre l'état 0 et l'état 1, les formules (1) et (2) donnent ici :

$$(3^*) \quad A = W(\sigma_1 - \sigma_0) = W(\sigma_1) - W(\sigma_0) - \sum \sigma_0 \epsilon_1$$

$$(4^*) \quad B - A = D + \sum \sigma_0 \epsilon_1$$

Vérifions la formule (3)* pour la courbe de décharge O1, faisant suite à une première charge suivant $\Omega 0$ (fig. 8). PERSOZ a montré que (moyennant les hypothèses faites ci-dessus au sujet des patins et des groupements) l'arc O1 est homothétique de l'arc $\Omega 0$ dans le rapport -2. De plus si en 0 les contraintes des ressorts sont σ_0 , au point 1 (symétrique de 0 par rapport à Ω) les contraintes sont $\sigma_1 = \sigma_0 - 2\sigma_0 = -\sigma_0$.

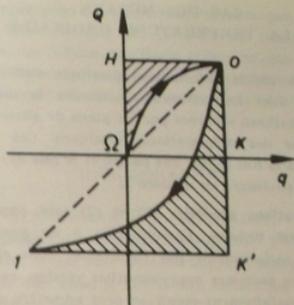


Fig. 8

L'aire A est ici l'aire OK'1 (l'origine des déformations devant être reportée au point K). Cette aire représente donc :

$$W(\sigma_1 - \sigma_0) = W(-2\sigma_0) = 4W(\sigma_0)$$

D'autre part $W(\sigma_0)$ est représenté par l'aire ΩHO . Le rapport 4 entre ces deux aires découle de l'homothétie de rapport -2 entre les arcs O1 et $\Omega 0$.

3 MILIEU CONTINU ELASTOPLASTIQUE

Au lieu de raisonner sur un modèle, on pouvait appliquer le théorème des travaux virtuels à un milieu continu soumis à des forces extérieures Q. On obtenait évidemment les mêmes résultats sous les mêmes conditions, à savoir :

a) linéarité des déformations élastiques;

b) les éléments atteints par la déformation plastique restent à la limite d'écoulement et celle-ci est fixe (pas d'écroutissage des éléments).

Il est intéressant de noter que si, en outre, il n'y a pas de contraintes initiales (cas envisagé en 2 a), on se trouve dans les conditions d'application d'un principe dû à HAAR et KARMAN [3] qui ont démontré que parmi tous les systèmes de contraintes statiquement admissibles sous les forces Q, sans dépassement en aucun point de la limite d'écoulement, se développe celui pour lequel l'énergie potentielle élastique $W(\sigma_1)$ est minimale. Ce principe s'applique donc, au cours de la première charge (état initial neutre), à tous les modèles formés par des groupements « mixtes ».

Dans ce cas la déformation plastique s'effectue par glissements dans les cristaux constituant le métal, les lamelles cristallines séparées par les plans de glissement ne recevant que des déformations élastiques. Ces lamelles jouent ainsi à la fois le rôle des patins et le rôle des ressorts des modèles envisagés au numéro 2.

Les équations générales (1) et (2) sont applicables. L'élasticité est linéaire, l'assimilation à un groupement mixte n'est certainement pas rigoureuse, mais elle peut constituer une première approximation valable, enfin si le métal a été parfaitement recuit on peut admettre que dans l'état initial où $Q = 0$ les contraintes σ_0 sont nulles. Dans ces conditions, les formules (3) et (4) seraient valables si les glissements intracrystallins se faisaient sous cission constante ($\gamma d r = 0$).

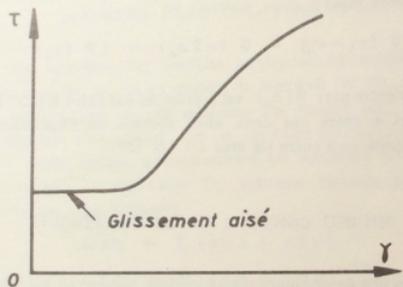


Fig. 9

En réalité, la courbe τ, γ (cission, glissement) a l'allure indiquée par la figure 9. Il en résulte que l'intégrale $\int_0^1 \gamma d r$ a une valeur positive, d'autant plus importante

relativement à $\int_0^1 r d \gamma$ que le glissement γ_1 est plus élevé. Dans ces conditions les formules (2) et (3) donnent :

$$(5) \quad W(\sigma_1) = A - \sum_0^1 \gamma d r < A$$

$$(6) \quad D = B - A + \sum_0^1 \gamma d r > B - A$$

On a évidemment (au moins à la première charge) :

$$D < B - R$$

R désignant l'énergie récupérée à la décharge.

Donc :

$$\frac{D}{B - R} < 1 < \frac{D}{B - A}$$

Pour vérifier ces inégalités nous nous sommes reportés aux expériences faites par G. I. TAYLOR [4] en 1925. On trouve dans le mémoire de TAYLOR les courbes σ, ϵ sur lesquelles on peut mesurer les aires A, B et R (cette dernière est négligeable).

Le travail dissipé D était déduit de l'augmentation de température ΔT . La traction sur l'éprouvette était exécutée très rapidement, de sorte que le phénomène était adiabatique et, ΔS désignant la variation d'entropie, on avait :

$$D = T \Delta S$$

TAYLOR adoptait pour $T \Delta S$ l'expression valable dans le cas de l'élasticité (1) soit, par unité de volume :

$$D = \rho C \Delta T + \alpha T \Delta \sigma$$

ρ : masse volumique, C : chaleur spécifique, α : coefficient de dilatation thermique. Le second terme $\alpha T \Delta \sigma$ est la correction dite d'adiabaticité.

Les valeurs obtenues par TAYLOR pour le rapport

$$\frac{D}{B - R}$$

varient de 0,87 à 0,95 (2).

Nous complétons dans le tableau ci-dessous les résultats de TAYLOR par l'indication des valeurs de $\frac{D}{B - A}$.

	$\epsilon_{\max} \%$	$\frac{D}{B - R}$	$\frac{D}{B - A}$	Sans la correction d'adiabaticité
Aluminium polycristal	21,9	0,93	1,08	(1,02)
Aluminium monocristal	52,7	0,95	1,22	(1,19)
Cuivre	55,7	0,945	1,08	(1,07)
Cuivre	20,2	0,91	1,37	(1,30)
Acier doux	11,8	0,87	1,04	(1,00)

On vérifie que le rapport $\frac{D}{B-A}$ est > 1 . La valeur très voisine de 1 pour l'acier doux s'explique par le fait que l'écroutissage du monocristal de fer est très faible; le glissement aisé (sous cission pratiquement constante) se poursuit presque jusqu'à la rupture. De plus la déformation maximale était plus faible que dans les autres essais. Pour l'aluminium la relation $D = B-A$, qui correspond à l'hypothèse du patin à résistance constante, donne encore une bonne approximation du travail dissipé sauf pour les très grandes déformations. Il n'en est plus de même pour le cuivre.

(1) Cela revient à négliger la variation d'entropie correspondant aux contraintes résiduelles qui subsistent après déchargement. Cette variation a pour effet de réduire la correction d'adiabaticité (qui est d'ailleurs faible : 3 à 5 % du terme en ΔT), et par suite de rapprocher de 1 les valeurs de $D/B-A$ (les valeurs calculées sans correction d'adiabaticité sont indiquées entre parenthèses dans le tableau).

(2) L'idée en cours à l'époque des essais de TAYLOR était que la différence $B-D-R$ correspondait à l'énergie absorbée par une transformation physique au voisinage des joints tandis que l'idée développée ici est qu'elle correspond à de l'énergie élastique non récupérable à la décharge.

(3) Voir page 15.

Des expériences suivant une technique un peu différente ont été effectuées par H. D. BUI au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique en vue de comparer les grandeurs D et $B-A$. Ces essais nouveaux⁽³⁾ confirment les résultats déduits des essais de TAYLOR.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. J. STAVERMAN et F. SCHWARZL. — Thermodynamics of viscoelastic behaviour. Proc. Konink. Nederl. Akad. von Wetenschappen. Series B, vol. 55, 1952. Voir aussi J. MANDEL, Mécanique des Milieux Continus (cours à l'École Polytechnique). Généralisation de la formule de Staverman et Schwarzl au cas tridimensionnel.
- [2] B. PERSOZ. — Cahiers du Groupe français de Rhéologie, tome IV, n° 3, 1959.
- [3] A. HAAR et Th. von KARMAN. — Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen Medien. Nachr. der Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Klasse, p. 204, 1909.
- [4] G. I. TAYLOR. — The Heat developed during plastic extension of metals. Proceedings of the Royal Society, 1925, p. 422.

DISSIPATION D'ÉNERGIE DANS UNE DÉFORMATION PLASTIQUE

par H. D. BUI

Ingénieur au Centre de Recherches et d'Essais de Chatou

I. — INTRODUCTION

De nombreuses études ont été consacrées à la dissipation d'énergie dans une déformation plastique. G. I. TAYLOR et FARREN (1925) puis QUINNEY (1934) ont effectué des mesures calorimétriques sur des monocristaux et polycristaux pour trouver la fraction d'énergie restituée sous forme de chaleur [1]. Plus récemment, des études analogues ont été faites pour différentes orientations cristallographiques (NAKADA et al., 1964) [2]. Dans cet article, nous nous proposons de vérifier expérimentalement une relation, mise en évidence par J. MANDEL [3] entre la dissipation d'énergie et la courbe effort-déformation d'un polycristal. Nous présenterons également une méthode de mesure sensible pour les petites déformations permanentes ($\epsilon_p = 10^{-2}$).

II. — RELATION

ENTRE LA DISSIPATION D'ÉNERGIE ET LE DIAGRAMME EFFORT-DÉFORMATION

Pour décrire le comportement élastoplastique d'un polycristal, le modèle rhéologique de PERSOZ [4] a été utilisé. Ce modèle est constitué par des groupements dits « mixtes », c'est-à-dire décomposables en branches placées en série ou en parallèle de modèles élémentaires composés eux-mêmes de ressort et patin montés en parallèle (fig. 1). Le patin est supposé parfait, ce qui revient à supposer qu'il n'y a pas d'érouissage propre mais seulement érouissage dû aux contraintes résiduelles. Si $Q(q)$ est la courbe effort-déformation d'un tel modèle, on montre [3] que l'énergie mécanique fournie au solide peut-être décomposée en trois termes : une partie élastique récupérable par décharge, c'est l'aire triangulaire; une partie non récupérable immédiatement, c'est l'énergie élastique résiduelle qui peut être restituée par recuit convenable (TAYLOR, 1934) et qui est représentée par l'aire du triangle pointillé et, enfin, une partie dépensée sous forme de chaleur, qui est deux fois l'aire comprise entre la courbe effort-déformation et la corde. Nous désignons par \mathcal{A} l'aire en hachures et

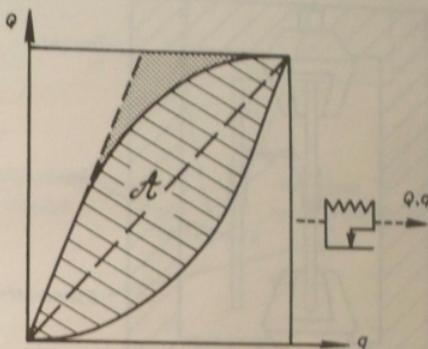


Fig. 1

nous nous proposons de la comparer à D , énergie dissipée.

III. — RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

G. I. TAYLOR (1925) a fait des mesures calorimétriques précises sur différents matériaux et pour des allongements jusqu'à $\epsilon = 50\%$. Nous avons cherché à répéter ces expériences en les complétant par une vitesse de déformation plus faible et une déformation totale d'amplitude moindre ($\epsilon = 1\%$). Il fallait donc, d'une part trouver une méthode de mesure sensible et, d'autre part, tenir compte de la perte de chaleur par conduction, celle par rayonnement et convection représentant une faible fraction de la perte totale ($\approx 1/40$).

La mesure calorimétrique a été effectuée par des jauges de température à résistance entourant complètement l'éprouvette de forme cylindrique et le témoin. Ces jauges étaient montées en pont, le signal obtenu était amplifié et enregistré. L'éprouvette était fixée aux mâchoires d'une

machine de traction; elle était isolée de l'atmosphère ambiante, ainsi que le témoin, par un isolant épais (fig. 2). Il s'est avéré qu'une enceinte à vide n'était pas nécessaire. Nous avons choisi une vitesse de déformation faible $\epsilon = 10^{-4}/\text{sec}$ pour améliorer la mesure de température. TAYLOR utilise les vitesses de l'ordre de $5.10^{-2}/\text{sec}$ afin de réduire les pertes par conduction. Nous avons tenu compte de celles-ci en enregistrant la courbe de refroidissement qui, en fait, n'est pas très différente d'une exponentielle: $R(t) = \exp(-t/\tau_1)$ ($t > 0$).

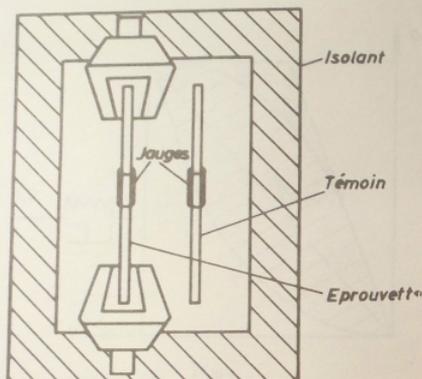


Fig. 2

Dans ces conditions, si $\Delta T(t)$ était la variation de température observée, la courbe théorique correspondant au cas où $R(t) = 1$ ($t > 0$) serait alors:

$$\Delta T_{th}(t) = \Delta T(t) + \frac{1}{\tau_1} \int_0^t \Delta T(u) du.$$

Nous avons étalonné nos mesures calorimétriques directement en quantité de chaleur: aux charges et décharges élastiques de l'éprouvette correspondent le refroidissement et le réchauffement adiabatique, réponses qui sont bien proportionnelles aux impulsions mécaniques fournies (fig. 3). Pour une variation de contrainte $\Delta \sigma^*$ dans le domaine élastique, la variation de chaleur « équivalente » est:

$$\Delta Q^* = \frac{\alpha T \Delta \sigma^*}{d}$$

où α est le coefficient d'allongement thermique ($\Delta L/L$ par degré), T la température absolue et d la masse spécifique (en g/cm^3). Si $\Delta \sigma^*$ est exprimé en kg/mm^2 ,

on a ΔQ^* exprimé en kgm/g .

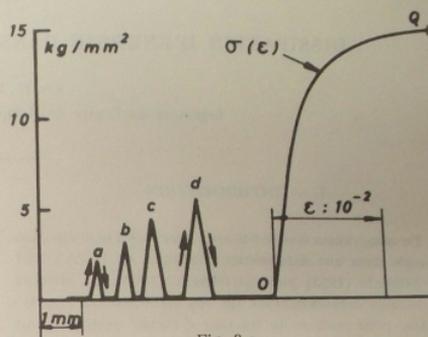


Fig. 3 a

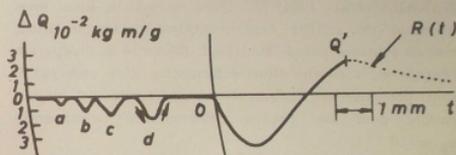


Fig. 3 b

La chaleur dégagée dans la déformation plastique est celle observée $\Delta Q(t_2)$ majorée par le refroidissement adiabatique. C'est la quantité ΔQ_D (fig. 4 a). Il faut lui ajouter un terme correctif C de la forme $1/\tau_1 \int_0^{t_1} \Delta Q du$.

Le tableau ci-dessous donne les résultats expérimentaux pour le polycristal d'aluminium, pour le fer et pour le cuivre, en comparaison avec les valeurs que nous pouvons calculer d'après les résultats de TAYLOR.

La précision des mesures dépend essentiellement du coefficient α , dont l'incertitude est grande pour l'aluminium (3%). Nous avons pris pour α la valeur moyenne donnée par les Tables. Mis à part ce coefficient, d'une mesure à l'autre sur le même matériau on doit commettre sur le rapport D/σ^2 une erreur relative de l'ordre de 2 à 4%.

L'ensemble des résultats est en assez bonne concordance avec ceux de TAYLOR. Le rapport entre l'énergie dissipée D et l'aire hachurée σ^2 est légèrement supérieur à l'unité, ce qui indique que l'hypothèse du patin parfait du modèle

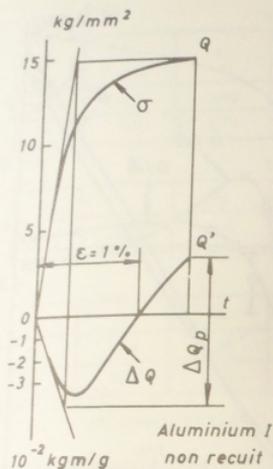


Fig. 4 a

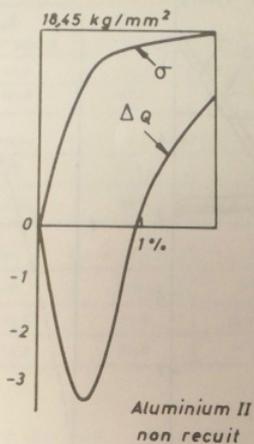


Fig. 4 b

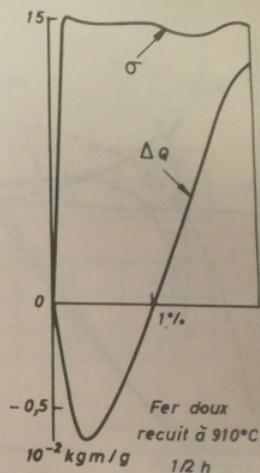


Fig. 4 c

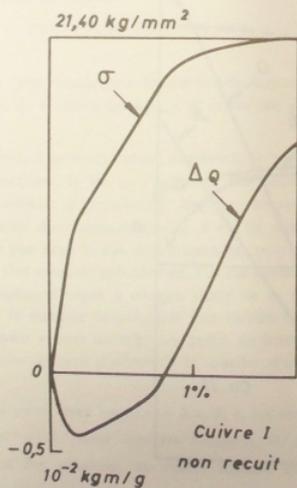


Fig. 4 d

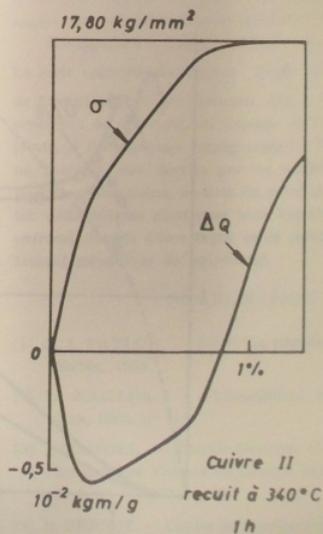


Fig. 4 e

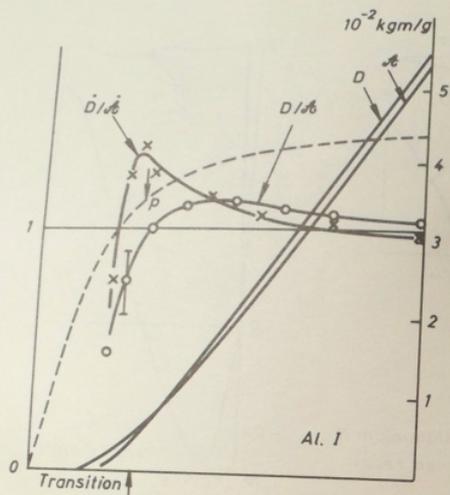


Fig. 5 a

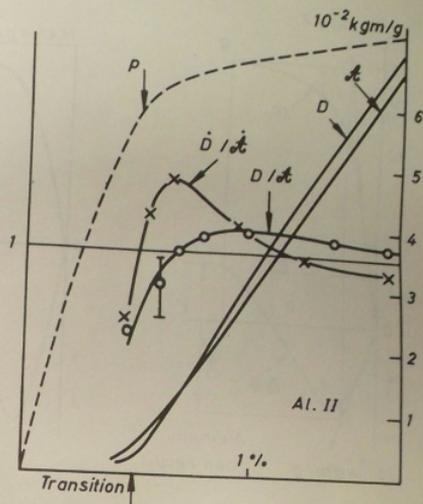


Fig. 5 b

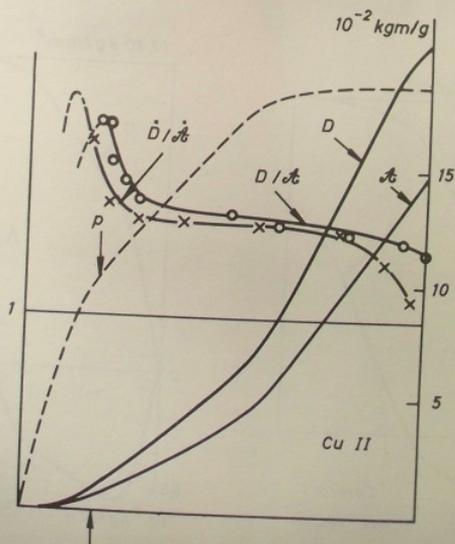


Fig. 5 c

Aluminium ($\omega = 26 \cdot 10^{-6}$; $d = 2,7$)

	L mm	r_1 min	ϵ_p %	\mathcal{A} 10^{-3} kgm/g	ΔQ_p 10^{-3} kgm/g	C 10^{-3} kgm/g	D 10^{-3} kgm/g	D/ \mathcal{A}	(*)
I	260	3,7	1,49	53,0	66,5	— 10,7	55,8	1,05	(1,08)
II	84	0,6	1,73	69,9	81,0	— 8,7	72,3	1,03	

Fer Armco ($\omega = 12,1 \cdot 10^{-6}$; $d = 7,85$)

	L	r_1	ϵ_p	\mathcal{A}	ΔQ_p	C	D	D/ \mathcal{A}	(1,04)
	81	1,55	1,05	18,6	19,0	+ 0,6	19,6	1,05	

Cuivre ($\omega = 17,71 \cdot 10^{-6}$; $d = 8,5$)

	L	r_1	ϵ_p	\mathcal{A}	ΔQ_p	C	D	D/ \mathcal{A}	(1,37)
I	78	0,83	1,28	22,5	27,4	+ 4,6	32,0	1,42	(1,37)
II	79	0,58	0,95	14,9	21,9	— 1,5	20,4	1,37	

(*) D'après TAYLOR.

choisi n'est pas exacte. Lorsque le métal subit une déformation permanente, il durcit. L'écroutissage qui en résulte provient essentiellement des contraintes résiduelles créées par la distorsion élastique du milieu environnant chaque grain déformé. Mais il y a aussi le durcissement propre de chaque grain, la déformation plastique entraînant une modification des cisssions critiques. Cet effet est particulièrement net pour le cuivre.

IV. — POINT DE TRANSITION

En fait, on peut remarquer la différence importante entre les courbes de traction du cuivre et celles des autres métaux.

Pour le cuivre, à la température ambiante, le point de transition P, marquant la fin de l'influence des joints est suivi d'un domaine d'écroutissage linéaire important, semblable à celui du monocristal (fig. 5 c). Ce domaine linéaire n'existe pas dans le cas de l'aluminium polycristal (fig. 5 a et 5 b). Des mesures précédentes, il a été possible de connaître la chaleur dissipée à chaque stade de la déformation. Malgré le manque de précision aux faibles valeurs de celle-ci, on peut encore noter qu'au point de transition correspond un changement d'allure de la courbe d'énergie dissipée.

Nous avons porté dans les figures 5 a, b, c, les courbes $D(\epsilon)$, $\mathcal{A}(\epsilon)$ et $\sigma(\epsilon)$ ainsi que les rapports D/\mathcal{A} et $\dot{D}/\dot{\mathcal{A}}$. L'examen des résultats du cuivre montre que la valeur élevée du rapport s'explique assez bien par la présence du domaine d'écroutissage linéaire. Paradoxalement, un

tel domaine linéaire n'est pas décrit correctement par les modèles rhéologiques simples que nous connaissons, c'est-à-dire constitués par des ressorts et patins parfaits. Il est peut-être plus juste d'employer les modèles de Képès où les coefficients de frottement des patins peuvent croître linéairement en fonction de leur déformation. En effet, on doit trouver dans le domaine d'écroutissage linéaire une valeur supérieure à l'unité pour le rapport D/\mathcal{A} .

Les figures 5 a, b sont relatives à l'aluminium polycristal. La forte variation du rapport D/\mathcal{A} au voisinage du point de transition est certainement liée à la modification du processus de déformation, passage de l'écroutissage dû aux joints, à l'écroutissage intragranulaire. De tels mécanismes ne peuvent être décrits par les modèles élastoplastiques parfaits. Néanmoins, au-delà du point de transition lorsque les déformations plastiques sont importantes, ces modèles peuvent décrire d'une façon assez satisfaisante le comportement mécanique du polycristal.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. I. TAYLOR. — Scientific papers, Vol. Mechanics of Solids, 1958.
- [2] Y. NAKADA. — Philosophical magazine, vol. 11, Feb. 1965, n° 110.
- [3] J. MANDEL. — Énergie élastique et travail dissipé dans les modèles. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, t. I, n° 1 (1965), p. 9.
- [4] B. PERSOZ. — Cahier du Groupe Français de Rhéologie, t. IV, n° 3 (1959), p. 31.

POSSIBILITÉS THÉORIQUES DE SIMULATION ANALOGIQUE DISCRÈTE DU MOUVEMENT DES STRUCTURES ÉLASTOPLASTIQUES (1)

par B. NAYROLES
Ingénieur E.C.P.

L'étude du mouvement des structures élastoplastiques se heurte à de sérieuses difficultés qui surviennent au stade de la mise en équations et à celui de la résolution numérique. Laissant partiellement de côté les premières, nous supposons que la configuration de la structure étudiée ne dépend que d'un nombre fini de paramètres. Il reste alors d'énormes difficultés de résolution numérique et, hormis des cas très simples, celle-ci devra faire appel à des moyens de calcul automatiques, digitaux ou analogiques. Ces derniers semblent les mieux adaptés aux problèmes dynamiques en plasticité, par leur rapidité et leur faible prix de revient; leur manque relatif de précision est sans grande importance, compte tenu du fait que les données expérimentales sur les lois de comportement sont elles-mêmes très imprécises; enfin ils permettraient plus facilement d'obtenir des résultats qualitatifs.

La construction d'un ensemble analogique suppose que celui-ci sera utilisable pour des structures très variées aussi bien par leur forme que par les matériaux constituant, et nécessite une conception méthodique générale des problèmes posés et de leur résolution. Voici, très brièvement, celle que nous proposons. Deux points essentiels sont à considérer :

- 1° la simulation analogique de l'élément de volume;
- 2° la simulation analogique de l'assemblage des éléments de volume entre eux, c'est-à-dire de la structure elle-même.

1 ÉTUDE DE L'ÉLÉMENT DE VOLUME

Pour abrégé, je n'envisagerai que des corps dont le domaine d'élasticité initial est donné par le critère de Misès, la méthode proposée s'étendant à d'autres critères.

Contentons-nous d'étudier le cas où le tenseur

(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie le 18 mars 1965.

déformation, rapporté à l'état initial non déformé, a pour matrice relative à un système d'axes entraînés dans le déplacement de l'élément de volume une matrice $[\epsilon]$ de la forme :

$$[\epsilon] = \epsilon_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_1 [\vec{\theta}_1] + \gamma_2 [\vec{\theta}_2]$$

où $\vec{\theta}_1$ et $\vec{\theta}_2$ sont deux déviateurs symétriques orthonormés au sens suivant :

$$\sum_{i,j} (\theta_{ij})_{(1)} (\theta_{ij})_{(2)} = 0,$$

$$\sum_{i,j} (\theta_{ij})_{(1)}^2 = \sum_{i,j} (\theta_{ij})_{(2)}^2 = 1.$$

Nous supposons que les contraintes, rapportées à l'état initial, ont alors, vis-à-vis de mêmes axes, une matrice de la forme :

$$[\sigma] = \sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s_1 [\vec{\theta}_1] + s_2 [\vec{\theta}_2].$$

Le travail virtuel des contraintes est alors :

$$\delta W = - (3\sigma_m \delta\epsilon_m + s_1 \delta\gamma_1 + s_2 \delta\gamma_2).$$

Dans le plan des vecteurs orthonormés $\vec{\theta}_1$ et $\vec{\theta}_2$ on peut représenter le déviateur des déformations par un vecteur :

$$\vec{OP} = \gamma_1 \vec{\theta}_1 + \gamma_2 \vec{\theta}_2$$

et le déviateur des contraintes par un vecteur :

$$\vec{OS} = s_1 \vec{\theta}_1 + s_2 \vec{\theta}_2.$$

Nous supposons que σ_m et ϵ_m satisfont toujours :

$$\sigma_m = \frac{E}{1 - 2\nu} \epsilon_m$$

et que les relations de comportement entre \vec{OP} et \vec{OS}

sont indépendants de σ_m et ϵ_m . Dans ce qui suit nous laissons de côté σ_m et ϵ_m pour ne nous occuper que des déviateurs.

Sans en préciser encore la nature, considérons un modèle rhéologique unidimensionnel qui, pour la loi de déformation $q(t)$ fournit la résistance $Q(t, x)$, x étant un paramètre dont dépendront les caractéristiques numériques du modèle. Proposons-nous d'interpréter les lois qui relient les vecteurs \vec{OP} et \vec{OS} à l'aide d'un assemblage des modèles unidimensionnels précédents.

A tout point M du plan $(\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2)$, repéré par ses coordonnées polaires (x, α) , associons un des modèles : à deux points (x, α) et (x, α') de même rayon polaire x correspondant donc deux modèles identiques. Soit :

$$\vec{OP}(t) = \gamma_1(t) \vec{\theta}_1 + \gamma_2(t) \vec{\theta}_2$$

la loi de déformation. Nous posons que le modèle $M = (x, \alpha)$ subit la déformation :

$$(1) \quad q(t, \alpha) = \gamma_1(t) \cos \alpha + \gamma_2(t) \sin \alpha$$

indépendante de x .

La relation précédente est une relation de liaison holonome indépendante du temps.

Soit alors $p(x)$ une fonction réelle positive de x , définie pour $0 < x < \infty$ et telle que :

$$\int_0^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Nous poserons que le travail virtuel total des résistances des modèles associés est :

$$(2) \quad \delta W' = - \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{x=0}^{+\infty} Q(t, x, \alpha) \delta q(x, \alpha) p(x) dx \frac{d\alpha}{\pi}$$

Dès lors si nous voulons que le travail virtuel δW du déviateur des contraintes égale le travail virtuel $\delta W'$ précédent pour des déplacements virtuels :

$$\delta q(x, \alpha) = \delta \gamma_1 \cos \alpha + \delta \gamma_2 \sin \alpha$$

compatibles avec les liaisons (1) (qui sont alors considérées comme conservatives), nous aurons en identifiant δW et $\delta W'$:

$$(3) \quad \begin{cases} s_1 = + \iint Q \cos \alpha p(x) dx \frac{d\alpha}{\pi} \\ s_2 = + \iint Q \sin \alpha p(x) dx \frac{d\alpha}{\pi} \end{cases}$$

Les relations (1) et (3) définissent les lois de comportement. Elles peuvent être interprétées commodément à l'aide de la figure 1 qui en donne une représentation mécanique. La barre P, perpendiculaire au plan de la figure, glisse sans frottement entre deux barres matérielles liées à l'extrémité mobile du modèle et perpendiculaires à sa

direction.

En pratique, on ne prendra qu'un nombre grand mais fini de modèles et les intégrales précédentes seront remplacées par des sommes arithmétiques, l'expression $p(x) dx \frac{d\alpha}{\pi}$ étant remplacée par des coefficients de pondération μ_k de poids total 1. On aura les formules :

$$(1') \quad q_k = A_{1k} \gamma_1 + A_{2k} \gamma_2,$$

$$(3') \quad \begin{cases} s_1 = \sum_{k=1}^n A_{1k} Q_k \mu_k \\ s_2 = \sum A_{2k} Q_k \mu_k \end{cases}$$

où n est le nombre de modèles associés.

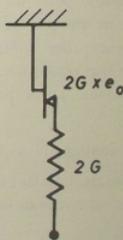
Envisageons maintenant divers choix de modèles M.

A. — Les modèles sont des patins de frottement identiques de seuil Q_0 . On obtient alors le corps rigide-plastique dont le domaine de rigidité est un cercle de rayon $s_0 = \frac{2Q_0}{\pi}$ (critère de Misès).

B. — Les modèles sont des modèles de Saint-Venant de seuil $2Gx e_0$ et de raideur $2G$. On prend pour $p(x)$ une fonction nulle pour $x < 1$. On obtient un corps élastoplastique dont le domaine d'élasticité en contrainte est initialement (en supposant les ressorts non contraints dans l'état initial) un cercle de rayon $2G e_0$ (critère de Misès). Pour des transformations élastiques, on a :

$$\dot{s}_1 = 2G \dot{\gamma}_1$$

$$\dot{s}_2 = 2G \dot{\gamma}_2$$



Sans développer les résultats auxquels on aboutit avec ce modèle, signalons seulement quelques propriétés des trajets de charge rectilignes. Soit par exemple $s_2 = 0$. Alors $\gamma_2 = 0$. Si s_1 est monotone croissant on obtient le diagramme (s_1, γ_1) représenté à la figure 2. On peut montrer sans difficulté que le modèle est équivalent à une association en parallèle de modèles de Saint-Venant telle qu'elle a été étudiée par M. PERSOZ [1] et par M. LECLERC [2].

Mais ici la courbe de premier écrouissage est comprise

entre la droite élastique et une courbe d'écroutissement minimum obtenue pour $p(x) = \text{fonction de Dirac au point 1}$.

D'autre part, le domaine d'élasticité en déformations se déforme par entraînement des tangentes. Après déformation rectiligne on obtient un domaine d'élasticité tel qu'il est représenté en figure 3. Notons le point anguleux au point actuel de déformation.

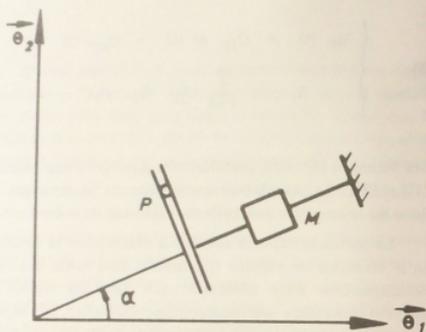


Fig. 1

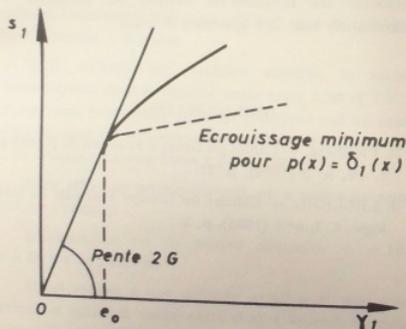


Fig. 2

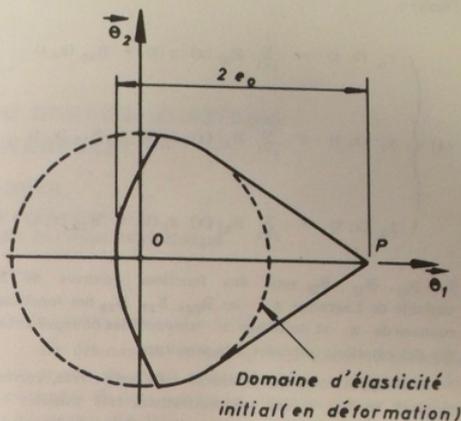


Fig. 3

C. — On peut envisager d'autres modèles M. On peut obtenir en particulier le corps élastoplastique parfait de Misès : il suffit d'associer en série l'assemblage obtenu au A avec un ressort bidimensionnel dont la matrice des raideurs est :

$$\begin{bmatrix} 2G & 0 \\ 0 & 2G \end{bmatrix}$$

On peut aussi obtenir un corps élastoplastique dont le domaine d'élasticité en contraintes est un cercle de rayon constant et qui est entraîné par le point de charge.

Plus généralement, en remplaçant $p(x) dx$ par $\frac{d\alpha}{\pi}$ par un élément de mesure $p(x, \infty) dx \frac{d\alpha}{\pi}$ on peut envisager la représentation de corps élastoplastiques soumis à d'autres critères que celui de Misès.

Les formules (1') et (3') sont susceptibles de simulation analogique électrique.

2

ÉTUDE D'UNE STRUCTURE

Nous supposons le problème ramené à l'étude d'une structure dont la configuration dépend d'un nombre fini r de paramètres z_1, \dots, z_r . Supposons qu'en chaque point de la structure le tenseur déformation soit du type considéré plus haut et que, x désignant un point courant, on puisse

écrire :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \epsilon_m(x, t) &= \sum_{j=1}^r B_{0j}(x) z_j(t) + B_{00}(x, t) \\ \gamma_1(x, t) &= \sum_{j=1}^r B_{1j}(x) z_j(t) + B_{10}(x, t) \\ \gamma_2(x, t) &= \sum_{j=1}^r B_{2j}(x) z_j(t) + B_{20}(x, t) \end{aligned} \right.$$

Les B_{0j} , B_{1j} , B_{2j} sont des fonctions connues de la variable de Lagrange x ; les B_{00} , B_{10} , B_{20} des fonctions connues de x et du temps t susceptibles de représenter des déformations imposées à la structure.

Ces hypothèses, qui semblent très restrictives, correspondent en fait à des schématisations très usuelles en Résistance des Matériaux comme l'hypothèse de Bernoulli ou celle de Kirchhoff-Love.

On décompose alors la structure en un nombre fini p de volumes finis ΔV_l de centre x_l . Le travail virtuel des contraintes sera :

$$\delta V = \sum_{i=1}^p [3\sigma_m(x_i, t) \delta \epsilon_m(x_i) + s_1(x_i, t) \delta \gamma_1(x_i) + s_2(x_i, t) \delta \gamma_2(x_i)] \Delta V_i$$

les déplacements virtuels considérés étant compatibles avec les liaisons (4). Posons :

$$B_{lji} = B_{lj}(x_i) \quad (l = 0, 1, 2).$$

On peut alors mettre le travail virtuel des contraintes sous la forme :

$$\delta V = - \sum_{j=1}^r Z_j \delta z_j,$$

avec :

$$Z_j = \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ k=1, \dots, n \\ l=0, 1, 2}} B_{lji} A_{lk} \mu_k \Delta V_l Q_{kl}$$

Les indices i et k peuvent être remplacés par un seul indice i' variant de 1 à np . Si l'on pose, pour une correspondance choisie entre i' et les couples (i, k) :

$$C_{ji'} = \sum_{l=0, 1, 2} B_{lji} A_{lk} \quad ; \quad C_{0i'} = \sum_{l=0, 1, 2} B_{l0l} A_{lk}$$

$$\rho_{i'} = \Delta V_l \mu_k$$

il vient les formules finales :

$$(5) \left\{ \begin{aligned} q_{i'}(t) &= C_{ji'} z^j(t) + C_{0i'}(t) \\ Z_j &= \sum_{i'=1}^{np} C_{ji'} Q_{i'} \rho_{i'} \end{aligned} \right.$$

Les formules (5) sont parfaitement analogues aux formules (1') et (3'). La simulation analogique de la structure est donc du même type que celle de l'élément de volume.

La méthode exposée consiste à décomposer la structure en p éléments de volume fini mais il faut noter que cette décomposition n'est nécessaire que dans les régions où peuvent apparaître des déformations plastiques. Les régions dont on prévoit qu'elles resteront toujours élastiques pourront être représentées par un ressort multidimensionnel, ce qui ne présente pas de difficulté.

On aura donc besoin de np modèles de Saint-Venant.

En pratique, les difficultés d'ordre technique seront de représenter les formules (5) lorsque les éléments unidimensionnels sont des systèmes à seuil.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. PERSOZ. — Cahier du Groupe Français de Rhéologie, t. IV, n° 3 (1959), p. 31.
- [2] J. LECLERC. — Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, t. I, n° 1 (1965), p. 3.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU DOMAINE ÉLASTIQUE D'UN MILIEU PULVÉRULENT (1)

par F. SCHLOSSER

Ingénieur des Ponts et Chaussées

Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique

Depuis quelques années, de nombreuses études expérimentales et théoriques ont été entreprises dans le domaine des routes pour faire progresser le calcul des chaussées. En 1962, et dans ce but, a été créée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées une section de Mécanique des Chaussées.

Que ce soit pour étudier l'effet des charges statiques ou l'effet des charges dynamiques, une première approche consiste à supposer que les différentes couches d'une chaussée, ainsi que le sol sur lequel elle repose, sont constitués de matériaux parfaitement élastiques. Avec cette hypothèse les calculs sont déjà complexes. Mais il reste à savoir dans quel domaine ces matériaux sont effectivement élastiques.

De nombreux auteurs ont étudié la réversibilité des déformations dans un sol. Mais l'élasticité demande plus qu'une simple réversibilité des déformations.

Pour l'étude qui a été faite au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique, nous avons choisi un matériau élémentaire qui entre souvent dans la constitution d'une chaussée : le sable.

Tout d'abord un matériau naturel, le sable de Fontainebleau dont la densité varie entre 1,40 et 1,72 puis un matériau tout-à-fait artificiel constitué par un sable de billes de verre de granulométrie assez serrée (150μ , 250μ) et de densité comprise entre 1,70 et 1,85.

Pour effectuer les expériences, on a utilisé un appareil du type « triaxial ».

L'échantillon est de section circulaire $\phi = 10$ cm et a 20 cm de hauteur.

Il est soumis à une pression axiale p et une pression latérale q pouvant varier entre 0 et 1 kg/cm², obtenue en faisant le vide à l'intérieur de l'échantillon.

La déformation axiale ϵ_1 est mesurée à l'aide de trois

comparateurs indiquant le 1/200 mm.

La déformation radiale ϵ_2 est obtenue en mesurant au moyen de deux microscopes, les écartements des extrémités de deux bandes en clinquant d'acier entourant l'échantillon (fig. 1).

Les faces de chaque bande sont recouvertes d'une couche de billes de verre qui empêche le frottement du clinquant contre la gaine de l'échantillon et le ruban de caoutchouc qui enserre la bande de clinquant.

1 ÉTUDE DE L'ÉLASTICITÉ EN UN POINT DU PLAN (p, q)

a) Déformation sous pression isotrope.

Les courbes de déformations sous pression isotrope montrent (fig. 2) :

— une quasi-réversibilité de la déformation dans la direction de remplissage;

— un écrouissage dans les autres directions;

— une anisotropie dans les déformations, la déformation dans la direction de remplissage étant toujours la plus petite.

On retrouve un résultat déjà signalé par BIAREZ (1961).

La loi généralement admise pour la déformation dans la direction de remplissage $\epsilon_1 = K_1 \cdot \sigma^{\frac{2}{3}}$ est très bien vérifiée.

b) Déformations sous déviateur.

Les courbes contraintes déformations pour un déviateur montrent (fig. 3) qu'il y a toujours écrouissage. On peut définir, une fois le matériau écroui, un module de déformation E qui varie avec la pression hydrostatique p_H suivant une loi de la forme :

$$E = C \cdot p_H^n$$

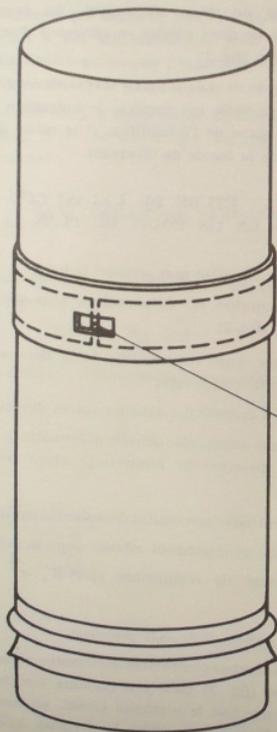
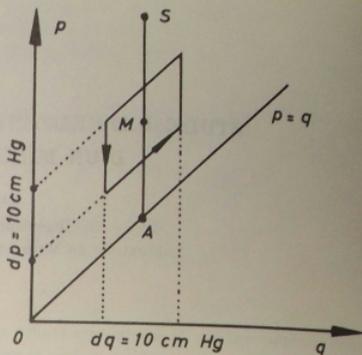
(1) Conférence au Groupe Français de Rhéologie le 18 mars 1965.

c) *Elasticité en un point.*

A partir d'un échantillon n'ayant subi aucune contrainte :

— une variation de pression isotrope suivant OA provoque un écrouissage du matériau. Sur ce chemin de contraintes les déformations sont alors approximativement réversibles (voir schéma ci-contre) ;

— l'application d'un déviateur AB crée elle aussi un écrouissage et au bout de quelques cycles les déformations sont à peu près réversibles.



Visée au microscope

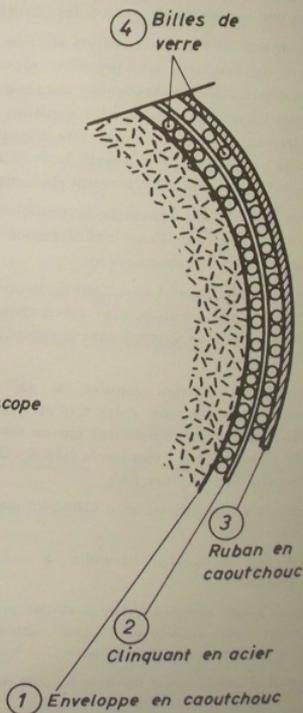


Fig. 1. — MESURE DE LA DÉFORMATION RADIALE

[34 cm Hg — 74 cm Hg]
 Sable de Fontainebleau $\gamma_a = 1,60$

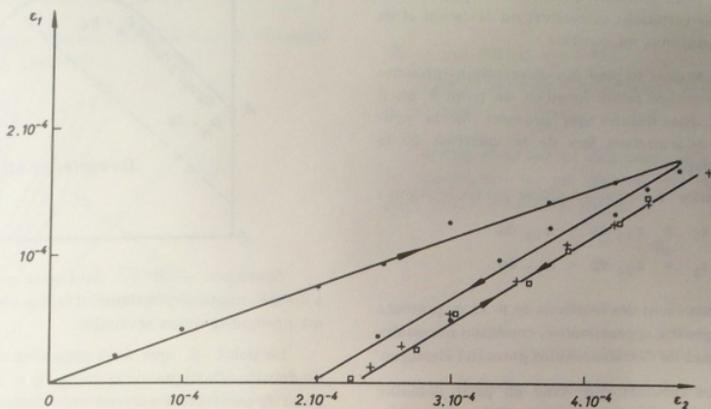


Fig. 2. — CYCLES DE PRESSION ISOTROPE

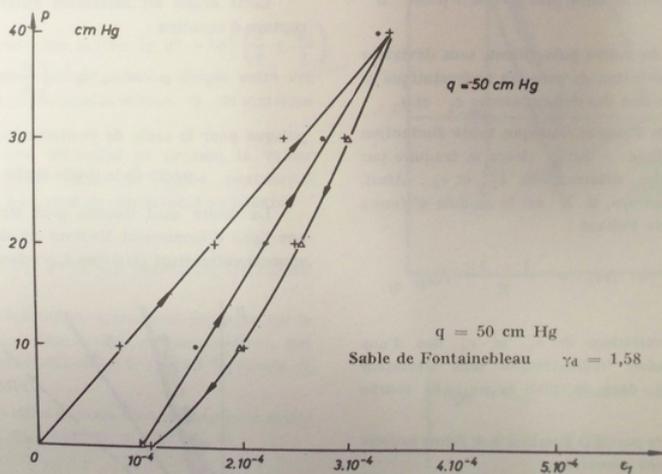


Fig. 3. — CYCLES DE DÉVIATEUR

Soit M un point de la droite $q = Cte$.

Si dans un petit domaine entourant le point M on décrit un cycle par variations successives du déviateur et de la pression hydrostatatique, on constate :

1° que le cycle dans le plan des déformations présente un écart à la fermeture faible jusqu'en un point S où il subit une nette discontinuité qui provient de la non-réversibilité des déformations lors de la variation de la pression hydrostatatique;

2° que la matrice $A = (a_{ij})$ définie par les relations :

$$\begin{cases} d\epsilon_1 = a_{11} dp + a_{12} dq \\ 2d\epsilon_2 = a_{21} dp + a_{22} dq \end{cases}$$

et dont les « éléments » sont des fonctions de p et q présente au point M une *symétrie approximative*, condition nécessaire d'élasticité découlant de l'existence d'un potentiel élastique.

On peut alors conclure que dans un petit domaine entourant tout point M, du segment AS, le milieu pulvérulent est approximativement élastique.

2 FRONTIÈRE D'ÉLASTICITÉ LIEU DES POINTS S

Étudions maintenant de façon plus précise le point S défini précédemment.

Sur l'échantillon du milieu pulvérulent, sous déviateur constant, toute augmentation de pression hydrostatatique se traduit par une diminution des déformations ϵ_1 et ϵ_2 .

Si nous sommes en domaine élastique, toute diminution de pression hydrostatatique $-\Delta p_H$ devra se traduire par une augmentation des déformations ϵ_1 et ϵ_2 . Ainsi, pour un échantillon *isotrope*, si E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson :

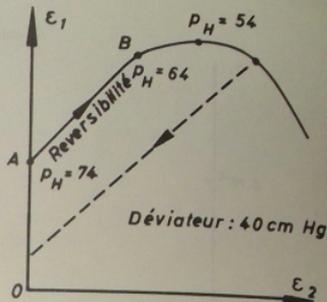
$$\Delta\epsilon_1 = \Delta\epsilon_2 = \Delta\epsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E} \Delta p_H$$

En notant les variations de ϵ_1 et ϵ_2 lors d'une diminution de pression hydrostatatique sous déviateur constant, on obtient dans le plan (ϵ_1, ϵ_2) la courbe ci-après.

Dans une première partie la courbe a une forme linéaire et les déformations sont *réversibles*.

Dans une deuxième partie ϵ_1 est d'abord stationnaire, puis décroît rapidement.

Les déformations ne sont plus réversibles pour ϵ_1 , et l'expérience montre qu'il y a *écrouissage*.



Remarque. — Si ϵ_1 dans cette expérience donne lieu à des déformations plastiques, il faut noter que, par contre, ϵ_2 est presque toujours réversible.

Le point S que nous prendrons comme point limite du domaine élastique sur la droite $q = Cte$ est donné par l'état de contraintes qui rend ϵ_1 stationnaire sur la courbe précédente.

Lieu des points S. Droite limite d'élasticité.

Tous les points S (tant qu'il n'y a pas eu écrouissage) se situent expérimentalement sur une droite, qu'on pourra appeler *droite limite d'élasticité*.

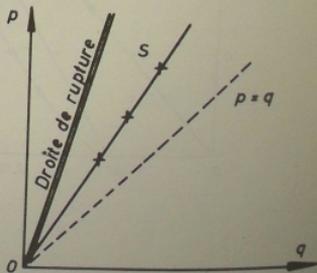
Cette droite est nettement différente de la droite de rupture d'équation :

$$p = q \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

puisque pour le sable de Fontainebleau étudié :

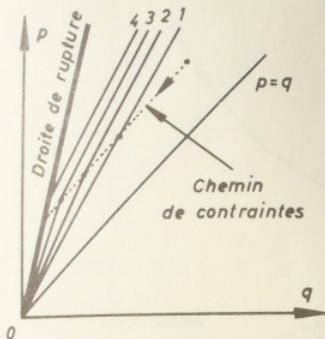
penne de la droite limite : 1,75.

La droite ainsi trouvée peut être considérée comme une ligne d'écoulement limitant un domaine élastique ou approximativement élastique à préciser.



MODE D'ÉCROUISSAGE DE LA DROITE LIMITE

La droite limite s'écroute parallèlement à elle-même suivant le schéma ci-dessous.



4 RELATION ENTRE DROITE LIMITE ET DROITE DE RUPTURE

On peut associer à la droite limite un angle φ_e défini par la relation :

pende de la droite limite dans le plan $(p, q) = \text{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_e}{2} \right)$
et chercher s'il n'existe pas de relation simple entre cet angle φ_e et l'angle de frottement interne φ du matériau étudié.

L'angle φ sera déterminé en prenant la valeur maximale du déviateur dans la courbe contrainte-déformation relative à un essai de cisaillement au triaxial.

VARIATIONS DE φ_e AVEC LA DENSITÉ INITIALE

La densité de l'échantillon a une forte influence sur la valeur de l'angle φ_e . Pour le sable de Fontainebleau, par exemple, dont la densité peut varier de 1,40 à 1,70, l'angle φ_e varie de 9° à 16° (fig. 4).

Pour le sable de billes de verre dont la densité est moins étalée (1,72 à 1,88), φ_e varie de 7° à 13° (fig. 5).

VARIATIONS DE φ AVEC LA DENSITÉ INITIALE

L'angle de frottement interne varie avec la densité initiale de l'échantillon.

Une loi généralement admise est :

$$\text{tg } \varphi = \frac{K}{e}$$

où e est l'indice des vides.

Pour le sable de Fontainebleau étudié :

$$K = 0,50 \quad e_{\text{max}} = 0,9 \quad e_{\text{min}} = 0,53.$$

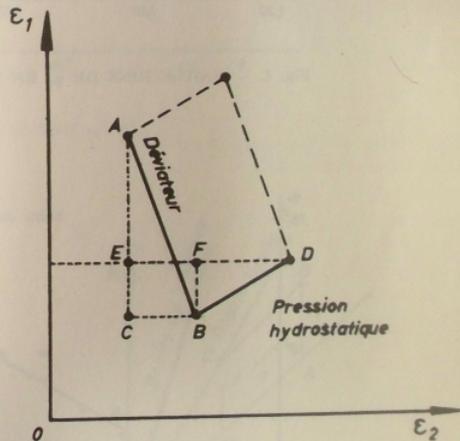
Si l'on porte sur un diagramme les valeurs de φ_e et les valeurs de φ on obtient très approximativement une droite d'équation (fig. 6) :

$$\varphi = 3 \varphi_e$$

CYCLE AUTOUR DU POINT M

Pression hydrostatique : $dp = dq = 10 \text{ cm Hg}$

Déviateur $dp = 10 \text{ cm Hg}$



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} = a_{12} \quad \text{Condition nécessaire d'élasticité} \\ AE = 2EF = 2CB \end{array} \right.$$

Sable de Fontainebleau

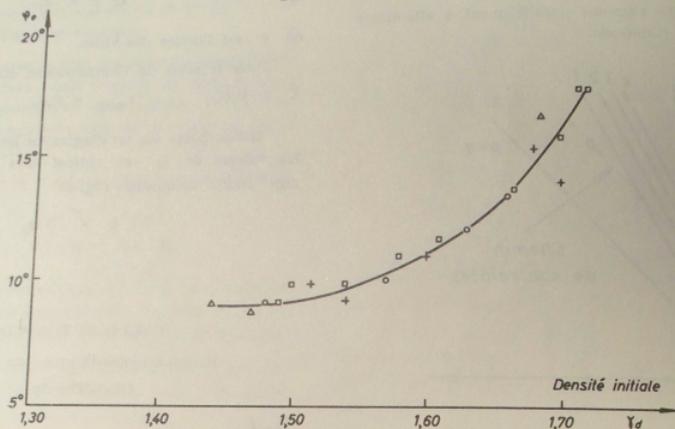


Fig. 4. — VARIATIONS DE φ_e EN FONCTION DE LA DENSITÉ INITIALE

Sable de billes de verre

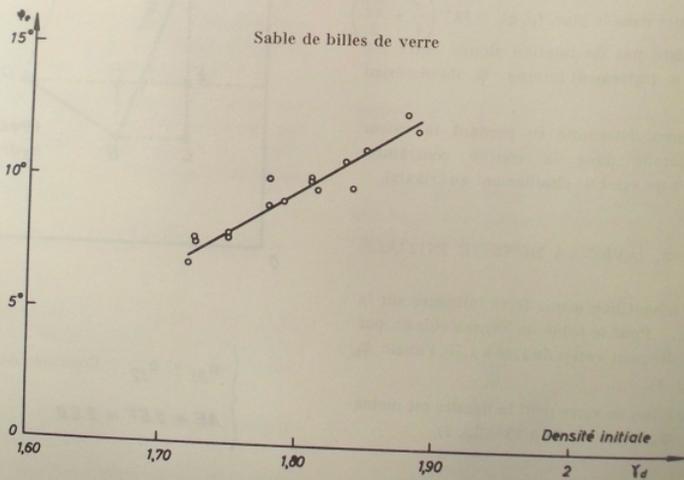


Fig. 5. — VARIATIONS DE φ_e EN FONCTION DE LA DENSITÉ INITIALE

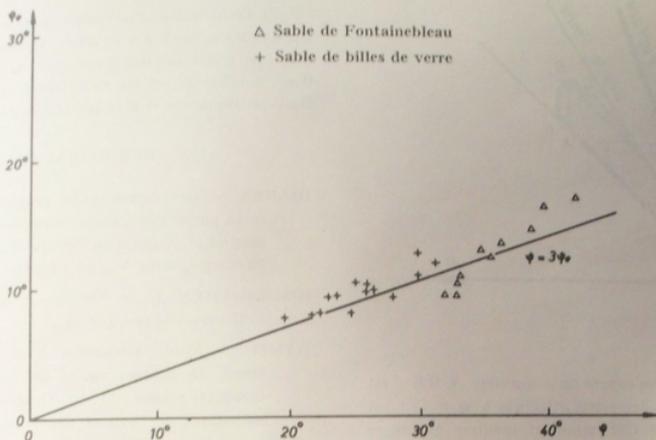


Fig. 6. — RELATION ENTRE φ_0 ET φ .

5 DOMAINE ÉLASTIQUE

Soit un échantillon du milieu pulvérulent qu'on ait écrasé par application :

- 1° d'une variation de pression isotrope (OA) ;
- 2° d'un déviateur de contraintes AB .

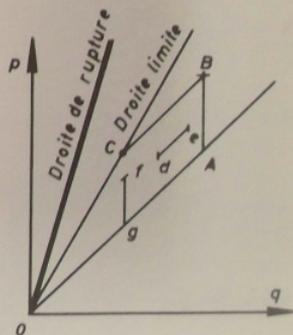
Dans un domaine OABC comme indiqué sur la figure ci-contre, l'expérience montre que le milieu est approximativement élastique.

En effet :

— sous déviateur constant, toute variation de pression hydrostatique donne des déformations réversibles (chemin *s d e s*) ;

— tout déviateur — tel que *f g* — crée des déformations approximativement réversibles ;

— à tout cycle fermé situé dans le domaine OABC correspond dans le plan (ϵ_1, ϵ_2) un cycle presque fermé ; et la matrice des coefficients $A = (a_{ij})$ présente une symétrie approximative.

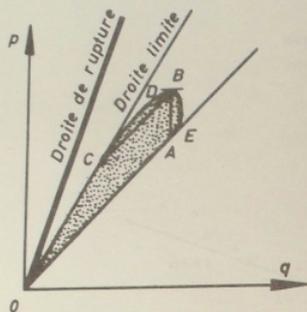


Limitation du domaine élastique.

La droite limite étant une ligne d'écoulement, la portion de droite OC est une frontière du domaine élastique.

D'autre part, le point B qui représente le maximum du déviateur appliqué est sur la frontière.

Il en résulte que la limite du domaine élastique (dans la portion de plan $p > q$) doit avoir l'allure de la ligne OCDBE.



Expérience.

a) La détermination exacte de la frontière CDB est difficile néanmoins des essais effectués à $q = \text{Cte}$ et quelques essais à $p = \text{Cte}$ semblent montrer qu'elle se situe très près de la droite BC.

b) De même des essais effectués en faisant varier la pression hydrostatique sous déviateur constant montrent que si l'influence du déviateur sur la réversibilité en pression

isotrope existe, elle est cependant faible et, par suite, les points A et E sont assez voisins.

CONCLUSION

Si l'échantillon d'un milieu pulvérulent, à l'appareil triaxial, a l'apparence d'un solide, les réactions de ce milieu sont loin d'être simples. Cependant, dans cette complexité, il est possible de mettre en évidence un certain caractère élastique du milieu et d'en préciser la limite.

BIBLIOGRAPHIE

- BIAREZ. — Remarques sur les propriétés mécaniques des corps pulvérulents (anisotropie, écrouissage, élasticité, plasticité). Cahier du Groupe français d'Études de Rhéologie, tome VI, n° 3 (1961).
- BISHOP et HENKEL. — The measurement of soil properties in the triaxial test (1957).
- DANTU. — Étude mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maximale. Comptes rendus du V^e Congrès International de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations, vol. 1, Paris (1961).
- MANDEL. — Séminaire de Plasticité (École Polytechnique) (1961).
- TAYLOR. — Fundamentals of soil mechanics (1948).

12. Etat de déformation (State of strain)

Ensemble des dilatations et des distorsions autour d'un point. Cet ensemble peut être représenté par un tenseur appelé tenseur des déformations.

13. Glissement.

Ce terme est employé pour désigner:

- a) Un déplacement relatif de deux corps ou de deux parties d'un corps, séparés par une surface, tel que les deux corps ou les deux parties restent en contact. Si la surface est un plan, le déplacement relatif est parallèle au plan (Equivalent anglais: slip).
- b) Une déformation dans laquelle le déplacement au voisinage d'un point est continu, parallèle à une direction fixe et proportionnel à la distance à un plan fixe qui contient cette direction. On dit aussi déformation de cisaillement. (Equivalent anglais: shear strain).
- c) La variation de l'angle formé par deux segments issus d'un même point, qui étaient perpendiculaires entre eux avant déformation. Il est préférable de dire dans ce cas: distorsion (Cf. 11a). (Equivalent anglais: angle of shear).

14. Cisaillement.

Ce terme est généralement employé dans le sens de contrainte tangentielle (Cf. 8), mais quelquefois aussi dans le sens de déformation par glissement continu (Cf. 13b). En conséquence, on recommande de préciser le langage en spécifiant: contrainte de cisaillement (cission) ou déformation de cisaillement (glissement continu).

15. Instantané (Instantaneous).

Qui a lieu en une durée inférieure au temps de réponse de l'appareillage utilisé.

16. Différé (Delayed)

Qui a lieu après écoulement du temps de réponse de l'appareillage utilisé.

17. Elasticité (Elasticity)

Tendance d'un corps à reprendre la forme et les dimensions qu'il avait avant une sollicitation, lorsqu'on supprime cette sollicitation.

18. Recouvrance (Recovery).

Diminution de la déformation résultant de la suppression de la sollicitation. La recouvrance globale est la somme des recouvrances instantanée et différée.

19. Déformation résiduelle au temps t. (Residual deformation).

Déformation qui persiste au temps t après disparition de la sollicitation.

20. Déformation permanente (Permanent deformation).

Limite vers laquelle tend la déformation résiduelle au bout d'un temps infini.