

**Cahiers du Groupe  
Français de Rhéologie**

**Tome V, Numéro 2**

**Juin 1979**

S O M M A I R E

- Introduction à la journée du 7 Décembre 1978,  
par R. COURTEL, p. 47.
- Mécanique de la rupture et lois de comportement,  
par D. FRANÇOIS, p. 49.
- Critères de rupture en conditions polymodales  
(modes I et II), par P. JODIN et G. PLUVINAGE, p. 59.
- Analogies entre problèmes d'adhésion et problèmes de  
rupture, par R. COURTEL, p. 71.
- Détermination expérimentale de l'intégrale de Rice  
critique  $V_c$  dans le bois de charpente, par  
A. AMEEN, P. MORLIER et G. VALENTIN, p. 81.

## INTRODUCTION A LA JOURNEE DU 7 DECEMBRE 1978

R. COURTEL

Comme l'an dernier, le Groupe Français de Rhéologie a proposé pour sujet de son colloque annuel l'étude d'un domaine où les aspects mécanique et thermodynamique des phénomènes sont nécessairement associés. L'irréversibilité de fait de la propagation d'une fissure traduit l'intervention de processus physiques qui ne peuvent évoluer que dans un seul sens, telle la déformation plastique. Le très grand intérêt des lois quantitatives déduites de l'application de la théorie de l'élasticité - où tout est réversible - ne doit pas faire négliger cette limitation permanente.

Or la distinction entre les modèles réversibles et irréversibles utilisés en rhéologie n'est pas toujours soulignée explicitement ; en mettant l'accent sur des lois de comportement local à caractère biunivoque, on s'expose à oublier que le phénomène rhéologique dans son ensemble est un puissant dissipateur d'énergie. Naturellement, un tel risque est exclu quand on considère les lois d'évolution, dépendant du temps.

Les rhéologues sont passés maîtres dans l'art de pratiquer, sous ces divers éclairages, l'examen de leurs problèmes. Vous aurez certainement l'occasion de vous en convaincre en suivant maintenant les conférenciers qui vont aller de la mécanique linéaire de la rupture, spécifique des corps fragiles, à la fissuration des pro- pergols composites, en passant intermédiairement par les bétons hydrauliques et le bois et par les problèmes d'adhésion de contact, qui se rattachent formellement à ceux de rupture.

NDLR. Les conférences présentées à ce colloque sont réparties dans deux numéros successifs (2 et 3) des Cahiers.

## MECANIQUE DE LA RUPTURE ET LOIS DE COMPORTEMENT

D. FRANCOIS, Directeur du Département de Génie Mécanique de l'UTC

### RESUME

Les champs de contrainte et de déformation à l'extrémité d'une fissure sont décrits dans des solides élastiques linéaires et non linéaires, dans des solides plastiques et dans des solides visqueux en utilisant des intégrales de contour, en particulier l'intégrale de Rice. Dans certaines conditions ces champs de contraintes et de déformations sont fonction d'un seul paramètre dont la valeur critique peut alors servir de critère de propagation de fissure.

### ABSTRACT

Stress and strain fields at the tip of a crack are described in linear elastic solids and non linear elastic solids, in plastic solids and in viscous solids using contour integrals, particularly Rice's integral. Under restricted conditions these stress and strain fields are function of a unique parameter the critical value of which can then be used as a crack propagation criterium.

### 1. INTRODUCTION

Pour qu'une fissure se propage il faut que deux conditions soient remplies : 1. les contraintes et déformations au voisinage de l'extrémité doivent être suffisantes pour déclencher les processus microscopiques de rupture ; 2. le taux d'énergie disponible dans la structure  $G$  doit être au moins égal à l'énergie de rupture  $G_R$ .

L'état des contraintes et des déformations à l'extrémité d'une fissure et la distribution d'énergie emmagasinée dans la structure et donc le taux d'énergie disponible dépendent des lois de comportement des matériaux. Pour résoudre les deux problèmes ci-dessus il faut de plus connaître le critère de rupture microscopique, c'est-à-dire l'état des contraintes et des déformations locales nécessaires pour déclencher les processus microscopiques de rupture.

Ces questions sont bien résolues pour un matériau complètement élastique (1) les solutions trouvées dans ce cas, peu réalistes en raison des très fortes concentrations de contrainte à l'extrémité d'une fissure, peuvent être étendues au cas où la zone qui est le siège de phénomènes non élastique est confinée, c'est-à-dire de faibles dimensions par rapport à la longueur de la fissure et aux dimensions de la structure. Les choses se compliquent si cette zone s'étend jusqu'à envahir tout le ligament en tête de fissure, c'est-à-dire toute la section restante. Beaucoup d'études ont été consacrées au cas de solides plastiques. Les solides visqueux sont moins bien connus.

Enfin les solides comme les céramiques ou le béton qui présentent un endommagement avec variation de volume et des lois de comportement complexes sont encore assez mal compris.

Nous nous limitons dans cet exposé aux problèmes plans (déformation plane, contrainte plane ou mode antiplan).

## 2. SOLIDE ELASTIQUE

2.1. Pour un solide élastique il est possible de définir un potentiel  $W$ . La déformation  $\epsilon_{ij}$  est donnée par :

$$\epsilon_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{et} \quad W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{kl} d\epsilon_{kl} \quad \dots \quad (2)$$

Pour un solide élastique linéaire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \dots \quad (3)$$

où  $C_{ijkl}$  sont les constantes d'élasticité et

$$W = (1/2) \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad \dots \quad (4)$$

Pour un solide élastique non linéaire on peut par exemple poser :

$$\epsilon_{ij} = (3/2) (\bar{\sigma} / \sigma_0)^{1/n-1} S_{ij} / \sigma_0 \quad (\text{c'est-à-dire } \bar{\sigma} = \sigma_0 \bar{\epsilon}^n) \dots (5)$$

où  $\bar{\sigma}$  est la contrainte équivalente ( $\bar{\sigma}^2 = (3/2) S_{ij} S_{ij}$ ) et  $S_{ij}$  le déviateur des contraintes, et  $\bar{\epsilon}$  la déformation équivalente. :

$$\bar{\epsilon}^2 = (2/3) \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$$

$$\text{Alors :} \quad W = [n/(n+1)] (\bar{\sigma} / \sigma_0)^{1/n} \bar{\sigma} = [1/(n+1)] \bar{\epsilon} \cdot \bar{\sigma} \dots (6)$$

2.2. Rice (2) a défini une intégrale de contour  $J$  :

$$J = \int_{\Gamma} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds \quad \dots \quad (7)$$

où  $\Gamma$  est un contour entourant l'extrémité de la fissure et parcouru dans le sens direct,  $t_i$  la contrainte appliquée sur le contour et  $u_i$  le déplacement (on suppose que les faces de la fissure ne sont pas chargées (figure 1)).

Cette intégrale possède la propriété fondamentale d'être indépendante du contour  $\Gamma$ . En effet, considérons (figure 2) deux contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_2$  étant parcouru dans le sens négatif. Nous avons :

$$J_1 = \int_{\Gamma} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds$$

$$J_2 = - \int_{\Gamma} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds$$

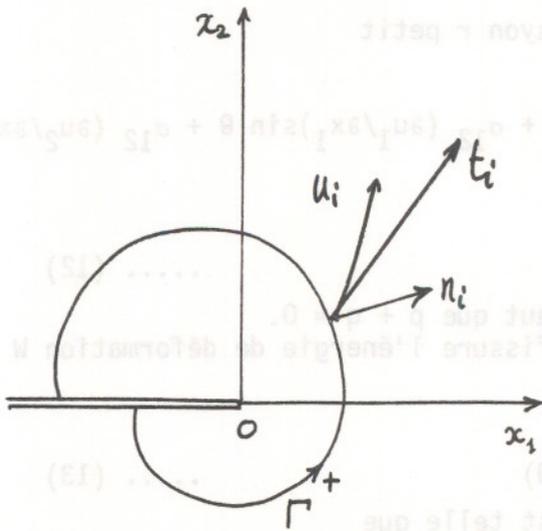


Figure 1

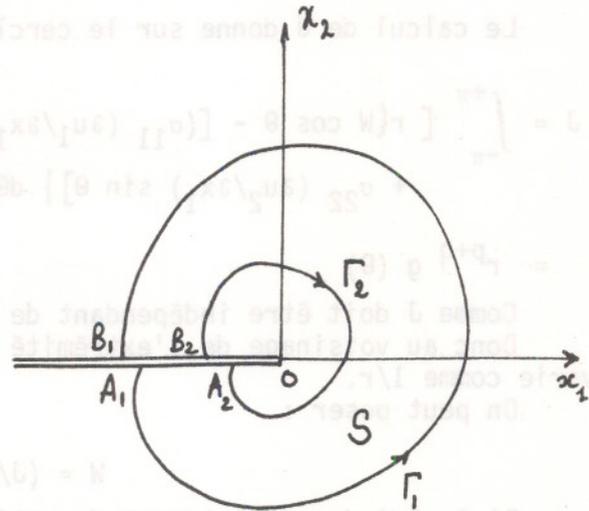


Figure 2

Comme les lèvres de la fissure ne sont pas chargées

$$\int_{A_1 B_1 B_2 A_2} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds = J_1 - J_2$$

Nous pouvons transformer l'intégrale de contour en une intégrale de surface à l'aide du théorème de Green et du théorème des travaux virtuels.

$$\int_{A_1 B_1 B_2 A_2} W dx_2 - t_i (\partial u_i / \partial x_1) ds = \int_S (\partial W / \partial x_1 - \sigma_{ij} \partial \epsilon_{ij} / \partial x_1) ds \dots (8)$$

Comme  $\partial W / \partial x_1$  d'après la formule (2) est égal à  $\sigma_{ij} \partial \epsilon_{ij} / \partial x_1$  cette intégrale est nulle et donc  $J_1 = J_2$ .

2.3. Le choix du contour  $\Gamma$  permet maintenant d'établir des relations entre les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité de la fissure et loin de celle-ci.

Choisissons comme contour un cercle de rayon  $R$  petit. Nous développons  $\sigma_{ij}$  et  $u_i$  en puissances croissantes de  $r$ . Au voisinage de l'extrémité nous ne retenons que le premier terme.

$$\sigma_{ij} = r^p \cdot A_{ij}(\theta) \dots (9)$$

$$u_i = r^q B_i(\theta)$$

Alors :

$$\epsilon_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i) = r^{q-1} C_{ij}(\theta) \dots (10)$$

et

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{kl} d\epsilon_{kl} = r^{p+q-1} f(\theta) \dots (11)$$

Le calcul de J donne sur le cercle de rayon r petit

$$J = \int_{-\pi}^{+\pi} [ r \{ W \cos \theta - [ (\sigma_{11} (\partial u_1 / \partial x_1) \cos \theta + \sigma_{12} (\partial u_1 / \partial x_1) \sin \theta + \sigma_{12} (\partial u_2 / \partial x_1) \cos \theta + \sigma_{22} (\partial u_2 / \partial x_1) \sin \theta ] \} d\theta$$

$$= r^{p+q} g(\theta) \quad \dots (12)$$

Comme J doit être indépendant de r il faut que  $p + q = 0$ .

Donc au voisinage de l'extrémité de la fissure l'énergie de déformation W varie comme  $1/r$ .

On peut poser :

$$W = (J/r) W(\theta) \quad \dots (13)$$

Si la loi de comportement du matériau est telle que

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 (\bar{\epsilon})^n \quad \epsilon_{ij} = (3/2) (\sigma/\sigma_0)^{1/n-1} S_{ij}/\sigma_0 \quad \dots (5)$$

$\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  étant la contrainte et la déformation équivalentes.

Comme W est proportionnel à  $\bar{\epsilon}^{n+1}$ , on en déduit :

$$\epsilon_{ij} = (J/\sigma_0 r)^{1/(n+1)} E_{ij}(\theta) \quad \dots (14)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 (J/\sigma_0 r)^{1/(n+1)} \Sigma_{ij}(\theta)$$

et

$$u_i = (Jr/\sigma_0)^{n/(n+1)} U_i(\theta)$$

Si le matériau est élastique linéaire on retrouve la singularité de contrainte en  $r^{-1/2}$ .

Rice et Rosengren ainsi que Hutchinson ont calculé les fonctions  $E_{ij}(\theta)$ ,  $\Sigma_{ij}(\theta)$ ,  $U_i(\theta)$ , (3, 4).

Le résultat remarquable est que les champs de contraintes et de déformation au voisinage de l'extrémité d'une fissure quelconque ne sont fonction que d'un seul paramètre : J.

2.4. Il est physiquement impossible que l'énergie de déformation augmente indéfiniment au voisinage de l'extrémité de la fissure. Dans cette région le calcul fait en supposant les déformations petites n'est pas valable. La déformation é-mousse l'extrémité de la fissure et des endommagements de diverses sortes apparaissent. Il existe donc une zone perturbée où se produisent des phénomènes non réversibles. Néanmoins si ses dimensions sont assez petites, les résultats précédents restent convenables à l'extérieur de cette zone. Il faut pour cela que  $J/\sigma_0$  ne soit pas trop grand. Les règles pratiques de l'ASTM reviennent à exiger une dimension de ligament au moins égale à 25 fois la taille de la zone perturbée. Même si alors les champs de contraintes et de déformations sont inconnus à l'intérieur de cette zone le chargement de sa frontière extérieure n'est fonction que de J. C'est l'approximation de la zone perturbée confinée, (small scale yielding approximation).

2.5. Dans un solide élastique linéaire l'intégration des équations de l'équilibre en se limitant au premier terme du développement en puissances de r donne les formules bien connues :

$$\sigma_{ij} = (K_I/2\pi r) f_{ij}(\theta) + \dots \quad \dots \quad (15)$$

en mode I d'ouverture de fissure, par exemple.  $K_I$  est le facteur d'intensité de contrainte.

L'intégration de  $J$  sur un cercle de rayon petit conduit alors aux relations :

$$\begin{aligned} J &= K_I^2 (1 - \nu^2)/E && \text{en déformation plane} \\ J &= K_I^2/E && \text{en contrainte plane} \end{aligned} \quad \dots \quad (16)$$

où  $E$  est le module d'Young  
et  $\nu$  le coefficient de Poisson

$J$  est alors égal au taux de restitution d'énergie  $G = -dP/da$  (ou force d'extension de fissure)  $P$  est l'énergie potentielle et  $a$  la longueur de la fissure.

Dans un solide élastique non linéaire, on peut démontrer que  $J$  est égal au taux de restitution d'énergie (1, 2).

$$J = -dP/da \quad \dots \quad (17)$$

Ainsi avec un tel matériau, si la zone perturbée est confinée, il est possible de caractériser les champs de contraintes et de déformations en tête de fissure à l'aide du seul paramètre  $J$ , égal au taux de restitution d'énergie, mesurable par exemple par la méthode de la compliance (5). Cette méthode consiste à comparer les énergies potentielles  $P_1, P_2 \dots P_i$  du solide étudié comportant des fissures de longueurs différentes  $a_1, a_2 \dots a_i$ .

2.6. Si dans ces solides la rupture survient pour une valeur critique  $\sigma^*$  de la contrainte locale (ou de la déformation, ou de l'énergie) d'après la formule (17) une fissure se propage pour une valeur critique de  $J$

$$J_C = \sigma_0 \rho (\sigma^*/\sigma_0)^{(n+1)/n} \quad \dots \quad (18)$$

où  $\rho$  est une distance caractéristique, fonction de la structure du matériau. Il faut en effet pour que la rupture survienne que la contrainte atteigne localement sa valeur critique  $\sigma^*$  sur une distance suffisante en relation par exemple avec la taille du grain, ou la distance entre inclusions, ou la distance entre granulats etc...

Dans un matériau élastique linéaire

$$J_C = G_C = K_{IC}^2 (1 - \nu^2)/E \text{ ou } (1 - \nu^2) \sigma^{*2}/E \quad \dots \quad (19)$$

Il est alors indifférent d'exprimer le critère de rupture en terme de  $J$ , de  $G$  ou de  $K$ .

La formule (14) indique également que l'écartement de fissure  $\delta = 2u_2$  peut être reliée aux critères de rupture précédents.

D'une façon générale :

$$J = m \sigma_0 \delta \quad \dots \quad (20)$$

où  $m$  est un facteur géométrique. D'après la formule (14) pour que  $m$  soit indépendant du coefficient de consolidation  $n$  il faudrait mesurer  $\delta$  à une distance de l'extrémité de la fissure égale à  $(J/\sigma_0)^{1/n}$

### 3. SOLIDE PLASTIQUE

#### 3.1. Un matériau plastique obéit à une loi de comportement différentielle

$$d\epsilon_{ij}^p = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\lambda \quad \dots \quad (21)$$

L'énergie de déformation  $W$  n'est pas seulement fonction des déformations actuelles mais aussi de toute leur évolution antérieure.  $W$  est alors fonction explicite de  $x_1$  et il n'est pas prouvé que l'intégrale (8) est nulle.

Pourtant si les trajets de chargement sont radiaux et monotones, l'équation (21) peut être intégrée

$$\epsilon_{ij}^p = (3/2) (\bar{\sigma}/\sigma_0)^{1/n-1} S_{ij}/\sigma_0 \quad \dots \quad (22)$$

et le comportement du solide plastique ne se distingue pas de celui du solide élastique non linéaire, (formule 5).

On retrouve alors les propriétés d'indépendance de  $J$  par rapport au contour d'intégration et une distribution de contraintes et de déformations dans la zone plastique proche de l'extrémité donnée par les formules (14). Mais ces résultats supposent des trajets de chargement radiaux au voisinage de l'extrémité de la fissure. Pour vérifier si cette hypothèse est bonne divers auteurs (6, 7) ont calculé les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure par des méthodes numériques en utilisant la théorie différentielle de la plasticité. En général il est effectivement bien vérifié que  $J$  est indépendant du contour d'intégration. Mais il faut insister sur de larges incertitudes qui subsistent quand la plasticité a envahi tout le ligament : suivant la géométrie du système la contrainte  $\sigma_{11}$  peut être très différente et le plus ou moins grand taux de confinement ainsi obtenu peut masquer totalement la variation prédite par le premier terme du développement en puissance de  $r$ . Ainsi la présence de frontières proches de l'extrémité de la fissure et celle de chargements biaxiaux posent des questions qui ne sont pas clairement résolues.

Une autre difficulté dans les corps plastiques est qu'il n'est plus possible de démontrer comme pour les corps élastiques que  $J = -dP/da$ , le taux de restitution d'énergie. En effet, l'énergie du système est pour ces corps fonction du chemin parcouru et la variation d'énergie potentielle quand la fissure se propage d'une petite quantité  $\delta a$  n'est pas forcément égale à la différence des énergies potentielles de deux solides dont l'un possède une fissure de longueur  $a$  et l'autre une fissure de longueur  $a + \delta a$ .

En dépit de ces difficultés d'ordre théorique, beaucoup d'expériences ont été faites sur des corps plastiques pour voir si la valeur critique de  $J$  pouvait constituer un critère de rupture. Les résultats sont probants, au moins quand la rupture se fait par clivages. Alors  $J_C$  mesuré sur des éprouvettes de faibles dimensions, dans le domaine plastique, donne la même valeur que  $G_C$  mesuré sur des éprouvettes de grandes dimensions en plasticité confinée (5).

Un autre paramètre proposé est l'écartement critique de fissure  $\delta_C$ . Il est relié à  $J_C$  par une formule analogue à la formule (20). Mais le facteur  $m$  est fonction de la géométrie de la pièce (il vaut par exemple 2 pour une éprouvette de flexion 3 points).

#### 4. SOLIDE VISQUEUX

4.1. Si le solide visqueux obéit à une loi de comportement de type Norton

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \partial \Omega / \partial \sigma_{ij} \quad \Omega = (S_{ij} S_{ij})^m \quad \dots \quad (23)$$

où  $\dot{\epsilon}_{ij}$  est la vitesse de déformation, Bui propose alors une intégrale indépendante du contour

$$\dot{I} = \int_{\Gamma} -\Omega dx_2 + \dot{u}_j n_k (\partial \sigma_{jk} / \partial x_1) ds \quad \dots \quad (24)$$

Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que  $\Omega$  varie comme  $1/r$  près de l'extrémité de la fissure.

$$\Omega = (- \dot{I}/r) W(\theta) + \dots \dots \dots (25)$$

Il en résulte que

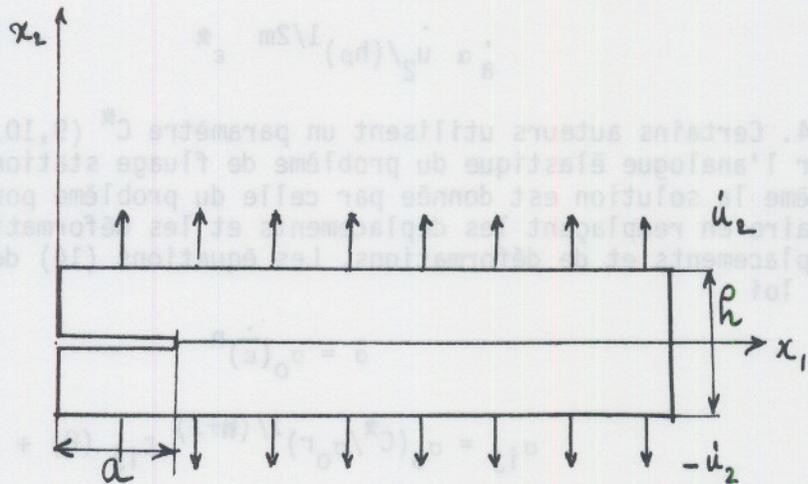
$$\sigma_{ij} = (- \dot{I}/r)^{1/2m} \Sigma_{ij}(\theta) + \dots \dots \dots (26)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (- \dot{I}/r)^{1-1/2m} \dot{E}_{ij}(\theta) + \dots$$

$$\dot{u}_i = (- \dot{I}r)^{1-1/2m} \dot{U}_i(\theta) + \dots$$

Par ailleurs  $\dot{I}$  est un taux d'énergie complémentaire (plus exactement de puissance complémentaire) mesurable par des méthodes de complaisance.

Figure 3



4.2. L'exemple simple (figure 3) de la bande de grande largeur aux bords de laquelle est imposée une vitesse de déplacement  $\dot{u}_2$ , permet d'illustrer cette théorie. Le calcul de  $\dot{I}$  sur un contour suivant les bords de l'éprouvette donne :

$$\dot{I} = - \Omega h \dots \dots \dots (27)$$

comme  $\Omega = [(3/2) \sigma_{22}^2]^m$  et que  $\dot{\epsilon}_{22} = \dot{u}_2/h = (3/2)^m 2m (\sigma_{22})^{2m-1} \dots$  (28)

$$\dot{I} = - (2/3)^{1/(2m-1)} (1/2m)^{2m/(2m-1)} (\dot{u}_2)^{2m/(2m-1)} (h)^{-1/(2m-1)} \dots (29)$$

et  $\sigma_{ij} \propto (\dot{u}_2/h)^{1/(2m-1)} (1/rh)^{1/2m} \dots \dots \dots (30)$

et  $\delta \propto \dot{u}_2 h^{-1/2m} r^{(2m-1)/2m} \dots \dots \dots (31)$

La vitesse d'écartement de fissure est proportionnelle à la vitesse de déplacement des bords de l'éprouvette.

4.3.  $\dot{\epsilon}$  serait donc un paramètre qui pourrait caractériser la rupture. La vitesse de fissuration  $\dot{a}$  serait reliée à  $\dot{\epsilon}$ . Si par exemple la capacité de déformation du matériau était  $\epsilon^*$

$$\int_0^{tr} \dot{\epsilon}_{ij} dt = \epsilon^* \quad \dots (32)$$

la vitesse de propagation de la fissure serait telle que la déformation en un point atteindrait  $\epsilon^*$  quand l'extrémité de la fissure ne serait plus qu'à une distance  $\rho$  de ce point,  $\rho$  étant fonction du matériau. L'intégration de l'équation (26) donne alors :

$$\epsilon^* = \int_{-\infty}^{\rho} (-\dot{I}/r)^{1-1/2m} \dot{\epsilon}_{ij}(\theta) dr/\dot{a} \quad \dots (33)$$

soit

$$\dot{a} \propto (-\dot{I})^{1-1/2m} \rho^{1/2m} / \epsilon^* \quad \dots (34)$$

Dans l'exemple précédent on aurait :

$$\dot{a} \propto \dot{u}_2 / (h\rho)^{1/2m} \epsilon^* \quad \dots (35)$$

4.4. Certains auteurs utilisent un paramètre  $C^*$  (9,10, 11, 16). Ils se fondent sur l'analogie élastique du problème de fluage stationnaire (12). Dans un tel problème la solution est donnée par celle du problème pour un corps élastique non linéaire en remplaçant les déplacements et les déformations par les vitesses de déplacements et de déformations. Les équations (14) donnent pour le corps visqueux de loi

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 (\dot{\epsilon})^n \quad \dots (36)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 (C^*/\sigma_0 r)^{1/(n+1)} \Sigma_{ij}(\theta) + \dots \quad \dots (37)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = (C^*/\sigma_0 r)^{n/(n+1)} \dot{\epsilon}_{ij}(\theta) + \dots$$

$$\dot{u}_i = (C^* r/\sigma_0)^{n/(n+1)} \dot{u}_i(\theta) + \dots$$

avec

$$C^* = - dP^*/da \quad \dots (38)$$

$P^*$  étant l'analogie de l'énergie potentielle en remplaçant les déplacements par les vitesses de déplacement.

En fait  $C^*$  est égal à  $-I$  bien que le principe de calcul soit différent (noter que  $2m = (n+1)/n$ ).

4.5. Enfin Shapery (13, 14, 15) a proposé une théorie pour les corps visqueux non linéaires dans le cas où la zone visqueuse est confinée dans un matériau élastique. Il aboutit à une vitesse de propagation de fissure qui est fonction du facteur d'intensité de contraintes (c'est-à-dire de  $J$ ) et l'exposant de la loi de fluage  $n'$

$$\dot{a} \propto K_I^{2(1+1/n')} \quad \dots (39)$$

où  $n'$  est l'exposant de la loi  $D(t) = D_1 t^{n'}$  où  $D$  est la complaisance en fluage.

## 5. CONCLUSION

Dans les solides élastiques linéaires ou non linéaires et les solides visqueux en fluage stationnaire les champs de contraintes et de déformations à l'extrémité d'une fissure sont fonction d'un seul paramètre, le taux de restitution d'énergie (ou de puissance) potentielle. Une valeur critique de ce paramètre peut alors être utilisée comme critère de propagation de fissure. Ce résultat peut être étendu aux cas où la zone perturbée en tête de fissure de petites dimensions reste confinée. Il semble encore possible dans des situations de plasticité étendue de ramener le problème à un problème d'élasticité non linéaire et d'étendre donc les résultats précédents à ce cas.

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout particulièrement BUI dont les suggestions m'ont été très précieuses.

## BIBLIOGRAPHIE

1. H.D. BUI, Mécanique de la rupture fragile, Masson, Paris (1978)
2. J. RICE in Fracture, 2, Academic Press, New York (1968)
3. J. RICE et J.F. ROSENGREN, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968) 1
4. J.W. HUTCHINSON, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968) 13
5. G. SANZ, rapport IRSID
6. J.D.G. SUMPTER et C.E. TURNER, J. Mech. Eng. Sci., 18 (1976) 97
7. C.F. SHIH, H.G. DE LORENZI, W.R. ANDREWS, R.W. VAN STONE and J.P.D. WILKINSON, "Methodology for plastic fracture" Fourth Quaterly Report by General Electric Company to Electric Power Research Institute (June 6, 1977)
8. H.D. BUI, Communication privée
9. J.F. LANDES et J.A. BEGLEY, ASTM.STP 590 (1976) 128
10. G.A. WEBSTER, Conf. on Mechanics and Physics of Fracture Inst. Phys., Cambridge (1975)
11. M.P. HARPES et E.G. ELLISON, J. Strain Anal., 12 (1977) 167
12. F.K.G. ODOVIST, Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture, Clarendon Press, Oxford (1974)
13. R.A. SHAPERY, Int. J. of Fracture, 11 (1975) 141
14. R.A. SHAPERY, Int. J. of Fracture, 11 (1975) 369
15. R.A. SHAPERY, Int. J. of Fracture, 11 (1975) 549
16. H.P. VAN LEEUWEN, Eng. Fract. Mech., 9 (1977) 951

Il donne selon les auteurs des résultats satisfaisants avec les aciers. Par contre nous avons trouvé des écarts trop importants avec le bois.

Ainsi  $a_0$  sera déterminé à partir des complaisances expérimentales et de la formule [11].

$$\frac{\delta}{P} = \frac{8 \alpha^3}{E^* B H^3} \left[ 1 + \frac{H^2}{\alpha^2} \right]$$

avec  $E^* = E$  en contraintes planes.

$$= \frac{E}{1 - \nu^2} \text{ en déformation planes}$$

$E$ , module d'Young,

$\nu$ , coefficient de Poisson.

Si nous supposons que le module  $E^*$  est inconnu dans la direction du chargement, il est possible de déterminer  $a_0$  et  $E^*$  simultanément en utilisant deux longueurs de fissures.

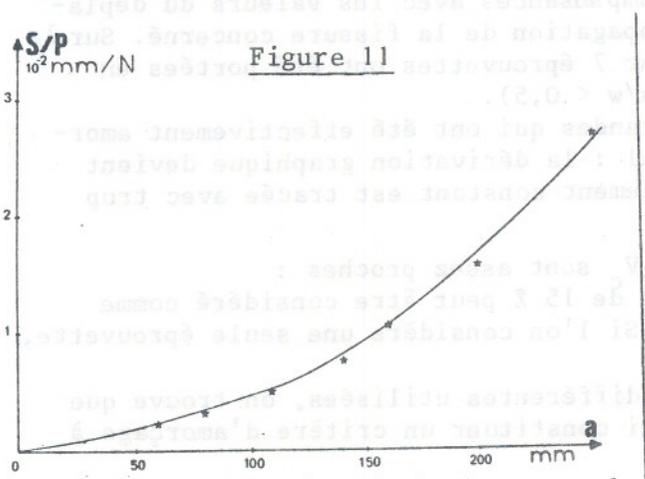


Figure 11

Complaisance fonction de la longueur de fissure.

Points expérimentaux. Courbe théorique  
 $a_0 = 80 \text{ mm}$  ;  $E = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$

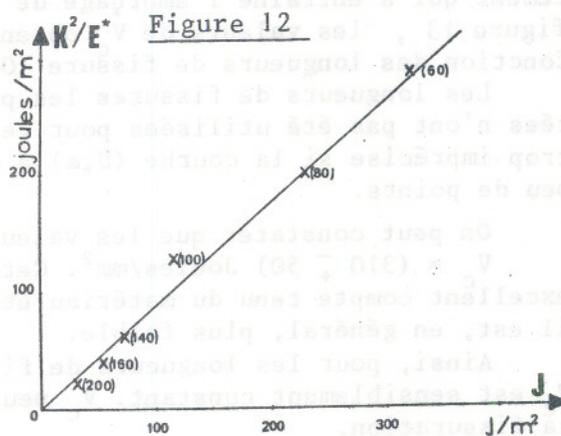


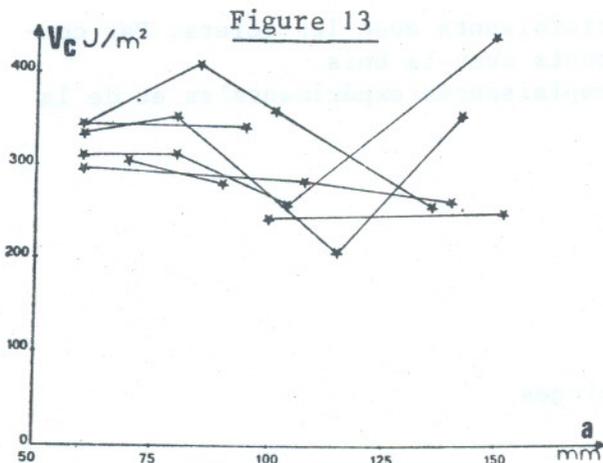
Figure 12

Comparaison de  $K$  et  $J$  dans le domaine élastique (Longueurs de fissures entre parenthèses).

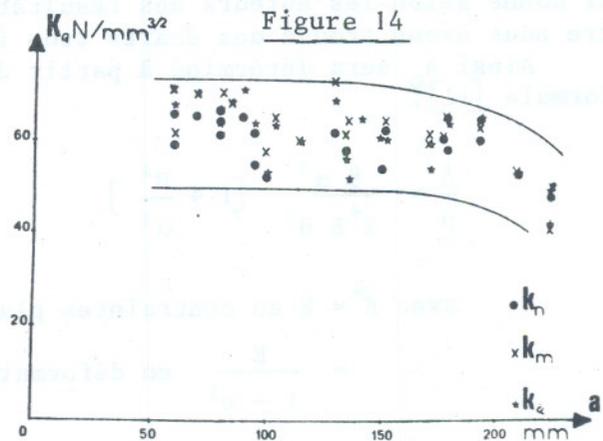
La figure 11 permet de voir le bon accord des complaisances expérimentales et théoriques ajustées. Les valeurs de  $E^*$  obtenues sur toutes les éprouvettes sont voisines des modules trouvés en flexion 3 points.

On démontre, en élasticité que  $G = J(\text{ou } V) = \frac{K_I^2}{E}$  en mode I.

La figure 12 montre la coïncidence de  $V$  et  $K_I^2 / E$  pour les différentes longueurs de fissure. Néanmoins  $V$  est en général un peu supérieur (10 %).



Valeurs expérimentales de  $V_c$  en fonction de la longueur de fissure et différentes éprouvettes.



Valeur expérimentale du facteur d'intensité de contrainte critique .

#### 4.2. Détermination de $V_c$

Nous avons appliqué la méthode des complaisances avec les valeurs du déplacement qui a entraîné l'amorçage de la propagation de la fissure concerné. Sur la figure 13, les valeurs de  $V_c$  obtenues sur 7 éprouvettes ont été portées en fonction des longueurs de fissure ( $0,2 < a/w < 0,5$ ).

Les longueurs de fissures les plus grandes qui ont été effectivement amorcées n'ont pas été utilisées pour le calcul : la dérivation graphique devient trop imprécise si la courbe  $(U, a)$  à déplacement constant est tracée avec trop peu de points.

On peut constater que les valeurs de  $V_c$  sont assez proches :

$V_c = (310 \pm 50)$  Joules/mm<sup>2</sup>. Cet écart de 15 % peut être considéré comme excellent compte tenu du matériau étudié. Si l'on considère une seule éprouvette, il est, en général, plus faible.

Ainsi, pour les longueurs de fissure différentes utilisées, on trouve que  $V_c$  est sensiblement constant.  $V_c$  peut ainsi constituer un critère d'amorçage à la fissuration.

#### 4.3. Détermination de $K_c$

En utilisant l'expression de  $K$  donnée plus haut et en effectuant la correction de longueur  $a_0$ , nous avons essayé plusieurs critères de définition de la charge critique, soit  $P_Q$ .

. Soit en utilisant une méthode dérivée de la norme AFNOR ou ASTM appliquée aux aciers [15]. C'est la méthode utilisée par [3]. Elle consiste à partir d'une courbe  $P$ , ouverture de fissure (COD). On choisit alors l'intersection de la courbe  $(P, COD)$  et de la droite de pente inférieure à 5 % à la pente de la zone linéaire de la courbe  $(P, COD)$  comme valeur de  $P$  critique, soit  $P_N$  cette valeur et  $K_N$  la détermination de  $K$  correspondante.

. Soit en utilisant le maximum de la courbe  $(P, COD)$ . Soient  $P_M$  et  $K_M$  les valeurs correspondantes.

. Soit en utilisant la force à l'amorçage, soit  $P_A$  déterminée par le système électrique.  $K_A$  est la valeur correspondante.

Ces courbes sont toutes portées figure 14. Quelle que soit la méthode de détermination de  $K_Q$ , on constate qu'il y a recouvrement des résultats. La moyenne est voisine de  $60 \text{ N mm}^{-3/2}$ . Mais de plus  $K_Q$  varie avec la profondeur de fissure dès que  $a/w > 0,4$ .

Dans tous les cas on a vérifié le critère classique :

$$a \text{ ou } B > 2,5 \frac{K_Q^2}{\sigma_Y^2}$$

En prenant  $K_Q \sim 60 \text{ N mm}^{-3/2}$  et  $\sigma_Y \sim 20 \text{ N/mm}^2$  on a,  $a$  ou  $B > 20 \text{ mm}$ , ce qui est largement respecté. Il ne s'agit donc pas d'une zone plastique trop importante. Pour cette valeur de  $a/w$  nous ne pensons pas non plus à un effet d'extrémité.

#### CONCLUSION.

Nous nous sommes attachés, pour un modèle d'exprouvette DCB à déterminer les facteurs d'intensité de contrainte  $K$  et les valeurs expérimentales de l'intégrale de Rice  $V$  ainsi que leurs valeurs critiques.

Dans le domaine linéaire élastique, on a trouvé que les valeurs de  $K$  pourraient être déterminées à l'aide de la formule élastique corrigée. La variation de complaisance en fonction de la longueur de fissure calculée à l'aide de cette correction coïncide avec la courbe expérimentale pour toutes les longueurs envisagées.

On a montré qu'une relation linéaire entre  $V$  et  $K^2/E$  existait bien dans ce domaine.

Dans le domaine élastique plastique, les valeurs de  $K_Q$  trouvées en utilisant divers critères de propagation ne semblent pas très significatives :  $K_Q$  varie avec la profondeur de la fissure et ne doit pas être identifié à  $K_{Ic}$ .

Par contre, les valeurs de  $V_c$  trouvées par la méthode des complaisances ne montrent pas de variation par rapport à la longueur de fissure.

Ainsi  $V_c$  pourrait constituer une caractéristique intrinsèque du matériau et le procédé que nous avons développé une méthode pour la déterminer.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] WALSH P.F.  
Int. Jour. Solids Structure Vol 7 n° 10 - 1971 cité par [3]
- [2] PORTER A.W.  
Forest Product Journal Vol 14 (8) - 1964 Cité par [13]
- [3] BARRETT J.D. Effect of crack front width on fracture toughness of Douglas Fir - Engineering Fracture Méchanics Vol 8 - 1976
- [4] SCHNIEWIND A.P et D.E. LYON  
A fracture mechanics approach to the tensile strength perpendicular to grain of dimension lumber. Wood Sci Technology - 7 (1) - 1973
- [5] RICE J.R.  
Mathematical analysis in the mechanics of fracture  
Fracture Tome II édité par H. Liebowitz - 1968 - Academie Press.
- [6] ATLURI et M NAKAGAKI .  
J. Intégral for strain hardening materials in ductile fracture problems.  
AJAA Journal - Vol 15 n° 7 - 1977.
- [7] BEGLEY J.A. et LANDES J.D.  
ASTM - STP 514 - 1972
- [8] D. MIANNAY et A. PELLISSIER - TANON  
Principe des mesures de ténacité basées sur l'intégrale  $J$  et le concept de l'énergie équivalente. Colloque GAMI PARIS 1977 -

- [9] BLUHM J.I.  
Fracture Arrest - Fracture Tome V déjà cité.
- [10] C. HUET  
Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et divers matériaux. Cahiers du G.F.R. Tome III (3) - 1973
- [11] E.J. RIPLING S. MUSTOVOY et R.L. PATRICK  
Measuring fracture toughness of adhesive joints.  
Materials research and standards - Vol 4 (3) - 1964
- [12] A.S. BLICBAU et D.J. COOK  
Effect of strain rate on the fracture of wood  
South Wales University report - Australie 1975.
- [13] A.G. DEBAISE, A.W. PORTER et R.E. PENTONEY  
Morphology and mechanics of wood fracture.  
Materials : Research and standards - Vol. 6 (10) - 1966
- [14] M.F. KANNINEN  
An augmented double cantilever beam model for studying crack propagating and arrest - Int Jour. Fracture Vol 9 (1) - 1973
- [15] AFNOR NFA 03.180  
Détermination du facteur d'intensité de contrainte critique des aciers - 1974 -

## CRITERES DE RUPTURE EN CONDITIONS POLYMODALES (MODE I + II) (+)

P. JODIN et G. PLUVINAGE (++)

### RESUME

Dans cet article, on passe en revue les principaux critères de propagation d'une fissure sollicitée en modes I et II. On analyse successivement les critères dits statiques et les critères dits énergétiques. L'étude des résultats expérimentaux publiés par différents auteurs et de nos propres résultats montre que la distinction entre les différents critères est délicate.

### ABSTRACT

The most important criteria related to the propagation of a crack subjected to a mode I and II loading are reviewed in this paper. Static and energetic criteria are successively analysed. From the study of published experimental results and of our own results, it is shown that discrimination between these criteria is difficult.

### 1. INTRODUCTION

Si la majeure partie des études de la mécanique de la rupture porte sur une fissure sollicitée en mode I, c'est à dire par ouverture des lèvres de la fissure, les situations rencontrées réellement en construction mécanique sont souvent plus complexes. Autrement dit, il peut arriver assez fréquemment que la fissure ne soit pas seulement sollicitée en mode I, mais en mode I + II, c'est à dire par ouverture des lèvres de la fissure et par glissement droit des lèvres l'une sur l'autre, ou encore en mode I + III, c'est à dire en superposant à l'ouverture un glissement vis, ou même en mode I + II + III.

Il est donc légitime de se demander comment vont être modifiés les critères habituels de propagation en mode I. La charge de propagation sera-t-elle modifiée? La direction de propagation sera-t-elle toujours celle du plan de la fissure?

De nombreux auteurs se sont penchés sur ce problème suivant quatre approches différentes :

- une approche dite statique qui repose sur l'analyse des contraintes au voisinage du fond de fissure avant rupture.

---

(+) Communication au Groupe Français de Rhéologie, le 7 décembre 1978.

(++) Laboratoire de Fiabilité Mécanique - Université de METZ  
Ile du Saulcy - 57000 METZ

- une approche cinématique portant sur la déformation maximum.
- une approche portant sur l'état final, c'est à dire la configuration obtenue après propagation.
- une approche énergétique reposant sur un bilan énergétique au moment de la propagation.

## 2. CRITERES DE PROPAGATION

Le tableau de la page suivante /1/ présente l'ensemble des critères trouvés dans la littérature et classés comme indiqué au paragraphe 1. On ne relève pas moins de 35 formulations différentes, bien que certaines d'entre elles partent d'une analyse identique et ne diffèrent que par quelques détails seulement.

Il serait fastidieux d'analyser chaque critère en détail. Nous nous limiterons à quelques uns d'entre eux parmi les plus caractéristiques.

### 2.1. Critères statiques

#### 2.1.1. ERDOGAN et SIH dit SIH I /2/

Ce critère repose sur deux hypothèses :

- la fissure se propage dans une direction radiale
- elle se propage dans la direction où la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximum et le cisaillement  $\tau_{r\theta}$  est nul. (Figure 1)

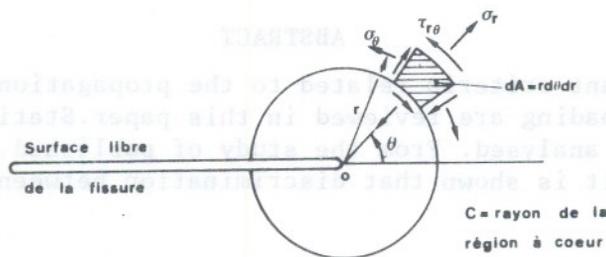


Figure 1 : Etat des contraintes en fond de fissure

Si l'on met les contraintes sous la forme :

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} [\cos(\theta/2)(1 + \sin^2(\theta/2))] + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} [1 - 3\sin^2(\theta/2)] \sin(\theta/2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos^3(\theta/2) - \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} [3\sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2)]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2) + \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\theta/2) [1 - 3\sin^2(\theta/2)]$$

La deuxième condition s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \sin\theta_0 + (3\cos\theta_0 - 1)\cot\beta = 0$$

**CRITERES STATIQUES**

CROISSANCE NORMALE  
à la DIRECTION  
de TRACTION MAXIMALE

- croissance horizontale
- CHIU et al.

CONTRAINTE NORMALE  
MAXIMALE

- ERDOGAN - SIH
- WANG TZU CHIANG
- EWING - WILLIAMS
- FINNIE - SAITH
- MAC CLINTOCK
- formulations numériques

COURBE INTRINSEQUE  
de RESISTANCE  
MOLECULAIRE

- MANDEL

CROISSANCE NORMALE  
à la LIGNE de CONTR.  
AINTE TANGENTIELLE  
MAXIMALE

- ROUHI et al.

**CRITERES PORTANT SUR L'ETAT FINAL**

- C.N. MAX APRES DEVIATION
- SYMETRIE LOCALE APRES DEVIATION

- KALTHOFF
- KITAGAWA et al.



**CRITERES CINEMATIQUES**

DEFORMATION NORMALE MAXIMALE

**CRITERES ENERGETIQUES**

DENSITE D'ENERGIE  
DE DEFORMATION  
MINIMALE

- SIH
- SIH - KIPP
- SIH - CHAH
- KIPP - SIH
- FRANCIS - KO
- JAYATILAKA et al.

DENSITE RADIALE  
MAXIMALE de la  
FORCE D'EXTENSION  
DE FISSURE

- TIROSH

FORCE APPARENTE  
D'EXTENSION  
DE FISSURE

- STRIFORS
- BOISSENOT DUBOIS

TAUX D'ENERGIE DE Fissuration  
MAXIMAL

**FORMULATIONS CLASSIQUES**

NUSSER BILBY CARDEW	HUSSAIN et al	PALANISWAMY - KNAUSS	ANDERSON et COUGHLAN - BARR
		DUDUKALENKO - ROMALIS	HELLEN - BLACKBURN
		WANG TZU CHIANG	VEDA et al.

Formulation du Gradient

ONERA

La figure 2 définit les angles  $\theta$  et  $\beta$ .

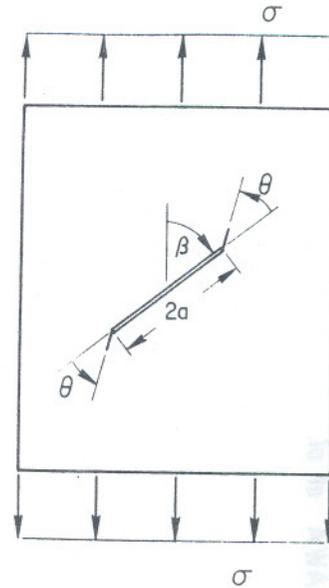


Figure 2 : Plaque a entaille inclinée. Définition des angles  $\theta$  et  $\beta$ .

Soit en mode I pur ( $\beta = 90^\circ$ )  $\theta_0 = 0$   
 en mode II pur ( $\beta \rightarrow 0$ )  $\theta_0 = -70,5^\circ$

On remarque que ce dernier résultat est indépendant de la nature du matériau et, en particulier, du coefficient de POISSON.

Dans la direction de propagation ainsi définie, on peut écrire le critère sous la forme :

$$\sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = \text{cte} = K_{Ic}$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\text{soit } \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \left[ K_I \cos \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] = \text{cste.}$$

Cette équation montre qu'on peut représenter le critère par une courbe dans le plan  $K_I, K_{II}$ .

### 2.1.2. Modification du critère de SIH I

A l'aide d'expériences menées sur du PMMA, WILLIAMS et EWING /3/ mettent en défaut le critère de SIH pour des angles  $\beta$  faibles. Ils font remarquer que le second terme de la distribution des contraintes n'est plus négligeable quand le

rapport  $\alpha = \frac{2c}{a}^{1/2} \simeq 0,1$ . A l'expression de la contrainte tangentielle ils rajoutent donc la contrainte parallèle à la fissure,  $\sigma \sin^2 \theta \cos^2 \beta$ . FINNIE et SAITH /4/ rajoutent la contrainte,  $-\sigma \sin^2 \beta \sin^2 \theta$ , normale à la fissure. ST JOHN et SIGETY /5/ prennent en compte le tenseur complet en rajoutant le cisaillement,  $2\sigma \sin \beta \cos \beta \sin \theta \cos \theta$ .

Cependant, ces modèles, s'ils sont représentatifs de la réalité dans un certain nombre de cas, sont criticables dans la mesure où ils conduisent tous à des contraintes infinies en fond de fissure.

### 2.1.3. Courbe intrinsèque de MANDEL /6/

Suivant une idée de BARRENBLATT, MANDEL précise que la théorie de l'élasticité linéaire n'est plus applicable au voisinage du fond de fissure. Il montre que les contraintes peuvent se mettre sous la forme :

$$r^{1/2} \sigma_{rr} = A \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) - B \left( 5 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$r^{1/2} \sigma_{\theta\theta} = A \left( \cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) - 3B \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$r^{1/2} \sigma_{r\theta} = A \left( \sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) + B \left( \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

où A et B représentent les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ . La discontinuité du milieu au voisinage du fond de fissure s'exprime par le fait que la fissure se propagera lorsqu'on aura une relation caractéristique de la matière entre A et B :  $k(4A, 4B) = 0$ .

Si on pose  $r^{1/2} \sigma_{\theta\theta} = f(\theta) = x$  et  $r^{1/2} \sigma_{r\theta} = g(\theta) = y$  on obtient dans le plan (x, y) une courbe qui est analogue à un diagramme de Mohr et dont la forme dépend du rapport A/B (Figure 3).

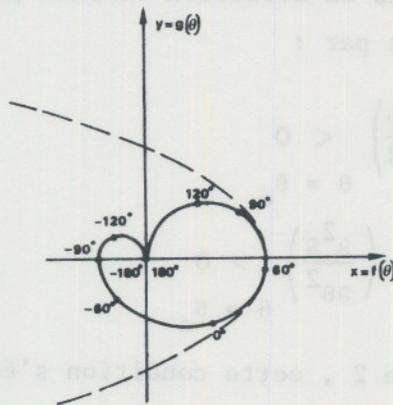


Figure 3 : Courbe de Mohr calculée à l'aide des relations de Mandel  $A = \frac{1}{2}$   $B = \frac{1}{2}$  et courbe intrinsèque

MANDEL montre que la courbe  $k(4A, 4B) = 0$  peut avoir la forme indiquée en pointillés sur la figure 3, le rayon au sommet de cette courbe étant, peut-être, une mesure de la fragilité (sans que ce point soit démontré). Il y a rupture lorsque la courbe de Mohr rencontre la courbe intrinsèque. Cette rencontre n'a pas lieu nécessairement sur l'axe Ox.

## 2.2. Critères énergétiques

### 2.2.1. Critère de SIH II /7/

Soit le système bidimensionnel représenté à la figure 1. SIH montre que l'énergie de déformation stockée dans l'élément dA, dans un matériau élastique est égale à :

$$dW = \frac{1}{2} \left[ \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] dA$$

où u et v sont les déplacements.

Dans un système tridimensionnel, cette énergie peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{r} \left[ a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} K_{III}^2 \right]$$

$$\text{soit } \frac{dW}{dV} = \frac{S}{r}$$

La quantité  $S$  définit le champ de densité d'énergie de déformation. SIH montre qu'elle est indépendante du système de référence  $S(K_I, K_{II}, K_{III}) = S(K_I', K_{II}', K_{III}')$

Lorsqu'on applique une charge à un corps fissuré, si  $P$  est l'énergie potentielle par unité de volume,  $U$  l'énergie de déformation par unité de volume, on a :

$$P = -U = -\frac{S}{r}$$

A ce stade, SIH formule deux hypothèses :

- Hypothèse 1 : la fissure va se propager dans la direction de la densité d'énergie potentielle maximum.

- Hypothèse 2 : la densité d'énergie de déformation atteint une valeur critique  $S_{cr}$  au moment de la rupture, dans la direction définie par l'hypothèse 1.

La première hypothèse se traduit par :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_{\theta = \theta_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right)_{\theta = \theta_0} < 0$$

$$\text{soit} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_{\theta = \theta_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right)_{\theta = \theta_0} > 0$$

Dans le cas général de la figure 2, cette condition s'écrit :

$$2(1 - 2\nu) \sin(\theta_0 - 2\beta) - 2\sin[2(\theta_0 - \beta)] - \sin 2\theta_0 = 0$$

Les figures 4 et 5 donnent les résultats obtenus en tension et en compression. On remarque que la nature du matériau intervient par le coefficient de Poisson  $\nu$ .

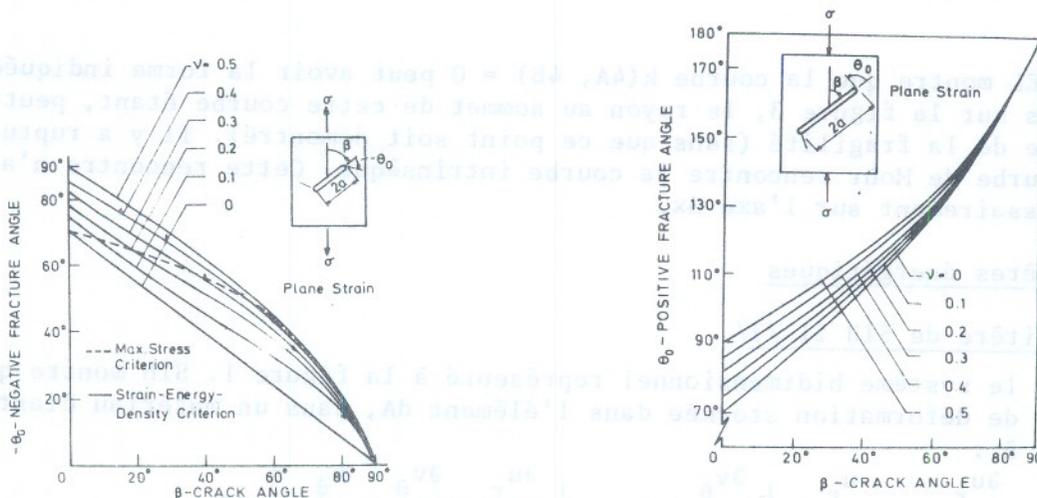


Figure 4 : Angle de propagation  $\theta$  en fonction de  $\beta$  en tension /7/

Figure 5 : Angle de propagation  $\theta$  en fonction de  $\beta$  en compression /7/

### 2.2.2. Force généralisée d'extension de fissure

Ce concept présenté par STRIFORS /8/ a été développé plus récemment par BOISSENOT et DUBOIS /9/.

On considère un volume  $V$  limité par une surface  $S$  contenant une surface singulière  $\Sigma$  (Figure 6) .

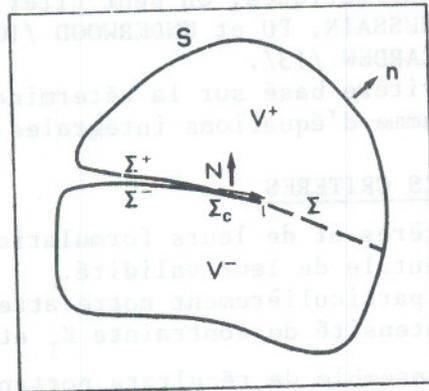


Figure 6 : Définition de la surface singulière  $\Sigma$  /8/

Pour que la propagation ait lieu, on fait les hypothèses suivantes :

- Hypothèse 1 : La croissance possible d'une fissure à l'instant  $t$  s'effectue le long de tout le front de fissure avec une vitesse  $\omega$  dans la direction  $l$ .
- Hypothèse 2 : On associe à la surface singulière  $\Sigma$  de  $V$  et à chaque processus dynamiquement admissible une énergie surfacique  $\Gamma$  relative à  $V$  :

$$\Gamma = \int_{\Sigma} \gamma \, dS \quad \text{où } \gamma \text{ est l'énergie spécifique de surface.}$$

L'application du premier principe de la thermodynamique permet d'écrire :

$$\dot{E} + \dot{\Gamma} + \dot{K} = P + Q$$

où  $E$  est l'énergie interne,  $\Gamma$  l'énergie surfacique,  $K$  l'énergie cinétique,  $P$  la puissance des forces extérieures et  $Q$  le taux de chaleur reçue par  $V$ .

On fait ensuite l'hypothèse de découplage suivante :

- Hypothèse 3 : On admet que l'énergie surfacique n'est pas affectée par les phénomènes thermiques.

On peut alors effectuer le calcul de la force  $f_1(V)$

$$f_1(V) = l_{\alpha} \int_V \sigma_{i\beta} u_{i,\beta\alpha} \, dV - l_{\alpha} \int_S T_i u_{i,\alpha} \, dS$$

A ce stade, on peut introduire une loi de comportement du matériau dans l'expression de  $f_1(V)$ , ce qui permet d'effectuer des calculs en situation élastoplastique, par exemple.

Les hypothèses suivantes permettent de déterminer la direction et la charge de propagation.

- Hypothèse 4 : La direction  $l$  pour laquelle  $f_1$  atteint sa valeur maximum est la direction préférée de croissance de la fissure.

La croissance dans cette direction se produit lorsque la force  $f_1$  atteint une valeur critique  $f_{cr}$ .

2.3. Autres critères

En dehors des variantes déjà citées du critère de SIH I, on peut rappeler, pour mémoire, la théorie de la croissance normale à la direction de traction maximale. Ce cas peut se rencontrer dans certains matériaux.

Parmi les autres critères énergétiques, on peut citer le taux de relaxation d'énergie G maximum étudié par HUSSAIN, PU et UNDERWOOD /10/, HELLEN et BLACKBURN /11/, NUISMER /12/ et BILBY ET CARDEW /13/.

L'ONERA propose enfin un critère basé sur la détermination du gradient des contraintes à l'aide d'un programme d'équations intégrales /1/.

3. VERIFICATION EXPERIMENTALE DES CRITERES

Devant l'abondance des critères et de leurs formulations, il est légitime de tenter une vérification expérimentale de leur validité.

Deux grandeurs retiendront particulièrement notre attention : l'angle de propagation et les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ .

La figure 7 représente un ensemble de résultats portant sur des aciers et des alliages légers. On remarque que l'ensemble des critères (y compris le critère de la croissance horizontale) donne des résultats satisfaisants pour les angles compris en 90° et 30° environ. Entre 0° et 30°, les critères divergent davantage, mais les résultats sont plus dispersés et plus rares. Cela tient aux difficultés expérimentales liées à la géométrie particulière de l'éprouvette à entaille centrale inclinée. Il est donc délicat d'infirmer ou de confirmer une théorie à partir de la simple mesure de l'angle de propagation. Tout au plus peut-on indiquer que telle théorie est vérifiée par tel matériau sans pouvoir généraliser à l'ensemble des matériaux de construction.

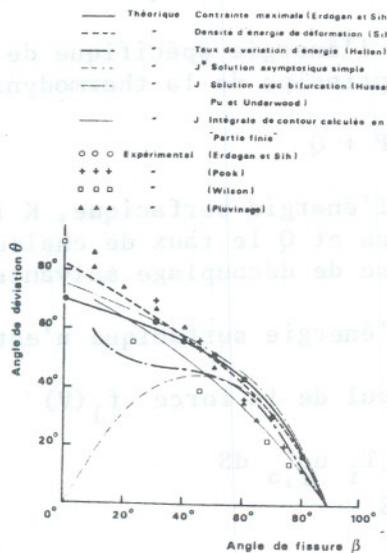
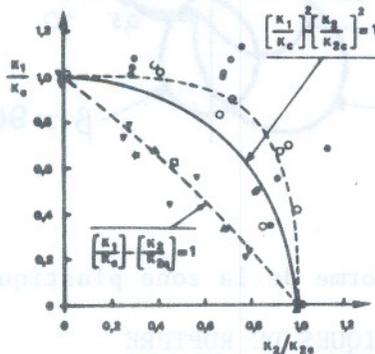


Figure 7 : Angle de propagation  $\theta$  en fonction de  $\beta$ . Points expérimentaux et courbes théoriques.

Lorsqu'on reporte dans un plan  $\frac{K_I}{K_{IC}}$ ,  $\frac{K_{II}}{K_{IIC}}$  les points provenant du calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  à partir des données expérimentales, on peut chercher s'il n'existe pas une relation du type  $\left[ \frac{K_I}{K_{IC}} \right]^u + \left[ \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right]^v = 1$  entre ces points. Elle exprime

la dépendance entre  $K_I$  et  $K_{II}$  et, plus  $u$  et  $v$  sont élevés, plus cette dépendance est faible. A la limite  $u$  et  $v$  infinis expriment que, pour le matériau considéré,  $K_I$  et  $K_{II}$  sont indépendants l'un de l'autre. Une approche de ce type a été tentée /14/ (Figure 8). On voit que la corrélation est délicate à déterminer, étant donné le faible nombre de points expérimentaux.



- Lockheed
- △ Lockheed
- Pook
- Westinghouse
- ▼ Shah
- \* Boeing

Figure 8 : Courbes  $\left[ \frac{K_I}{K_{IC}} \right]^u + \left[ \frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right]^v = 1$

Dans un matériau fortement orthotrope comme le bois, les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  mesurés dans la direction longitudinale (LT ou LR) doivent être indépendants l'un de l'autre. Le résultat apparaît très clairement dans le travail de WILLIAMS et BIRCH /15/ où figure une courbe du type étudié.

En fait, on peut essayer de trouver, pour chaque matériau la valeur des exposants  $u$  et  $v$  et définir ainsi une courbe caractéristique. On rejoint ici l'idée de la courbe intrinsèque de MANDEL /6/. Par exemple, les essais reportés par SHAH /16/ donnent une valeur de  $u$  et  $v$  égale à 1 pour l'acier utilisé.

4. ETUDE DE LA ZONE PLASTIQUE

En contraintes planes, POOK /17/ montre que la dimension de la zone plastique, en appliquant le critère de VON MISES est donnée par la relation :

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma_y} \left[ K_I^2 \cos^2 \frac{2\theta}{2} (1 + 3\sin^2 \frac{2\theta}{2}) + K_I K_{II} \sin \theta (3\cos \theta - 1) + K_{II}^2 \{ 3 + \sin^2 \frac{2\theta}{2} (1 - 9\cos^2 \frac{2\theta}{2}) \} \right]$$

En déformations planes on a :

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma_y} \left[ K_I^2 \cos^2 \frac{2\theta}{2} \{ (1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{2\theta}{2} \} + K_I K_{II} \sin \theta \{ 3\cos \theta - (1 - 2\nu) \} + K_{II}^2 \{ 3 + \sin^2 \frac{2\theta}{2} \{ (1 - 2\nu)^2 - 9\cos^2 \frac{2\theta}{2} \} \} + 3K_{III}^2 \right]$$

La figure 9 /17/ montre diverses formes de zones plastiques calculées avec ce modèle.

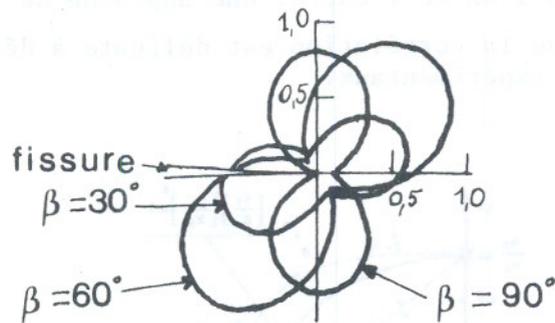


Figure 9 : Variations de la forme de la zone plastique en fonction de l'angle  $\beta$  /17/

### 5. ETUDE DES FACIES MICROSCOPIQUES DE RUPTURE

Dans le cas d'une rupture ductile on note la présence de cupules. Un schéma dû à BEACHEM /18/ (Figure 10) montre le mécanisme de formation des cupules et comment leur forme peut renseigner sur la nature du mode de rupture. L'interprétation des microfractographies est toutefois délicate car, comme le montre explicitement le schéma, il faut bien examiner les deux surfaces de rupture correspondantes.

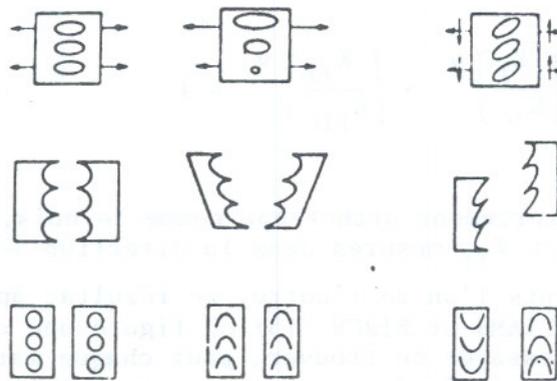


Figure 10 : Mécanisme de formation des cupules /18/

### 6. CONCLUSION

Cette étude a montré qu'il existait de nombreux critères permettant de prévoir la propagation d'une fissure soumise à un mode mixte I + II. Ces critères sont assez représentatifs de la réalité lorsque la proportion de mode II par rapport au mode I est assez faible. Par contre, leur utilisation devient plus hasardeuse dans le cas inverse. Il semble d'ailleurs que chaque matériau ait un comportement propre dans le domaine où le glissement droit est important. Des expériences sont donc nécessaires dans ce cas, mais elles présentent des difficultés qui rendent leur interprétation assez délicate.

## BIBLIOGRAPHIE

- /1/ Ph. GILLES, Thèse de Docteur Ingénieur (1978).
- /2/ F. ERDOGAN et G.C. SIH *Journal of Basic Engineering* , 85D (1963) 519-527.
- /3/ J.G. WILLIAMS et J.D. EWING, *International Journal of Fracture Mechanics*, 8 (1972), 441-446.
- /4/ I. FINNIE et A. SAITH, *International Journal of Fracture*, 9 (1973)484-486.
- /5/ C. ST JOHN et P. SIGETY, Rapport de contrat DGRST n° 74.7.1129.
- /6/ J. MANDEL, "Contraintes à l'extrémité d'une fissure en élasticité plane", Ecole Polytechnique, 20 février 1968.
- /7/ G.C. SIH, *International Journal of Fracture*, 10 (1974) 3, 305-321.
- /8/ H.C. STRIFORS, *International Journal of Solids Structures*, 10 (1974)1389-1404.
- /9/ J.M. BOISSENOT et M. DUBOIS, *Journal de Mécanique Appliquée*, 1 (1977)2, 133-157.
- /10/ M.A. HUSSAIN, S.L. PU et J. UNDERWOOD, *Fracture Analysis*, ASTM STP 560 (1974) 2-28.
- /11/ T.K. HELLEN et W.S. BLACKBURN, *International Journal of Fracture*, 11 (1975) 605-617.
- /12/ R.S. NUISMER, *International Journal of Fracture*, 11 (1975) 245-250.
- /13/ B.A. BILBY et C.E. CARDEW, *International Journal of Fracture*, 11 (1975)708-712.
- /14/ P. JODIN et G. PLUVINAGE, *Mécanique, Matériaux, Electricité* (1978)338,101-112
- /15/ J.G. WILLIAMS et M.W. BIRCH, *Cracks and Fracture*, ASTM STP 601 (1976)125-137.
- /16/ R.C. SHAH, *Fracture Analysis*, ASTM STP 560 (1974) 29-52.
- /17/ L.P. POOK, *Engineering Fracture Mechanics*, 3 (1971) 205-218.
- /18/ C.D. BEACHEM, *Metallurgical Transactions* 6A (1975) 377-382.

## ANALOGIES ENTRE PROBLEMES D'ADHESION ET PROBLEMES DE RUPTURE (\*)

par R. COURTEL, C.N.R.S. Paris

## RESUME

On rappelle pour commencer les bases de l'identité formelle des problèmes d'adhésion et des problèmes de rupture fragile dans le cadre de l'approche élastique.

On montre sur un exemple simple (problème de Johnson du contact des sphères élastiques adhésives), comment les notions classiques en mécanique de la rupture (par exemple  $G$ ,  $K_I$ , C.O.D., ainsi que le formalisme de Griffiths de minimum d'énergie) se retrouvent en mécanique de l'adhésion. L'influence de la rugosité de surface sur la force d'adhérence est analysée. La nécessité du recours à la théorie de Barenblatt pour l'interprétation des résultats expérimentaux est démontrée. Le cas de l'évolution du contact des corps viscoélastiques en régime quasi-statique est brièvement discuté.

## ABSTRACT

The formal identity between elastic adhesion problems and linear fracture mechanics is evoked, and exemplified in the case of the Johnson's problem : the contact of spheres. Classical results, as  $G$ ,  $K_I$ , C.O.D., are thus obtained by the Irwin's instead of Griffith's method, but Barenblatt's theory is necessary to interpret some experimental results.

The influence of surface roughness on adherence is analyzed. The case of viscoelastic bodies in dynamic quasi-static regime is briefly discussed.

## 1. INTRODUCTION

K.L. Johnson et al. [1] ont présenté en 1971 une théorie de l'adhésion entre sphères élastiques basée sur le principe du minimum d'énergie. Kendall [2,3] a indiqué l'analogie avec la théorie de Griffith de la rupture fragile [4]. Maugis et al. [5,6,7] ont approfondi ce sujet. L'objet du présent exposé est de montrer, sur des exemples simples, que l'identité des méthodes de la mécanique de l'adhésion et de la mécanique linéaire de la rupture est totale dans le cadre de l'approche élastique, mais que cette situation sous-entend certaines bases physiques qu'il y a intérêt à dégager parce qu'elles sont à la base de différences profondes dans le comportement des matériaux réels.

---

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie, 7 décembre 1978.

## 2. IDENTITE DES SOLUTIONS DANS LE CADRE DE L'APPROCHE ELASTIQUE [5,6]

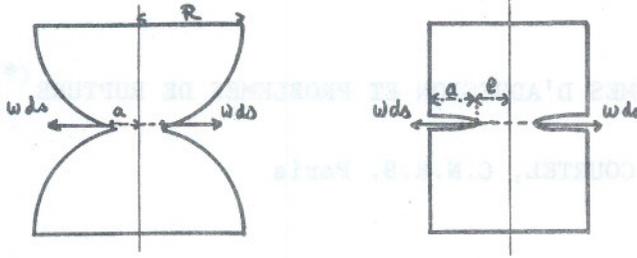


Schéma 1 :

$$A = \pi a^2$$

$$dA = 2\pi a da$$

Schéma 2 :

$$A = \pi d^2 - \pi (d-a)^2$$

$$dA = 2\pi (d-a) da$$

Fig. 1. Schémas des problèmes d'adhésion et de rupture

dants qui déterminent entièrement l'état de déformation : A aire de contact (schéma 1) ou aire de la fissure (schéma 2) et  $\delta$ , rapprochement des solides.  $W_s = -(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}) \cdot A = -\omega A$  (schéma 1) ou  $+\omega A$  (schéma 2).

$W_{cin}$  = énergie cinétique de l'ensemble des points matériels constituant le système ;  $W_{cin}$  est supposée fonction de A,  $\delta$ ,  $\dot{A}$ ,  $\dot{\delta}$ , et ne pas dépendre explicitement du temps.  $\omega$  énergie de surface de Dupré, n'est fonction que de A seul.

On notera que la relation  $dW_s = \omega dA$ , qui exprime le travail des forces d'interaction moléculaire lors d'un déplacement  $da$  correspondant à  $dA$ , est la seule information, concernant ces forces, que l'on introduit dans l'équation qui traduit le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour un déplacement réel :

$$Pd\delta = dW_{el} + dW_s + dW_{cin} \quad (1)$$

On peut toujours interpréter (1) comme concernant un système matériel purement élastique, non adhésif, qui serait soumis à deux systèmes de force extérieures : la charge P, répartie sur la face supérieure, et une tension,  $\omega$  appliquée sur la périphérie du contact, horizontale et dirigée vers l'extérieur. On peut écrire, en mettant en évidence le travail des forces appliquées :

$$Pd\delta \pm \omega dA = dW_{el} + dW_{cin} \quad (2)$$

Par suite, tout ce qui, dans la Mécanique de la rupture fragile relève exclusivement du traitement mathématique de la relation (1) et des applications de la théorie de l'élasticité, a son correspondant dans les problèmes d'adhésion élastique : dans le cadre de cette approche, il y a identité complète entre les problèmes d'adhésion et les problèmes de rupture. En particulier, les notions classiques en Mécanique de la rupture fragile : G taux de restitution de l'énergie,  $K_I$  facteur d'intensité des contraintes, ainsi que le C.O.D. (crack opening displacement) doivent se retrouver dans les problèmes d'adhésion.

2.2. A titre d'exemple, considérons la solution du problème des sphères adhésives de rayon R. K.L. Johnson a proposé en 1958 [8] la répartition suivante des contraintes normales dans l'aire de contact circulaire de rayon a :  $\sigma = \sigma_H - \sigma_B$ , avec :

2.0. Les schémas ci-contre correspondent à deux problèmes typiques de la Mécanique des milieux fragiles en mode I :

- 1) Contact de deux sphères élastiques adhésives (problème de Johnson, à symétrie axiale).
- 2) Propagation d'une entaille circulaire dans un barreau cylindrique (problème de Griffith).

2.1. Dans une première approche des problèmes réels (approche élastique), on admet que seules interviennent les formes d'énergie suivantes :

$W_{el}$  = énergie élastique stockée, supposée pouvoir être calculée à partir de la donnée des deux paramètres géométriques indépen-

dants qui déterminent entièrement l'état de déformation : A aire de contact (schéma 1) ou aire de la fissure (schéma 2) et  $\delta$ , rapprochement des solides.

$W_s = -(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_{12}) \cdot A = -\omega A$  (schéma 1) ou  $+\omega A$  (schéma 2).

$W_{cin}$  = énergie cinétique de l'ensemble des points matériels constituant le système ;  $W_{cin}$  est supposée fonction de A,  $\delta$ ,  $\dot{A}$ ,  $\dot{\delta}$ , et ne pas dépendre explicitement du temps.  $\omega$  énergie de surface de Dupré, n'est fonction que de A seul.

On notera que la relation  $dW_s = \omega dA$ , qui exprime le travail des forces d'interaction moléculaire lors d'un déplacement  $da$  correspondant à  $dA$ , est la seule information, concernant ces forces, que l'on introduit dans l'équation qui traduit le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour un déplacement réel :

$$Pd\delta = dW_{el} + dW_s + dW_{cin} \quad (1)$$

On peut toujours interpréter (1) comme concernant un système matériel purement élastique, non adhésif, qui serait soumis à deux systèmes de force extérieures : la charge P, répartie sur la face supérieure, et une tension,  $\omega$  appliquée sur la périphérie du contact, horizontale et dirigée vers l'extérieur. On peut écrire, en mettant en évidence le travail des forces appliquées :

$$Pd\delta \pm \omega dA = dW_{el} + dW_{cin} \quad (2)$$

Par suite, tout ce qui, dans la Mécanique de la rupture fragile relève exclusivement du traitement mathématique de la relation (1) et des applications de la théorie de l'élasticité, a son correspondant dans les problèmes d'adhésion élastique : dans le cadre de cette approche, il y a identité complète entre les problèmes d'adhésion et les problèmes de rupture. En particulier, les notions classiques en Mécanique de la rupture fragile : G taux de restitution de l'énergie,  $K_I$  facteur d'intensité des contraintes, ainsi que le C.O.D. (crack opening displacement) doivent se retrouver dans les problèmes d'adhésion.

2.2. A titre d'exemple, considérons la solution du problème des sphères adhésives de rayon R. K.L. Johnson a proposé en 1958 [8] la répartition suivante des contraintes normales dans l'aire de contact circulaire de rayon a :  $\sigma = \sigma_H - \sigma_B$ , avec :

$$\sigma_H = \text{distribution hertzienne sous la charge } P_1 = \frac{4a^3}{3R} \times \frac{E}{1-\nu^2}, \text{ soit :}$$

$$\sigma_H = \frac{3}{2} \times \frac{P_1}{\pi a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$$

$$\sigma_B = \text{répartition sous un poinçon de Boussinesq en traction } (P_1 - P) \text{ soit :}$$

$$\sigma_B = \frac{P_1 - P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}$$

On sait que cette dernière répartition présente une singularité asymptotique à la périphérie :

$$\sigma_B \text{ limite} = \frac{P_1 - P}{a\sqrt{4\pi a}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(a-r)}} \quad (3)$$

Si l'on veut définir un  $K_{IJ}$  du problème de Johnson en se référant à l'expression classique  $\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi(a-r)}}$ , il faut donc prendre, comme Savkoor [9] l'a proposé en 1977 (avec une autre notation) :

$$K_{IJ} = \frac{P_1 - P}{a\sqrt{4\pi a}} \quad (4)$$

Or le  $G_J$  du problème de Johnson, défini par  $G_J = \left( \frac{\partial W_{el}}{\partial A} \right)_\delta = \left( \frac{\partial (W_{el} + W_P)}{\partial A} \right)_P$  est donné par l'expression suivante (Maugis [5]) :

$$G_J = \frac{(P_1 - P)^2}{4\pi a^3} \times \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (5)$$

On voit qu'il existe entre  $K_{IJ}$  et  $G_J$  la relation classique en déformation plane :

$$G_J = K_{IJ}^2 \times \frac{1 - \nu^2}{E}. \quad (6)$$

Mais on voit, d'autre part, que le déplacement à l'extérieur d'un poinçon de Boussinesq [10] est :

$$v = \delta \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{\rho} \right), \text{ soit : } v = \frac{2\delta}{\pi} \sqrt{\frac{2(\rho - a)}{a}} \quad (7)$$

près du bord. La rapprochement total des sphères de rayon  $R$  est, d'après Johnson:

$$\delta = \delta_H - \delta_B = \frac{2a^2}{R} - 2 \frac{(P_1 - P)(1 - \nu^2)}{2a E}$$

Il est à partager entre elles ; pour chacune on observera le déplacement asymptotique :

$$v = \frac{P_1 - P}{2a} \cdot \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2(\rho - a)}{a}} = K_{IJ} \cdot \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \cdot \sqrt{2} \frac{\rho - a}{\pi} \quad (8)$$

ce qui est toujours la même formule qu'en déformation plane.

On vérifierait que dans le cas du contact sphère rigide/plan, ainsi que pour le poinçon de Boussinesq lui-même, la relation entre  $K_J$  et  $G$  comporte en plus un facteur multiplicatif 1/2, traduisant le fait que c'est une 1/2 fissure qui se propage.

2.3. L'élégante solution, due à K.L. Johnson (1971 [1] du problème des sphères adhésives, comporte donc une traduction simple dans le langage de la Mécanique de la rupture, comme d'ailleurs on devait s'y attendre d'après la théorie de la rupture fragile (H.D. Bui, 1978 [11]).

Réciproquement, la seule connaissance des expressions (3) et (8) des valeurs asymptotiques de la contrainte  $\sigma_{Blim}$  et du déplacement  $v_{limite}$  (déjà

présentes sous forme au moins implicite dans la Note de Johnson de 1958) permet d'écrire immédiatement l'expression (5) de G, par application du raisonnement d'Irwin (1957 [12]). Ce dernier étudiait précisément le cas d'un problème à symétrie axiale, (la fissure "penny-shaped") ; le formalisme qu'il a consacré revient à considérer G comme le produit de convolution de  $\sigma$  limite et de  $v$  limite, ou comme la fonction de Dirac  $\frac{\pi}{2} \sigma(o)v(0)$ , d'où :

$$G = \frac{\pi}{2} \frac{P_1 - P}{2a\sqrt{\pi a}} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{2}{\pi} = \frac{(P_1 - P)^2}{4\pi a^3} \frac{1 - \nu^2}{E} \quad \text{ce qui est bien l'expression (5)}$$

- On notera que l'équation (1) n'a pas par elle-même la forme d'une condition de minimum d'énergie à cause du terme  $Pd\delta$ . Elle l'acquiert automatiquement si on lui adjoint une condition dite de "grandeur imposée", qui a la forme d'une relation entre  $\delta$  et  $P$ , où ne figure pas  $A$  (par exemple  $\delta = C^{te}$ ,  $P = C^{te}$ ,  $\delta + \frac{P}{k} = C^{te}$ ) ou plus généralement  $\phi(\delta, P) = C^{te}$ . Analytiquement,  $P$  devient alors une fonction de  $\delta$  :  $P = \varphi(\delta)$ , et  $Pd\delta$  une différentielle exacte, celle de  $\int_0^\delta \varphi(\delta) d\delta$ . (Si  $\delta = C^{te}$ ,  $Pd\delta = 0$ ).

L'équilibre à grandeur  $\phi$  imposée est obtenu en écrivant que  $Pd\delta - dW_{el} - dW_s - dW_{cin} = 0$  pour toutes fluctuations  $\{dA, d\delta\}$  compatibles avec les conditions  $P = \varphi(\delta)$  et  $dW_{cin} = 0$ . On voit que des conditions nécessaires sont :  $P = \frac{\partial W_{el}}{\partial \delta}$ ,  $\frac{\partial (W_{el} + W_s)}{\partial A} = 0$ . La première exprime une propriété connue de  $W_{el}$  et qui est valable aussi hors d'équilibre. La deuxième, qui apparaît comme indépendante du choix de  $\phi$ , est la condition classique dite "de Griffith".

C'est cette discordance entre les variables descriptives,  $A$  et  $\delta$ , et les variables de chargement,  $\delta$  et  $P$ , qui a justifié la création d'un formalisme commun à la Mécanique de l'adhésion et à celle de la rupture : on associe au "noyau" des schémas 1 ou 2 une "machine de chargement" dotée elle-même d'énergie élastique  $W'_{el}$ , potentielle  $W'_p$ , et cinétique  $W'_{cin}$ , de telle sorte que :  $Pd\delta - dW'_{el} - dW'_p - dW'_{cin} = 0$ . C'est m'ensemble ainsi constitué qui satisfait à la condition  $dW_T = 0$ , valable aussi bien en statique qu'en régime dynamique. L'équilibre du système isolé est obtenu pour  $dW'_{cin} = dW_{cin} = 0$  ; on montre encore sans peine que la condition d'équilibre du noyau (condition de Griffith) est indépendante de la machine de chargement, tandis que la condition de stabilité de l'équilibre  $d^2W_T > 0$  en dépend. Cet aspect des choses a été étudié notamment par Huet [13] et est traité aussi dans l'article déjà cité [réf.6].

### 3. DIFFERENCES INTRODUITES PAR LA CONSIDERATION DES PROBLEMES REELS

3.0. La question de l'adhésion se pose généralement à l'occasion du décollement de surfaces rugueuses (c'est-à-dire de modèles d'aspérités hémisphériques de même rayon  $R$ , de répartition gaussienne des hauteurs, d'écart type  $\theta$ ) et par conséquent pour des associations de fissures en parallèle. Les phénomènes ne sont expérimentalement observables que dans le cas de matériaux de faible module d'élasticité, qui se trouvent posséder aussi des propriétés visco-élastiques marquées (caoutchouc, polymères, tous corps de Van der Waals). De leur côté, les problèmes de résistance à la rupture sont étudiés essentiellement dans le cas de poutres ou de barreaux métalliques entaillés : les fissures sont alors disposées en série, les liaisons dans le matériau sont de type ionique ou électronique, et un progrès de la déformation plastique accompagne inmanquablement la propagation de la fissure.

S'il ne peut être question de traiter un aussi vaste problème dans le cas du présent exposé, on peut du moins en illustrer certains aspects sur des

exemples simples choisis dans la littérature la plus récente.

### 3.1. Influence de la rugosité sur la force d'adhérence [14]

Les résultats obtenus par Fuller et Tabor (1975 [14]) pour le contact d'un plan lisse et d'un plan élastique, sont représentés par la courbe de la fig. 2.

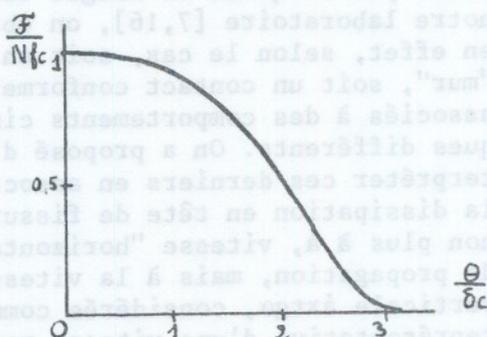


Fig. 2. Force d'adhérence (normalisée) en fonction de l'indice d'adhérence d'une surface rugueuse.

On y a normalisé  $\bar{F}$  et  $\delta$  en les rapportant à  $Nfc$ , force d'adhésion qui correspondrait à  $N$  aspérités identiques jointives (le même relief a été invoqué par Bélidor en 1737 pour expliquer le frottement), et à  $\delta_c$ , allongement élastique d'une aspérité au moment de la rupture dans le processus individuel pour lequel l'adhérence est  $fc = \frac{3}{2} \pi \omega R$ ;  $\frac{\theta}{\delta_c}$  est l'indice d'adhérence. Tout se passe donc comme si on étudiait le contact adhésif d'une sphère de rayon  $NR$  et d'un plan, l'énergie de cohésion étant prise égale à  $\omega_{\text{eff}} = \omega \psi \left( \frac{\sigma}{\delta} \right)$ ;  $0 < \omega_{\text{eff}} < \omega$ .

Dans le cas des métaux ( $\delta_c$  très

petit) et de corps rugueux ( $\theta$  grand),

il n'y a pas d'adhérence prévisible, à moins qu'on ne se place dans le vide, où  $\omega$  est grand, mais où de ce fait il peut y avoir une déformation plastique induite (Maugis [15]). Pour un corps très lisse (mica) ou de faible module (caoutchouc), on se trouve, au contraire, dans un domaine où l'adhérence n'est pas négligeable, et garde un caractère élastique. Alors que la propagation de la fissure doit être considérée comme pouvant s'effectuer réversiblement dans la mécanique de l'adhésion [5], on sait que le recollement des pièces métalliques fissurées est posé, dès le départ, comme impossible en mécanique de rupture. En fait, la rugosité créée par la déformation plastique en tête de fissure lors de l'ouverture suffit à faire sortir du cadre d'application de la théorie de Griffith, exprimée par l'équation (1) qui par elle-même n'introduit pas de dissymétrie entre l'ouverture de la fissure ( $da^-$ ) et sa fermeture ( $da^+$ ). En outre l'adsorption due à l'action de l'atmosphère sur les surfaces nouvellement créées [15] fait décroître  $\omega$ , et par suite la force d'adhésion en tête de fissure.

### 3.2. Intervention de la loi d'action des forces intermoléculaires en fonction de la distance

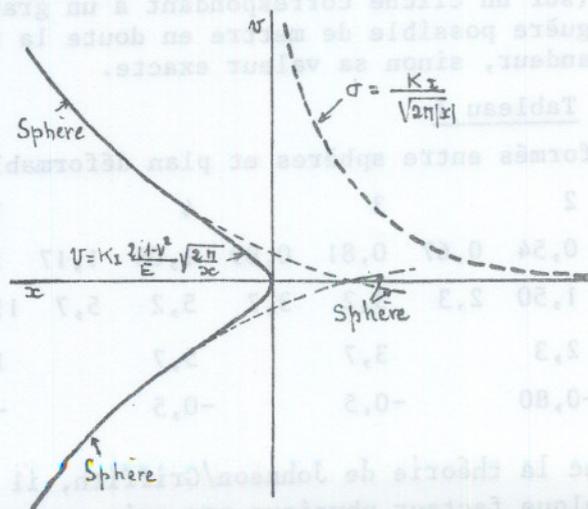


Fig. 3. Profil de raccordement des sphères déformables dans l'hypothèse élastique ( $P_1 > P$ ).

3.2.1. De façon surprenante, l'expression asymptotique (7) du déplacement élastique en dehors du contact, paraît n'avoir pas été utilisée depuis 1971 dans les problèmes d'adhésion, sauf en vue de la mesure des forces de Van der Waals lors du contact de cylindres croisés, cas qui se ramène formellement à un contact sphère/plan. Si on tient compte de (7), le profil de raccordement des sphères déformables est nécessairement tel que le représente la fig. 3, dans le

cas où  $P_1 - P > 0$ , c'est-à-dire quand il y a une contrainte de traction à la périphérie du contact. Si  $P > P_1$  (ce qui ne peut se produire que dans certains cas d'évolution dynamique hors de l'équilibre), la zone périphérique est comprimée sans qu'il puisse y avoir pénétration, et les surfaces en regard sont tangentes en fond de fissure tant que  $P > P_1$  (fig. 4). Dans les expériences de décollement et de recollement sphère/plan effectuées par Barquins et Maugis dans notre laboratoire [7,16], on observe en effet, selon le cas, soit un "mur", soit un contact conforme, associés à des comportements cinétiques différents. On a proposé d'interpréter ces derniers en associant la dissipation en tête de fissure, non plus à  $\dot{a}$ , vitesse "horizontale" de propagation, mais à la vitesse verticale  $\dot{a} \tan \alpha$ , considérée comme représentative d'une vitesse moyenne de déformation dans cette zone [16]. Pour être en mesure de préciser cette interprétation, il convient de déterminer le profil exact en régime quasi-statique correspondant au décollement (cas de la fig. 3,  $P_1 > P$ )

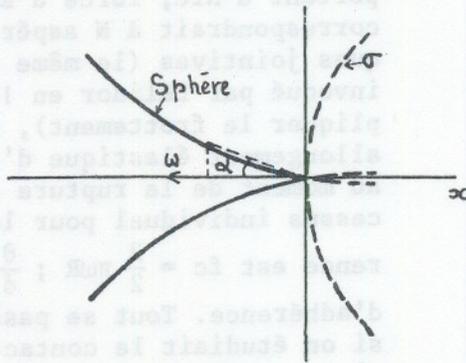


Fig. 4. Profil de raccordement des sphères déformables quand  $P_1 < P$ .

puisque pour  $P_1 < P$  (recollement) le profil est celui des sphères, et  $\tan \alpha$  varie peu avec  $P - P_1$  (fig. 4).

3.2.2. On disposait dans ce but d'un cliché, qui représentait les anneaux de Newton, formés, à charge nulle, entre une sphère de verre de  $R = 0,219$  cm et un plan de caoutchouc de module  $E = 1.7 \cdot 10^7$  ergs/cm<sup>2</sup>, le rayon de l'aire de contact étant  $a = 121 \mu$ . Par lissage et extrapolation jusqu'à l'origine de la courbe expérimentale I de la fig. 5, on avait antérieurement conclu à l'existence d'un angle de contact de  $165^\circ$  entre le verre et le caoutchouc dans ces conditions [17]. Des calculs prenant pour base la formule (8) qui donne  $v_B = 2,8245 \text{ arc cos } \frac{a}{\rho}$  et tenant compte de la sphéricité du verre, qui fournit une différence de marche supplémentaire  $v = R (\cos \text{arc sin } \frac{\rho}{R} - \cos \text{arc sin } \frac{a}{R})$  mais négligeant les déplacements hertziens, ont donné de leur côté une courbe II qui, sur toute sa longueur comptée dans la zone observable (c'est-à-dire à partir de la première frange, correspondant à  $\epsilon = 0,27 \mu$ ) est parallèle et légèrement décalée par rapport à I (de  $0,45 \mu$  vers les  $a$  décroissants, (Tableau I). Bien que les mesures soient faites avec une précision limitée (sur un cliché correspondant à un grandissement optique  $\times 140$ ), il ne paraît guère possible de mettre en doute la réalité de ce décalage, ni son ordre de grandeur, sinon sa valeur exacte.

Tableau I

Rayons des anneaux de Newton formés entre sphères et plan déformable

N° d'anneau	0	1	2	3	4	7					
$\epsilon$ marche <sup><math>\mu</math></sup>	0	0,27	0,40	0,54	0,67	0,81	0,89	1,08	1,17	1,89	2,00
$\delta a$ théorique <sup><math>\mu</math></sup> (II):	0	0,45	0,9	1,50	2,3	3,2	3,7	5,2	5,7	11,9	12,9
$\delta a$ expé. <sup><math>\mu</math></sup> (I):	0	0,9		2,3		3,7		5,7		12,9	
$(\delta a)^{th} - (\delta a)^{exp}$	0	-0,45		-0,80		-0,5		-0,5		-1,0	

3.2.3. Pour expliquer cet écart avec la théorie de Johnson/Griffith, il faut nécessairement faire intervenir quelque facteur physique non pris en compte dans l'équation (1). Nous avons choisi d'essayer un modèle simplifié de fond de

fissure, pour l'essentiel conforme à la théorie de Barenblatt, de façon à bénéficier des résultats rassemblés dans ce domaine par la Mécanique de la rupture, sans pour autant tomber dans la complication des calculs qu'entraîne une théorie rigoureuse.

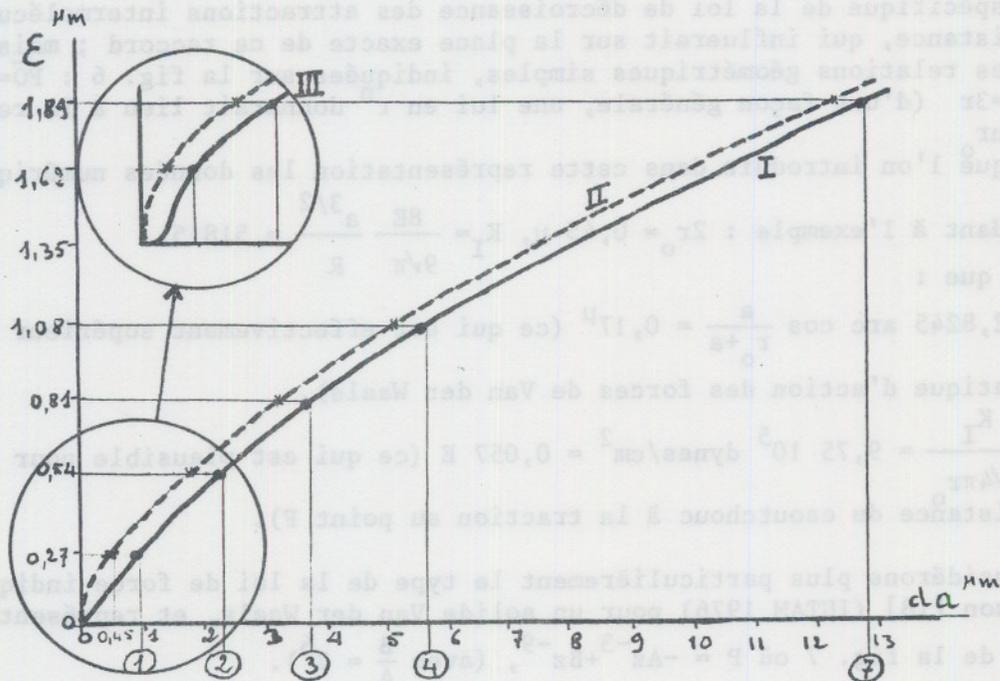


Fig. 5.

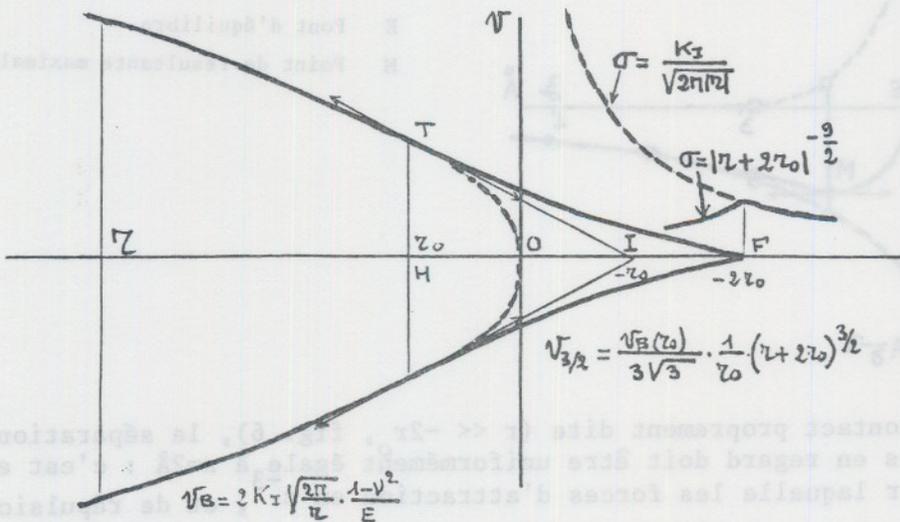
Rayons des anneaux de Newton successifs :

I. Courbe expérimentale (Barquins 1975)

II. Courbe théorique  $\epsilon = v_B + v_S$

III. Profil réel au voisinage de l'origine

La fig. 5 précise (en encadré), un mode d'extrapolation de la courbe I



Relations géométriques :

$$\overline{OH} = r_0$$

$$\overline{OI} = -r_0$$

$$\overline{OF} = -2r_0$$

Fig. 6. Fond de fissure en  $r^{3/2}$  et raccordement avec le profil asymptotique en  $r^{1/2}$ .

comportant un profil en  $r^{3/2}$  au voisinage de l'origine : l'exposant  $3/2$  est imposé en tête de fissure par la théorie de Barenblatt. A titre d'approximation, on prolonge ce profil en  $r^{3/2}$  jusqu'au raccord tangentiel avec le profil asymptotique en  $r^{1/2}$  dû au poinçon seul (fig. 6). Ce faisant, on ne prend pas en compte l'allure spécifique de la loi de décroissance des attractions intermoléculaires avec la distance, qui influencerait sur la place exacte de ce raccord ; mais on obtient les relations géométriques simples, indiquées sur la fig. 6 :  $\overline{FO}=2\overline{OH}=2r_0$  et  $\overline{FH}=3\overline{OH}=3r_0$  (d'une façon générale, une loi en  $r^n$  donnerait lieu à la relation  $\overline{FH}=2n\overline{OH}=2nr_0$ ).

Lorsqu'on introduit dans cette représentation les données numériques correspondant à l'exemple :  $2r_0 = 0,45 \mu$ ,  $K_I = \frac{8E}{9\sqrt{\pi}} \frac{a^{3/2}}{R} = 51815$ .  
On trouve que :

$V_B(r_0) = 2,8245 \arccos \frac{a}{r_0 + a} = 0,17^{rad}$  (ce qui est effectivement supérieur à la limite pratique d'action des forces de Van der Waals).

$\sigma(2r_0) = \frac{K_I}{\sqrt{4\pi r_0}} = 9,75 \cdot 10^5 \text{ dynes/cm}^2 = 0,057 E$  (ce qui est plausible pour la limite de résistance du caoutchouc à la traction au point F).

3.2.4. Considérons plus particulièrement le type de la loi de force indiquée par K.L. Johnson [18] (IUTAM 1976) pour un solide Van der Waals, et représenté par la courbe de la fig. 7 où  $P = -Az^{-3} + Bz^{-9}$ , (avec  $\frac{B}{A} = 2^6$ ).

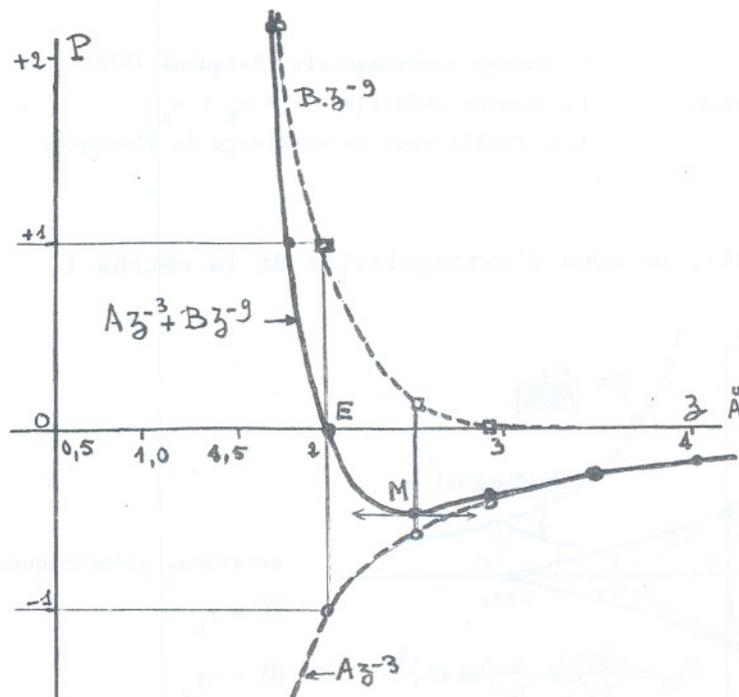


Fig. 7.

Variation de la force d'interaction moléculaire avec la séparation des surfaces  $z$  (en Å) :

Répulsion en  $z^{-9}$

Attraction en  $z^{-3}$

Force résultante d'interaction

E Pont d'équilibre

M Point de résultante maximale.

Dans l'aire de contact proprement dite ( $r \ll -2r_0$ , fig. 6), la séparation effective des surfaces en regard doit être uniformément égale à  $z=2\text{Å}$  : c'est en effet la distance pour laquelle les forces d'attraction en  $z^{-3}$ , et de répulsion en  $z^{-9}$ , s'équilibrent. Les contraintes de compression dues aux forces extérieures appliquées influent très peu sur cette valeur, à cause de la forte pente de la courbe des forces de répulsion.

Quand on se rapproche du bord du contact (c'est-à-dire de notre point F, fig. 6), la contrainte asymptotique de traction en  $r^{-1/2}$  se manifeste dans le

milieu élastique, et tend à augmenter localement la séparation  $z$ , jusqu'au point où elle contrebalance l'attraction moléculaire maximale, ce qui a lieu pour une séparation  $z=2,50 \text{ \AA}$  (point M, fig. 7). A partir de là, la contrainte normale suit sensiblement la loi en  $z^{-3}$ , ce qui correspond à une variation en  $(r+2r_0)^{-9/2}$  si on admet que le point F correspond précisément à cette transition. On peut essayer de préciser le profil réel des surfaces entre F et H par application des formules de Galin et de Mushkelishvili : c'est une tâche pour les théoriciens de l'élasticité ; elle ne serait pas sans intérêt physique, comme on va le voir.

#### 4. INTERVENTION D'AUTRES FORMES D'ENERGIE

4.1. Rappelons que tout ce qui précède concerne des milieux essentiellement élastiques et adhésifs. Dans le cas d'un milieu comme le P.M.M.A. (polyméthyl metacrylate), qui présente aussi élasticité et adhésion, Döll, Weidmann et Kerkhof [19] ont montré que la déformation plastique en tête de fissure joue un rôle très important, et ils ont déterminé expérimentalement par l'emploi d'interférences la forme de la zone plastique. Celle-ci s'étend sur une vingtaine de microns ; son profil concorde parfaitement, qualitativement et quantitativement, avec le modèle de Dugdale-Barenblatt, pour lequel la contrainte normale est prise constante le long de la zone plastique -et non plus variable, comme dans le modèle purement élastique proposé plus haut-.

4.2. De façon générale, des différences dans l'évolution dynamique entre problèmes d'adhésion et problèmes de rupture, s'introduisent lorsque l'on prend en considération l'existence de processus irréversibles en tête de fissure, caractérisés par l'intervention d'autres formes d'énergie : énergie calorifique  $dQ$  (dégagements de chaleur dans la masse ou à la périphérie du contact des corps viscoélastiques) ; énergie de déformation plastique résiduelle  $dW_{p\lambda}$ , de l'ordre de 5 à 10 % de l'énergie totale de déformation plastique des métaux en tête de fissure, le reste, soit  $\lambda dW_{p\lambda}$ , apparaissant sous forme de chaleur.

L'équation d'évolution s'écrit maintenant :

$$Pd\delta = dW_{el} + dW_s + dW_{cin} + dQ + (1+\lambda)dW_{p\lambda} \quad (1bis)$$

4.3. Dans le cadre restreint du présent exposé, nous nous contentons de signaler que cette équation permet de prévoir correctement l'évolution dynamique des systèmes viscoélastiques dans le cas où l'on est en régime quasi-statique, caractérisé par  $dW_{p\lambda} = dW_{cin} = 0$ . Si on connaît la loi de dissipation  $dQ = \varphi(\dot{a})dt$  en fonction de la vitesse  $\dot{a}$  de propagation de la fissure, on peut calculer la vitesse limite  $V = \dot{a}_{lim}$  en fonction du taux actuel de restitution de l'énergie  $G$ . Maugis et al [7] reprenant des suggestions de Gent (1972) et d'Andrews et Kinloch (1973) ont proposé une loi de la forme  $G-\omega = \omega \varphi(a_T V)$  ; ils interprètent très bien de cette façon les résultats de leurs expériences de décollement de sphères. Ils trouvent que  $\varphi(a_T V)$  est une fonction indépendante de géométrie globale du système (adhésion de sphères, du poinçon plat, pelage...) Dans le cas du recollement des sphères, ils trouvent au contraire que l'évolution suit la loi purement élastique (c'est-à-dire que  $dQ = 0$ ,  $dW_{cin} = 0$ ).

#### 5. CONCLUSION

Nous avons eu l'occasion de rappeler plus haut que la variable à utiliser devrait être, non pas la vitesse de propagation "horizontale"  $v = \dot{a}$ , mais la vitesse de déformation "verticale" dans la zone de tête de fissure, qui peut s'écrire  $v = \dot{a} \tan \alpha$ ,  $\alpha$  étant l'angle d'ouverture de la fissure, à définir comme une certaine moyenne. C'est ici que la connaissance exacte du profil des surfaces en tête de fissure s'avèrerait extrêmement utile : elle fournirait une base pour le calcul de la dissipation dans le milieu viscoélastique -ou simplement visqueux-

ce qui pourrait éventuellement permettre de justifier l'affirmation (d'origine expérimentale) que cette dissipation est proportionnelle à l'énergie de surface  $\omega$ .

Nous souhaitons que cette question fasse l'objet d'une étude approfondie de la part des théoriciens.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.L. Johnson, K. Kendall, A.D. Roberts - "Surface energy and the contact of elastic solids". Proc. Roy. Soc. Lond. A324, p. 301-313 (1971).
- [2] K. Kendall - "The adhesion and surface energy of solids". J. Phys. D14, p. 1186-1195 (1971).
- [3] K. Kendall - "An adhesion paradox". J. Adhesion, 5, p. 77-79 (1973).
- [4] A.A. Griffith - "The phenomenon of rupture and flow in solids". Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A221, p. 163-198 (1920).
- [5] D. Maugis, M. Barquins, R. Courtel - "Fissure de Griffith et adhésion des solides élastiques". Métaux, Corrosion, Industrie, n° 606, p. 1-10 (1976).
- [6] R. Courtel, D. Maugis, M. Barquins - "Note sur une formulation commune de certains problèmes d'équilibre de deux corps élastiques adhésifs". Revue de l'Industrie Minérale, n° spécial Rhéologie, TIV n° 4, p. 1-7 (1977).
- [7] D. Maugis, M. Barquins - "Fracture Mechanics and the Adherence of Viscoelastic Bodies" - J. Phys. D. Applied Physics, Vol. 11, p. 1989-2023 (1978).
- [8] K.L. Johnson - "A Note on the Adhesion of Elastic Solids". Brit. Journ. Appl. Phys., Vol. 9, p. 199-200 (1958).
- [9] A.R. Savkoor, G.A.D. Briggs - "The Effect of Tangential Force on the Contact of Elastic Solids in Adhesion". Proc. R. Soc. London A356, 103-114 (1977).
- [10] J. Boussinesq - "Application des Potentiels". 1885, p. 165 (Nouveau tirage, Blanchard, 1969, Paris).
- [11] H.D. Bui - "Mécanique de la Rupture fragile". Masson, Paris (1978).
- [12] G. Irwin - "Fracture". Encyclopédia of Physics, Vol. VI/Elasticity and Plasticity, pp. 551-590, ed. Flügge Springer Verlag, Berlin (1958).
- [13] C. Huet - "Détermination de l'énergie spécifique de rupture". Industrie Minérale (Cahiers du Groupe Français de Rhéologie) TIII, Vol. 3, p. 128-142 (1973).
- [14] D. Tabor, K.N.G. Fuller - "The Effect of surface roughness on the Adhesion of Elastic Solids". Proc. Roy. Soc., London, A 345, p. 327-342 (1975).
- [15] D. Maugis - "Mécanismes physiques de l'adhésion des solides". Le Vide, 86, p. 1-19 (1972).
- [16] R. Courtel - "Intervention de processus dissipatifs superficiels dans un problème de minimum d'énergie". Exposé au Colloque Annuel du Groupe Français de Rhéologie, Paris (8 déc. 77).
- [17] M. Barquins, R. Courtel - "Rubber friction and the rheology of viscoelastic contact". Wear 32, p. 133-150 (1975).
- [18] K.L. Johnson - "Adhesion at the contact of solids". Proc. IUTAM, 14th Congress on Theor. and Appl. Mechanics, North Holl. Publ., pp. 133-143, Amsterdam (1977).
- [19] W. Döll, G.W. Weidmann, F. Kerkhoff - "Etude comparative des mécanismes de fracture entre un verre organique et un verre inorganique". Journées sur la Mécanique de la rupture appliquée aux polymères (CEMP) Paris (12-13 déc. 1978).

## DETERMINATION EXPERIMENTALE DE L'INTEGRALE DE RICE CRITIQUE $V_C$ DANS LE BOIS DE CHARPENTE.<sup>1</sup>

A. AMEEN, Ingénieur - P. MORLIER, Professeur - G. VALENTIN, Assistant.<sup>2</sup>

### RESUME

Le bois, malgré ses propriétés d'anisotropie, de viscoélasticité et surtout d'inhomogénéité a déjà été étudié par la mécanique linéaire de la rupture : Dans différentes directions, des valeurs de  $G_C$  et  $K_C$  ont été déterminées pour certaines essences.

Les propriétés particulières de  $V_C$  (détermination expérimentale de l'intégrale de Rice critique) semblent s'adapter mieux à ce matériau.

Une étude expérimentale sur du bois de charpente a été menée à partir d'éprouvettes DCB (Bande de largeur constante en clivage). Elle a permis de vérifier d'une part une relation linéaire entre  $K$  et  $V$  dans un domaine sensiblement élastique du matériau à 12 % d'humidité et de montrer d'autre part, qu'en utilisant une méthode originale simple de détection de l'amorçage de la fissuration,  $V_C$  pourrait constituer un critère d'initiation de rupture.

### ABSTRACT

Wood has been already studied by linear elastic fracture mechanics although it shows anisotropy, viscosity and non homogeneity properties. In different directions,  $K_C$  and  $G_C$  have been obtained.

Particular properties of  $V_C$  (experimental determination of critical Rice integral) seems fit this material better.

An experimental work on timber (white spruce) has been conducted by means of DCB (double cantilever beam) specimens. On the one hand, we can verify a linear relationship between  $K, V$  for a material containing 12 % moisture in the elasticity domain, on the other hand, using an original method to detect fracture initiation, we can show that  $V_C$  could be a fracture criterion.

1 - Communication présentée au Groupe Français de Rhéologie le 7 Décembre 1978.

2 - Département Génie Civil de l'IUT "A" de BORDEAUX et Laboratoire de Mécanique Physique de BORDEAUX I (E.R.A. CNRS 769).

## I. APPLICATION DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE AU BOIS DE CHARPENTE.

Il y a déjà plusieurs années que la mécanique de la rupture sous sa forme la plus classique est appliquée au bois. En Australie, le règlement prévoit un essai de mécanique de la rupture depuis 1972.

Or le bois présente les caractéristiques d'un matériau anisotrope, de comportement viscoélastique non linéaire et de plus inhomogène.

Ses propriétés varient dans une même essence dans le même arbre, d'un arbre à l'autre et d'une forêt à l'autre. Elles dépendent de la température comme les métaux et de l'humidité comme beaucoup de composites.

On peut se demander alors quelle est la validité des paramètres trouvés :

En pratique, on détermine, dans une direction donnée, un coefficient de mécanique de la rupture comme si le matériau présentait les bonnes caractéristiques (linéarité, isotropie, élasticité, homogénéité) quitte à prendre quelques précautions sur les vitesses de charge ou le taux d'humidité.

C'est ainsi que la plupart des auteurs ont travaillé et c'est aussi de cette façon que notre étude a été conduite.

On pourra noter que par des essais de calcul numérique, en éléments finis notamment, on a montré [1] qu'en considérant le matériau comme orthotrope, les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  étaient sensiblement identiques à ceux trouvés en considérant le matériau comme isotrope.

Le problème de l'inhomogénéité (sans faire intervenir les noeuds, les microfentes dues au séchage ou autres défauts) ne peut être traité que par analyse statistique des résultats.

En envisageant des taux d'humidité pas trop élevés et des vitesses de charge pas trop lentes, on peut négliger les effets de viscosité et même considérer que le bois est un matériau élastique possédant une certaine plasticité à la rupture.

Dans ces conditions, PORTER [2] a déterminé la ténacité  $G_C$  du bois de pin blanc. Il considère que l'évaluation de cette ténacité constitue une mesure significative de la résistance du bois. Elle n'est pas affectée par la géométrie de l'éprouvette dans une large mesure. Il propose une formule prenant en compte la température et l'humidité :

$$G_C = [1,28 + 0,011 (T - 243) (1 - e^{-H/6})] \text{ psi}$$

T température en degrés K,

H humidité en pourcentage de bois sec.

De plus, dans le sens RL (Radial Longitudinal) ou TL (Tangent Longitudinal, le premier indice désigne la direction normale à la fissure, le second la direction de propagation), il a trouvé en mode I des valeurs très voisines.

De même BARRETT [3] a déterminé les facteurs d'intensité de contrainte critique dans le sens RL, TL, TR et RT dans du sapin de Douglas.

Une variation logarithmique en fonction de la largeur de la fissure a été trouvée.

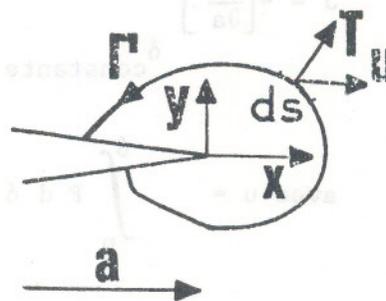
Cependant, les paramètres  $G_C$  et  $K_C$  comportent des conditions très restrictives (élasticité, rupture fragile, homogénéité.....) et l'on est jamais très sûr de leur signification : ils sont à utiliser en pratique avec beaucoup de circonspection.

Par ailleurs, l'intégrale de Rice dont nous rappelons les caractéristiques ci-dessous présente des propriétés intéressantes dans ce cas. C'est le but de notre étude expérimentale.

## 2. DEFINITION ET DETERMINATION DE L'INTEGRALE DE RICE.

### 2.1 Propriétés de J.

Dans le domaine limité des petites déformations l'amplitude de la singularité au voisinage d'une fissure, dans un problème plan et directement reliée à l'intégrale J introduite par Rice [5]. On peut considérer que J est une évaluation convenable de la résistance de la singularité dans un tel problème.



Définition de J.

Par définition :

$$J = \int_{\Gamma} \left[ w \, dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \, ds \right]$$

Γ Contour quelconque partant de la frontière inférieure de la fissure et finissant sur la frontière supérieure.

w densité d'énergie de déformation.

→ →

T, u vecteurs contrainte et déplacement existant sur le contour de l'élément d'arc ds.

Cette définition est valable si le matériau est homogène au moins dans la direction de propagation x.

On montre que cette intégrale est indépendante du contour Γ si l'énergie de déformation est une fonction univoque des déformations ; c'est le cas si le matériau est élastique non linéaire. C'est le cas aussi d'un matériau élastoplastique pour lequel on utilise la théorie de déformation totale et tant que la contrainte effective ne diminue pas.

Dans le cas du solide élastique, on peut interpréter J comme le flux d'énergie passant à travers le fond de la fissure par unité d'extension de longueur.

Si le solide est élastique plastique, l'intégrale s'interprète alors comme la différence d'énergie potentielle entre deux corps identiques ayant des fissures de longueurs voisines a et a + da. Par contre en plasticité incrémentale, seule la signification physique de J comme évaluation du champ de contrainte déformation en fond de fissure reste vraie. L'indépendance par rapport au contour ne peut être établie en théorie mais seulement vérifiée numériquement [6].

En représentant par P la grandeur de la charge appliquée et par P<sub>c</sub> la charge critique pour laquelle la fissure commence à se propager, on pourra poser que l'initiation de rupture s'écrit J = J(P) = J<sub>c</sub>. Ce critère serait donc valable que l'initiation ait lieu en régime ductile ou fragile. De plus, mais

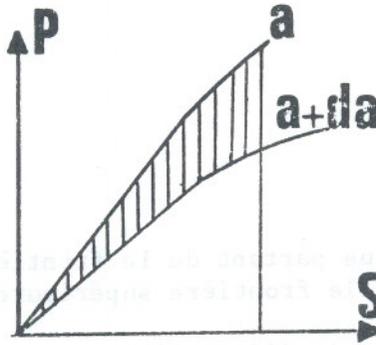
c'est plutôt un inconvénient,  $J_c$  ne constitue qu'un critère d'amorçage, que la propagation soit stable ou non.

## 2.2. Evaluation de J.

Soit la courbe de chargement à déplacement imposé d'un corps possédant une fissure de longueur  $a$  ; si  $P$  est la charge appliquée par unité de longueur du front de fissure et si  $\delta$  est le déplacement de cette charge, pour un matériau élastique linéaire ou non on a :

$$J = - \left[ \frac{\partial u}{\partial a} \right]_{\delta \text{ constante}}$$

avec  $u = \int_0^{\delta} P d\delta$  Travail fourni par la force extérieure.



Evaluation de J

Figure 2

$J da$  correspond à l'aire hachurée sur la figure 2.

Pour un matériau élastoplastique BEGLEY et LANDES [7] ont proposé de prendre comme grandeur pouvant représenter  $J$  la grandeur correspondant à la transposition à ce domaine de l'équation ci-dessus : On l'appellera  $V$  [8]. Ainsi  $V$  s'obtient pour une géométrie donnée à partir d'éprouvettes ayant des fissures de longueurs différentes.

La mesure des aires sous tendues par les courbes  $P, \delta$  pour différents déplacements et la différentiation de ces courbes par rapport à la longueur initiale conduit à une évaluation de  $V$  : c'est la méthode dite des complaisances.

$$\text{Soit } V = - \int_0^{\delta} \left( \frac{\partial P}{\partial a} \right) d\delta \quad \delta \text{ cste}$$

De nombreuses études ont été faites afin de comparer  $J$  intégrale de contour à  $V$ , variation d'énergie entre éprouvettes de différentes longueurs de fissures. Limité aux essais effectués sur des éprouvettes de flexion et CT (compacte en traction) un bon accord a été relevé par [8] même pour des matériaux assez ductiles.

En pratique pour les aciers, la méthode des complaisances n'est pas utilisée. En effet des formules valables pour les éprouvettes de flexion et CT ont été établies. Elles permettent de déterminer  $J$  à partir d'un seul essai [7].

### 3. ASPECTS EXPERIMENTAUX.

#### 3.1. Choix de l'éprouvette.

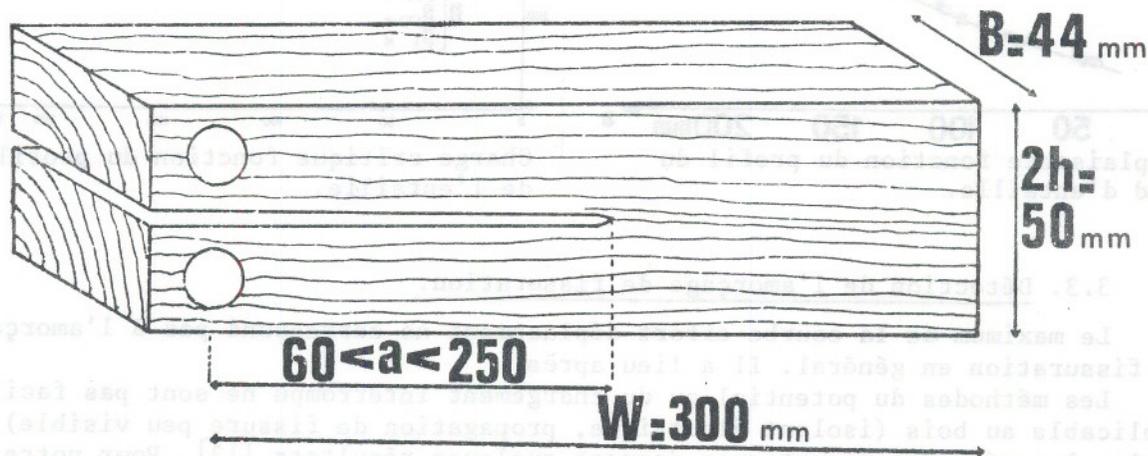
Il nous a paru intéressant, afin de diminuer les écarts dûs à l'inhomogénéité dans une même poutre (ou un même arbre) de n'utiliser qu'une éprouvette pour déterminer  $V$ .

D'autre part, comme il a été dit précédemment, les méthodes qui permettent de mesurer  $V$  à partir d'une seule éprouvette et d'une seule fissure ont été établies pour les métaux de faible ductilité. Les méthodes bien adaptées aux éprouvettes de flexion le sont un peu moins aux éprouvettes CT.

Il n'est pas évident qu'elles soient utilisables pour le bois sans modification.

Dans la mesure où notre étude a porté sur le sens radial longitudinal, le plus utilisé en construction, l'éprouvette de flexion posait des problèmes de dimensions compatibles avec la hauteur des poutres normalisées.

De plus, pour des raisons de stabilité de la propagation de la fissure [9], [10] et de similitude avec une éprouvette dite de fendage déjà normalisée en France nous avons choisi l'éprouvette DCB (double cantilever beam ou bande de largeur constante en clivage) indiquée sur la figure 3.



Cette éprouvette est en général utilisée avec une rainure latérale pour guider la fissure qui tend à bifurquer.

Dans le sens radial longitudinal étudié, ce sont les fibres du bois qui guideront la fissure. On évite ainsi la confection de la rainure et les complications qu'elle pourrait entraîner quant à son influence sur l'avancement du front de fissure.

Une telle éprouvette a été utilisée pour l'étude de résistance de colles notamment [11] - mais elle n'est pas normalisée et a été assez peu étudiée. Comme nous avons utilisé la méthode des complaisances, plusieurs longueurs de fissure sont nécessaires. Elles ont été effectuées sur la même éprouvette successivement après chaque amorçage de fissuration.

#### 3.2. Réalisation des fissures.

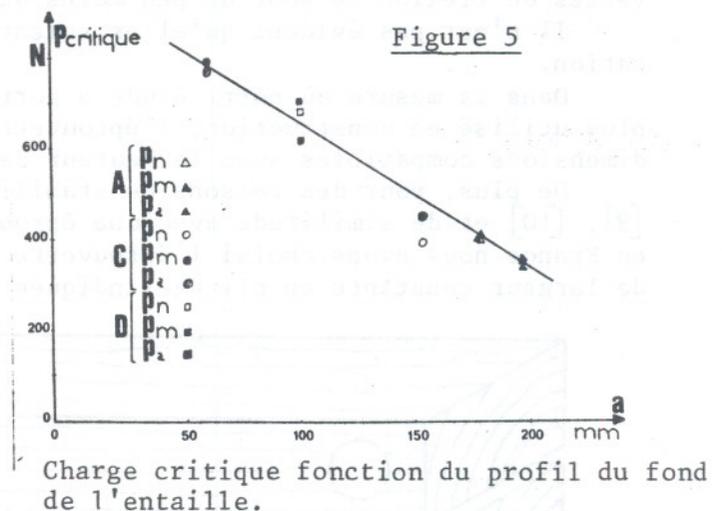
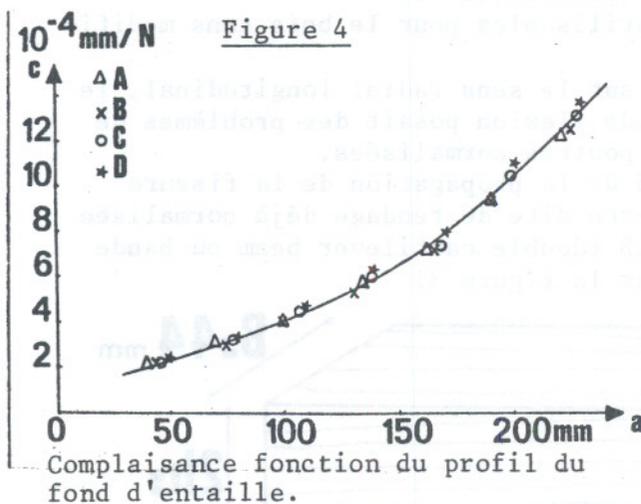
Plusieurs profils du fond de fissure ont été envisagés :

- . Trait de scie prolongé de 10 mm par une fente au "cutter" (A),
- . Trait de scie (denture à métaux) largeur de 0,6 mm (B),
- . Trait de scie (denture à bois) largeur de 1 mm (C),
- . Trait de scie terminé par un trou de rayon 5 mm (D).

Tous les profils ne pouvaient être rompus simultanément sur une même éprouvette et deux éprouvettes sont trop différentes pour obtenir un résultat homogène. Aussi, nous avons d'abord étudié les complaisances sur une même éprouvette avec les quatre profils correspondant à des longueurs de fissures voisines. En répétant le processus tout au long de l'éprouvette, nous avons obtenu la figure 4. La complaisance, même pour le profil D, est pratiquement indépendante de la forme du fond de fissure.

Ensuite, les valeurs des charges critiques (définies suivant 3 critères repérés par N, M, A et expliqués plus loin) ont été vérifiées par la même méthode pour 3 profils. On constate sur la figure 5 que cette charge critique ne dépend pratiquement pas du profil du fond de fissure. Ceci confirme les résultats de [12] indiquant que, pour le bois, le profil avait peu d'importance dans le déclenchement de la rupture. Ce qui influence la rupture en effet est l'endroit où une fibre est coupée, non la façon dont elle est coupée.

Ainsi, les essais définitifs ont été effectués avec le profil C le plus précis et le plus commode à mettre en oeuvre.



### 3.3. Détection de l'amorçage de fissuration.

Le maximum de la courbe effort déplacement ne correspond pas à l'amorçage de la fissuration en général. Il a lieu après.

Les méthodes du potentiel ou du chargement interrompu ne sont pas facilement applicable au bois (isolant électrique, propagation de fissure peu visible). Seules les méthodes acoustiques donnent quelques résultats [13]. Pour notre part, nous avons utilisé un système de détection original et simple.

Le contour de la fissure a été enduit de peinture conductrice (du genre laque d'argent) suivant le schéma de la figure 6. Les deux côtés de l'éprouvette ont été peints puis reliés électriquement en série.

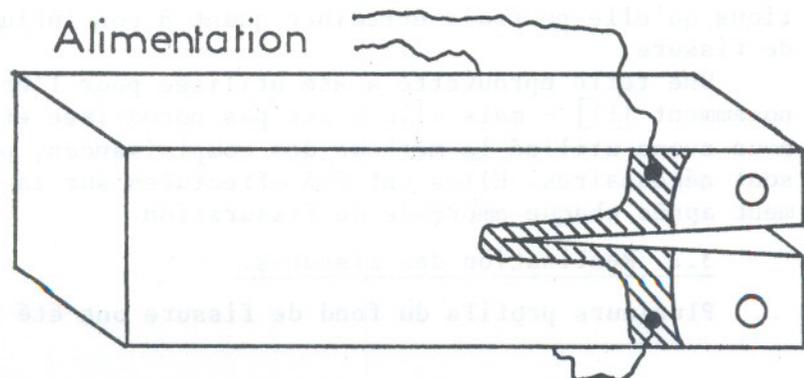
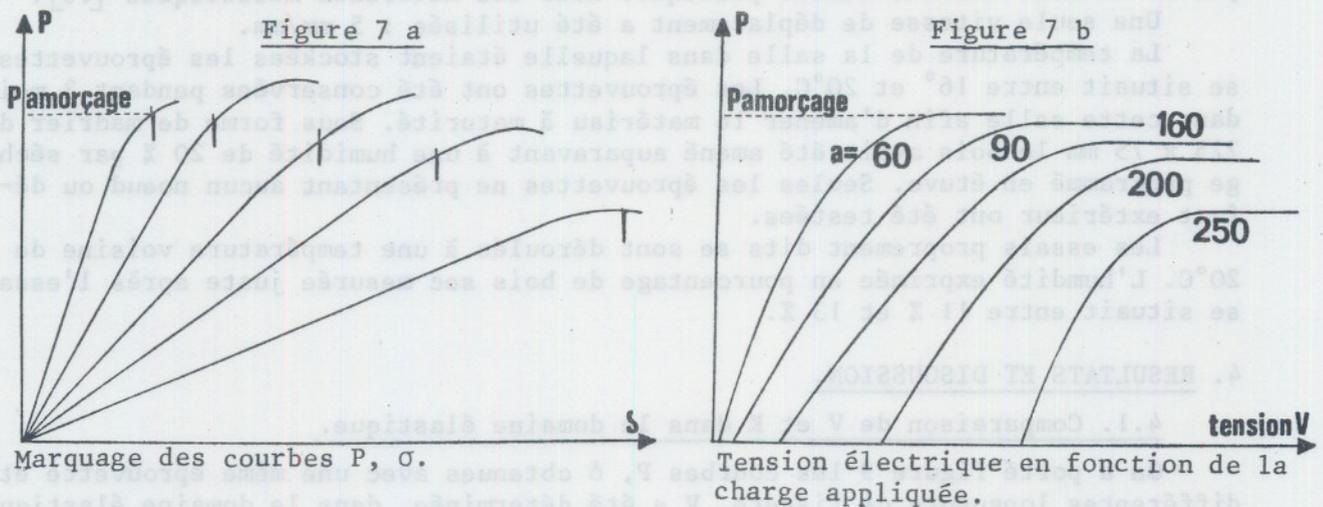


Figure 6

Des essais nous ont permis de suivre la résistance de cette couche lors du chargement. Une discontinuité particulièrement nette (si le temps de séchage est convenable) a été relevée (figure 7b), un peu avant le maximum de la courbe  $P, \delta$ .



Cette discontinuité a été utilisée pour marquer la courbe  $P, \delta$  (figure 7a). Un simple montage condensateur transformateur alimenté par une source à intensité constante de 0,6 A avant rupture et limitée à 10 Volts lorsque la fissure s'est propagée donne une sensibilité suffisante. (Figure 8). La discontinuité ne s'accompagnait pas toujours de l'apparition microscopique d'une fente en fond de fissure. Mais chaque fois qu'une telle fente existait, il y avait discontinuité de tension.

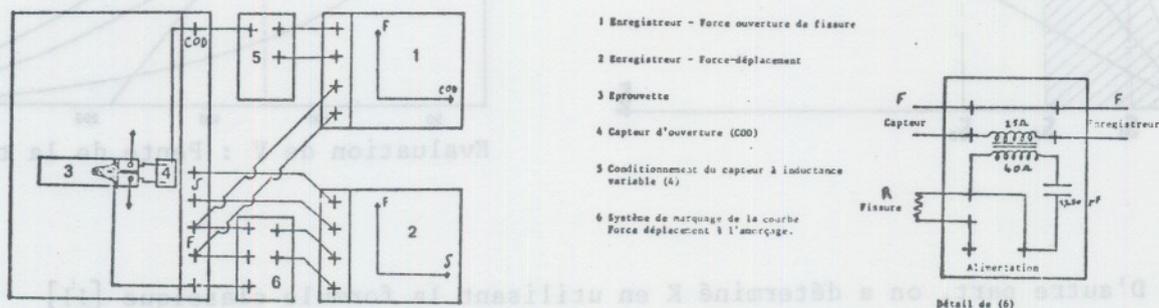


Figure 8

Cette discontinuité est due vraisemblablement à un écartement critique des particules d'argent en surface de la fissure. Elle serait amplifiée par un effet d'arc électrique, effet que l'on retrouvait lorsqu'on voulait refermer la fissure nouvellement créée.

### 3.4. Conditions d'essais.

Le système de charge et la chaîne de mesure sont indiqués sur la figure 8. Le système de détection de l'amorçage est également donné.

Les valeurs des forces et déplacement permettant de calculer  $V$  ont été enregistrés en même temps que les valeurs des forces et ouverture de fissure mesurée par un capteur de déplacement à inductance variable. Ceci permet d'en déduire  $K_I$  par la méthode habituellement pratiquée avec les matériaux métalliques [16].

Une seule vitesse de déplacement a été utilisée : 5 mm/mm.

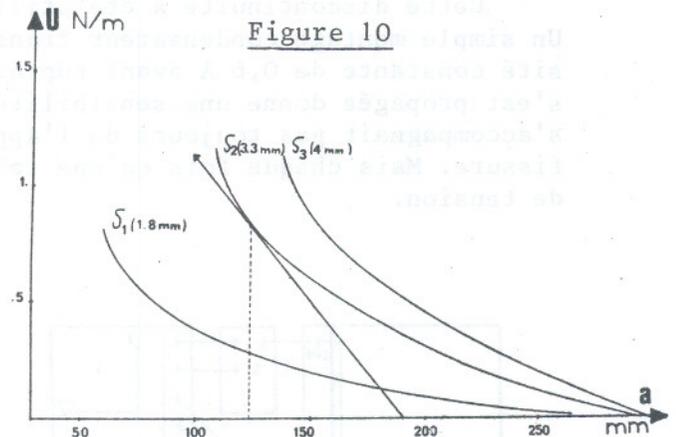
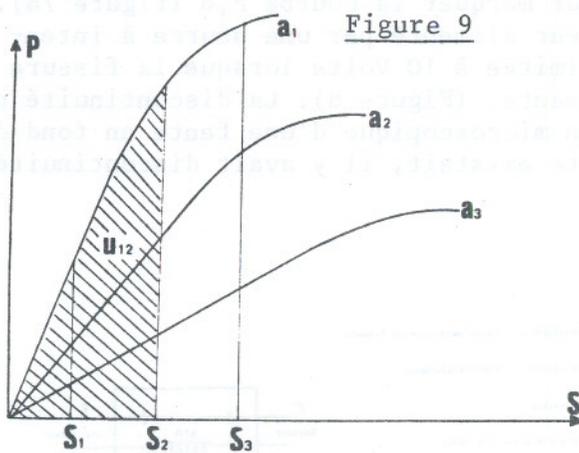
La température de la salle dans laquelle étaient stockées les éprouvettes se situait entre 16° et 20°C. Les éprouvettes ont été conservées pendant 3 mois dans cette salle afin d'amener le matériau à maturité. Sous forme de madrier de 225 x 75 mm le bois avait été amené auparavant à une humidité de 20 % par séchage programmé en étuve. Seules les éprouvettes ne présentant aucun nœud ou défaut extérieur ont été testées.

Les essais proprement dits se sont déroulés à une température voisine de 20°C. L'humidité exprimée en pourcentage de bois sec mesurée juste après l'essai se situait entre 11 % et 13 %.

## 4. RESULTATS ET DISCUSSION.

### 4.1. Comparaison de $V$ et $K$ dans le domaine élastique.

On a porté figure 9 les courbes  $P, \delta$  obtenues avec une même éprouvette et différentes longueurs de fissure.  $V$  a été déterminée, dans le domaine élastique linéaire par la méthode des complaisances déjà expliquée (figure 10).



Evaluation de  $V$  : Pente de la tangente.

D'autre part, on a déterminé  $K$  en utilisant la formule classique [11]

$$K = \frac{P\alpha}{B H^{3/2}} \left[ 3,464 + 0,574 \frac{H^2}{\alpha^2} \right] \quad \alpha = a + a_0$$

$a_0$  désigne une longueur fictive à déterminer par ajustement des courbes de complaisance théorique et expérimentale et permettant de tenir compte d'un effet de rotation au niveau du front de fissure.

Cette correction doit être faite même si le matériau est parfaitement élastique et n'est pas spécifique de l'essai sur bois. Elle traduit simplement l'inexactitude du calcul qui suppose les bras de l'éprouvette parfaitement encastrés. Notons qu'un autre modèle proposé par KANNINEN [14] introduit les effets de rotation en supposant une fondation élastique dans le ligament.

LES SURFACES DE RUPTURE EN MECANIQUE  
DES SOLS EN TANT QU'INSTABILITE DE DEFORMATION (\*)

F. DARVE, Maître-Assistant I.N.P.G.

J. DESRUES, Attaché de recherches, C.N.R.S.

M. JACQUET, Ingénieur E.N.T.P.E.

Institut de Mécanique - B.P. 53 X - 38041 GRENOBLE CEDEX

RESUME

Après avoir situé cette étude dans le cadre des catastrophes de bifurcation, nous rappelons les principales caractéristiques de la loi rhéologique incrémentale que nous avons développée pour les sols. Nous lui appliquons alors le critère de localisation de HILL dans trois cas géométriquement simples : le milieu bidimensionnel, la déformation plane, la symétrie de révolution. Les résultats trouvés mettent en évidence le rôle majeur joué par l'angle de dilataance du matériau sur l'orientation des surfaces de rupture. Ces résultats sont comparés à l'expérience dans le cas d'un matériau analogique bidimensionnel.

ABSTRACT

Once this study placed within the general framework of bifurcation catastrophes, the main characteristics of the incremental constitutive equations developed for soils, are reminded. HILL's localization condition is applied with this rheological law for three simple geometrical cases : twodimensional medium and plane strain and axisymmetrical natural mediums. The results obtained put the accent on the important influence of the dilatancy angle of the material upon shear bands orientation. These results are compared with measurements in the case of a twodimensional analogical material.

1. INTRODUCTION

Les expériences menant à la rupture en mécanique des solides montrent que, de façon assez générale, les déformations se localisent le long de "surfaces de rupture". Ainsi, en mécanique des sols, la nature offre de nombreux exemples de glissements de terrains. Les ouvrages que l'homme construit (barrages en terre, digues, remblais, ...) présentent la plupart du temps des surfaces de rupture quand ils se rompent. Les ouvrages expérimentaux, que ce soit des ouvrages en

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 19 octobre 1978.

vraie grandeur (station de poussée-butée du C.E.B.T.P. à Saint-Rémy-Les-Chevreuse (1)) ou des modèles réduits, font apparaître de telles surfaces. Les échantillons mêmes, réputés homogènes tout au long d'un essai de laboratoire, se rompent dans le cas de sols denses suivant une ou plusieurs surfaces de rupture. C'est à l'étude de telles ruptures se produisant pour des échantillons initialement homogènes que nous restreindrons cet article.

Les calculs traditionnellement effectués reposent sur la loi de frottement solide de COULOMB (2) établie dès 1773 :  $\tau = \sigma_n \operatorname{tg} \psi$ , qui peut s'écrire en négligeant l'influence de la contrainte intermédiaire (hypothèse de la "courbe intrinsèque") :

$$\sin \psi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \text{où } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ sont les deux}$$

contraintes principales extrêmes. On dit alors que la rupture est atteinte sur une facette pour laquelle le vecteur contrainte est situé sur le cône de frottement. Cela conduit, en déformation plane, à deux directions de plans de rupture symétriques par rapport à la contrainte principale majeure et faisant avec elle un angle égal à :  $\pi/4 - \psi/2$ .

Plus récemment, HANSEN (3) a introduit l'angle de dilatance d'un sol en déformation plane, défini par :

$$\sin \psi = - \frac{d\epsilon_1 + d\epsilon_2}{d\epsilon_1 - d\epsilon_2}.$$

$\psi$  caractérise ainsi la règle d'écoulement du matériau en déformation plane. Angle de frottement et angle de dilatance seraient égaux dans le cas d'un milieu standard ; on sait que le sol est un matériau fortement non-standard (ordres de grandeur pour un sable :  $\psi = 35^\circ$ ,  $\psi = 20^\circ$ ). L'assimilation des lignes de rupture à des "lignes d'extension nulle" (JAMES, BRANSBY (4) et (5)) permet alors de trouver deux directions de plans de rupture dont l'orientation par rapport à la direction de la contrainte principale majeure est égale à :  $\pi/4 - \psi/2$ . Ce dernier résultat a permis un meilleur accord avec l'expérience, sans toutefois pouvoir prendre en compte correctement l'ensemble des résultats expérimentaux.

Nous nous proposons, pour notre part, de caractériser le passage d'un mode de déformation diffus sensiblement homogène à un mode très fortement localisé comme une bifurcation. Nous retrouverons, en les généralisant considérablement, les résultats de JAMES et BRANSBY (4) (5) par application de la condition de localisation de HILL (6) à notre loi rhéologique incrémentale (DARVE et al. (7)).

## 2. LA NOTION DE BIFURCATION ET SON APPLICATION

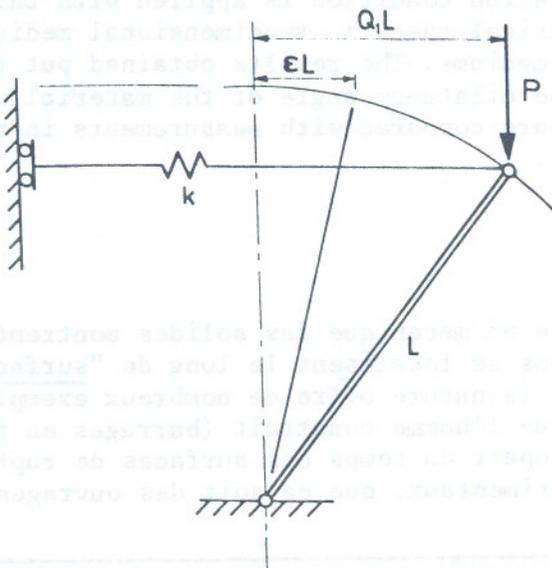


Figure 1 : exemple de système mécanique présentant une bifurcation de type symétrique, instable (THOMPSON, HUNT (8)).

**Cahiers du Groupe  
Français de Rhéologie**

**Tome V, Numéro**

**Janvier 1980**

**S O M M A I R E**

- Les surfaces de rupture en mécanique des sols en tant qu'instabilité de déformation, par F. DARVE, J. DESRUES et M. JACQUET, p. 93.
- Etude de la propagation d'une fissure dans un béton non armé, par CHHUY SOK, J. BARON et D. FRANÇOIS, p. 107.
- Rupture différée et propagation des fissures dans les propegols composites, par B. SCHAEFFER, p.119.
- Fatigue statique des joints collés, par B. PERSOZ et J. BONNET, p. 129.

Considérons le système mécanique représenté sur la figure 1. Il comprend une barre rigide articulée de longueur  $L$  et un ressort linéaire de rigidité  $k$ , pouvant se déplacer dans le plan de figure. Le paramètre de charge est la force  $P$  verticale, tandis que la variable de déplacement est le nombre  $Q_1$  sans dimension et le paramètre d'imperfection le scalaire  $\epsilon$ .

L'énergie totale du système comprend l'énergie élastique de déformation du ressort et le travail de la force  $P$ . En annulant cette énergie et sa dérivée première, on trouve deux chemins d'équilibre : le premier (dit "fondamental") correspond à  $Q_1 = 0$  tandis que le second est un demi-cercle d'équation  $P^2 = k^2 L^2 (1 - Q_1^2)$  dans le plan  $(P, Q_1)$ . En analysant la stabilité de ces deux chemins d'équilibre, on montre que le chemin fondamental est stable jusqu'à son point d'intersection avec le second chemin, qui, lui, est entièrement instable.

Le point d'intersection de ces deux chemins d'équilibre est l'exemple d'un point de bifurcation. Pour un système mécanique réel, l'existence inévitable d'une dissymétrie (traduite par le paramètre d'imperfection  $\epsilon$ ) produit un passage plus "continu" du mode fondamental de "déformation" du système (où  $Q_1$  reste voisin de zéro) au second mode (pour lequel  $|Q_1|$  varie de manière importante). Ces résultats sont schématisés sur la figure 2, tirée de l'ouvrage de THOMPSON et HUNT (8).

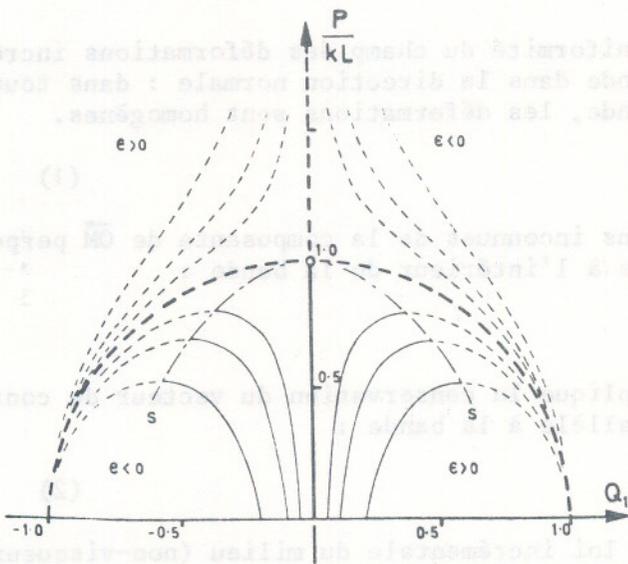


Figure 2 : les différents chemins d'équilibre stables (en traits continus) et instables (en tiretés) pour le système mécanique de la figure 1, parfait et imparfait. Le point de bifurcation est le point de coordonnées  $(0,1)$ .

En mécanique des sols, l'analyse de la rupture d'échantillons de sols denses fait apparaître un "pic" sur la courbe contrainte-déformation, au voisinage duquel une ou plusieurs surfaces de ruptures se sont développées. L'échantillon est ainsi passé d'un mode de déformations sensiblement homogènes stables à un mode de déformations fortement localisées. Cette bifurcation peut, sans doute, être caractérisée comme de type "symétrique, instable" au sens de THOMPSON (8) ou de type "ombilic hyperbolique" dans le cadre de la théorie des catastrophes de THOM (9). Cette rupture sera analysée comme résultant d'une instabilité au niveau de la loi rhéologique même du matériau.

La position de ces surfaces de rupture dans l'échantillon résulte d'imperfections locales ; par contre, leurs directions peuvent être déterminées par la condition de localisation de HILL (6) et RICE (30) dont nous rappelons les hypothèses dans le paragraphe qui suit.

### 3. LA CONDITION DE LOCALISATION

Nous supposons qu'une surface de rupture de normale  $\vec{n}$  vient de se former dans un échantillon antérieurement homogène. Les états de contrainte et de déformation sont donc homogènes sauf à l'intérieur de la bande de cisaillement.

Dans le repère orthonormé (1, 2, 3) (voir figure 3), soient  $x_i$  les coordonnées du point courant M et  $n_j$  les composantes de la normale locale à la bande. Nous notons  $\Delta(A)$  la différence entre la valeur du tenseur A au point courant à l'intérieur de la bande et sa valeur uniforme à l'extérieur.

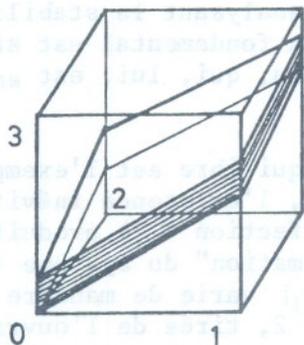


Figure 3

La seule possibilité de non-uniformité du champ des déformations incrémentales est à l'intérieur de la bande dans la direction normale : dans tout plan intérieur et parallèle à la bande, les déformations sont homogènes.

$$\text{Donc : } \Delta(d\epsilon_{ij}) = g_i n_j \quad (1)$$

où les trois  $g_i$  sont des fonctions inconnues de la composante de  $\vec{OM}$  perpendiculairement à la bande, non nulles à l'intérieur de la bande :

$$\text{Soit : } g_i = g_i(n_k x_k) .$$

En second lieu, l'équilibre implique la conservation du vecteur de contrainte incrémentale sur une facette parallèle à la bande :

$$\text{Donc : } n_i \Delta(d\sigma_{ij}) = 0 \quad (2)$$

Enfin, nous supposerons que la loi incrémentale du milieu (non-visqueux) considéré s'écrit :

$$d\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\epsilon_{kl} ,$$

où l'incrément de contrainte est pris par rapport à un repère co-rotationnel et  $d\epsilon$  représente la petite déformation pure.

Si le tenseur L conserve la même valeur à l'intérieur et à l'extérieur de la bande (c'est-à-dire si les incréments de sollicitation appartiennent à la même "zone tensorielle" à l'intérieur et à l'extérieur de la bande, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant), nous pouvons écrire :

$$\Delta(d\sigma_{ij}) = L_{ijkl} \Delta(d\epsilon_{kl}) \quad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) impliquent alors :

$$0 = n_i \Delta(d\sigma_{ij}) = n_i L_{ijkl} n_l g_k \quad (4)$$

Les équations (4) forment un système de trois équations linéaires, homogènes, aux trois fonctions inconnues  $g_1, g_2, g_3$ .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution au moins (et il en existe alors une infinité) non-identiquement nulle est que ce système ne soit pas de CRAMER, c'est-à-dire que son déterminant soit nul :

$$\underline{\det(nLn) = 0} \quad (5)$$

La relation (5) est une équation homogène de degré 6 en  $n_1, n_2, n_3$ .

Par ailleurs, l'expérience montre que les surfaces de rupture apparaissent quand l'état de contrainte est voisin de la surface limite de rupture.

Or, avec :  $d\sigma_\alpha = N_{\alpha\beta} d\varepsilon_\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ ), le critère de rupture s'écrit :

$$\underline{\det(N) = 0} \quad (6)$$

Les équations (5) et (6) nous permettront de déterminer les directions locales des normales aux surfaces de rupture, dans la mesure où nous avons explicité la loi rhéologique, c'est-à-dire le tenseur L (ou la matrice N). C'est à ce dernier point que nous nous attachons dans le prochain paragraphe.

#### 4. LA LOI RHEOLOGIQUE INCREMENTALE

Nous rappellerons brièvement ici les principaux traits de la loi de comportement utilisée (pour plus de détails : DARVE et al. (7), DARVE (10)).

##### 4.1. Une formulation incrémentale des lois rhéologiques

Considérons un échantillon de matériau, ayant subi une certaine histoire de sollicitation. Il existe une fonction F, dépendant de cette histoire et permettant de décrire les propriétés mécaniques incrémentales actuelles : elle doit donc relier la "petite" réponse à la "petite" sollicitation actuelle, c'est-à-dire les incréments de déformation, de contrainte et de temps. Soit :

$$F(d\varepsilon, d\sigma, dt) = 0.$$

où  $d\sigma$  représente l'incrément de contrainte pris en axes co-rotationnels et  $d\varepsilon$  la petite déformation pure.

Dans le cas des milieux non-visqueux, seul cas que nous considérerons dans cet article, l'incrément de temps n'a aucune influence.

Donc :  $F(d\varepsilon, d\sigma) = 0$ , soit :  $d\varepsilon = G(d\sigma)$

Cette indépendance du comportement par rapport aux vitesses de sollicitation impose, en outre, une condition d'homogénéité sur G : quelque soit le réel  $\lambda$  positif :

$$G(\lambda d\sigma) = \lambda G(d\sigma)$$

En associant aux tenseurs symétriques  $[d\varepsilon_{ij}]$  et  $[d\sigma_{kl}]$  les

$$\text{vecteurs : } [d\varepsilon_\alpha] = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2} d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [d\sigma_\beta] = \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2} d\sigma_{23} \\ \sqrt{2} d\sigma_{31} \\ \sqrt{2} d\sigma_{12} \end{bmatrix}, \text{ nous pouvons}$$

en conclure que G est linéaire sur la demi-droite portant  $d\sigma$ . Soit :  $d\varepsilon_\alpha = M_{\alpha\beta} d\sigma_\beta$ ,  $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$ .

Il est important de noter, par contre, que cette fonction G est non-linéaire : c'est le problème de la non-linéarité incrémentale (au sens de GUDEHUS (11, 12)) qui se traduit par la dépendance directionnelle de la matrice M (DARVE et al. (7) et DARVE (8)). Il est bien évident, en effet, que si l'on appliquait à l'échantillon le vecteur opposé  $-d\sigma$ , on ne recueillerait pas :

$-d\varepsilon$  par suite de l'irréversibilité du comportement ; la matrice M dépend donc

de la direction de la sollicitation incrémentale.

C'est, à notre avis, la critique majeure qui doit être faite à l'hypo-élasticité (qui ignore cette dépendance directionnelle) et à l'élasto-plasticité (qui restreint à deux valeurs cette variation de la matrice M).

Pour décrire cette dépendance, nous pouvons soit en effectuer une discrétisation (et nous appellerons alors "zone tensorielle" un domaine de l'espace des sollicitations incrémentales dans lequel M conserve la même valeur ; nous avons ainsi introduit, pour notre part, 8 déterminations pour M) soit prendre en compte directement une variation continue de M avec la direction de la sollicitation incrémentale, ce qui en simplifie le traitement numérique dans des programmes de calcul utilisant la méthode des éléments finis (CHAMBON (13), KOLYMBAS (14)), en éliminant des discontinuités parfois gênantes.

Dans le cas d'une sectorisation (en 8 zones tensorielles, par exemple), il y a une condition essentielle de continuité à respecter lors du changement de zone : pour une sollicitation incrémentale appartenant à la frontière commune à plusieurs zones, la réponse incrémentale doit rester la même quelle que soit la zone adjacente à laquelle on rattache le vecteur sollicitation incrémentale.

#### 4.2. La loi incrémentale des sols

Deux hypothèses supplémentaires nous ont été nécessaires pour expliciter la matrice M dans le cas des sols.

La première a consisté à supposer l'orthotropie de la loi incrémentale, c'est-à-dire à prendre en compte une certaine anisotropie induite par le chemin de sollicitation suivi antérieurement (un sol à l'état vierge ayant un comportement sensiblement isotrope). La matrice M ne possède plus alors que 12 éléments indépendants non nuls, quand on l'écrit dans les axes d'orthotropie.

La deuxième hypothèse porte sur la caractérisation des 8 zones tensorielles dans l'espace des incréments de contrainte. Soient  $d\sigma_{11}$ ,  $d\sigma_{22}$ ,  $d\sigma_{33}$  les incréments de contraintes dans les trois directions orthogonales d'orthotropie. Les 8 zones correspondent aux 8 huitièmes d'espace définis par les trois plans de coordonnées (figure 4). A chacun de ces huitièmes d'espace est associée une même détermination de la matrice M, c'est-à-dire une certaine application linéaire.

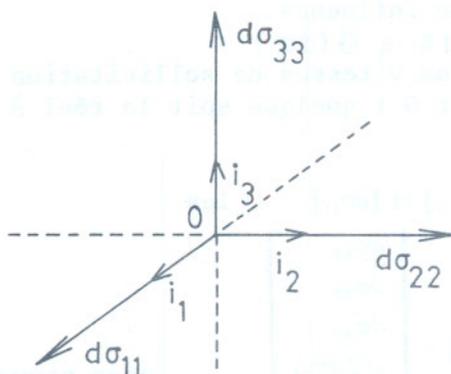


Figure 4 : définition des 8 zones tensorielles

Les trois premiers éléments des trois premières colonnes des 8 matrices M représenteront ainsi les composantes des transformées de  $i_1, i_2, i_3$  et de leurs opposés par chacune de ces 8 applications linéaires dans l'espace  $(d\epsilon_{11}, d\epsilon_{22}, d\epsilon_{33})$ .

Supposons que nous connaissions (par une étude expérimentale) les double

familles de trois fonctions f, g, h telles que :

$$\begin{cases} \sigma_k = f(\epsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \\ \epsilon_j = g(\epsilon_k, \sigma_j, \sigma_l) \end{cases}, \quad \epsilon_l = h(\epsilon_k, \sigma_j, \sigma_l),$$

le long de chemins de sollicitation C pour lesquels les axes d'orthotropie soient fixes et deux contraintes principales ( $\sigma_j$  et  $\sigma_l$ ) restent constantes, éventuellement distinctes. Il s'agit bien d'une double famille puisque ces fonctions doivent être connues en compression ( $\epsilon_k$  positif) et en extension ( $\epsilon_k$  négatif). Nous nous donnons ainsi le comportement du matériau le long des six demi-droites, supports des vecteurs  $\pm i_1, \pm i_2, \pm i_3$ .

Les trois premières colonnes de la matrice M peuvent être dès lors explicitées en fonction de trois coefficients  $U_k$  et six coefficients  $V_k^i$  définis par dérivation :

$$\begin{cases} U_k = \left( \frac{\partial f}{\partial \epsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} & (k, j, l = 1, 2, 3) \\ & (k \neq j \neq l \neq k) \\ V_k^i = - \left( \frac{\partial g}{\partial \epsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l}; \quad V_k^i = - \left( \frac{\partial h}{\partial \epsilon_k} \right)_{\sigma_j, \sigma_l} \end{cases}$$

La matrice M prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ d\epsilon_{23} \\ d\epsilon_{31} \\ d\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/U_1 & -V_2^1/U_2 - V_3^1/U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1^2/U_1 & 1/U_2 & -V_3^2/U_3 & 0 & 0 & 0 \\ -V_1^3/U_1 - V_2^3/U_2 & 1/U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{23} \\ d\sigma_{31} \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

Les trois derniers éléments  $G_1, G_2, G_3$  ont été déterminés en fonction des neuf autres au prix d'une hypothèse supplémentaire (DARVE (10)). Ils ont pour expression :

$$G_1 = \frac{\sqrt{(U_2)^2 + (U_3)^2}}{U_2 U_3 \sqrt{2}} + \frac{U_2 (V_3^2 - 1) + U_3 (V_2^3 - 1)}{4 U_2 U_3},$$

$G_2$  et  $G_3$  se déduisant de  $G_1$  par permutation circulaire sur les indices.

Les éléments de la matrice M sont ainsi fonctions des états de contrainte et de déformation actuels (par les opérations de dérivation donnant les trois  $U_k$  et les six  $V_k^i$ ), du chemin suivi antérieurement dans le cas de changements de sens de la sollicitation antérieure (par les expressions des familles de fonctions f, g, h), du sens de la sollicitation incrémentale actuelle (puisque l'on teste, dans chaque direction d'orthotropie, le sens de la sollicitation par l'étude du signe de :  $U_k d\sigma_{kk}$  qui représente le signe de l'incrément de déformation  $d\epsilon_k$  sur le chemin C associé).

Vérifions maintenant la condition de continuité. Supposons que le chemin de sollicitation considéré passe progressivement d'une zone à la zone adjacente, par exemple par changement de signe de  $d\sigma_{22}$ . Pour la matrice M, ce changement de zone se traduira par la modification brutale des trois éléments de la deuxième colonne, mais, pour le calcul de la réponse incrémentale, ces trois éléments seront à multiplier par  $d\sigma_{22}$ , qui s'annule lors du changement de zone. Le chemin de réponse restera ainsi continu, à dérivée continue, comme les expériences l'imposent (un exemple est détaillé dans DARVE (10)). Bien entendu, dans le cas d'un chemin de sollicitation changeant brutalement de zone tensorielle (par exemple, sollicitations cycliques) le chemin de réponse sera à dérivée discontinue comme le chemin de sollicitation (des exemples de cycles sont pré-

sentés dans DARVE et al. (7) et (15)). Remarquons enfin que cette condition de continuité empêche d'imposer à la matrice M une symétrie arbitraire.

#### 4.3. Conclusion

Sur la base des études expérimentales disponibles, nous avons donné une expression analytique explicite pour la double famille des trois fonctions f, g, h. Ces formulations sont présentées dans BOULON et al. (16) et DARVE et al. (7).

La validité de la loi proposée a été étudiée par comparaison systématique des résultats théoriques avec les mesures effectuées sur des presses tri-dimensionnelles : essais sur sable de LADE et DUNCAN (comparaison théorie-expériences dans DARVE et al. (17)), essais sur sable de GOLDSCHIEDER et GUDEHUS (DARVE et al. (7)), essais sur argile de LADE et MUSANTE (DARVE (10)).

Enfin, cette loi a été introduite dans des programmes de calcul faisant appel à la méthode des éléments finis et a été appliquée aux calculs d'ouvrages en mécanique des sols : des algorithmes d'utilisation ont été mis au point (BOULON et al. (16), (18), (19), CHAMBON et al. (20)), une loi "régularisée" avec variation continue de la matrice M est testée (CHAMBON (13)).

Dans le prochain paragraphe, nous appliquons la condition de localisation de HILL à cette loi.

### 5. CALCULS DE DIRECTIONS DE SURFACES DE RUPTURE

Nous avons pu effectuer le calcul explicite de la direction des surfaces de rupture dans trois cas particuliers, géométriquement simples. Nous les présentons successivement.

#### 5.1. Cas du matériau bidimensionnel

Un exemple, classique en mécanique des sols, de matériau bidimensionnel est le milieu analogique de SCHNEEBELI (21), composé de petits rouleaux empilés le long de leurs génératrices.

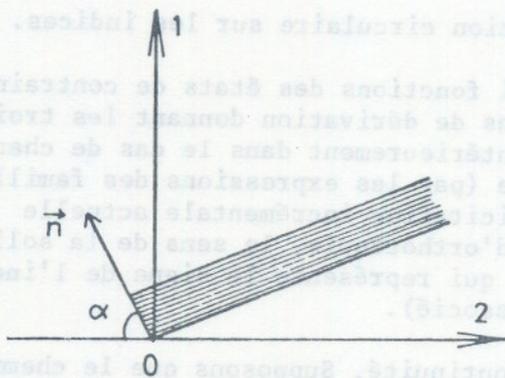


Figure 5

Nous notons (1,2) le repère correspondant aux directions d'orthotropie de la loi incrémentale à l'instant considéré (figure 5). L'annulation du déterminant de  $nLn$  aboutit à une équation paire, du quatrième degré en  $\text{tg}\alpha$ :

$$\text{tg } \alpha = n_1/n_2$$

$$L_{1111} L_{1212} \text{tg}^4 \alpha + [L_{1111} L_{2222} - L_{1122} L_{2211} - L_{1212} (L_{1122} + L_{2211})] \text{tg}^2 \alpha + L_{1212} L_{2222} = 0 \quad (7)$$

En remplaçant les  $L_{ijkl}$  par leurs expressions en fonctions des deux  $U_k$  et des deux  $V_k^j$  :

$$L_{1111} = \frac{U_1}{1 - v_1^2 v_2^1} \quad L_{2211} = \frac{U_2 v_1^2}{1 - v_1^2 v_2^1}$$

$$L_{1122} = \frac{U_1 v_2^1}{1 - v_1^2 v_2^1} \quad L_{2222} = \frac{U_2}{1 - v_1^2 v_2^1}$$

et en exprimant le critère de rupture ( $U_1 U_2 = 0$ ), par exemple dans la direction 1 ( $U_1 = 0$ ), nous obtenons la solution :

$$\underline{\underline{\text{tg}^2 \alpha = 1 / v_1^2}} \quad (8)$$

Remarquons tout d'abord que la condition de symétrie sur la matrice M rendrait l'équation (7) triviale par application du critère de rupture.

Par ailleurs, rappelons que :  $v_1^2 = - \left( \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varepsilon_1} \right)_{\sigma_2 \text{ constant}}$

D'où :  $\text{tg}^2 \alpha = - \left( \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} \right)_{\sigma_2 \text{ constant}}$

Si l'on pose :  $\alpha = \pi/4 - \psi/2$ , on en déduit :  $\sin \psi = - \left( \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2} \right)_{\sigma_2}$

Nous retrouvons donc l'angle de dilatance, défini par HANSEN (3) et dont nous avons rappelé la définition dans l'introduction.  $\psi$  représente ainsi l'angle algébrique de dilatance du matériau, à la rupture, sur le chemin de compression ou d'extension dans la direction 1, pour lequel la contrainte est maintenue constante dans l'autre direction et égale à la contrainte  $\sigma_2$  actuelle.

Dans le cas d'une expérience bidimensionnelle homogène menant à la rupture, nous avons montré qu'il existait deux directions de plans de rupture, symétriques par rapport aux axes d'orthotropie de la loi incrémentale, et faisant un angle égal à :  $\pm (\pi/4 - \psi/2)$  avec l'axe d'orthotropie dans la direction duquel le critère de rupture a été atteint.

Ce résultat sera comparé à des expériences dans le paragraphe 6.

## 5.2. Cas de la déformation plane

Expérimentalement, nous savons qu'un échantillon de sol en déformation plane ne se rompt jamais dans cette direction : la contrainte dans la direction de déformation plane reste comprise entre les deux autres valeurs des contraintes principales. Nous supposons, ici, que cette contrainte n'a qu'une influence négligeable sur le comportement du sol à la rupture.

Dans les axes d'orthotropie (1, 2) (figure 5), la loi incrémentale a donc la même forme que pour un matériau bidimensionnel (la direction 3 étant celle de déformation plane) ; mais les éléments  $L_{ijkl}$  ont pour expression :

$$\begin{cases} L_{1111} = U_1 (1 - v_2^3 v_3^2) / D \\ L_{1122} = U_1 (v_2^1 + v_2^3 v_3^1) / D \\ L_{2211} = U_2 (v_1^2 + v_1^3 v_3^2) / D \\ L_{2222} = U_2 (1 - v_1^3 v_3^1) / D \end{cases} \quad \text{où } D = 1 - v_2^3 v_3^2 - v_3^1 v_3^1 - v_1^2 v_2^1 - v_1^2 v_2^3 v_3^1 - v_1^3 v_2^2 v_3^1$$

L'annulation du déterminant de  $nLn$  aboutit à la même équation (7). En supposant le critère de rupture atteint dans la direction 1 ( $U_1 = 0$ ), on obtient :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - v_1^3 v_3^1}{v_1^2 + v_1^3 v_3^2} \quad (9)$$

Posons :  $\sin \psi = - \left( \frac{d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2} \right) \sigma_2$  constant,  $\varepsilon_3 = 0$

L'application de la loi rhéologique à un chemin en déformation plane et contrainte plane fournit les relations :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = \frac{1 - v_1^2}{U_1} d\sigma_1 - \frac{v_3^1 + v_3^2}{U_3} d\sigma_3 \\ d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = \frac{1 + v_1^2}{U_1} d\sigma_1 - \frac{v_3^1 - v_3^2}{U_3} d\sigma_3 \\ -\frac{v_1^3}{U_1} d\sigma_1 + \frac{1}{U_3} d\sigma_3 = 0 \end{cases}$$

qui permettent de calculer  $\sin \psi$  et de montrer que :

$$\operatorname{tg}^2(\pi/4 - \psi/2) = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

Dans le cas d'une expérience homogène en déformation plane menant à la rupture, nous trouvons deux directions de plans de rupture, symétriques par rapport aux axes d'orthotropie de la loi incrémentale et faisant un angle égal à :  $\pm(\pi/4 - \psi/2)$  avec l'axe d'orthotropie dans la direction duquel le critère de rupture a été atteint,  $\psi$  étant l'angle algébrique de dilatance du matériau sur le chemin en déformation plane et contrainte plane correspondant à l'état actuel de contraintes et de déformations.

### 5.3. Cas de la symétrie de révolution

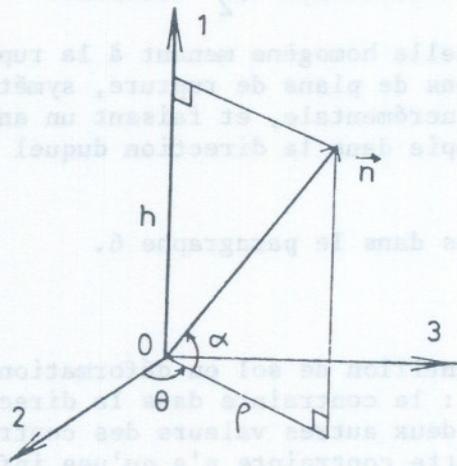


Figure 6

Le repère (1, 2, 3) représente le système d'axes d'orthotropie de révolution pour la loi incrémentale, l'axe 1 étant l'axe de révolution. L'annulation du déterminant de  $nLn$  fournit l'équation (10), paire, du sixième degré en  $\operatorname{tg} \alpha$  :

$$\begin{aligned} & L_{1111} (L_{1212})^2 \operatorname{tg}^6 \alpha + L_{1212} [L_{1111} (3L_{2222} - L_{2233}) / 2 \\ & - L_{1212} (L_{1122} + L_{2211}) - L_{2211} L_{1122}] \operatorname{tg}^4 \alpha \\ & + [(L_{1212})^2 L_{2222} + [L_{1111} L_{2222} - L_{1122} L_{2211} - L_{1212} (L_{1122} + L_{2211})] \\ & (L_{2222} - L_{2233}) / 2] \operatorname{tg}^2 \alpha + L_{1212} L_{2222} (L_{2222} - L_{2233}) / 2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} L_{1111} = U_1 (1 - v_2^3 v_3^2) / D \\ L_{1122} = U_1 v_2^1 (1 + v_2^3) / D \\ L_{2211} = U_2 v_1^2 (1 + v_2^3) / D \\ L_{2222} = U_2 (1 - v_1^2 v_2^1) / D \\ L_{2233} = U_2 (v_3^2 + v_1^2 v_2^1) / D \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(D a la valeur donnée dans le} \\ \text{paragraphe 5.2)} \end{array}$$

et supposant le critère de rupture atteint dans la direction de révolution ( $U_1 = 0$ ), on obtient :

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{1 - v_1^2 v_2^1}{v_1^2 (1 + v_2^3)} \quad (11)$$

Il semble que l'on ne puisse pas trouver, dans ce cas, une interprétation simple du résultat en termes d'angle de dilatance.

Dans le cas d'une expérience homogène, symétrique de révolution, menant à la rupture, dans la direction de révolution, nous trouvons un cône circulaire de rupture d'axe : l'axe de révolution et de demi-angle au sommet  $\beta$  donné par :

$$\text{tg}^2 \beta = \frac{v_1^2 (1 + v_2^3)}{1 - v_1^2 v_2^1}$$

## 6. PREMIERES EXPERIENCES EFFECTUEES

Les expériences les plus simples à réaliser sont relatives au milieu bidimensionnel de SCHNEEBELI (21). Malheureusement, la géométrie trop régulière des assemblages d'éléments constitutifs du milieu font que ses caractéristiques mécaniques (angles de frottement et de dilatance, entre autres) sont pratiquement indépendants de l'état de contrainte et de la densité initiale, contrairement à un sable ou une argile. La vérification de la formule :  $\alpha = \pi/4 - \psi/2$  en est d'autant limitée, puisque  $\psi$  sera constant.

Les essais de compression et d'extension biaxiales réalisées (TRATAPEL (22)) ont montré que l'angle de frottement à la rupture reste voisin de  $24^\circ$  ( $+ 24^\circ$  en compression,  $- 24^\circ$  en extension) tandis que les angles de dilatance en compression et en extension sont proches respectivement de  $7,5^\circ$  et de  $- 10^\circ$ . JACQUET (23) a effectué quelques expériences de compression et d'extension biaxiales pour lesquelles il a mesuré (à partir des photographies prises) les orientations des plans de rupture. Les fourchettes expérimentales ont été reportées sur la figure 7 et comparées aux valeurs théoriques :  $\pi/4 - \psi/2$  et  $\pi/4 - \psi/2$ .

On sait que l'angle de dilatance d'un sable, mesuré sur des chemins en déformation plane et contrainte plane, diminue quand la contrainte latérale augmente : en effet, pour de très fortes contraintes, le matériau devient contractant. D'après nos résultats, l'obliquité  $\alpha$  des surfaces de rupture par rapport à la direction  $l$ , axe d'orthotropie dans la direction duquel le critère de rupture est atteint, devrait augmenter pour tendre vers  $45^\circ$ , quand la contrainte latérale croît ( $\alpha = \pi/4 - \psi/2$ ). Ce résultat est classique dans le cas des roches. Il a été mis en évidence expérimentalement par PATERSON (24) dans le cas d'un marbre et par WAWERSIK et BRACE (25) pour celui du granite de WESTERLY. FABRE (26) "retrouve la même tendance" pour une argile.

Enfin, si les surfaces de rupture orientées à  $45^\circ$ , que HABIB (27) a trouvées à plusieurs reprises pour différentes argiles, ne s'interprètent que difficilement par un angle de frottement nul, il pourrait être plus satisfaisant d'expliquer cette orientation par la nullité de leur angle de dilatance.

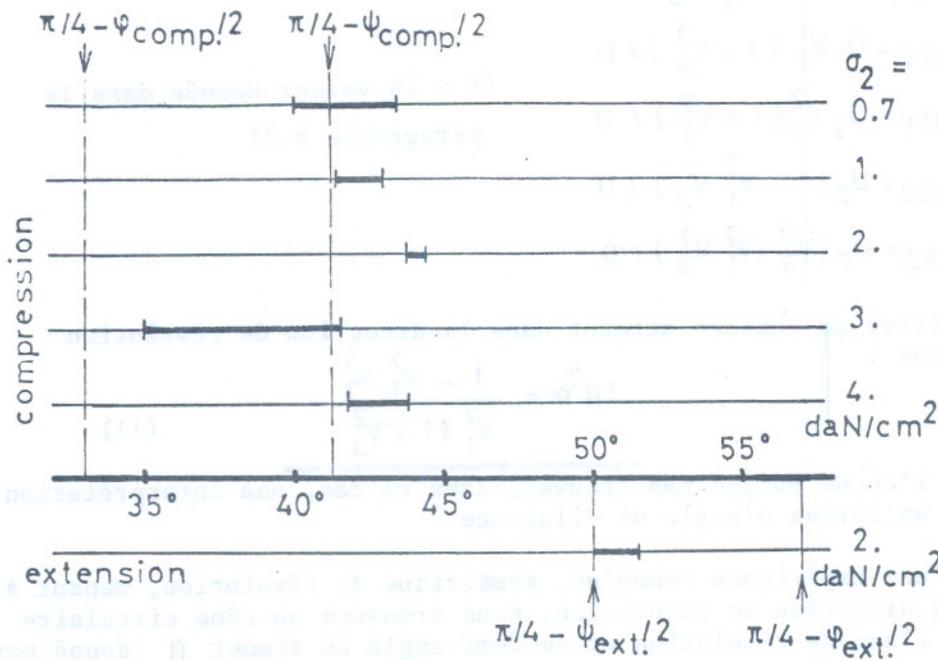


Figure 7 :  
Orientation des surfaces de rupture dans des essais biaxiaux sur un milieu analogique bidimensionnel : comparaison des fourchettes expérimentales avec les valeurs théoriques. (JACQUET (23)).

## 7. CONCLUSION

Cette première approche que nous proposons (DARVE (28)) permet de retrouver, en la généralisant, la notion d'angle de dilatance, à la base de la théorie des "lignes d'extension nulle" (HANSEN (3), JAMES et BRANSBY (4) (5)). Elle recoupe certains résultats, obtenu avec une autre loi rhéologique incrémentale par VARDOULAKIS et GUDEHUS (29).

De cette étude paraît se dégager le fait que l'existence d'un point de bifurcation dans le mode de déformation est directement liée à la dilatance du matériau. Il y aurait apparition d'une instabilité de déformation à la suite d'une certaine dilatance. Cette instabilité permettrait le développement d'un autre mode de déformation par localisation des déformations le long de surfaces de rupture, de directions déterminées, mais dont l'implantation dans l'échantillon dépend d'imperfections locales. La résistance de l'échantillon diminuerait jusqu'à atteindre le "palier de plasticité parfaite", lorsque la surface de rupture aurait traversé de part en part le matériau ; la "déformation" se réduirait alors à des glissements relatifs de blocs rigides. Tout au long du développement des surfaces de rupture, les variations de l'indice des vides seraient de moins en moins importantes jusqu'à atteindre une certaine valeur limite, habituellement appelée en mécanique des sols "indice des vides critique". Le "ramollissement" du matériau du pic de contraintes jusqu'au palier ainsi que l'existence d'un indice des vides critique pour un sol dilatant serait à mettre au compte, dans ce cadre de pensée, du développement d'hétérogénéités au sein de l'échantillon. Notons enfin que, pour un sol contractant (à priori stable en déformations) les expérimentateurs n'ont en général observé ni "ramollissement" du matériau, ni surfaces de rupture, ce qui corrobore a contrario nos résultats.

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) TCHENG, "Mesures expérimentales en milieu pulvérulent", Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, n° 332, pp. 90-115, oct. 75.
- (2) COULOMB, "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture", Mémoires de la mathé-

- matique et de physique, vol. 7, 1773, Paris, De l'Imprimerie Royale, pp. 343-382, 1776.
- (3) HANSEN, "Line ruptures regarded as narrow rupture zones : basic equations based on kinematic considerations", "Conference of Earth Pressure Problems, vol. 1, pp. 39-49, Bruxelles, 1958.
  - (4) JAMES, BRANSBY, "Experimental and theoretical investigations of a passive earth pressure problem", Géotechnique, vol. 20, n° 1, pp. 17-37, 1970.
  - (5) JAMES, BRANSBY, "A velocity field for some passive earth pressure problems", Géotechnique, vol. 21, n° 1, pp. 61-83, 1971.
  - (6) HILL, "Acceleration waves in solids", J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, pp. 1-16, 1962.
  - (7) DARVE, BOULON, CHAMBON, "Loi rhéologique incrémentale des sols", à paraître dans le Journal de Mécanique en déc. 78.
  - (8) THOMPSON, HUNT, "A general theory of elastic stability", John Wiley, Londres, 1973.
  - (9) THOM, "Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles", W.A. Benjamin Inc., Ediscience S.A., Paris, 1972.
  - (10) DARVE, "Une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Application aux sols", thèse d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1978.
  - (11) GUDEHUS, GOLDSCHIEDER, WINTER, "Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods : some sources of errors and bounds of accuracies", ch. 3 of "Finite elements in geomechanics", WILEY, Londres, 1978.
  - (12) GUDEHUS, "Materialverhalten von sand : neuere erkenntnisse and deren Nutzenwendung", à paraître dans Bauingenieur, 1979.
  - (13) CHAMBON, "Incremental non-linear stress-strain relationship for soils and integration by F.E.M.", 3ème International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen, 1979.
  - (14) KOLYMBAS, "Ein nichtlineares viskoplastisches Stoffgesetz für Böden", Heft 77, Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik, Karlsruhe, 1978.
  - (15) DARVE, FLAVIGNY, "Simulation de la liquéfaction des sols avec une loi incrémentale", comptes-rendus du séminaire "Matériaux et structures sous chargement cyclique", Ecole Polytechnique, à paraître en 1979.
  - (16) BOULON, CHAMBON, DARVE, "Loi rhéologique"

- (19) BOULON, DARVE, DESRUES, FORAY, "Soil-structure coupling. Non-linear rheological relationship and boundary conditions in soil mechanics", Colloque international sur les développements nouveaux dans les méthodes numériques de l'ingénieur, Paris, 1977, à paraître dans Computers and Structures.
- (20) CHAMBON, DARVE, TRATAPEL, "Mesures et calculs avec loi non-linéaire pour un modèle expérimental", comptes-rendus du symposium franco-polonais, Cracovie, à paraître en 1979.
- (21) SCHNEEBELI, "Une analogie mécanique pour les terres sans cohésion", C.R.A.S., tome 243, p. 125, 1956.
- (22) TRATAPEL, "Contribution à l'étude du comportement mécanique d'un milieu analogique bidimensionnel", thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1977.
- (23) JACQUET, "Etude des surfaces de rupture en mécanique des sols en tant que problème de bifurcation", travail de fin d'études, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, 1978.
- (24) PATERSON, "Experimental deformation and faulting in Wombeyan Marble", Geol. Soc. of Amer. Bull., vol. 69, pp. 465-475, 1958.
- (25) WAWERSIK, BRACE, "Postfailure behaviour of a granite and a diabase", Rock Mech., vol. 3, pp. 61-85, 1971.
- (26) FABRE, "Quelques observations sur la fissuration et la fragilité des argiles et des roches", thèse de docteur-ingénieur, Grenoble, 1976.
- (27) HABIB, "La résistance au cisaillement des sols", thèse d'état, Annales de l'I.T.B.T.P., n° 61, pp. 1-40, janvier 1953.
- (28) DARVE, "Approche d'une étude des surfaces de rupture en tant que problème de bifurcation", deuxième sujet, thèse d'état, Institut de Mécanique de Grenoble, 1978.
- (29) VARDOULAKIS, GOLDSCHIEDER, GUDEHUS, "Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem", Internat. Journal for Num. and Anal. Methods in Geomechanics, vol. 2, pp. 99-128, 1978.
- (30) RUDNICKI, RICE, "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials", J. Mech. Phys. Solids, vol. 23, pp. 371-394, 1975.

CHHUY SOK J. BARON  
 LABORATOIRE CENTRAL DES PONTS ET CHAUSSEES  
 D. FRANCOIS  
 UNIVERSITE DE TECHNOLOGIE DE COMPIEGNE

RESUME :

On étudie la propagation d'une fissure dans le béton hydraulique non armé. Le principe de l'essai est classique : l'éprouvette est une poutre double console, dite "poutre DCB" ; la force tendant à séparer les deux consoles est asservie de manière à maintenir constante la vitesse d'ouverture de la fissure. L'originalité de l'essai tient à la dimension de la poutre, qui permet d'étudier la propagation de fissure sur une grande longueur (1,80 m). Une force longitudinale de précontrainte empêche la fissure de dévier.

Le suivi de la fissure visible se fait avec une loupe mais une grande attention est apportée au développement de la zone de comportement non élastique située en fond de fissure ; deux méthodes sont utilisées : revêtement photo-élastique et localisation de l'émission acoustique. On montre ainsi l'extension très importante de la zone perturbée non élastique, de l'ordre d'une vingtaine de centimètres.

La grande taille de l'éprouvette permet de dégager un résultat intéressant pour la pratique : au début de propagation, l'énergie de rupture augmente au fur et à mesure que la fissure se propage. On n'atteint une valeur stationnaire de cette énergie de rupture qu'après cinquante centimètres de propagation de fissure ; cette valeur stationnaire est dix fois plus grande que la valeur initiale. Il est probable que la plupart des résultats donnés dans la littérature, obtenus sur des éprouvettes trop petites, sous-estiment notablement la résistance du béton non armé à la propagation de fissure.

---

The author studies the propagation of a crack in non-reinforced hydraulic concrete.

The principle of the test is conventional : the test sample is a double cantilever beam (DCB) ; the force tending to separate the two cantilevers is slaved so as to keep the rate of opening of the crack constant. The originality of the test lies in the dimension of the beam ; it enables the propagation of the crack to be studied over a considerable length (1,80 m). A longitudinal prestressing force prevents the crack from deviating.

The visible crack is observed with a magnifier, but close attention is paid to the observation of the development of the zone of non-elastic behaviour at the bottom of the crack. Two methods are employed : photo-elastic varnish and localization of acoustic emission. This shows the very considerable extension of the non-elastic disturbed zone ; around 20 cms.

The large size of the sample piece makes it possible to obtain a valuable practical result : at the beginning of propagation, the energy of failure increases as the crack propagates. This energy of failure reaches a stationary value only after 50 cms of propagation of the crack, and this stationary value is ten times the initial value. It is probable that most of the results published in the existing literature, obtained with samples of too small a size, appreciably underestimate the resistance of non-reinforced concrete to the propagation of cracks.

\* Communication au Groupe Français de Rhéologie le 7.12.1978

\*\* Publié avec l'aimable autorisation du directeur du L.C.P.C.

### — Ouverture de fissure (fig. 13)

Les déplacements des lèvres de fissure au niveau de l'axe présumé de propagation de fissure dans les plans AA, BB, CC, seront désignés respectivement par  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ .  $v_1$  peut être aussi appelé l'ouverture d'entaille et représenter les déplacements des points d'application de l'effort P exercé par un vérin d'axe AA.  $v_2$  mesure les déplacements des lèvres de fissure au fond d'entaille ainsi que  $v_3$  à 30 cm de ce dernier.

### — Complaisance de l'éprouvette (fig. 13)

La complaisance d'une éprouvette est le rapport du déplacement  $v_1$  à la force P correspondante à chaque instant et pour chaque longueur de fissure :  $C = \frac{v_1}{P}$

### — Fissure visible (fig. 14)

La fissure visible désigne la fissure apparue pendant l'essai et détectée soit à l'œil nu, soit à l'aide d'une loupe de grossissement 5, à la surface du béton.

La distance de l'axe du vérin (force P) à l'extrémité du fond d'entaille s'appelle la *longueur d'entaille* ( $a_0$ ) ou *longueur de fissure initiale*.

La *propagation de fissure visible* ( $\Delta a$ ), ou *accroissement de fissure visible*, est comptée à partir du fond d'entaille.

La longueur de fissure visible est la distance entre l'axe de la force P et l'extrémité de cette fissure visible :

$$a = a_0 + \Delta a.$$

### — Zone perturbée (fig. 14)

La zone perturbée est située au voisinage du fond de fissure visible endommagée par la création et la propagation des microfissures (zone perturbée BC).

### — Longueur d'endommagement ou propagation de l'endommagement AC (fig. 14)

C'est la longueur de la zone qui est fissurée ou microfissurée; elle est comptée à partir du fond d'entaille.

Cette longueur d'endommagement est déterminée expérimentalement soit par le revêtement photo-élastique, soit par la localisation linéaire de l'émission acoustique.

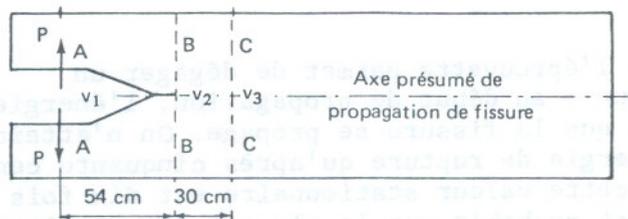


Fig. 13 - Emplacement du vérin et des déplacements  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ .  
 $v_1$  : (ouverture d'entaille) mesure les déplacements des points d'application de la force P.  
 $v_2$  : mesure les ouvertures du fond d'entaille.  
 $v_3$  : mesure les déformations suivant l'axe CC au niveau de l'axe présumé de propagation de fissure.

### — Propagation de fissure

● **Propagation contrôlée continue** : c'est l'accroissement de la longueur de fissure visible quand on augmente l'ouverture d'entaille;

● **Propagation contrôlée discontinue** : c'est l'apparition brusque d'un prolongement de la fissure visible qui se propage de la longueur  $a_1$  à  $a_2$  ( $a_2 > a_1$ );

● **Propagation contrôlée différée** : il s'agit de la propagation de la fissure visible en palier lorsque l'ouverture d'entaille  $v_1$  est maintenue constante;

● **Rupture brutale** : la fissure se propage jusqu'au bout de l'éprouvette marquant la fin de l'essai.

### — Résistance à la fissuration R et taux de restitution d'énergie G

L'énergie de fissuration R est l'énergie consommée par le matériau pour faire avancer d'une unité de surface la propagation d'une fissure (voir fig. 1)

Le taux de restitution d'énergie est l'énergie élastique disponible par unité de surface de progression de fissure.

### — Événement acoustique (fig. 15)

Un événement acoustique est le bruit qui accompagne une rupture; il est défini par son amplitude maximale, sa longueur ou sa durée, le temps de montée et le nombre de coups.

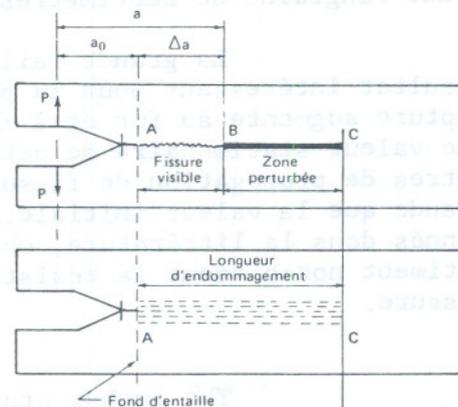


Fig. 14 - Définition des termes relatifs à la fissure.

$a_0$  : longueur d'entaille,  
 $\Delta a$  : propagation de fissure visible,  
 $a = (a_0 + \Delta a)$  : longueur de fissure visible

AC : segment représentant la longueur d'endommagement,  
 BC = AC - AB : zone perturbée en avant du front de fissure visible.

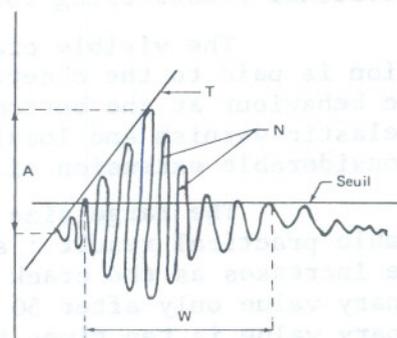


Fig. 15 - Définition d'un événement acoustique.

A : amplitude maximale,  
 W : durée ou longueur,  
 T : temps de montée,  
 N : nombre de coups par événement acoustique.  
 On y voit également le seuil de détection d'émission acoustique.

## INTRODUCTION

Dans les constructions en béton armé ou précontraint, on ne peut pas supprimer les fissures. On essaie alors de limiter leurs ouvertures à certaines valeurs déterminées, car une ouverture excessive constitue un danger pour la durabilité du béton. Il existe aujourd'hui plusieurs méthodes pour calculer l'ouverture d'une fissure dans une poutre en béton armé sous des charges de courte et de longue durée, mais ces méthodes n'ont pas une valeur générale.

### Pourquoi la mécanique de la rupture appliquée au béton ?

La mécanique de la rupture a été appliquée et développée surtout pour les métaux, mais ses applications dans d'autres domaines tels que les céramiques et les roches sont aussi nombreuses. On peut se demander si la mécanique de la rupture peut apporter un complément utile au calcul du béton armé ou encore un renouveau des méthodes ; il semble difficile aujourd'hui de répondre à ces questions pourtant importantes. Il ne s'agit pas de nier la valeur des méthodes classiques de calcul du béton armé ; elles ont fait leurs preuves. Cependant, on peut remarquer qu'elles sont surtout aptes à décrire l'état final de la structure. Elles ne fournissent pas de renseignement quantitatif sur la manière dont on arrive à cet état final, comment se propagent les fissures et à quelle vitesse. Or, cet aspect dynamique est important, ne serait-ce que par ses conséquences sur la redistribution des charges dans les structures hyperstatiques. La mécanique de la rupture est conçue pour répondre à de telles questions (ce qui ne veut pas dire qu'elle y réponde facilement). En outre, elle serait parfaitement apte à rendre compte, par le calcul, de l'effet combiné des armatures et des fibres. Enfin, les méthodes de la mécanique de la rupture pourraient apporter des informations sur le rôle des armatures en fatigue car c'est principalement un problème de propagation de fissure.

L'objectif est donc de caractériser le béton armé en tant que matériau composite ou, si l'on veut, de caractériser le rôle de l'armature vis-à-vis de la propagation de fissure.

### Recherches antérieures sur la mécanique de la rupture appliquée au béton

La première publication date de 1961 [1]. Depuis, nous avons relevé une vingtaine d'articles dont les résultats sont assez dispersés [5 à 30]. En 1974, une étude bibliographique et critique sur la fissurabilité et la fragilité du béton hydraulique, réalisée par M. Baron [2], a montré qu'il y avait lieu de craindre que certains résultats trouvés par de nombreux expérimentateurs soient entachés d'erreurs car les éprouvettes utilisées étaient beaucoup trop petites ; par la suite, sept publications apparurent [24 à 30], parmi lesquelles on doit signaler les travaux de MM. Entov et Yagust [25] effectués sur des éprouvettes de grandes dimensions et dans des conditions de propagation quasi stable.

Ces travaux montrent que :

1. la valeur du facteur d'intensité de contrainte critique pourrait être deux ou trois fois plus grande pour un béton donné que les valeurs indiquées jusqu'ici par la littérature ;

2. la valeur du facteur d'intensité de contrainte critique augmenterait lorsque la fissure se propage ;

3. la dimension de la zone perturbée non élastique en fond de fissure serait de l'ordre d'une dizaine de centimètres, de sorte qu'une grande partie de l'énergie de rupture serait dissipée par microfissuration.

Il devient alors encore plus vraisemblable que, presque toujours, les conditions expérimentales des recherches antérieures étaient telles que les hypothèses qui fondent la validité de la mécanique linéaire de la rupture n'étaient pas satisfaites. En effet, cette théorie n'est valable que si la zone perturbée non élastique en avant du front de fissure est suffisamment petite et confinée dans un grand volume de comportement élastique. Par exemple, pour les métaux ; l'ordre de grandeur de la dimension de la zone plastique ( $R$ ) en fond de fissure peut être approché selon Irwin [3,4] par :

$$R = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{IC}}{R_e} \right)^2$$

où

$K_{IC}$  est le facteur d'intensité de contrainte critique correspondant à la rupture brutale de l'éprouvette,

$R_e$  la limite d'élasticité du métal.

Pour l'essai de flexion, la spécification ASTM E 399-74 impose les dimensions des éprouvettes :

a et  $(w - a)$  et  $B \geq 2,5 \times \pi \times R$ , soit environ  $\geq 8 R$

où

a désigne la longueur d'entaille,

w la hauteur de la poutre,

B la largeur de la poutre.

Cette règle empirique est une condition nécessaire pour utiliser valablement les concepts de la mécanique linéaire de la rupture. Si on l'appliquait au béton, on en déduirait qu'il faut interdire toutes les éprouvettes d'épaisseur inférieure à 80 cm. Ce serait peu réaliste, d'autant que beaucoup de parties d'ouvrages ne sont pas aussi épaisses. Mieux vaut alors utiliser d'autres concepts. Cela revient, en un premier temps, à caractériser la résistance à la propagation de fissure non plus par une constante, mais par une fonction de la longueur de fissure propagée (fig. 1).

Le LCPC a lancé en 1975 un programme de recherche dans ce domaine. Nous présentons ici les principaux enseignements tirés de plusieurs essais réalisés avec de grandes éprouvettes de type DCB (fig. 2) en béton de granulats traditionnels *non armé*. Ces essais étaient destinés à mettre au point la méthode (tableau I).

Les premiers résultats obtenus confirment et complètent ceux de MM. Entov et Yagust. Ils précisent l'ampleur de la zone microfissurée en avant du fond d'entaille. La résistance à la fissuration est caractérisée par la courbe  $R$  qui croît avec la propagation de fissure ; elle n'atteint une valeur stationnaire qu'après 50 cm environ de propagation.

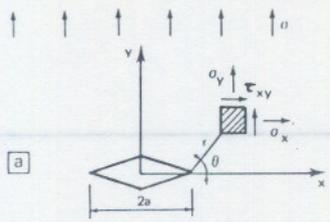
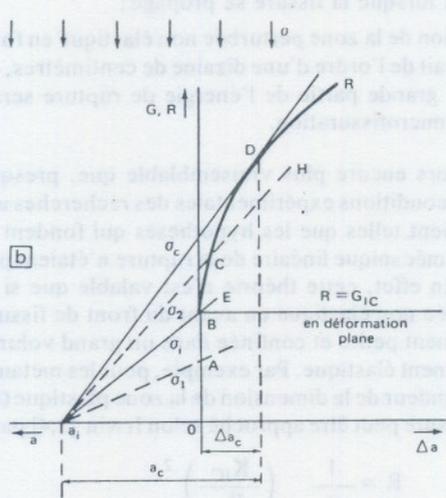


Fig. 1

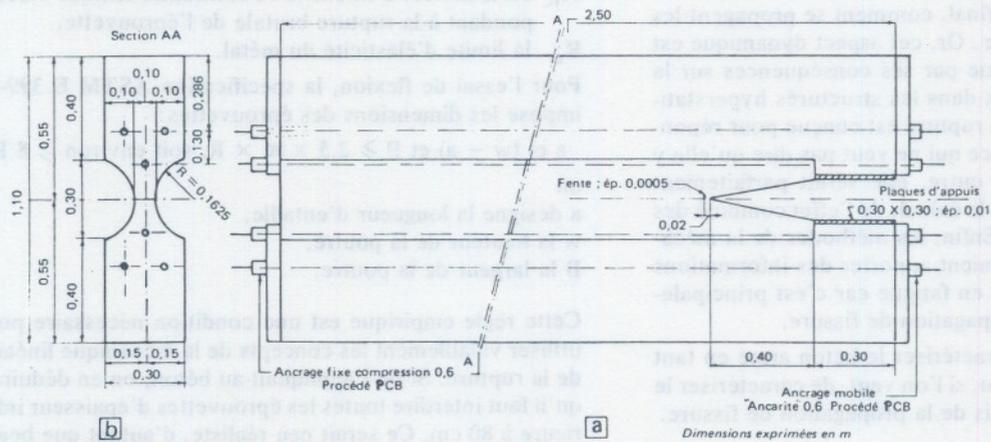
a - Plaque infinie possédant une fissure centrale de longueur 2a, soumise à une contrainte de traction uniforme  $\sigma$ . L'état de contrainte au voisinage du front de fissure au point de coordonnées  $(r, \theta)$  est  $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ . La théorie de l'élasticité donne :

- pour des tenseurs de contrainte :  $\sigma_{ij} = (K_I / \sqrt{2\pi r}) f_{ij}(\theta)$
- pour des vecteurs de déplacement :  $u_i = (K_I / 2\mu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta)$   
où  $\mu$  dépend de l'état de contrainte plane ou de déformation plane.



b - Variation de l'énergie de rupture R en cours de propagation de fissure (Courbe R : BCDR). L'énergie de rupture (R) et le taux de restitution d'énergie sont représentés en ordonnées et la propagation de fissure ( $\Delta a$ ) en abscisse, la longueur de fissure initiale ( $a_0$ ) étant représentée en abscisse négative. L'énergie de fissuration R est l'énergie consommée par le matériau pour faire avancer d'une unité de surface la propagation d'une fissure; le taux de restitution d'énergie (strain energy release rate) est l'énergie élastique disponible par unité de surface de progression de fissure. Dans le cas de la figure 1 (a) le taux de restitution d'énergie (G) est  $G = (\sigma^2/E) \cdot \pi \cdot a$ , représenté par une droite dont la pente est proportionnelle à  $\sigma^2$ .  $a_1A, a_1B, a_1C, a_1D$  sont les droites représentant la variation de G pour les contraintes  $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_c$  ( $\sigma_1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_c$ ). Pour  $\sigma = \sigma_1$ ,  $G = OA$  inférieure à l'ordonnée de la courbe R, il n'y a aucune propagation de fissure; pour  $\sigma = \sigma_1$ , il y a propagation de fissure entre B et C, puis arrêt de fissure. En effet à cette contrainte  $\sigma_1$ , après la propagation de fissure, G devient plus petit que l'énergie de rupture R (segment BE inférieur à l'ordonnée de la courbe R, BCDR); pour  $\sigma = \sigma_c$ , la droite  $a_1D$  est tangente à la courbe R en D, la propagation de fissure est brutale; l'abscisse du point D,  $\Delta a_c$  définit alors la longueur de fissure critique  $a_c = a_0 + \Delta a_c$  qui caractérise la propagation de fissure brutale marquant la rupture de l'éprouvette.

Fig. 2 - Epreuve type DCB (poutre double console, ou Double Cantilever Beam).



a - Forme de l'éprouvette DCB de 2,50 m de long et de 1,10 m de hauteur. L'entaille est moulée dans le plan de symétrie de la poutre, son extrémité est constituée d'une feuille métallique de 2 cm de long, 0,5 mm d'épaisseur et 10 cm de large. Les torons de précontrainte et le système d'ancrage sont figurés sur ce schéma.

b - Section transversale de la poutre DCB à section progressivement amincie; au niveau du plan de symétrie de la poutre, appelé aussi plan de propagation de fissure, l'épaisseur est de 10 cm; on voit les emplacements des câbles de précontrainte introduits dans la poutre pour guider la direction de fissure (voir également la figure 3).

TABLEAU I  
Récapitulation des essais DCB

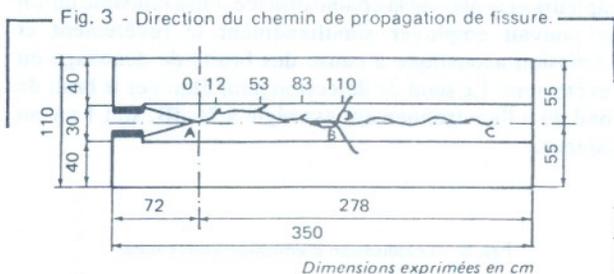
N°	Age (j)	Nature du béton	Position de l'éprouvette	Revêtement photo-élastique	Emission acoustique		Longueur de l'éprouvette (m)	Coffrage	Précontraint (t)	Conservation				Résultats
					(1)	(2)				RH (%)		T (°C)		
										min.	max.	min.	max.	
DCB <sub>1</sub>	58	non armé <sup>(3)</sup>	horizontale	oui <sup>(5)</sup>	oui	non	2,50	bois	8	40	65	15	25	disponible
DCB <sub>2</sub>	70	non armé <sup>(3)</sup>	verticale	oui <sup>(6)</sup>	oui	oui	2,50	bois	48	35	65	10	17	disponible
DCB <sub>3</sub>	28	non armé <sup>(3)</sup>	verticale	néant	oui	oui	2,50	bois	48	25	60	10	20	néant <sup>(8)</sup>
DCB <sub>4</sub>	28	non armé <sup>(3)</sup>	verticale	néant	non	oui	3,50	métallique	48 et 106	60	83	18	20	disponible
DCB <sub>5</sub>	28	armé <sup>(4)</sup>	verticale	oui <sup>(7)</sup>	oui	non	3,50	métallique	106	40	80	15	20	disponible

- (1) Avec les appareils du LCPC à Nantes.
- (2) Avec les appareils et montage suivant la chaîne Dunegan-Endevco.
- (3) Béton hydraulique ordinaire de composition par mètre cube - ciment CPA 400: 400 kg; sable 0/5: 700 kg; gravillon 5/12: 1 105 kg; eau: 190 l.
- (4) Deux armatures de Ø 6 HA ont été placées à 1,40 m du fond d'entaille.
- (5) Revêtement sur 1 m en avant du fond d'entaille et 10 cm de large.
- (6) Revêtement sur toute la longueur de propagation de fissure (178 cm) et sur 20 cm de large.
- (7) Revêtement au fond d'entaille (20 x 20 cm) et au niveau d'armature sur une longueur de 60 cm, soit 30 cm de part et d'autre de l'armature.
- (8) Il s'est produit une rupture brutale de l'éprouvette par la coupure du courant électrique en début d'essai.

Fabrication des éprouvettes DCB\*

La composition du béton est indiquée dans le tableau I. Le mélange des constituants s'effectuait dans un malaxeur à un axe vertical à train vaiseur à palettes de 250 l de capacité. La durée du malaxage était de 7 mn (2 mn à sec, 30 s de mouillage et 4 mn 30 s humide). Les caractéristiques du béton frais ont été déterminées par l'affaissement au cône (NF 18-451) et le temps d'écoulement dans le maniabilimètre LCL; les valeurs sont indiquées dans le tableau II. Il a fallu cinq gâchées de 250 l pour fabriquer chaque éprouvette DCB (fig. 2); chacune a été décoffrée 20 jours après et conservée dans l'atmosphère ambiante du laboratoire jusqu'au jour de l'essai (voir l'humidité relative RH et la température T dans le tableau I). La mise en place du béton frais a été réalisée avec une aiguille vibrante à air comprimé de 33 mm. Chaque éprouvette DCB était accompagnée d'une série d'éprouvettes cylindriques et prismatiques classiques destinées à déterminer les caractéristiques mécaniques du béton (tableau II).

\* DCB signifie poutre double console ou « Double Cantilever Beam ».



a - Schéma calqué d'une photo prise après la rupture d'une éprouvette DCB<sub>4</sub> montrant le rôle important de la précontrainte longitudinale pour diriger le chemin de propagation de fissure. Au départ, la précontrainte était de 48 t. La propagation suit le chemin AB et la bifurcation de fissure a été constatée en plusieurs endroits à 12, 53, 83 et 110 cm du fond d'entaille A; en B, la fissure ne revient pas dans l'axe de la poutre et a tendance à dévier; en augmentant la précontrainte jusqu'à 106 t on a ramené la fissure dans l'axe suivant le chemin DC avec le point D à 114 cm du fond d'entaille comme amorce de fissure.

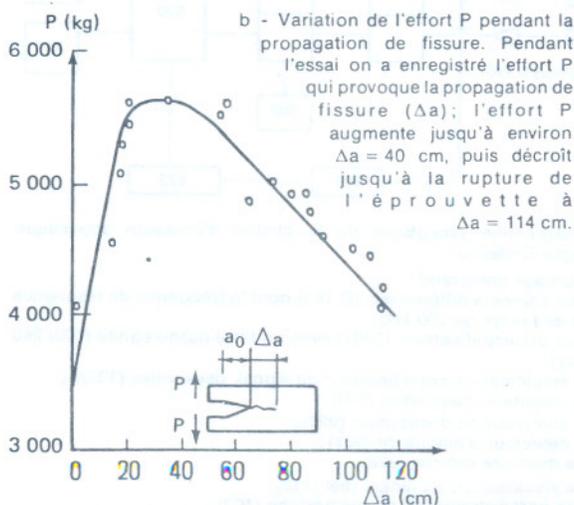


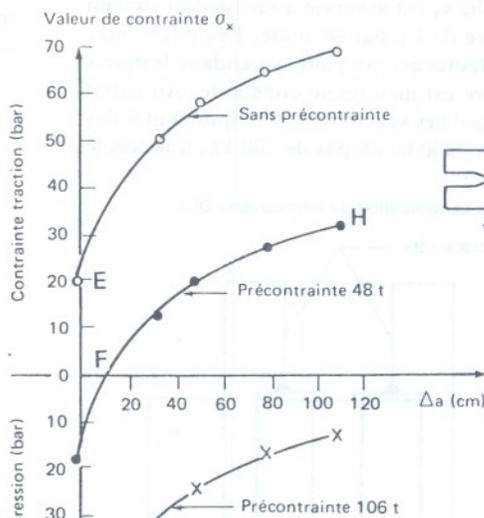
TABLEAU II  
Résistance mécanique du béton constituant l'éprouvette DCB

Age (j)	Compression <sup>(1)</sup> (bar)	Fendage <sup>(1)</sup> (bar)	Flexion <sup>(2)</sup> (bar)	Traction directe <sup>(3)</sup> (bar)	Module <sup>(4)</sup> E (bar)
7	310	36	31		
14	353	37	31		
28	413	40	35	25	4.10 <sup>5</sup>
70	451	45	40	28	4.10 <sup>5</sup>

- (1) Eprouvette cylindrique 16 × 32, conservée dans l'eau à température 20° ± 1 °C.
- (2) Eprouvette prismatique 10 × 10 × 40, conservée dans l'eau à température 20° ± 1 °C.
- (3) Eprouvette modèle LCPC ci-dessous retirée de l'eau 3 jours avant le jour de l'essai pour coller les plaques de traction aux deux extrémités.



- (4) Module tangent à l'origine de la courbe effort-déformation en compression.
- Les valeurs indiquées dans ce tableau sont la moyenne de trois éprouvettes.  
Affaissement du cône (NF 18-451) : 2,50 cm.  
Temps d'écoulement (maniabilimètre, modèle LCPC) : 22 s.



c - Développement de la contrainte de traction longitudinale  $\sigma_x$  suivant que la poutre est sans précontrainte ou précontrainte à 48 ou 106 t. Cette contrainte est la cause de la déviation de fissure par rapport à l'axe de la poutre. Sans la précontrainte,  $\sigma_x = 20$  bar (point E) pour amorcer la fissure au fond d'entaille et qui croît quand la fissure se propage; il est donc impossible d'étudier la propagation de fissure. Pour la précontrainte de 48 t, il se développe une traction longitudinale  $\sigma_x$  à partir de 10 cm de propagation de fissure (point F) et qui atteint 32 bar à  $\Delta a = 110$  cm (point H), correspondant au point B de la figure 3(a) où la fissure part en déviation sans revenir à l'axe de la poutre. Quand la précontrainte est passée à 106 t, la section du béton est partout comprimée et le chemin de propagation DC est plus uniforme et plus rectiligne que dans le cas précédent AB.  $\sigma_x$  a été calculé par la relation en béton précontraint d'une poutre en flexion:

$$\sigma_x = \frac{F}{B} - \frac{F e_0 v_i}{I} - \frac{M_M v_i}{I}$$

dans laquelle F = 24 ou 53 t suivant que la précontrainte est de 48 ou 106 t;  $M_M$  est le moment à l'extrémité d'une fissure égal au produit de P par la longueur de fissure correspondante (fig. 3b); B = 1450 cm<sup>2</sup>,  $e_0 = 8,50$  cm;  $v_i = 30,55$  cm; I = 302513 cm<sup>4</sup>.

## Principe de l'essai

### Direction du chemin de propagation de fissure

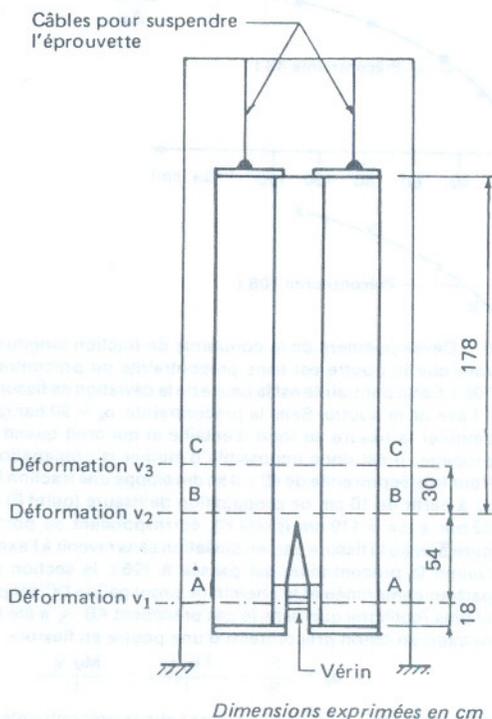
Pour que la fissure suive le plan de symétrie de l'éprouvette DCB, on a introduit une force de précontrainte par l'intermédiaire de six torons de 15 mm de diamètre (fig. 2). La figure 3 montre l'efficacité de la précontrainte dans la direction du chemin de propagation de fissure afin d'éviter que la fissure ne dévie pendant l'essai. La figure 3 (c) montre le développement de la contrainte de traction longitudinale suivant que la poutre est sans précontrainte ou précontrainte à 48 ou 106 t. La figure 3 (a) montre la propagation de fissure suivant que la précontrainte est de 48 ou 106 t. On voit qu'il est impossible d'étudier la propagation de fissure de la poutre DCB sans précontrainte longitudinale sinon la fissure dévierait après une dizaine de centimètres de propagation.

### Déroulement de l'essai

La poutre DCB est suspendue verticalement (fig. 4). Un vérin exerce une force  $P$  dont l'axe est situé à 54 cm en amont du fond d'entaille; la longueur de propagation de fissure possible est de 178 cm, trois paires de capteurs de déformation ont été installés de part et d'autre de l'éprouvette dans les plans AA, BB, CC pour mesurer les déplacements  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ .

L'ouverture d'entaille  $v_1$  est asservie à raison de 1 mm en 20 mn, soit de l'ordre de  $1 \mu$  par seconde. Des différentes mesures ont été effectuées par paliers pendant lesquels l'ouverture de fissure est maintenue constante. Au début du chargement, les paliers successifs correspondent à des chargements croissants avec un pas de 200 kg; une fois le

Fig. 4 - Montage expérimental de l'éprouvette DCB.



L'éprouvette DCB est suspendue au portique. Le vérin est introduit entre les lèvres de l'entaille; son axe est à 54 cm du fond d'entaille. La fissure peut se propager sur 178 cm du bas vers le haut.

chargement maximal atteint, les paliers successifs correspondent à des ouvertures de fissure, croissantes, par pas de  $50 \mu$  (partie descendante de cette courbe  $P, v_1$ ). Des cycles de charge-décharge ont été réalisés pour calculer expérimentalement la complaisance de l'éprouvette à chaque longueur de fissure. On a volontairement prolongé la durée de quelques paliers jusqu'à 10 à 20 mn afin d'étudier la propagation différée de fissure; pour les autres paliers, cette durée était en général de trois à cinq minutes.

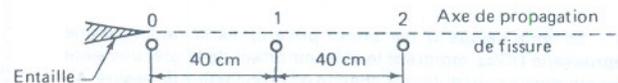
### Principe de mesure et matériels utilisés

On a suivi la propagation de fissure visible sur une face à l'aide d'une loupe à lentille asphérique, de grossissement 5, munie d'un éclairage fluorescent circulaire; sur une autre face, un revêtement photo-élastique aux caractéristiques suivantes a été utilisé dans quelques essais:

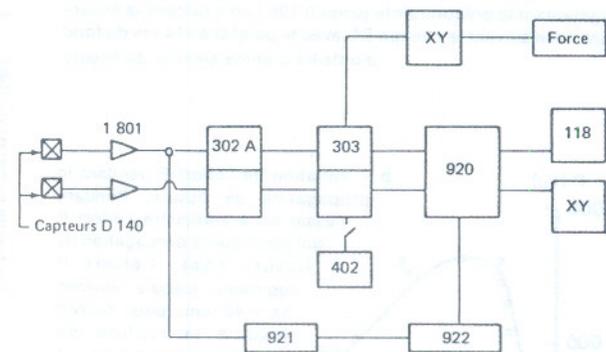
- coefficient photo-élastique:  $K = 0,10$
- module d'élasticité:  $F = 29\,500 \text{ bar}$
- coefficient de poisson:  $\nu = 0,36$
- épaisseur du revêtement:  $3,10 \text{ mm}$
- déformation étalonnée: une frange ( $\epsilon_1 - \epsilon_2$ )  
=  $820 \cdot 10^{-6}$ .

La détection de l'endommagement interne du béton se fait par localisation linéaire de l'émission acoustique des bruits émis lors des ruptures; la figure 5 montre la position des capteurs et le plan de la chaîne utilisée. On a constaté qu'on ne pouvait employer simultanément le revêtement et l'émission acoustique à cause des bruits de décollement du revêtement. Le seuil de détection pour éliminer le bruit de fond dû à l'environnement est réglé à 25 dB, soit  $1 \mu\text{V}$  au capteur.

Fig. 5 - Localisation d'émission acoustique.



a - Positions des capteurs d'émission acoustique: Capteurs 0, 1, 2.

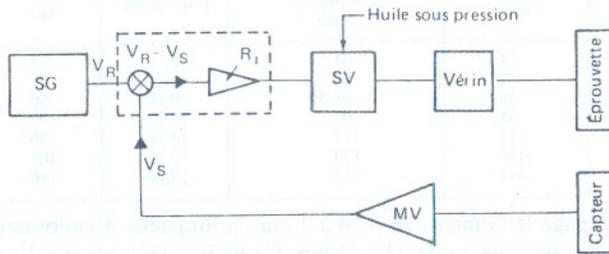


b - Diagramme synoptique de la chaîne d'émission acoustique Dunegan-Endevco.

Ce montage comprend :

- deux capteurs différentiels (D 140) dont la fréquence de résonance est de l'ordre de 200 kHz;
- deux préamplificateurs (1801) avec un filtre passe-bande (120/240 kHz);
- un amplificateur-conditionneur de signal, deux voies (302A);
- un compteur, deux voies (303);
- un analyseur de distribution (920);
- un détecteur d'amplitude (921);
- une mémoire externe (922);
- une visualisation en temps réel (118);
- deux enregistreurs XY et une horloge (402).

La programmation de la déformation  $v_1$  a été réalisée à l'aide d'un régulateur automatique dont le système d'asservissement est représenté sur la figure 6.



Les autres matériels utilisés sont : un enregistreur XY pour la courbe  $(P, v_1)$  et un enregistreur en fonction du temps pour  $(P, t)$ ,  $(v_1, t)$ ,  $(v_2, t)$ ,  $(v_3, t)$ .

Fig. 6 - Système d'asservissement du régulateur automatique universel de Mohr-Federhaff - Losenhausen (BFGR) qui comprend :

- le générateur de fonction (SG) fournit une tension électrique ( $V_R$ ) représentant la loi de variation de la sollicitation imposée à l'éprouvette;
- un capteur associé à un amplificateur (MV) dont la tension de sortie ( $V_S$ ) représente la valeur de la sollicitation imposée à l'éprouvette (force ou déformation);
- une unité ( $R_1$ ) compare les tensions  $V_R$  et  $V_S$ ; le signal d'erreur amplifié sert à commander l'ouverture ou la fermeture d'une servo-valve électro-hydraulique (SV);
- la servo-valve alimentée en huile sous pression délivre un débit d'huile au vérin, fonction du courant de commande;
- le vérin, ainsi asservi, sollicite l'éprouvette suivant la loi imposée par le générateur.

## RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

### Comportement de l'éprouvette

La figure 7 (a) montre la courbe  $(P, v_1)$  en cours d'essai, réalisée à différents paliers et à différents cycles de charge-décharge. La rupture de l'éprouvette a eu lieu au palier 97. L'allure de la courbe est semblable à celle obtenue sur la pâte de ciment et le mortier [30]. On observe deux phénomènes dans cette courbe.

### Phénomène de relaxation

A partir d'un certain niveau de chargement, il se produit une relaxation quand on arrête la montée en charge en maintenant constante l'ouverture d'entaille  $v_1$ ; la relaxation est notable dès qu'une propagation de fissure est visible. Cette chute de charge croît progressivement pour atteindre une valeur à peu près stationnaire au sommet de la

courbe  $(P, v_1)$ . La durée des paliers était en moyenne de 5 à 10 mn. La figure 7 (b) montre les détails de relaxation au palier 87 (AB); si, à la fin de la relaxation (point B), on fait un cycle décharge-recharge, la courbe de rechargement repasse par le point B, et si à ce point on maintient  $v_1$  constante, on observera encore une fois une nouvelle relaxation BC.

### Phénomène d'hystérésis

Ce phénomène est constaté quand on a réalisé les cycles de charge-décharge. La figure 7 (c) montre une boucle d'hystérésis du palier 78 au palier 80 de la figure 7 (a). Dans cette boucle, la droite MN est le prolongement rectiligne de la courbe de déchargement de M à N. Dans cette étude, l'inverse de la pente de la droite MN est la complai-

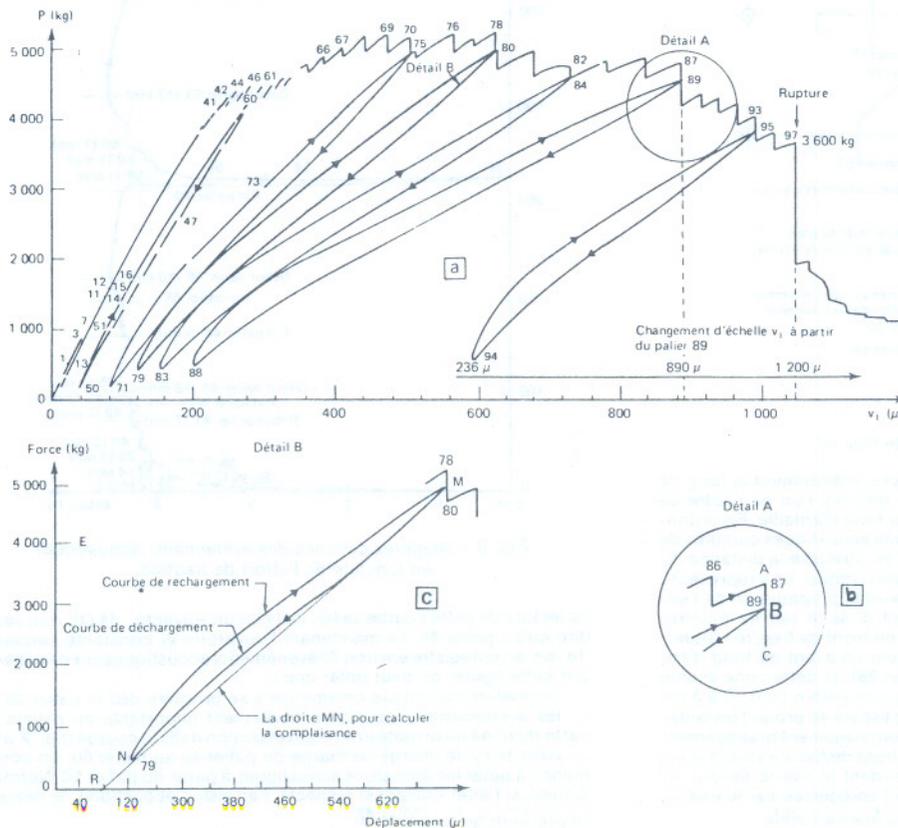


Fig. 7 - Courbe  $(P, v_1)$ .

a - En ordonnée l'effort  $P$  et en abscisse l'ouverture d'entaille  $v_1$ . Les chiffres figurés sur cette courbe représentent les numéros des différents paliers réalisés pendant l'essai,  $v_1$  étant asservi à raison de  $1 \mu/s$ . Des paliers de 200 kg ont été réalisés jusqu'au n° 66. A partir de ce palier, la chute de charge était importante et on a réalisé des paliers de déformation  $v_1$  de 30 à 50  $\mu$  jusqu'en fin d'essai. A chaque arrêt de la machine, on constate une chute de charge (celle-ci est nette à partir du palier 44) et qui augmente jusqu'au sommet de la courbe  $(P, v_1)$ ; cette relaxation restera constante (environ 200 kg) jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

b - En maintenant constante l'ouverture  $v_1$  pendant un certain temps, la charge chute de A à B; AB représente la grandeur de relaxation à ce palier 87. A la fin de relaxation en B, on fait un déchargement puis un rechargement, la courbe de rechargement repasse par le point B et si l'on arrête la machine en B, on observe une nouvelle chute de charge BC.

c - Cycle de charge-décharge. Les deux courbes : déchargement MN et rechargement NM ne coïncident pas; il se forme alors une boucle d'hystérésis. La droite MN a été choisie conventionnellement pour déterminer la complaisance de l'éprouvette pour la longueur de fissure égale à celle observée à la fin du palier 78. OR représente la déformation résiduelle.

sance de l'éprouvette (correspondant ici à la longueur de fissure observée au palier 78).

L'intersection de cette droite MN avec l'axe de déformation  $v_1$  donne la déformation résiduelle OR. La valeur de la complaisance, déterminée expérimentalement de cette façon, est voisine de la valeur calculée pour différentes longueurs de fissure (fig. 10). Le tableau III donne les valeurs de la complaisance de l'éprouvette et les déformations résiduelles correspondant à chaque longueur de fissure, déduites de la courbe (P,  $v_1$ ) de la figure 7 (a).

**Propagation de fissure**

Pour amorcer la fissure au fond d'entaille, la figure 8 montre que, à l'aide de la technique de localisation linéaire de l'émission acoustique, il se forme une longueur d'endommagement par création de microfissures de plus de 20 cm. Par la suite, pendant que la fissure visible se pro-

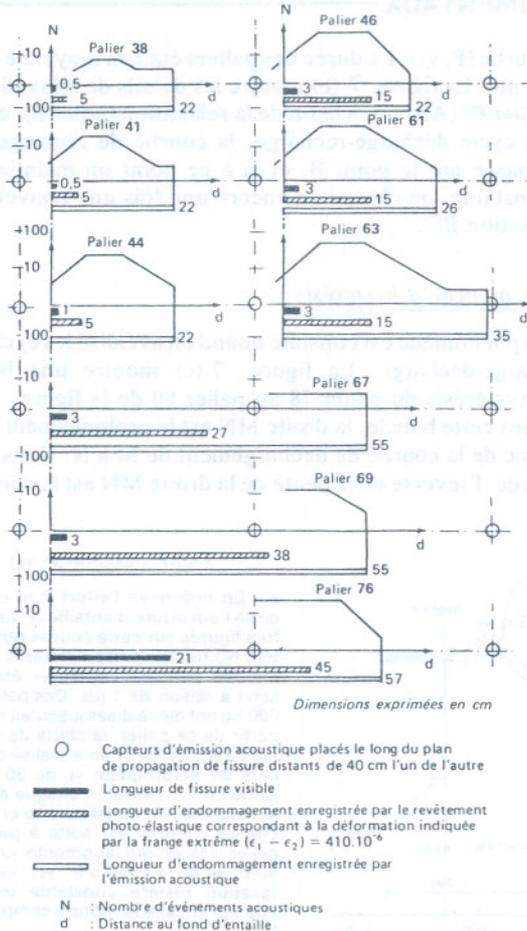


Fig. 8 - Propagation de fissure.

Les trois récepteurs acoustiques sont placés linéairement le long de l'axe présumé de propagation de fissure, distants l'un de l'autre de 40 cm, le premier étant à 5 cm en arrière du fond d'entaille. En ordonnée, on enregistre le nombre des événements acoustiques cumulés de chaque palier en échelle logarithmique, et en abscisse la distance du fond d'entaille où se produit une émission acoustique; on y représente également la propagation de fissure visible et la propagation de l'endommagement indiquée par le revêtement dans le but de montrer l'existence d'une zone perturbée en avant du front de fissure visible. Il se forme une longueur d'endommagement en avant du fond d'entaille de 22 cm à l'amorce de fissure (palier 38), et cette zone évolue jusqu'à 55 cm pour une progression de fissure visible de 0,50 à 3 cm (paliers 38 à 69). Au n° 76, la propagation de fissure se produit instantanément de 3 à 21 cm avec la longueur d'endommagement pratiquement inchangée (57 cm); à ce palier, en avant du front de fissure visible, il y a une zone perturbée de 57-21 = 36 cm. Pendant le même temps, on constate que la longueur d'endommagement enregistrée par le revêtement photo-élastique évolue plus vite que la fissure visible.

**TABEAU III**  
Valeurs expérimentales de la complaisance et de la déformation résiduelle

Longueur de fissure visible (cm)	Longueur du revêtement endommagé (cm)	Complaisance (10 <sup>-8</sup> m/kg)	Déformation résiduelle (μ)
54	54	5	0
57	69	6,25	25
58	95,50	9,00	60
98	106	11,25	70
111	117	14,00	90
126	129	17,25	105
147	157	25,00	190

page lentement, de 0,50 à 3 cm, la longueur d'endommagement passe de 22 à 55 cm. Ce phénomène montre l'importance de la zone de microfissuration pendant la première propagation de fissure visible au fond d'entaille.

Par convention, la longueur d'endommagement a été repérée dans le revêtement photo-élastique comme correspondant à la zone délimitée par la première demi-frange (range isochromatique d'ordre 0,5), ce qui signifie que  $\epsilon_1 - \epsilon_2 = 410 \cdot 10^{-6}$ ; cette longueur évolue aussi plus rapidement que la fissure visible. On a remarqué que les bruits de décollement du revêtement en cours d'essai peuvent influencer la localisation d'émission acoustique; il en résulte qu'on ne peut pas utiliser simultanément ces deux techniques. De toute façon, il est clair qu'il existe en avant du front de fissure visible une zone perturbée de plusieurs dizaines de centimètres.

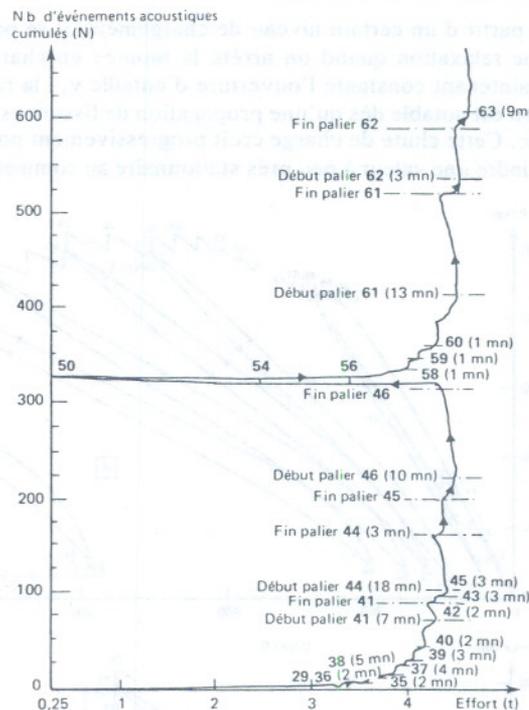


Fig. 9 - Nombres cumulés des événements acoustiques en fonction de l'effort de traction.

La lecture de cette courbe se fait de la façon suivante : 44 (18 mn) veut dire qu'au palier 44, en maintenant l'ouverture  $v_1$  constante pendant 18 mn, on enregistre environ 70 événements acoustiques sur ce palier. Sur cette figure, on peut noter que :  
 — l'émission acoustique commence à se produire dès le palier 29 ;  
 — les événements acoustiques deviennent importants en paliers à partir du n° 44 où on note une nette relaxation dans la courbe (fig. 7 a) ;  
 — dans le cycle charge-décharge du palier 46 au palier 60, on commence à noter les émissions acoustiques à partir du palier 56. Normalement, si l'effet Kraser est respecté, l'émission acoustique ne devrait se produire qu'au palier 60.

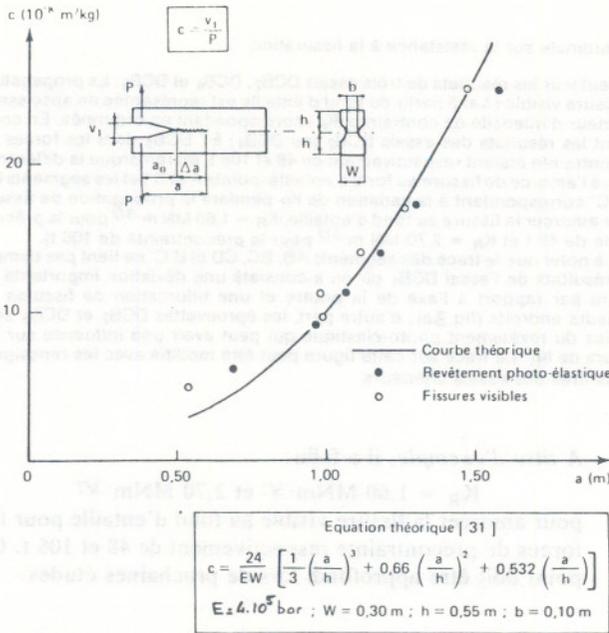


Fig. 10 - Courbe de complaisance C.

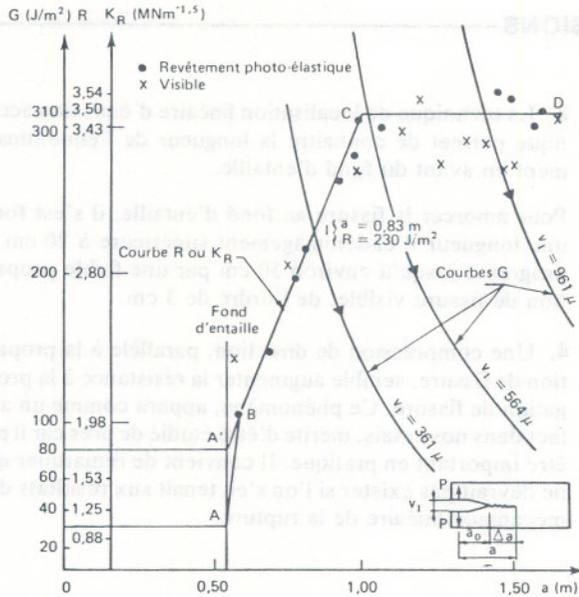


Fig. 11 - Energie de la rupture du béton (courbe R).

**Courbe R**

- ABCD : représente la courbe R, correspond à l'amorce de fissure au fond d'entaille au moment où apparaît une perturbation dans le revêtement photo-élastique collé au fond d'entaille;
- A :
- de A à B (segment AB) : début d'apparition de fissure visible de 1 à 3 cm; à ce stade, la zone de microfissuration s'étend jusqu'à environ 50 cm en avant du fond d'entaille (fig. 8);
- BC : correspond à l'accroissement de R sur les 50 cm de microfissuration;
- CD : correspond à la propagation de fissure, à la valeur stationnaire de R = 310 J/m<sup>2</sup> (où KR = 3,50 MN m<sup>-3/2</sup>);
- D : point correspondant à la rupture complète de l'éprouvette;
- R : courbe appelée aussi courbe KR en graduant en ordonnées KR déduit de R par la relation K<sup>2</sup> = ER (avec E = 4.10<sup>5</sup> bar ou 3,92.10<sup>10</sup> N/m<sup>2</sup>).

**Courbes G**

- G : décroît quand la fissure se propage;
- I (a = 0,83 m, R = 230 J/m<sup>2</sup>) : ce point veut dire que la fissure de longueur a = 0,83 m commence à se propager quand l'ouverture d'entaille v<sub>1</sub> = 360 micrometers. Après une certaine propagation, la fissure s'arrête parce que G < R.

On a constaté que les événements acoustiques sont enregistrés, même en palier (fig. 9). Les événements acoustiques sont importants en palier à partir du palier 44 où l'on commence à déceler une relaxation, nette sur la figure 7 (a). Il semble alors que la chute de charge en palier (relaxation) soit liée à la création des microfissures.

Enfin, on a noté la propagation contrôlée continue de fissure pendant la montée d'un palier à un autre, l'apparition brutale d'un allongement de fissure au sommet d'un palier et la propagation différée en palier.

**Courbe R**

En constatant que les valeurs expérimentales de la complaisance de l'éprouvette se rapprochent de celles de la courbe théorique (fig. 10) dont l'équation est déduite de Wiederhorn [31], on peut calculer le taux de restitution d'énergie G par la relation:

$$\text{Equation 1} \quad G = \frac{P^2}{2b} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

avec

$$c = \frac{24}{EW} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{a}{h} \right)^3 + 0,66 \left( \frac{a}{h} \right)^2 + 0,532 \left( \frac{a}{h} \right) \right]$$

La signification des symboles est indiquée sur la figure 10.

En cours d'essai, on relève la valeur de la charge P provoquant la propagation de fissure de longueur a et on calcule le taux de restitution G par l'équation 1 (appelé le taux de restitution d'énergie critique et noté G<sub>c</sub>). En répétant ce calcul pour différentes longueurs de fissure, on obtient la courbe R en joignant tous les points de coordonnées G<sub>c</sub> et les différentes longueurs de fissure correspondantes (fig. 11); elle est constituée par les trois segments AB, BC, CD.

Dans les conditions expérimentales de nos essais de programmation v<sub>1</sub> (à raison de 1 micrometers/s), le taux de restitution

d'énergie s'écrit, avec  $P = \frac{V_1}{C}$ :

$$\text{Equation 2} \quad G = \frac{1}{2b} \cdot \frac{v_1^2}{C^2} \cdot \frac{\partial c}{\partial a}$$

A chaque ouverture d'entaille (v<sub>1</sub>) donnée, l'énergie (G) décroît quand la longueur de fissure augmente (fig. 11). Pour le point I, il a fallu ouvrir l'entaille à v<sub>1</sub> = 360 micrometers pour faire se propager la fissure (de longueur a = 83 cm) qui s'arrêtera quelques centimètres plus loin, car après la propagation de fissure, l'énergie disponible G devient inférieure à l'énergie de fissuration R. C'est dans ces conditions que nous avons pu réaliser la rupture contrôlée de l'éprouvette et étudier la propagation de fissure sur une distance de plus de un mètre.

La résistance à la fissuration R croît sur les premiers cinquante centimètres de propagation de fissure, puis reste stationnaire jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette.

**Influence de la précontrainte longitudinale à la résistance de fissuration**

Dans l'état actuel de nos essais, on a constaté l'influence de la précontrainte longitudinale sur la résistance à la fissuration pour amorcer la fissure au fond d'entaille et dans les premiers cinquante centimètres de propagation de fissure (fig. 12).

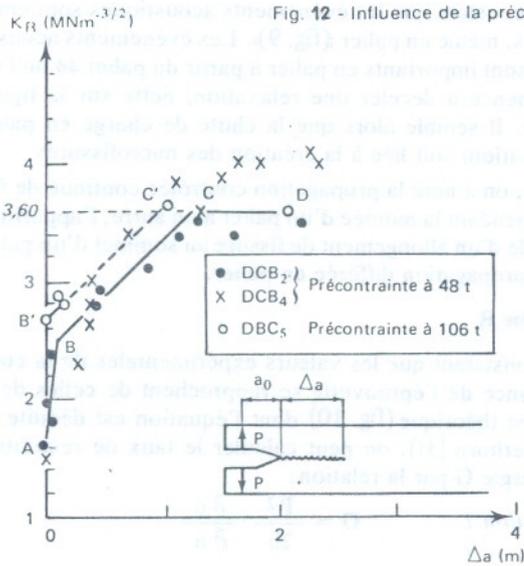


Fig. 12 - Influence de la précontrainte longitudinale sur la résistance à la fissuration.

On peut voir les résultats de trois essais DCB<sub>2</sub>, DCB<sub>4</sub> et DCB<sub>5</sub>. La propagation de fissure visible ( $\Delta a$ ) à partir du fond d'entaille est représentée en abscisse et le facteur d'intensité de contrainte ( $K_R$ ) correspondant en ordonnée. En comparant les résultats des essais DCB<sub>2</sub> (ou DCB<sub>4</sub>) ET DCB<sub>5</sub> dont les forces de précontrainte étaient respectivement de 48 et 106 t, on remarque la différence de  $K_R$  à l'amorce de fissure au fond d'entaille (points A et B') et les segments BC et B'C' correspondant à la variation de  $K_R$  pendant la propagation de fissure (pour amorcer la fissure au fond d'entaille,  $K_R = 1,60 \text{ MN m}^{-3/2}$  pour la précontrainte de 48 t et  $K_R = 2,70 \text{ MN m}^{-3/2}$  pour la précontrainte de 106 t). Il est à noter que le tracé des segments AB, BC, CD et B'C' ne tient pas compte des résultats de l'essai DCB<sub>4</sub> où on a constaté une déviation importante de fissure par rapport à l'axe de la poutre et une bifurcation de fissures en plusieurs endroits (fig. 3a); d'autre part, les éprouvettes DCB<sub>2</sub> et DCB<sub>5</sub> sont munies du revêtement photo-élastique qui peut avoir une influence sur les valeurs de  $K_R$ . Le tracé sur cette figure peut être modifié avec les renseignements tirés des essais ultérieurs.

A titre d'exemple, il a fallu :

$K_R = 1,60 \text{ MNm}^{-3/2}$  et  $2,70 \text{ MNm}^{-3/2}$   
pour amorcer la fissure visible au fond d'entaille pour les forces de précontrainte respectivement de 48 et 106 t. Ce point doit être approfondi lors de prochaines études.

## CONCLUSIONS

Actuellement, nous ne pouvons retenir que les renseignements suivants :

1. Il est inacceptable d'utiliser les petites éprouvettes en mécanique de la rupture. Les éprouvettes doivent être assez grandes pour que la longueur réservée à la propagation de fissure en avant du fond d'entaille soit supérieure à 50 cm.
2. Pour le béton, la courbe R peut être considérée comme une caractéristique de la résistance du béton à la fissuration. La valeur du facteur d'intensité de contrainte à l'amorce de fissure au fond d'entaille est supérieure à  $1 \text{ MNm}^{-3/2}$ ; elle varie avec la propagation de fissure sur environ 50 cm et reste stationnaire jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette. La valeur stationnaire est triple de la valeur initiale.

3. La technique de localisation linéaire d'émission acoustique permet de connaître la longueur de l'endommagement en avant du fond d'entaille.

Pour amorcer la fissure au fond d'entaille, il s'est formé une longueur d'endommagement supérieure à 20 cm qui progresse jusqu'à environ 50 cm par une faible propagation de fissure visible, de l'ordre de 3 cm.

4. Une compression de direction, parallèle à la propagation de fissure, semble augmenter la résistance à la propagation de fissure. Ce phénomène, apparu comme un artefact dans nos essais, mérite d'être étudié de près car il peut être important en pratique. Il convient de remarquer qu'il ne devrait pas exister si l'on s'en tenait aux résultats de la mécanique linéaire de la rupture.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] KAPLAN M.F., Crack propagation and the fracture of concrete, *J. ACI*, 5, Proc., vol. 58, nov. 1961, p. 591-610.
- [2] BARON J., Fragilité et fissurabilité du comportement du béton hydraulique, Rapp. Rech. LCPC, 69, oct. 1977.
- [3] FRANÇOIS D., JOLY L., *La Rupture des métaux*, Masson et Cie éd., 1972.
- [4] BROCK D., *Elementary engineering fracture mechanics*, Nordhoff int. publishing, 1974.
- [5] BLAKEY F.A., BERESFORD F.D., IRWIN G.R., GLUCKLICH J., Discussion of a paper by KAPLAN M.F., ref. 5, *J. ACI*, 6, Proc., vol. 59, Part 2, juin 1962, p. 919-929.
- [6] MOAVENZADEH F., KUGUEL R., Fracture of concrete, *J. Materials (JMLSA)*, vol. 4, n° 8, sept. 1969, p. 497-519.
- [7] GLUCKLICH J., Fracture of plain concrete, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 89, n° EM6, déc. 1963, p. 127-138.
- [8] SHAH S.P., MCGARRY F.J., Griffith fracture criterion and concrete, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 97, n° EM6, déc. 1971, p. 1663-1676.
- [9] BROWN J.H., POMEROY C.D., Fracture toughness of cement paste and mortars, *Cement and Concrete Research*, special issue on Fracture, vol. 3., n° 4, juil. 1973, p. 475-480.
- [10] BROWN J.H., Measuring the fracture toughness of cement paste and mortars, *Mag. Concrete Research*, vol. 24, n° 81, déc. 1972, p. 185-196.
- [11] NAUSS D.J., LOTT J.L., Fracture toughness of Portland cement concrete, *J. ACI*, 6, Proc. vol. 66, juin 1969, p. 481-489.
- [12] LOTT J.L., KESLER C.E., Crack propagation in plain concrete, Symposium on Structure of Portland Cement paste and concrete, Washington, HRB, Spec. Rep., 90, 1966, p. 204-218.
- [13] WELCH G.B., HAISMAN B., The application of fracture mechanics to concrete and the measurement of fracture toughness, *Matériaux et Construction, Rilem*, vol. 2, n° 9, mai-juin 1969, p. 171-177.
- [14] RADJY F., HANSEN T.C., Fracture of hardened cement paste

- and concrete, *Cement and Concrete Research*, special issue on fracture, vol. 3, n° 4, juil. 1973, p. 343-361.
- [15] KAPLAN M.F., The application of fracture mechanics to concrete, *Cement and Concrete Assoc. Proc. int. Conf.*, London, sept. 1965, p. 169-175.
- [16] HUDSON J.A., MARATHE M.S., Discussion de la réf. 9, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 98, n° EM3, juin 1972, p. 1310-1313.
- [17] GLUCKLICH J., Static and fatigue fractures of Portland cement mortar in flexure, *Proc., First int. Conf. on fracture*, vol. 3, Sendai, Japan, 1965., p. 1343-1382.
- [18] NADEAU J.S., MINDESS S., HAY J.M., Slow crack growth in cement paste, *J. Amer. Ceramic Soc. (JACS)*, vol. 57, n° 2, févr. 1974, p. 51-54.
- [19] RADJY F., Fracture of hardened cement paste in relation to surface forces and porosity, *J. Amer. Ceramic Soc. (JACS)*, vol. 57, n° 2, févr. 1974, p. 88-89.
- [20] ROMUALDI J.P., BATSON G.B., Mechanics of crack arrest in concrete, *S. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 89, n° EM3, juin 1963, p. 147-168.
- [21] ROMUALDI J.P., BATSON G.B., Behavior of reinforced concrete beams with closely spaced reinforcement, *J. ACI*, 6, *Proc.* vol. 60, juin 1963, p. 775-790.
- [22] ROMUALDI J.P., MANDEL J.A., Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement, *J. ACI*, 6, *Proc.* vol. 61, juin 1964, p. 657-671.
- [23] ROMUALDI J.P., The static cracking stress and fatigue strength of concrete reinforced with short pieces of thin steel wire, *J. Engrg. Mech. Div. Proc. ASCE*, vol. 98, n° EM3, juin 1972, p. 190-201.
- [24] MAZARS J., *Prévision de la rupture des structures en béton par la mécanique de la rupture*, Thèse doct. 3° cycle, ENSET, juin 1976.
- [25] ENTOV V.M., YAGUST V.I., Experimental investigation of laws governing quasi static development of microcracks in concrete, traduit du russe dans *Mechanics of Solids*, vol. 10, n° 4, 1975, p. 87-95.
- [26] WALSH P.F., Crack initiation in plain concrete, *Mag. Concrete Research*, vol. 28, n° 94, mars 1976, p. 37-41.
- [27] EVANS A.G., CLIFTON J.R., ANDERSON E., The fracture mechanics of mortars, *Cement and Concrete Research*, vol. 6, 1976, p. 535-548.
- [28] MINDESS S., NADEAU J.S., Effect of notch width on  $K_{IC}$  for mortar and concrete, *Cement and Concrete Research*, vol. 6, 1976, p. 529-534.
- [29] LENAIN J.C., *Etude de la résistance à la fissuration d'un matériau composite à matrice fragile et fibres discontinues : amiante-ciment*, thèse doct. ing. Univ. Tech., Compiègne, oct. 1976.
- [30] HILLEMEIER B., HILSDORF H.R., Fracture mechanics studies on concrete compounds, *Cement and Concrete Research*, vol. 7, 1977, p. 523-536.
- [31] WIEDERHORN S.M., SHORB A.M., MOSE R.L., *J. Appl. Physics*, 39, p. 1569.

RUPTURE DIFFEREE ET PROPAGATION DES FISSURES DANS

LES PROPERGOLS COMPOSITES (\*)

Bernard SCHAEFFER

Centre de Recherches du Bouchet

91710 - Vert-le-Petit

RESUME

La rupture différée des propergols composites s'interprète en faisant intervenir la notion de vitesse de propagation des fissures.

Une loi expérimentale reliant la vitesse des fissures au facteur d'intensité de contraintes appliqué à la fissure a été établie. En l'associant à la loi de comportement viscoélastique, on retrouve par le calcul l'enveloppe de rupture de Smith.

ABSTRACT

Delayed fracture of solid propellants is described with help of a crack propagation rate. Crack speed is related to the applied stress intensity factor through an experimentally established law. The Smith failure envelope may be obtained by computation using the crack propagation law associated with the viscoelastic modulus.

La loi de propagation des fissures pour s'établir facilement dans certains cas, il nous faut d'abord énoncer à deux ordres les lois de propagation des fissures, on a :

-----

(\*) Communication au Groupe Français de Rhéologie le 7 décembre 1978.

(A) 
$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{\sigma^2}}$$

K<sub>1</sub> est le facteur d'intensité de contraintes initial, v est la vitesse de propagation moyenne de chaque fissure et t<sub>0</sub> le délai de rupture. Cette loi est de déterminer simplement la loi de propagation des fissures.

## 1. INTRODUCTION :

Les matériaux viscoélastiques sont caractérisés par la sensibilité de leurs propriétés mécaniques au facteur temps. Leur comportement rhéologique est maintenant assez bien représenté à l'aide de divers modèles utilisant la viscoélasticité linéaire. L'influence du temps sur leurs caractéristiques de rupture est moins bien connue. On y observe un phénomène de rupture différée qui se produit après un temps d'incubation variable suivant la sollicitation, qui peut être relié à la vitesse de propagation des fissures, elle-même fonction du facteur d'intensité de contraintes appliqué.

## 2. CONSIDERATIONS THEORIQUES :

La rupture retardée est connue depuis longtemps, en particulier dans les verres [1] où elle a été interprétée par CHARLES [2]. Le délai de rupture est le temps nécessaire à la fissure pour atteindre la taille critique de propagation rapide. Il s'obtient en intégrant la loi de propagation des fissures reliant la vitesse  $v$  de propagation à la contrainte en fond de fissure.

En utilisant la notion de facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  (qui s'exprime en GRIFFITH ou  $N.m^{-3/2}$ ) la loi de propagation des fissures peut se mettre sous une forme simple

$$v \ a_T = A \ K_I^m \quad (1)$$

$a_T$  caractérise la superposition temps-température. Cette formule a été proposée par SWANSON [3].

Dans les propergols  $a_T$  peut être représenté par une équation du type WLF.

$$\text{Log } a_T = - \frac{C_1 (T - T_0)}{C_2 + T - T_0} \quad (2)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes et  $T_0$  une température de référence.

La loi de propagation des fissures peut s'intégrer facilement dans certains cas. Prenons le cas d'une éprouvette à deux entailles latérales profondes, on a [4] :

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_n \sqrt{a} \quad (3)$$

où  $\sigma_n$  est la contrainte nette (c'est-à-dire ramenée à la section restante)  $2a$  est la distance entre les deux pointes de fissures. Si la force appliquée est constante, on trouve, après intégration

$$\frac{t_R}{a_T} = \frac{a}{\bar{v}} = \frac{a}{\left(\frac{m}{2} + 1\right) A \ K_{Ii}^m} \quad (4)$$

$K_{Ii}$  est le facteur d'intensité de contraintes initial,  $\bar{v}$  est la vitesse de propagation moyenne de chaque fissure et  $t_R$  le délai de rupture. Cette formule permet de déterminer simplement la loi de propagation des fissures.

Le cas, plus complexe, de la traction d'une éprouvette lisse s'interprète de même, mais avec quelques simplifications. Supposons l'existence de microfissures initiales de taille  $C_0$ , et que la formule  $K_I = \sigma \sqrt{\pi C}$  puisse être utilisée pendant toute la propagation des criques, supposées petites par rapport à la taille de l'éprouvette.

Si la montée en charge est linéaire, on intègre facilement la loi de propagation :

$$\int_{C_0}^{\infty} C^{-\frac{m}{2}} dC = \int_0^{t_R} \frac{A}{a_T} \left( \dot{\sigma} t \sqrt{\pi} \right)^m dt \quad (5)$$

La relation entre la contrainte de rupture  $\sigma_R$  et le temps de rupture  $t_R$  est alors :

$$\sigma_R \frac{t_R}{a_T} = \left( \frac{m+1}{\frac{m}{2}-1} \right) / \left( C_0^{\frac{m}{2}-1} \pi^{\frac{m}{2}} A \right) \quad (6)$$

La résistance à la traction augmente bien avec la vitesse de traction.

On peut, de plus, trouver une relation entre la résistance à la traction et l'allongement à la rupture moyennant l'adoption d'une loi de comportement viscoélastique linéaire. Nous utilisons la forme proposée par Schapery [5] pour le module de relaxation et qui a fait l'objet de nombreuses publications [6]

$$E \left( \frac{t}{a_T} \right) = E_e + \frac{E_g - E_e}{\left( 1 + \frac{t}{\tau_0 a_T} \right)^n} \quad (7)$$

$E_g$  et  $E_e$  sont les modules vitreux et à l'équilibre,  $\tau_0$  est un temps de relaxation de référence,  $n$  est une constante.

L'application du principe de superposition, en supposant cette fois (pour simplifier) que c'est la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  qui est constante et non plus la vitesse de montée en charge  $\dot{\sigma}$ , permet de calculer l'allongement correspondant. On trouve alors l'équation cherchée de l'enveloppe de rupture.

$$\frac{\sigma_R}{\epsilon_R} = E_e + \frac{\tau_0 a_T}{(1-n)} \frac{E_g - E_e}{t_R} \left[ \left( 1 + \frac{t_R}{\tau_0 a_T} \right)^{1-n} - 1 \right] \quad (8)$$

On peut éliminer  $\frac{t_R}{a_T}$  grâce à l'équation (6).

### 3. ETUDE EXPERIMENTALE :

Les essais réalisés se classent en trois catégories : des mesures photographiques de la propagation des fissures à différentes températures, des mesures à 20°C, avec différents types de sollicitation et enfin des tractions simples à différentes températures et vitesses.

L'étude a été réalisée sur un propergol composite à liant polyuréthane.

#### 3.1. Mode opératoire :

##### 3.1.1. Appareillage utilisé :

Les essais de traction à 5 mm/mn ont été réalisés sur une machine TESTWELL équipée d'une chambre d'ambiance pour les quatre températures de - 40, 0, 20 et 60°C. On photographie l'éprouvette en cours de traction à des intervalles de temps généralement égaux à 5 s. On obtient 4 à 5 photos après le début de propagation rapide de la fissure.

Des essais à grande vitesse de traction (environ 1 m/mn) ont permis de mesurer par cinématographie des vitesses de propagation supérieures au cm/s. La machine utilisée est une machine MOHR et FEDERHAFF hydraulique à régulation électronique. La caméra ECLAIR est du type GV 16 utilisée à 150 images par seconde. L'éclairage a été obtenu à l'aide de 3 projecteurs de 500 watts placés à un mètre de l'éprouvette avec insertion d'un filtre anticalorique.

##### 3.1.2. Préparation des éprouvettes :

Les éprouvettes sont obtenues par entaillage au rasoir d'éprouvettes haltères d'épaisseur 5 mm, de largeur 10 mm et de longueur utile 50 mm.

Les éprouvettes simple entaille ont subi une propagation manuelle des fissures pour obtenir une profondeur avant essai de 2 mm. La profondeur d'entaille des éprouvettes à double entaille est de 2,5 mm, de façon à réduire la section de moitié. Après découpe, les éprouvettes sont conditionnées pendant plus d'un mois dans des sachets étanches contenant du silicagel. Elles sont reconditionnées de la même façon pendant 48 heures au moins entre l'entailage et l'essai. L'essai, s'il est de courte durée est réalisé à l'humidité du laboratoire, conditionné à  $40\% \pm 5\%$ . Pour les essais à chaud et à froid, le conditionnement avant essai est d'une demi-journée à la température de l'essai.

##### 3.1.3. Calcul du facteur d'intensité de contraintes :

Le facteur d'intensité de contraintes est calculé à l'aide de la mécanique linéaire de la rupture. Pour les éprouvettes à une entaille latérale, on utilise la formule suivante [4].

$$K = \sigma \sqrt{C} \left[ 1,99 - 0,41 \left( \frac{C}{b} \right) + 18,70 \left( \frac{C}{b} \right)^2 - 38,48 \left( \frac{C}{b} \right)^3 + 53,85 \left( \frac{C}{b} \right)^4 \right] \quad (9)$$

où  $\sigma$  est la contrainte brute appliquée à l'éprouvette de largeur  $b$  et où  $C$  est la longueur de la crique ( $C < 0,4b$ ).

Cette formule donne à chaque instant le facteur d'intensité de contraintes en fonction de la force appliquée et de la longueur de fissure, mesurée sur les photographies. D'où la vitesse de la fissure d'après les époques des photographies.

Dans le cas des éprouvettes double entaille, on utilise la formule (3).

### 3.2. Résultats expérimentaux :

#### 3.2.1. Mesures directes à différentes températures sur éprouvettes simple entaille

La relation entre la vitesse de propagation de la fissure et le facteur d'intensité de contraintes appliqué a été obtenue à partir de la longueur de fissure instantanée, mesurée sur les photographies, et de la force correspondante. Une évolution typique de ces paramètres est représentée sur la figure 1.

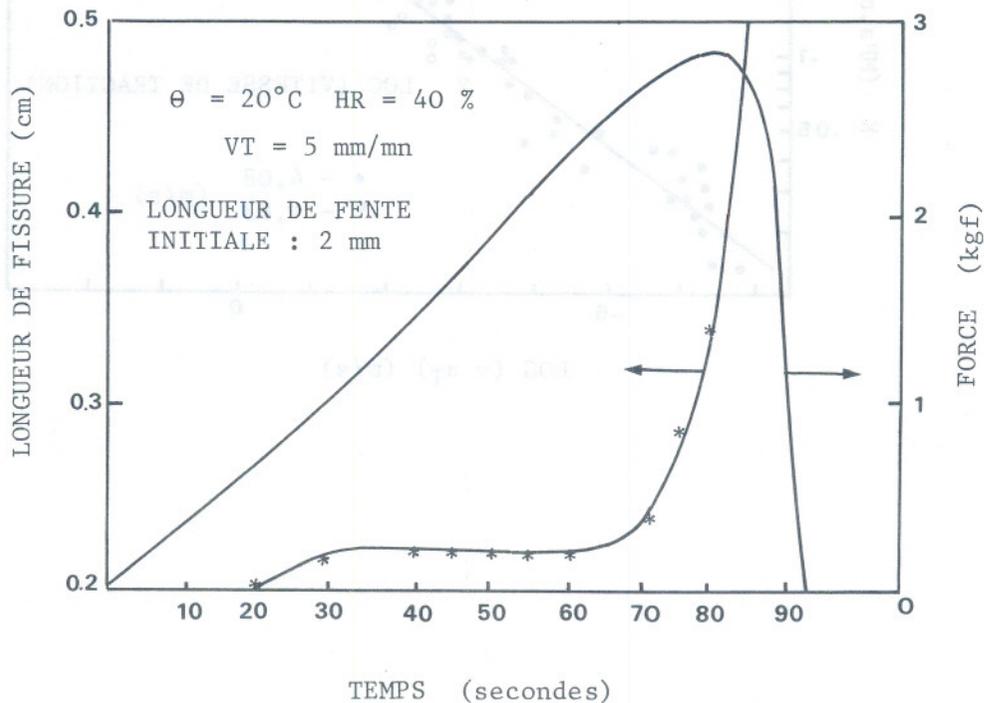


Figure 1 : Longueur de fissure et force appliquée en fonction du temps au cours de la traction d'une éprouvette simple entaille.

La propagation ne démarre de façon mesurable qu'au bout de 60 secondes. Grâce à l'équivalence temps-température établie pour le module de relaxation [6] on obtient une courbe maîtresse (fig. 2) permettant d'extrapoler à une vitesse et à une température quelconques la loi de propagation des fissures.

La validité de la méthode peut être évaluée en effectuant des essais à 20°C à différents endroits dans l'échelle des vitesses (fig. 3).

FIGURE 2

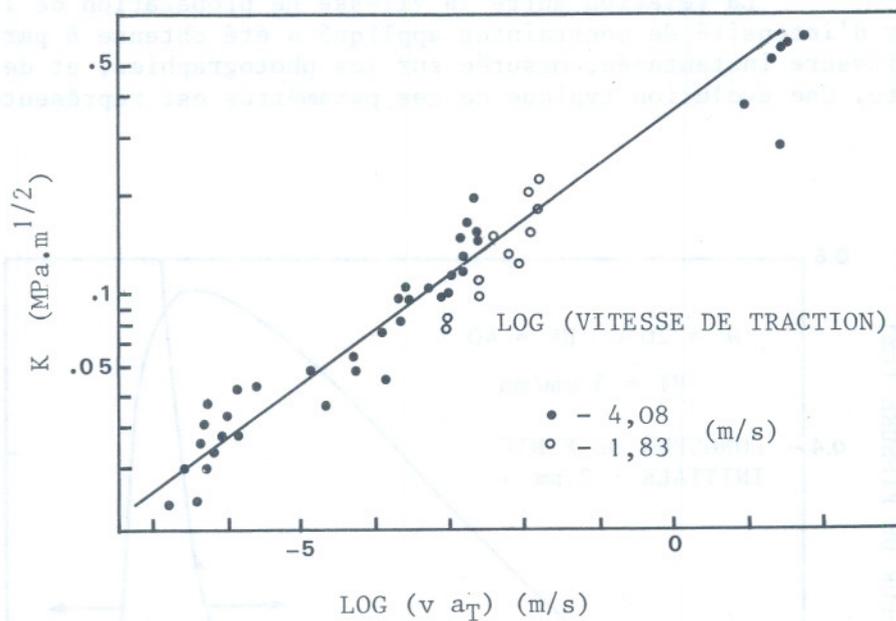


Figure 2 : Relation entre facteur d'intensité de contraintes instantané et vitesse de propagation, obtenue par l'équivalence temps-température de la relaxation.

3.2.2. Mesures directes et indirectes à 20°C :

Des vitesses de propagation et des temps de rupture ont été mesurés sur des éprouvettes entaillées pour divers types de sollicitation : tractions d'éprouvettes simple entaille à 5 et 890 mm/mn, tractions d'éprouvettes double entaille à 0,5 mm/mn et tractions cycliques à 5 mm/mn montrent un accord raisonnable avec les prévisions utilisant l'équivalence temps-température (fig. 3). Des résultats de fluage d'éprouvettes double entaille ont également été représentés sur le graphique. Le facteur d'intensité de contraintes utilisé est celui qui est appliqué au départ de l'essai avant propagation de la fissure. La vitesse de propagation est égale à la vitesse moyenne pendant l'essai.

FIGURE 3

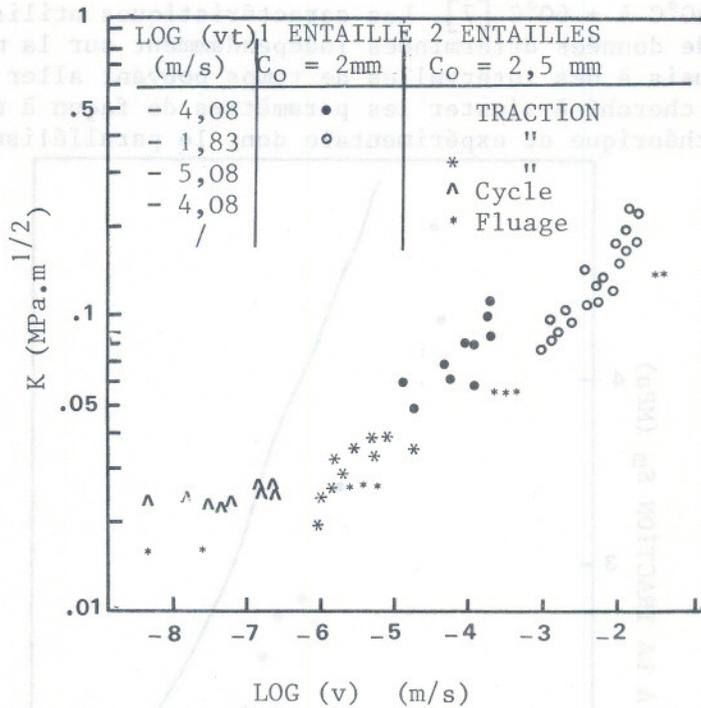


Figure 3 : Relation entre facteur d'intensité de contrainte et vitesse à 20°C pour divers types de sollicitation : traction à vitesse constante sur éprouvettes simple et double entaille, traction cyclique sur éprouvettes double entaille, fluage sur éprouvettes double entaille.

La formule (4) montre que la vitesse moyenne est  $(\frac{m}{2} + 1)$  fois plus grande que la vitesse initiale, ce qui explique que les points correspondant au fluage soient plus à droite que les autres.

On constate sur la figure 3 une légère concavité vers le haut qui semblerait indiquer l'existence d'un  $K_0$  limite en-dessous duquel les fissures ne se propagent pas. Dans ce cas la loi de propagation pourrait s'écrire :

$$v_{a_T} = A (K - K_0)^m \quad (10)$$

$K_0$  est toutefois difficile à atteindre car la durée des essais devient alors très importante. Nous négligeons pour le moment  $K_0$ . La vitesse est d'autre part limitée du côté des grandes vitesses par celle des ondes longitudinales. En pratique, il nous suffit que la vitesse de la fissure soit, lors du tir, inférieure à la vitesse de combustion.

### 3.2.3. Interprétation des caractéristiques de traction :

La figure 4 montre l'enveloppe de rupture obtenue en représentant la résistance à la traction  $S_m$  en ordonnées et l'allongement  $e_m$  correspondant en abscisses pour trois vitesses de traction (0,5 - 5 - 50 mm/mn) et 8 températures de  $-40^\circ\text{C}$  à  $+60^\circ\text{C}$  [7]. Les caractéristiques utilisées ont été choisies à partir de données déterminées indépendamment sur la même composition et la même coulée mais à des intervalles de temps pouvant aller jusqu'à plusieurs années. On n'a pas cherché à ajuster les paramètres de façon à minimiser l'écart entre les courbes théorique et expérimentale dont le parallélisme est remarquable.

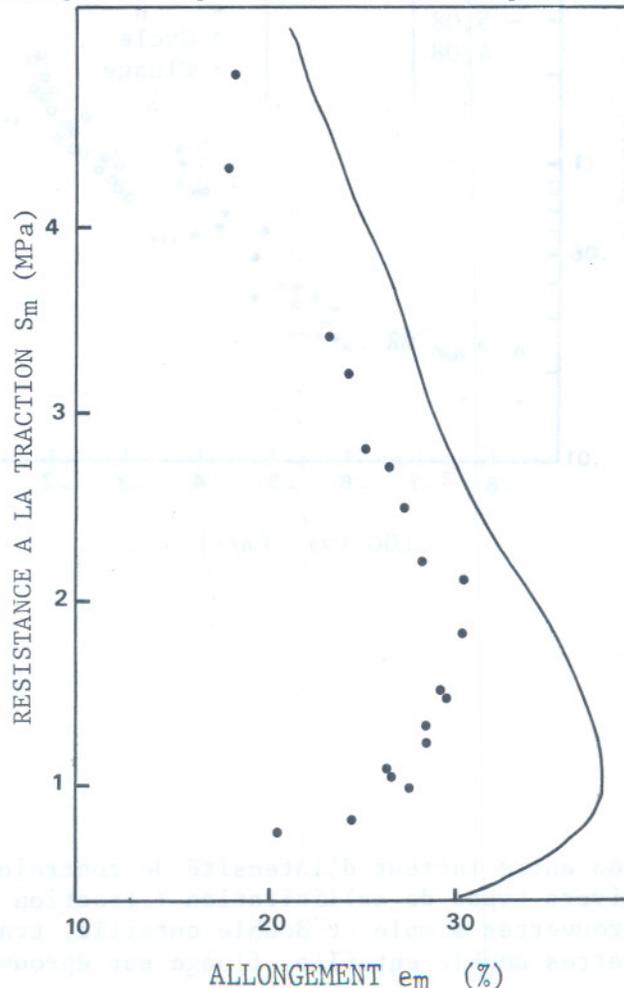


Figure 4 : Enveloppe de rupture : résistance à la traction  $S_m$ , en fonction de l'allongement correspondant  $e_m$ . Courbes théorique et expérimentale.

On retrouve l'existence d'un maximum d'allongement qui ne peut être dépassé quelle que soit la température. (ou la vitesse, dans la mesure où l'équivalence temps-température est respectée).

#### 4. THEORIE DE LA RUPTURE VISCOELASTIQUE :

Une théorie de la fissuration des matériaux viscoélastiques a été faite par WILLIAMS [8]. Elle revient à calculer l'énergie élastique emmagasinée dans un modèle viscoélastique. On remplace alors, dans le critère de Griffith le module d'élasticité par  $\frac{1}{2} \frac{D(t_R) - D_g}{D(t_R)}$  expression dans laquelle  $D(t_R)$  et  $D_g$  sont les complaisances en fluage au temps de rupture  $t_R$  et dans l'état vitreux. L'énergie de rupture  $\gamma$  est supposée constante.

Cette formule prévoit un  $K_I$  limite en-dessous de laquelle il n'y a pas de propagation des fissures.

Or la propagation peut se faire sous des contraintes très faibles. D'autre part cette formule ne permet pas de prévoir que l'allongement à la rupture décroît avec la température au-dessus d'une certaine température correspondant à l'allongement maximum. Une méthode qui satisfait à ces conditions consiste à remplacer le module par  $E(t_R) - E_e$  où  $E(t_R)$  est le module correspondant au temps de rupture et  $E_e$  le module à l'équilibre.

On obtient donc :

$$K_I = \sqrt{2 [E(t) - E_e] \gamma} \quad (11)$$

Si  $\gamma$  est constante, en utilisant la formule (7), on trouve

$$K_I^2 = 2\gamma \frac{(E_g - E_e)}{\left(1 + \frac{t_R}{\tau_0 a_T}\right)^n} \quad (12)$$

où  $t_R$  est le temps de rupture ;

Si  $\frac{t_R}{\tau_0 a_T} \gg 1$  (temps longs) on trouve

$$t_R = \tau_0 a_T [2 \gamma (E_g - E_e)]^{\frac{1}{n}} K_I^{-\frac{2}{n}} \quad (13)$$

Or, on a vu plus haut que  $t_R$  était proportionnel à  $K_I^{-m}$ . On retrouve donc la même loi à condition que  $m = \frac{2}{n}$ . Ceci est vérifié approximativement, puisque l'expérience donne des valeurs  $m = 6 \pm 1$  et  $n = 0,25 \pm 0,05$ .

Lorsque le logarithme du module est une fonction linéaire du logarithme du temps, (absence de module à l'équilibre) la viscoélasticité linéaire montre que la pente  $n$  de la droite obtenue est reliée à l'angle de pertes  $\delta$  par la relation

$$\delta = \frac{\pi n}{2}$$

Le logarithme de la résistance à la traction dépend alors du logarithme du temps selon une loi linéaire de pente

$$\frac{d \log E}{d \log t} = \frac{2}{d \log t} \frac{d \log \sigma}{d \log t} = -n = -\frac{2 \delta}{\pi}$$

L'influence du temps serait deux fois plus forte sur le module en relaxation que sur la contrainte de rupture, dans la mesure où l'énergie de rupture est une constante, ce qui est d'ailleurs loin d'être vérifié.

## 5. CONCLUSION :

L'intégration de la loi reliant la vitesse de propagation des fissures au facteur d'intensité de contraintes permet de prévoir la rupture dans le cas d'une sollicitation appliquée de façon quelconque en fonction du temps : traction, relaxation fluage, cyclage etc. Il est même possible de faire le calcul à la rupture d'un matériau viscoélastique dont les propriétés mécaniques varient avec son âge (polymérisation sous contrainte par exemple). [9]

La loi de propagation peut en gros être retrouvée à partir de la loi de comportement grâce au critère de Griffith. On montre alors que l'influence du temps sur la résistance mécanique du matériau peut être reliée de façon simple à son amortissement interne.

## BIBLIOGRAPHIE

- =====
- [1] B. PERSOZ Introduction à l'étude de la rhéologie Dunod - Paris 1960.
  - [2] R.J. CHARLES J. Appl. Phys 29 (1958) 1657.
  - [3] S.R. SWANSON - J. Spacecraft, 14 (1976) 528.
  - [4] W.G. BARROIS. AGARD-MAN - 8 - 70  
Harford House Londres 1970.
  - [5] H. LIEBOWITZ Fracture vol VII  
Academic Press New York 1972.
  - [6] J. LEBOIS Comportement mécanique des polymères chargés.  
Premier Congrès Français de Mécanique. Poitiers 1973.
  - [7] F. CAMPE. B. JOSSES, J.F. MAECHEL  
Note technique n° 324/SM (1970) de la Poudrerie Nationale de Saint Médard.
  - [8] M. L. WILLIAMS Int. J. Fracture Mech 1 (1965) 4.
  - [9] B. SCHAEFFER. Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, IV, 5 (1977) 225.

FATIGUE STATIQUE DES JOINTS COLLÉS\*

B. PERSOZ et J. BONNET

RESUMÉ

Des plaquettes d'acier ont été collées avec un polyéthylène basse densité et chargées en cisaillement par des poids constants. C'est la statistique de Gauss logarithmique qui rend le mieux compte de la distribution des durées de vie. Le temps au bout duquel une éprouvette sur deux est rompue, pour une contrainte donnée  $\sigma$ , varie comme  $\sigma^{-m}$ , avec m de l'ordre de 10. Divers critères sont ensuite envisagés pour essayer de prévoir la durée de vie sous contrainte variable.

ABSTRACT

Small sheets of steel, bonded together with low density polyethylene, have been subjected to shear under a constant load. Logarithmic Gaussian statistics give the best account of the distribution of lifetime to failure. The time after which one half of the specimens have failed, under a given stress  $\sigma$ , varies as  $\sigma^{-m}$ , where m is of the order of 10. Subsequently several criteria are considered which might be applied to predict the lifetime under a varying stress.

1. INTRODUCTION

Sachant que le temps intervenait dans la rupture des joints collés, nous nous sommes demandé comment. Il convenait, dans une première étape, de déterminer comment la durée de vie d'un joint, supportant une charge constante, dépendait de cette charge et, dans une deuxième étape à charge variable, de rechercher comment les efforts antérieurs influençaient la résistance actuelle.

\* Communication au Groupe Français de Rhéologie le 7 décembre 1978.

Les premières expériences que nous avons réalisées, en choisissant sciemment une mauvaise colle : le polyéthylène, nous ont fourni une telle dispersion, que l'essentiel de notre travail a finalement consisté à mettre sur pied une statistique de la rupture à contrainte constante, statistique qui reste probablement valable pour une colle normale, avec évidemment d'autres valeurs numériques pour les paramètres.

Pourquoi avons-nous choisi le polyéthylène ? Il s'agissait d'abord d'obtenir une adhérence faible, de façon que les poids à manipuler ne soient pas trop importants. Il fallait également employer une colle sans solvant, afin qu'une rétention de ce dernier ne risque pas d'en modifier les propriétés mécaniques. Il était préférable aussi d'éviter les produits réculables, qui ont tendance à durcir en vieillissant.

C'était donc un thermoplastique peu adhésif qu'il fallait choisir, pour réaliser le joint par simple chauffage. Nous nous sommes arrêtés à un polyéthylène basse densité, en feuille de 0,05 mm d'épaisseur.

## 2. ÉPROUVETTES ET MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

Deux sortes de subjectiles sont employés :

- de l'acier doux A 37 en deux épaisseurs : 0,97 et 0,54 mm (691 éprouvettes),
- de l'acier inoxydable Z 8 CnDT 18-12 en épaisseur de 1,52 mm (323 éprouvettes).

Ces tôles sont découpées de façon que la partie collée ait une largeur de 7 à 8 mm, le recouvrement étant de 2 à 4 mm (fig. 1). La surface utile est légèrement poncée au papier abrasif de 320 mailles au pouce, puis dégraissée au "Turco".

Les éprouvettes sont ensuite empilées dans un gabarit en duralumin, avec des cales d'épaisseur convenable et avec, aux endroits à coller, une languette rectangulaire de polyéthylène. Une force de 2,5 kgp est appliquée sur les joints à coller, perpendiculairement à leur plan, et le tout chauffé à l'étuve à 160°C pendant 3 h.

Au bout de ce temps, l'étuve est abandonnée à son refroidissement naturel, porte fermée. L'épaisseur du polyéthylène se situe alors entre 0,003 et 0,03 mm, la moyenne étant de 0,013 mm.

Après rupture les plaquettes d'acier sont nettoyées et réutilisées.

Figure 1. Epreuve à joint collé.

L'aire de collage est mesurée, après rupture, à la loupe micrométrique sur chacune des deux faces et la moyenne des deux mesures prise en compte. La figure 2 donne la distribution de ces aires.

Au sortir de l'étuve refroidie les éprouvettes sont placées dans une salle thermostatique à  $24,8^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$  pendant 48 h au moins, avant d'être tendues dans la même salle, simplement sous l'action d'un poids accroché à la main, aussi doucement que possible, l'opérateur tenant un chronomètre dans l'autre main.

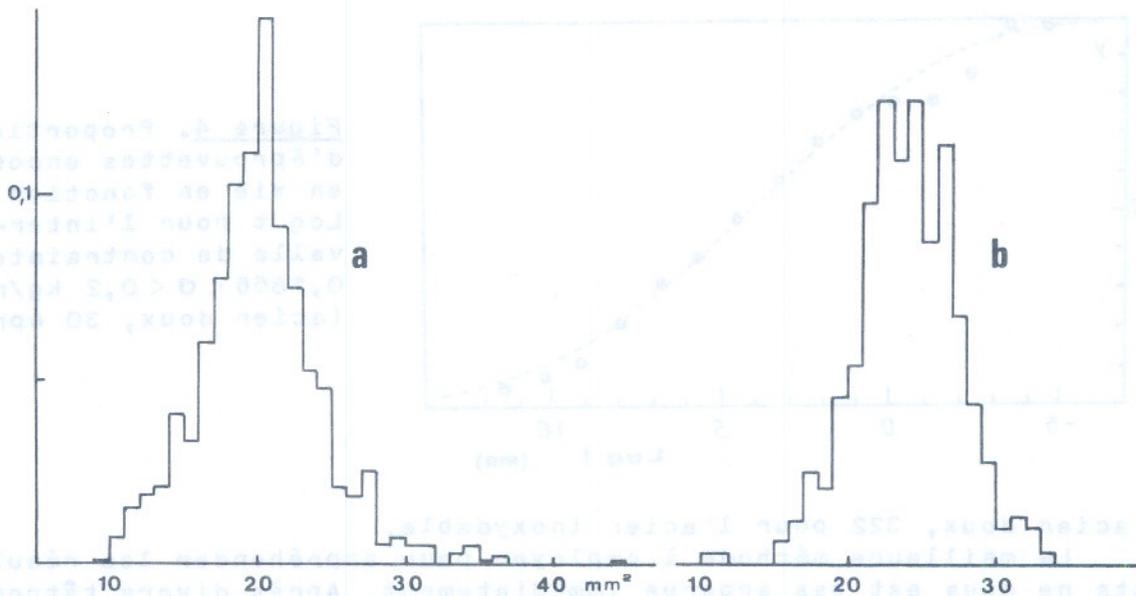


Figure 2. Histogramme des aires de collage :

- a: acier doux, aire moyenne  $20,16 \text{ mm}^2$ , écart type relatif 21,0 %  
 b: acier inox. aire moyenne  $24,13 \text{ mm}^2$ , écart type relatif 21,5 %

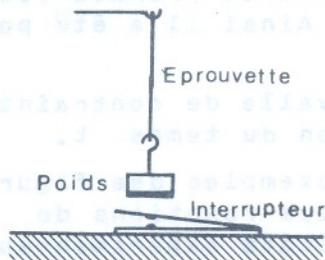


Figure 3. Montage employé.

Si la rupture se produit pendant l'accrochage ou moins de 0,6 seconde après l'accrochage, on considère que la durée de vie est nulle. Si la rupture ne s'est pas produite pendant les 5 premières minutes, un interrupteur est placé sous le poids et relié à un compte-secondes électrique, afin de connaître l'époque de la rupture si celle-ci se produit en l'absence de l'opérateur, notamment la nuit.

Chaque éprouvette est accrochée à un support indépendant des autres, de manière que les secousses d'une rupture n'en provoquent pas d'autres.

### 3. DÉPOUILLEMENT ET STATISTIQUE À CONTRAINTE CONSTANTE

La majorité des éprouvettes ont subi une contrainte constante et conduisent à une statistique, qui forme l'essentiel de ce travail. Cependant, pour quelques-unes, le poids a été modifié en cours d'expérience. Pour certaines d'entre elles, choisies au hasard, le poids a été modifié assez peu de temps après la mise sous tension. Elles doivent être éliminées de la statistique à charge constante.

D'autres, par contre, ont été surchargées au bout d'un temps très long - 70 jours pour l'acier doux, 140 jours pour l'acier inoxydable - parce qu'elles tardaient à rompre. Ces dernières, qui comptent parmi les plus résistantes, doivent nécessairement intervenir, sous la forme d'une inégalité, dans la statistique envisagée, sous peine de la fausser. En revanche elles ont été éliminées de l'étude à charge variable.

Dans ces conditions il nous est resté 680 éprouvettes pour

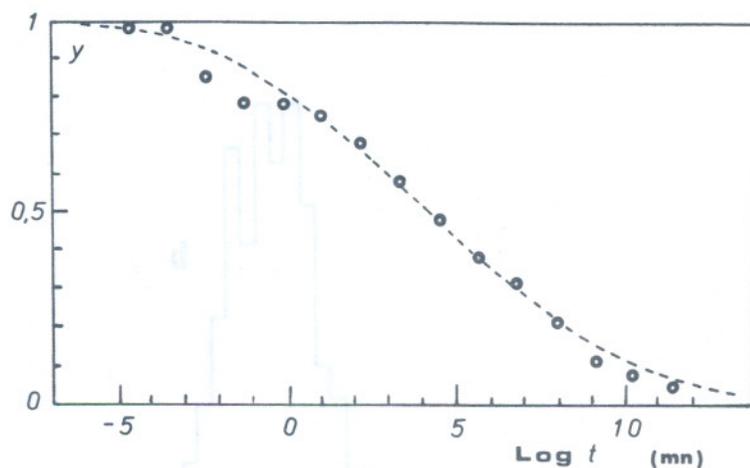


Figure 4. Proportion  $y$  d'éprouvettes encore en vie en fonction de  $\text{Log } t$  pour l'intervalle de contrainte :  $0,1866 < \sigma < 0,2 \text{ kg/mm}^2$  (acier doux, 30 épr.)

l'acier doux, 322 pour l'acier inoxydable.

La meilleure méthode à employer pour appréhender les résultats ne nous est pas apparue immédiatement. Après divers tâtonnements, nous avons classé les éprouvettes par intervalles de contrainte dont les bornes sont en progression géométrique de raison  $2^{0,1}$ . Il y a donc 10 intervalles par octave de contrainte. Dans chaque intervalle, nous avons établi la proportion  $y$  d'éprouvettes ayant eu une durée de vie supérieure à des valeurs de  $t$  prédéterminées et échelonnées également en progression géométrique de raison  $\sqrt{10}$ , depuis 0,01 mn jusqu'à 100 000 mn. De cette façon, ont pu être prises en compte aussi bien les ruptures prématurées ( $t < 0,01 \text{ mn}$ ) que les tardives ( $t > 10^5 \text{ mn}$ ). Ainsi il a été possible de tracer deux séries de courbes :

- y en fonction de  $\text{Log } t$  pour chaque intervalle de contrainte,
- y en fonction de  $\text{Log } \sigma$  pour chaque échelon du temps  $t$ .

Leur allure en S est illustrée par les exemples des figures 4 et 5. Les courbes en pointillé représentent les fonctions de Laplace-Gauss rendant le mieux compte des résultats expérimentaux.

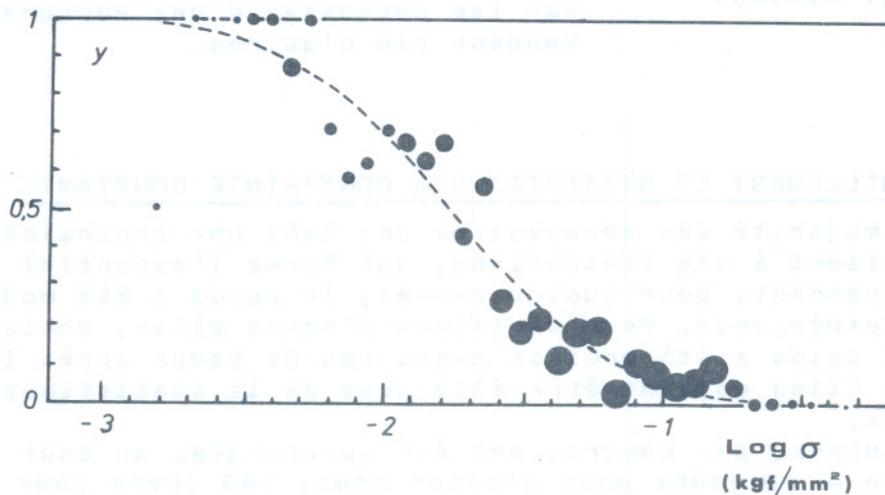


Figure 5. Proportion  $y$  d'éprouvettes encore en vie pour  $t > 31,6 \text{ mn}$  en fonction de  $\text{Log } \sigma$  (acier doux, le diamètre des cercles dépend du nombre d'éprouvettes de chaque tranche de contrainte).

Parmi les nombreuses expressions proposées dans les ouvrages de statistique, nous en avons essayé une dizaine, mais nous n'en avons finalement retenu que deux, qui concordent le mieux avec les faits : celle de Laplace-Gauss logarithmique et celle de Weibull.

### 3.1. Loi de Laplace-Gauss logarithmique

En fonction de la durée de vie  $t$ , nous avons posé pour chaque intervalle de contrainte :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta \left( \lambda \operatorname{Log} \frac{t}{T} \right)$$

avec :  $y$  : proportion d'éprouvettes encore en vie au temps  $t$ ,

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

$T$  : temps médian, au bout duquel la moitié des éprouvettes sont encore en vie pour la contrainte considérée,

$\lambda$  : coefficient caractérisant l'acuité de la distribution.

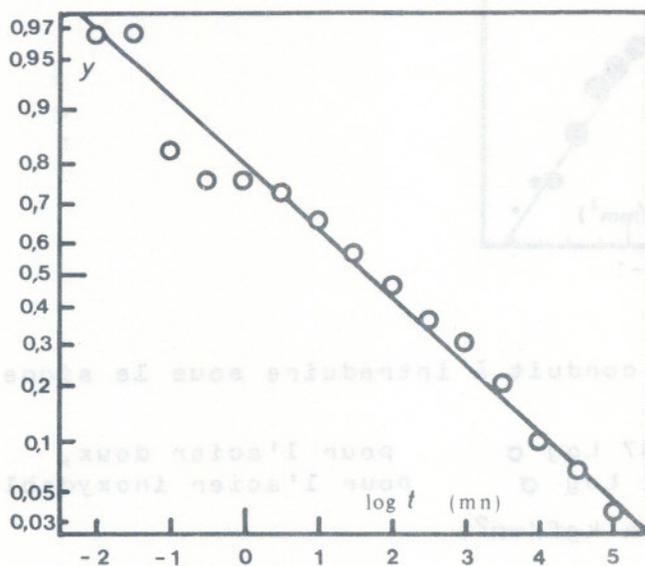


Figure 6. Droite de Henry pour  $0,1866 < \sigma < 0,2$  kgf/mm<sup>2</sup> (acier doux, 30 éprouvettes).

Si les graphiques obtenus sur papier gaussien s'écartent un peu d'une droite de Henry (fig. 6), les écarts observés ne sont cependant pas systématiques et les valeurs de  $T$  qui en résultent peuvent, en fonction de  $\sigma$ , se mettre sous la forme (fig. 7) :

- sur acier doux :  $\operatorname{Log} T = -13,7 - 10 \operatorname{Log} \sigma$

- sur acier inox :  $\operatorname{Log} T = -34,2 - 19,5 \operatorname{Log} \sigma$

$T$  en mn,  $\sigma$  en kgf/mm<sup>2</sup>

Les valeurs de  $\lambda$  sont échelonnées, pour l'acier doux, entre 0,11 et 0,16 (moyenne 0,137 ;  $\lambda$  augmente un peu avec  $\sigma$ ) et pour l'acier inoxydable entre 0,09 et 0,20 (moyenne 0,119 ;  $\lambda$  diminue un peu avec  $\sigma$  croissant). Elles ne varient pas avec la contrainte selon une loi simple, de sorte qu'il nous a semblé préférable, dans cette première approche, de ne considérer que les moyennes des valeurs trouvées.

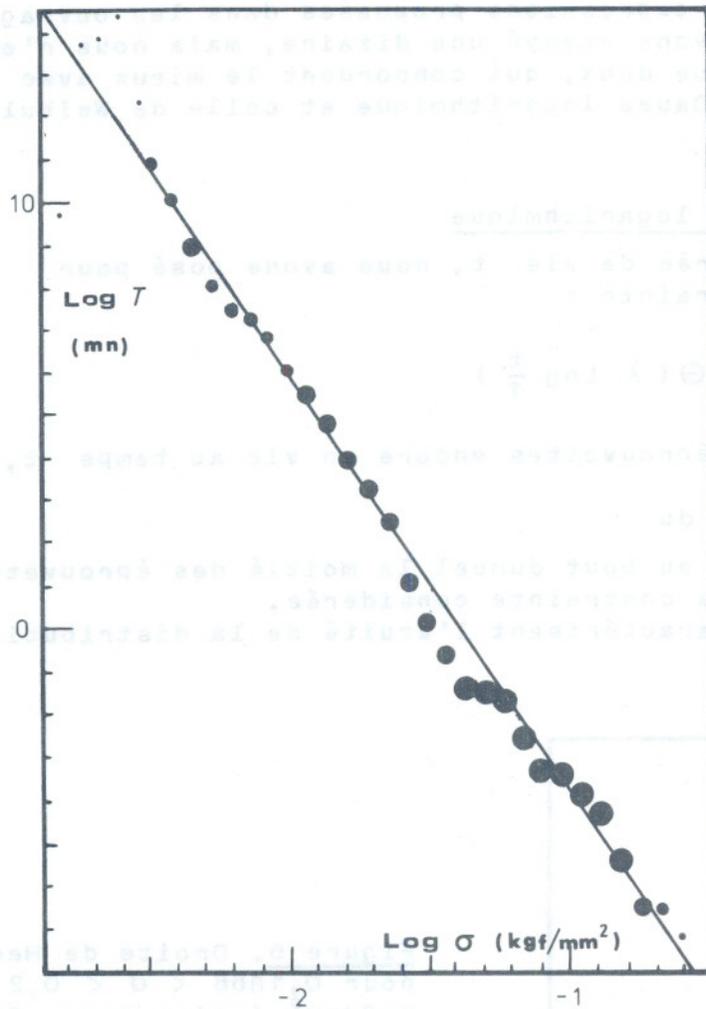


Figure 7. Variations de  $T$  (durée de vie médiane) avec la contrainte  $\sigma$ . Acier doux, 680 éprouvettes. Le diamètre des cercles dépend du nombre d'éprouvettes de chaque tranche de  $\sigma$ .

Ce premier dépouillement conduit à introduire sous le signe  $\Theta$  l'expression :

$$\begin{aligned} 1,877 + 0,137 \text{ Log } t + 1,37 \text{ Log } \sigma & \quad \text{pour l'acier doux,} \\ 4,07 + 0,119 \text{ Log } t + 2,32 \text{ Log } \sigma & \quad \text{pour l'acier inoxydable} \end{aligned}$$

(  $t$  en mn,  $\sigma$  en  $\text{kgf/mm}^2$  )

De même, pour chaque valeur de  $t$ , nous avons posé en fonction de la contrainte :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta \left( \mu \text{ Log } \frac{\sigma}{\Sigma} \right)$$

$\Sigma$  : contrainte médiane, pour laquelle la moitié des éprouvettes sont encore en vie à l'époque  $t$  considérée,

$\mu$  : coefficient caractérisant l'acuité de la distribution.

Le logarithme de la contrainte médiane  $\Sigma$  varie à peu près linéairement avec celui du temps (fig. 8) et l'on arrive aux relations :

$$\begin{aligned} \text{Log } \Sigma &= -1,41 - 0,096 \text{ Log } t & \quad \text{pour l'acier doux,} \\ \text{Log } \Sigma &= -1,71 - 0,078 \text{ Log } t & \quad \text{pour l'acier inoxydable.} \end{aligned}$$

Quant au paramètre  $\mu$ , dont les variations ne sont pas nettes, nous l'avons considéré comme constant et égal à sa moyenne.

$$\begin{aligned} 1,15 < \mu < 1,78 & \quad \text{moyenne } \mu = 1,409 \text{ pour l'acier doux,} \\ 1,3 < \mu < 2,6 & \quad \text{moyenne } \mu = 1,99 \text{ pour l'acier inoxydable.} \end{aligned}$$

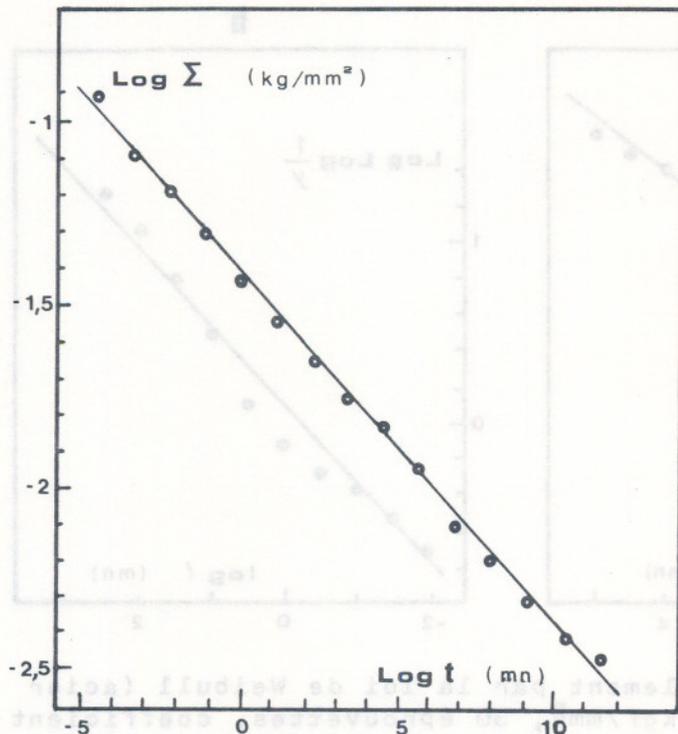


Figure 8. Variations de (contrainte médiane) avec la durée de vie  $t$  (acier doux, 680 éprouvettes).

Ce deuxième dépouillement conduit donc à introduire sous le signe  $\ominus$  l'expression:

$$\begin{aligned} \text{sur acier doux :} & \quad 1,99 + 0,135 \text{ Log } t + 1,409 \text{ Log } \sigma, \\ \text{sur acier inox. :} & \quad 3,40 + 0,155 \text{ Log } t + 1,99 \text{ Log } \sigma. \end{aligned}$$

La confrontation des résultats obtenus en considérant comme variables les temps d'abord, puis la contrainte, et, en second lieu, la contrainte d'abord, puis le temps, conduit à :

Collage sur acier doux:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ominus (1,94 + 0,136 \text{ Log } t + 1,39 \text{ Log } \sigma),$$

Collage sur acier inoxydable :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ominus (3,74 + 0,137 \text{ Log } t + 2,16 \text{ Log } \sigma).$$

### 3.2. Loi de Weibull

Si l'on suppose qu'une éprouvette donnée, sous charge constante, a une certaine probabilité  $a$  par unité de temps de rompre, cela conduit à écrire, pour l'ensemble  $y$  des éprouvettes en vie:

$$-\frac{dy}{ydt} = a,$$

d'où, si  $a$  est constant :

$$y = e^{-at},$$

comme pour les noyaux radioactifs.

En fait l'expérience prouve que cette probabilité n'est pas constante, mais qu'elle diminue avec l'âge de l'éprouvette. Autrement dit une éprouvette non rompue au cours de la première minute, a moins de chances de rompre pendant la deuxième etc.. Par exemple pour une certaine contrainte :  $\sigma = 0,3864 \text{ kgf/mm}^2$  et pour l'acier

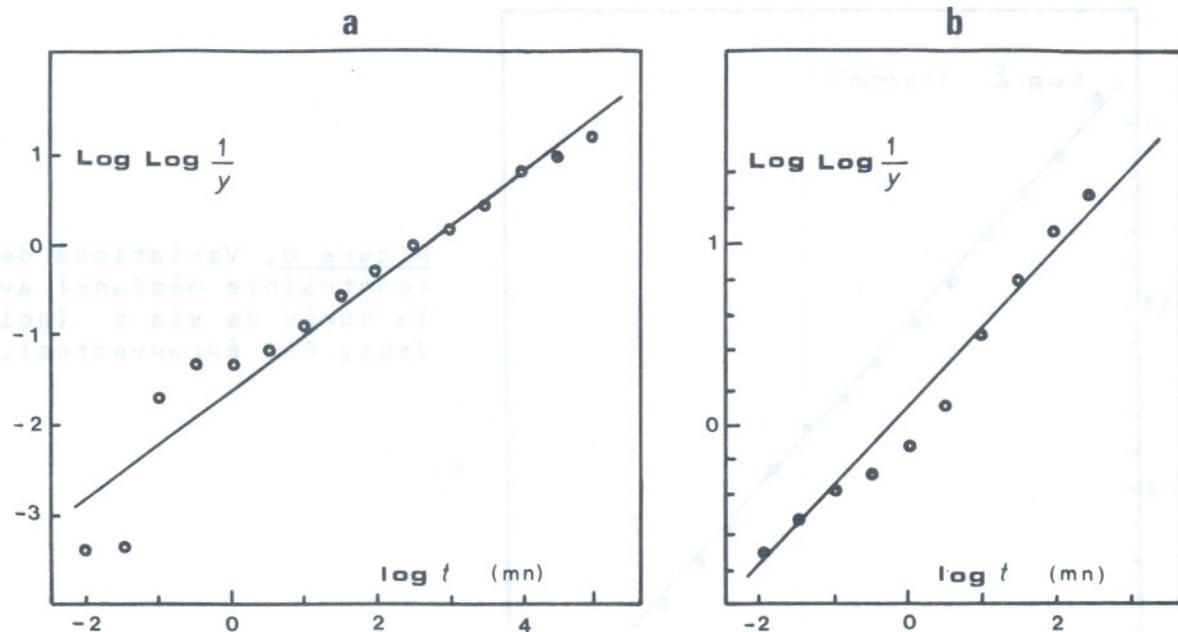


Figure 9. Essais de dépouillement par la loi de Weibull (acier doux); a :  $0,1866 < \sigma < 0,2 \text{ kgf/mm}^2$ , 30 éprouvettes, coefficient de corrélation :  $\rho = 0,966$  ; b :  $0,2462 < \sigma < 0,2639 \text{ kgf/mm}^2$ , 36 éprouvettes, coefficient de corrélation :  $\rho = 0,993$ .

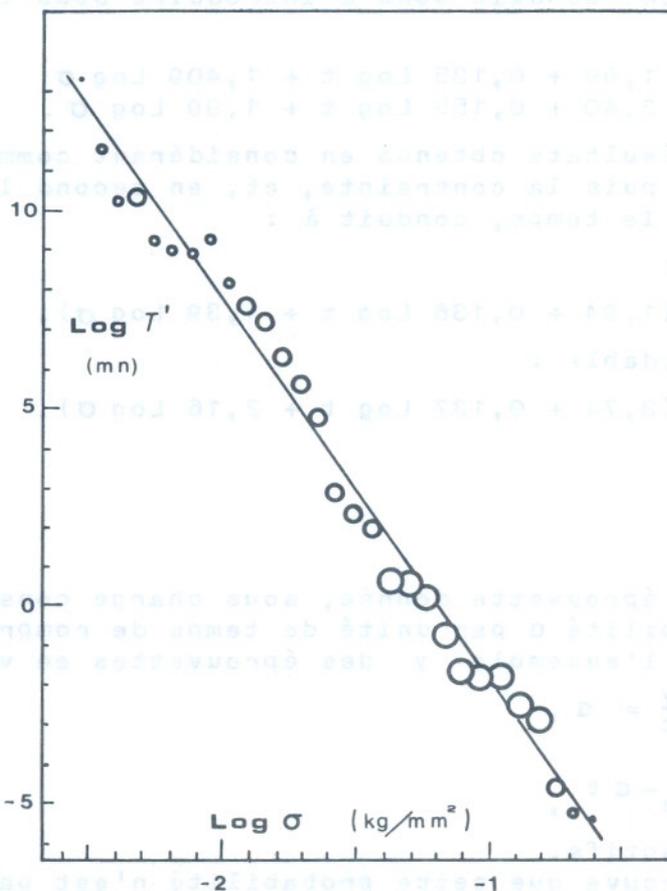


Figure 10. Variations de  $\text{Log } T'$  avec  $\text{Log } \sigma$  (acier doux, 680 épr. coeff. de corrélation :  $\rho = 0,993$ ). Le diamètre des cercles dépend du nombre d'éprouvettes par tranche.

doux, la probabilité est de  $5 \text{ mn}^{-1}$  pour  $t = 0,03 \text{ mn}$ , mais elle devient  $2 \cdot 10^{-3} \text{ mn}^{-1}$  pour  $t = 400 \text{ mn}$ .

Weibull a proposé l'expression :

$$y = e^{-a t^\beta}$$

avec :  $0 < \beta < 1$ .

Ainsi la probabilité de rupture par unité de temps devient :

$$-\frac{dy}{y dt} = \frac{a \beta}{t^{1-\beta}}$$

Pour faciliter le dépouillement, nous avons mis l'équation de Weibull sous la forme légèrement différente :

$$\text{Log Log } \frac{1}{y} = \beta \text{ Log } \frac{t}{T'}$$

(au lieu de  $\text{Log Log } 1/y = \beta \text{ Log } t + \text{Log } a$ )

$T'$  est le temps au bout duquel la fraction  $1/e$  des éprouvettes est encore intacte.

En portant  $\text{Log Log } 1/y$  en fonction de  $\text{Log } t$ , on obtient un graphique qui peut facilement être assimilé à une droite. La figure 9, a et b en représente deux exemples. Chaque graphique permet de déterminer  $T'$  et  $\beta$ . Le premier paramètre,  $T'$ , apparaît comme une fonction simple de  $\sigma$  (fig. 10) :

$$\begin{aligned} \text{Acier doux : } & \text{Log } T' = -11,64 - 9,66 \text{ Log } \sigma \\ \text{Acier inox : } & \text{Log } T' = -22,4 - 13,5 \text{ Log } \sigma. \end{aligned}$$

La corrélation n'est pas mauvaise.

En revanche, l'exposant  $\beta$  varie avec la contrainte (fig. 11) d'une façon qui, si elle était mise en équation, ôterait à l'expression de Weibull l'avantage de sa simplicité. Nous avons préféré

nous contenter des valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \beta &= 0,21 \text{ pour l'acier doux} \\ \beta &= 0,20 \text{ pour l'acier inox.} \end{aligned}$$

Les résultats s'écrivent alors, en arrondissant :

$$y = e^{-11,5 t^{0,2} \sigma^2}, \text{ pour l'acier doux et :}$$

$$y = e^{-88 t^{0,2} \sigma^{2,7}} \text{ pour l'acier inoxydable.}$$

Ces expressions représentent moins bien les résultats expérimentaux que celle de Laplace-Gauss.

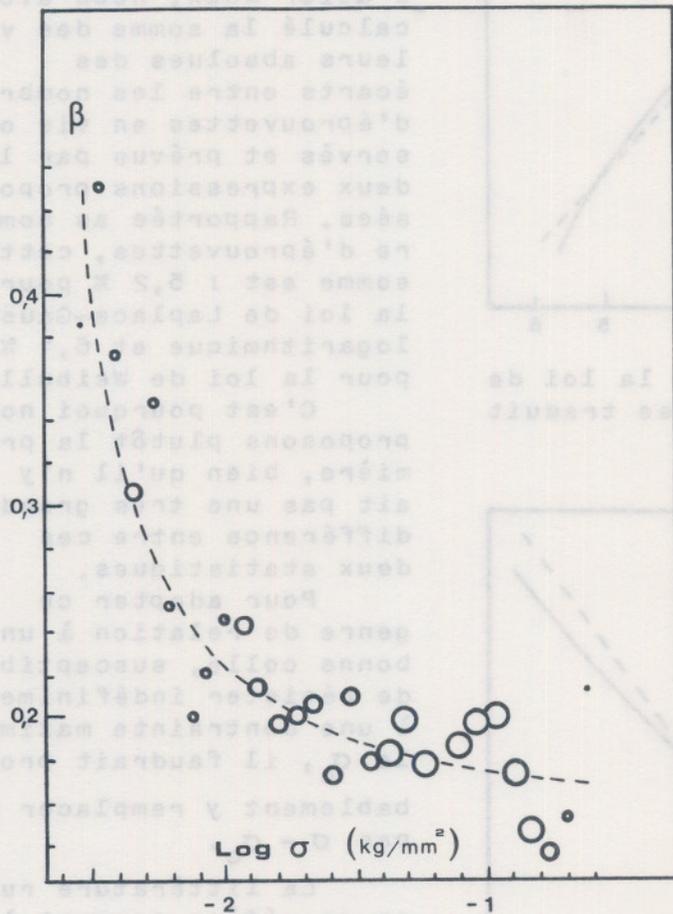


Figure 11. Variations du coefficient  $\beta$  de Weibull avec la contrainte (acier doux, 680 éprouv.).

Le dépouillement peut donc être effectué par la méthode suivante, dite du facteur de translation.

A la même échelle on trace la courbe de  $y$  en fonction de  $\text{Log } t$  pour chaque valeur de la contrainte  $\sigma$ . Les différents graphiques obtenus sont superposables moyennant une translation le long de l'axe des  $\text{Log } t$ , translation fonction linéaire de  $\text{Log } \sigma$ . Après cette translation l'ensemble des graphiques fournit une courbe moyenne, que l'on peut appeler "courbe maîtresse" et qui représente la fonction  $\phi$  cherchée.

En pratiquant cette opération sur nos résultats relatifs à l'acier doux, nous avons obtenu une courbe maîtresse assez bien définie. Rectifiée selon la méthode de Henry, elle conduit au gra-

### 3.3. Principe de la courbe maîtresse

Avec les approximations effectuées, ce que l'on retrouve en commun dans les deux dépouillements précédents, Gauss et Weibull, c'est le fait qu'apparaît le produit :

$$t \sigma^m$$

Il semble, par suite, légitime de considérer la proportion  $y$  d'éprouvettes en vie comme fonction de ce produit :

$$y = \phi(t \sigma^m).$$

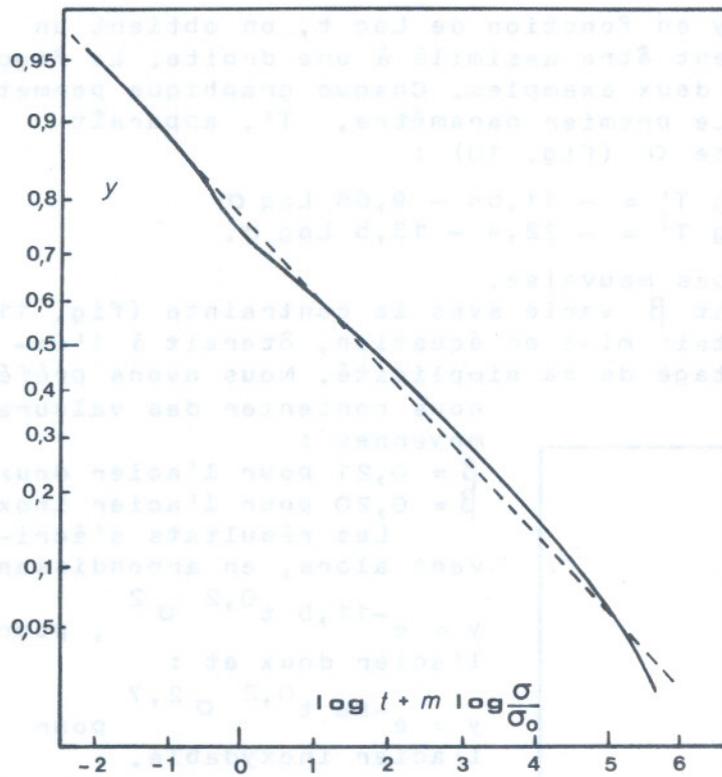
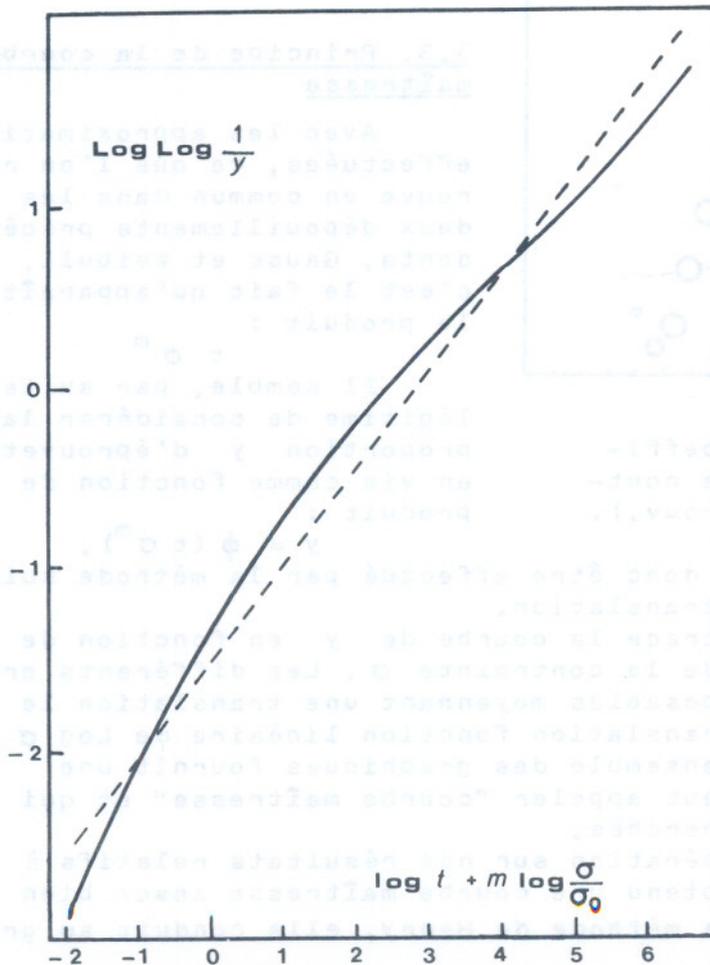


Figure 12. Dans ce graphique la loi de Laplace-Gauss logarithmique se traduit par une droite.



phique de la figure 12, qui est acceptable. Par contre, rectifiée selon la loi de Weibull, elle fait apparaître une courbure non négligeable (fig.13).

### 3.4. Conclusion aux mesures à contrainte constante

Pour les supports d'acier doux, nous avons calculé la somme des valeurs absolues des écarts entre les nombres d'éprouvettes en vie observés et prévus par les deux expressions proposées. Rapportée au nombre d'éprouvettes, cette somme est : 5,2 % pour la loi de Laplace-Gauss logarithmique et 6,1 % pour la loi de Weibull.

C'est pourquoi nous proposons plutôt la première, bien qu'il n'y ait pas une très grande différence entre ces deux statistiques.

Pour adapter ce genre de relation à une bonne colle, susceptible de résister indéfiniment à une contrainte maximale  $\sigma_c$ , il faudrait probablement y remplacer  $\sigma$  par  $\sigma - \sigma_c$ .

La littérature russe se réfère souvent à l'équation de Jourkov :

$$T = A e^{-a\sigma},$$

où T représente la durée de vie moyenne des éprouvettes, mais nos résultats ne cadrent pas avec cette relation. D'ailleurs dans un diagramme semi-logarithmi-

Figure 13. Avec ces coordonnées, la loi de Weibull se traduit par une droite.

que de Wöhler, cette expression se traduit par une droite, qu'il ne faut pas extrapoler à  $\sigma = 0$ , car cela conduirait à  $T = A$  au lieu de  $T = \infty$ . Pour des temps supérieurs à  $A$ , la charge deviendrait négative.

L'expression suivante :

$$T = A \frac{e^{-a\sigma}}{\sigma},$$

cas particulier de celle qui est proposée par Bastenaire pour la fatigue cyclique, ne présente pas cet inconvénient, mais n'est pas non plus conforme à nos résultats.

#### 4. CHARGES VARIABLES

Le critère de rupture le plus simple semble être celui de Beili, selon lequel les dommages anciens s'ajoutent aux récents sans effacement. Il s'écrit :

$$\int_0^t \frac{d\tau}{T[\sigma(\tau)]} = 1 \quad \text{critère I}$$

$\sigma(\tau)$  : contrainte antérieure, variable avec  $\tau$ ,

$T[\sigma]$  : la durée de vie moyenne qui correspondrait à la contrainte  $\sigma$  si celle-ci était constante.

Nous nous étions demandé, à l'origine, s'il était possible d'appliquer à la rupture des joints collés une expression du type "viscoélasticité linéaire" telle que :

$$\int_0^t \sigma(\tau) f(t - \tau) d\tau = 1 \quad \text{critère II}$$

$f(t - \tau)$  : fonction mémoire.

Cette expression ne repose sur aucune base théorique. Elle suppose notamment que la contrainte intervient linéairement et que les contraintes anciennes n'ont pas le même effet que les récentes. Les dommages causés par les contraintes anciennes peuvent par exemple s'effacer progressivement.

Pour supprimer le fait que la contrainte intervienne linéairement, il est possible de lui affecter un exposant  $n$  dans l'équation précédente. Celle-ci devient alors :

$$\int_0^t \sigma^n(\tau) f(t - \tau) d\tau = 1 \quad \text{critère III}$$

mais cela aussi est arbitraire. Evidemment, plus il y a de paramètres, plus il est possible de serrer de près la réalité expérimentale.

Dans certains cas les critères I et III sont équivalents. Par exemple si, comme dans nos expériences :  $T = A/\sigma^m$ , le critère I de Beili devient :

$$\frac{1}{A} \int_0^t \sigma^m(\tau) d\tau = 1$$

équivalent au critère III si  $f(t - \tau) = 1/A$  et si  $n = m$ .

Nous avons tenté d'appliquer les critères énumérés ci-dessus aux éprouvettes dont les charges ont été modifiées a priori et qui malheureusement n'étaient qu'au nombre de 11 (acier doux).

Dans les figures 14, 15 et 16 il a été porté en ordonnées la proportion  $y$  d'éprouvettes encore intactes et en abscisses la variable  $z$  définie pour la courbe théorique en pointillé par

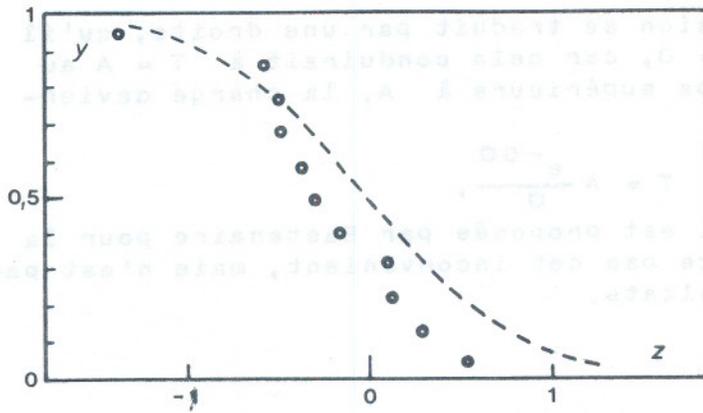


Figure 14. Vérification du critère I (de Beili)

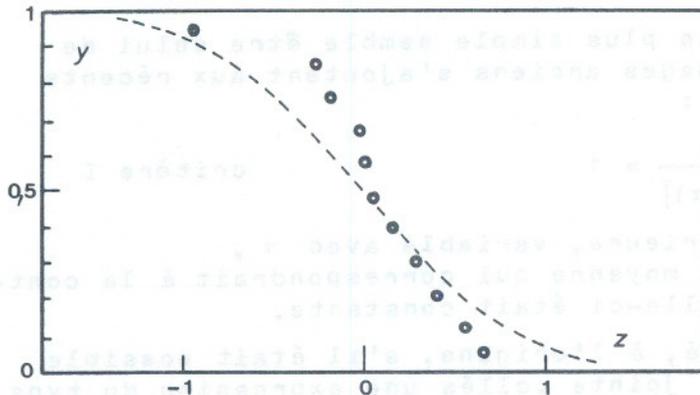


Figure 15. Vérification du critère II (ou critère III avec n = 1)

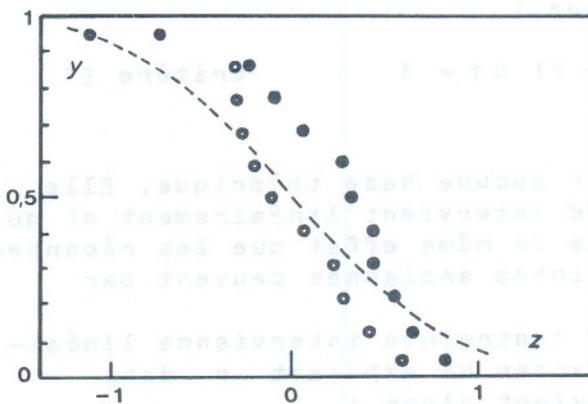


Figure 16. Essais du critère III avec n = 0,2 (●) et avec n = 2 (○).

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Theta(z)$$

Dans le critère I de Beili, nous avons remplacé la durée de vie moyenne  $T$  par le temps  $t$  au bout duquel la proportion  $y$  d'éprouvettes a résisté. De

$$z = a + b \text{Log } t + c \text{Log } \sigma,$$

on extrait :

$$t = \frac{e^{(z-a)/b}}{\sigma^{c/b}}$$

de sorte que le critère I s'écrit :

$$\int_0^t [\sigma(\tau)]^{c/b} d\tau = e^{(z-a)/b}$$

Le premier membre est connu :  $a, b, c$  ont été déterminés par la fatigue statique et les contraintes successives  $\sigma(\tau)$  ont été imposées. Le deuxième membre donne donc les valeurs de  $z$  portées sur le graphique de la figure 14. Elles sont en général trop petites. Le critère de Beili fournit une durée de vie plus courte que

la réelle.

Le critère III conduit de la même façon à la relation :

$$\int_0^t [\sigma(\tau)]^n (t-\tau)^{\frac{nb}{c} - 1} d\tau = \frac{c}{nb} e^{\frac{n}{c}(z-a)} \quad \text{critère III}$$

qui contient comme cas particulier ( $n = 1$ ) le critère II.

Bien que la pente soit plus forte que celle de la courbe théorique (fig.15), les points expérimentaux se placent bien en moyenne. La fonction mémoire serait de la forme :

$$\left(\frac{1}{t-\tau}\right)^1 - \frac{b}{c} \quad \text{avec } b/c \text{ de l'ordre de } 0,1.$$

Il y aurait effacement partiel des dommages anciens.

Pour  $n = 0,2$  et  $n = 2$ , le graphique prend l'allure indiquée figure 16.

Dans la littérature, qui est assez pauvre dans ce domaine, notre attention a été attirée par les travaux de Narkevitchos et Rajeckas. Ces auteurs trouvent en général que le critère de Beili s'applique bien à leurs expériences, notamment dans un programme de charge qui consiste à appliquer une première contrainte pendant un temps fixé à l'avance, puis une contrainte plus forte jusqu'à la rupture. L'application du critère III à leurs résultats nous a effectivement conduits à  $n = m$ , c'est-à-dire au critère I de Beili.

Par contre, pour une charge en créneaux, ils trouvent que la durée de vie totale est plus grande que celle que fournit le critère de Beili. Autrement dit ils trouvent une restauration des éprouvettes pendant les temps morts. L'application du critère III à ces expériences mène à  $n = 0,78$ .

Néanmoins la valeur de  $n$  doit être indépendante du programme de charge et il est permis de penser que ladite restauration du joint collé est due à la recouvrance du subjectile.

## 5. CONCLUSION

Dans le cas de charges variables, nous n'avons pas d'expériences assez nombreuses et assez sûres pour pouvoir choisir le critère adéquat, soit parmi les trois cités ici, soit parmi d'autres qui conduiraient à de meilleures prévisions.

En revanche, dans le domaine strict de la fatigue statique, l'expérience conduit, au moins pour les temps explorés, à la loi puissance :

$$T = \frac{A}{\sigma^m}$$

et en outre, pour une même charge, à une distribution gaussienne des logarithmes des durées de vie.

Il serait intéressant d'appliquer au problème des joints collés la théorie de la propagation des fissures. Pour ce faire, il faudrait faire intervenir la viscoélasticité de la colle et envisager, dans les aires de collage, une distribution de domaines d'inégales résistances. Des expériences anciennes, en effet, nous ont montré que les mesures d'adhérence sur de petites surfaces étaient plus dispersées, mais en moyenne plus élevées que sur de grandes surfaces.

Bibliographie: L.M. Narkevitchos & V.L. Rajeckas, Effet du régime de la charge sur la durée de vie des joints collés. Bulletin des établissements d'enseignement supérieur (URSS) ; Technologie de l'industrie légère, 1974, n° 4, p. 97 à 101.