

**Colloque annuel  
du Groupe français  
de rhéologie**



**CAHIERS DU GROUPE FRANÇAIS DE RHÉOLOGIE**

---

**Colloque annuel 1977 du Groupe français de rhéologie**  
**7-8 décembre 1977**

**THERMODYNAMIQUE**  
**DES**  
**COMPORTEMENTS RHÉOLOGIQUES**

---

**NUMÉRO SPÉCIAL**  
**Janvier 1980**

SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'ARMEMENT

## THERMODYNAMIQUE DES COMPORTEMENTS RHÉOLOGIQUES

Copyright © 1969, Sciences et techniques de l'armement

La reproduction, même partielle, des articles et figures de cet ouvrage est strictement interdite  
sauf accord préalable du président du Comité de rédaction de « Sciences et techniques de l'armement »,  
*Mémorial de l'Artillerie française*, 8, boulevard Victor, 75732 Paris Cedex 13.

TABLE DES MATIÈRES

MÉMOIRES ORIGINAUX

Thermodynamique de comportements rhéologiques. Colloque organisé par le Groupe français de rhéologie, les 7 et 8 décembre 1977, à Paris

Allocation d'ouverture, par R. COURTEL, <i>président du Groupe français de rhéologie</i> .....	9
1. <b>B. PERSOZ</b> , <i>docteur-ingénieur, Office national d'études et de recherches aérospatiales</i> , et <b>J.-C. ROSSO</b> , <i>docteur ès sciences physiques, laboratoire de Chimie Physique minérale et macromoléculaire, U.E.R. scientifique de Lumigny</i> . — Chaleur de déformation des polymères .....	11
2. <b>J. MANDEL</b> , <i>ingénieur général des Mines, laboratoire de Mécanique des Solides, École polytechnique</i> . — Variables cachées. Puissance dissipée. Dissipativité normale .....	37
3. <b>G. MAYNÉ</b> et <b>P. BOULANGER</b> , <i>département de Mathématiques, université libre de Bruxelles (Belgique)</i> . — Thermodynamique et causalité en théorie linéaire des milieux continus .....	51
4. <b>M. FRIAS</b> , <i>docteur-ingénieur, université de Lisbonne (Portugal)</i> . — Rhéologie, mécanique et thermodynamique .....	65
5. <b>J. DARDARE</b> , <i>ingénieur E.T.P., Centre d'études et de recherches de l'industrie du béton manufacturé</i> . — Relaxation anisotherme des armatures de précontrainte soumises à l'étuvage .....	73
6. <b>F. SIDOROFF</b> , <i>chargé de recherches au laboratoire de Mécanique théorique, université Pierre-et-Marie-Curie, Paris; maître de conférences à l'École centrale de Lyon</i> . — Description des comportements rhéologiques par variables internes .....	95
7. <b>M. LANCE</b> , <i>ingénieur E.C.L.</i> , <b>J. N. GENCE</b> , <i>docteur ès sciences, laboratoire de Mécanique des Fluides, École centrale de Lyon</i> , et <b>J. BATAILLE</b> , <i>docteur ès sciences, laboratoire de Mécanique des Fluides, École centrale de Lyon</i> . — Remarques sur la forme du flux d'entropie .....	115
8. <b>C. HUET</b> , <i>directeur de recherches à l'École nationale des ponts et chaussées, Paris</i> . — Sur la notion d'état local en rhéologie .....	123
9. <b>R. COURTEL</b> , <i>professeur à l'I.S.M.C.M., directeur de recherches au C.N.R.S., Meudon-Bellevue</i> . — Intervention de processus dissipatifs superficiels dans un problème de minimum d'énergie .....	165
10. <b>B. HALPHEN</b> , <i>ingénieur des Ponts et Chaussées, docteur ès sciences, laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique</i> . — Sur la thermodynamique du polycristal métallique .....	179
11. <b>A. BONNET</b> , <i>professeur à l'École nationale des ponts et chaussées</i> . — Un nouveau modèle thermodynamique de la plasticité des métaux .....	191



# COLLOQUE « THERMODYNAMIQUE DES COMPORTEMENTS RHÉOLOGIQUES »

## ALLOCUTION D'OUVERTURE

prononcée par

R. COURTEL

*Président du Groupe français de rhéologie*

Le sujet du présent colloque est en apparence fort abstrait, si l'on se réfère à la réputation de la thermodynamique. En fait, la rhéologie n'est pas encore très loin de ses origines (1928). Et de son côté, la thermodynamique, à ses débuts, n'était que l'étude empirique des relations de la chaleur et du travail mécanique. Rappelons-nous le chemin parcouru, des expériences de Rumford (1788) et de Joule au principe de l'équivalence (1842); et des idées de Carnot sur le rendement d'une machine thermique (exprimées en 1824 dans ses « réflexions sur la puissance motrice du feu »), à la définition de l'entropie par Clausius, en 1865.

Si donc l'on veut bien considérer les phénomènes rhéologiques, non plus en limitant son attention aux lois contraintes/déformation (dites lois de comportement), comme on le fait souvent, mais en essayant d'évaluer le degré d'irréversibilité plus ou moins accusé des transformations, on retrouve le point de vue des premiers thermodynamiciens. En effet, on doit noter que l'intervention de la viscosité, du frottement solide et de la déformation plastique, confère un caractère dissipatif à tous les processus rhéologiques — à l'exception de ceux qui ne font jouer que l'élasticité idéale —. En réfléchissant un peu, on s'aperçoit que c'est cette propriété qui régit la dynamique d'un

système stable écarté de son état d'équilibre, et plus généralement l'évolution d'un système plus ou moins ouvert. Il est donc surprenant que l'on accorde habituellement si peu d'attention au caractère dissipatif spécifique des modèles utilisés couramment, et popularisés par des dizaines de milliers d'exposés et de traités.

L'objectif des présentes journées est justement de préciser le point de vue de la thermodynamique vis-à-vis des processus rhéologiques en général; une large place est prévue pour la T.P.I. (ou thermodynamique des phénomènes irréversibles) qui a acquis, avec Prigogine, un rang éminent parmi les disciplines scientifiques.

Je suis heureux que l'initiative et les efforts de M. Huet, bien compris et appuyés par le conseil du Groupe français de rhéologie, et bénéficiant de l'hospitalité de l'École de physique et chimie, aient rendu possible l'organisation de cette réunion.

# CHALEUR DE DÉFORMATION DES POLYMÈRES <sup>(1)</sup>

*(Distortion of polymers through heat)*

*(Verformungswärme der Polymere)*

par

B. PERSOZ <sup>(2)</sup> et J. C. ROSSO <sup>(3)</sup>

**RÉSUMÉ.** — *En traction ou compression simples, la chaleur dégagée aussitôt après l'application de la sollicitation est une fonction parabolique de la contrainte. Le terme carré peut être isolé en pratiquant une torsion sur un barreau cylindrique. Exothermique pour un caoutchouc, il est endothermique pour un polymère vitreux. Le phénomène inverse apparaît à la libération de l'éprouvette, sauf lorsqu'un polymère vitreux est resté longtemps sollicité. Dans ce dernier cas, il se produit, sous contrainte constante, une restauration de l'ordre moléculaire à petite distance.*

*Des expériences au microcalorimètre ont permis de suivre la cinétique de ce dégagement de chaleur pendant le fluage et la recouvrance.*

*Le modèle de Maxwell généralisé rend compte qualitativement des phénomènes observés.*

**ABSTRACT.** — *In simple tension and compression, the heat released immediately after application of the stress is a parabolic function of that stress. The square term can be isolated by twisting a round bar. This term is exo-*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Docteur-ingénieur, Office national d'études et de recherches aérospatiales.

<sup>(3)</sup> Docteur ès sciences physiques, laboratoire de Chimie Physique minérale et macromoléculaire, U.E.R. scientifique de Lumigny.

*thermic for a rubber material and endothermic for a vitreous polymer. The reverse phenomenon occurs when the test piece is released, except in the case of a vitreous polymer long subjected to a stress. In such a case, under a continuous stress, a restoration of the molecular order at short range occurs.*

*Experiments carried out using a microcalorimeter allowed to follow the kinetics of the heat release during creep and recovery.*

*The generalized Maxwell model gives a qualitative analysis of recorded phenomena.*

ZUSAMMENFASSUNG. — Bei einfacher Zug- oder Druckbeanspruchung ist die sofort danach freigesetzte Wärme eine parabolische Funktion der Beanspruchung. Das quadratische Glied kann isoliert werden, indem man einen zylindrischen Stab drehbeansprucht. Während es für Gummi exotherm ist, ist es für glasähnliche Polymere endotherm. Der umgekehrte Vorgang tritt bei Entlastung der Probe auf, es sei denn, ein glasähnliches Polymer wird langfristig beansprucht. In letzterem Falle erfolgt bei konstanter Beanspruchung eine Wiederherstellung der molekularen Ordnung auf kurze Entfernung. Mit Hilfe eines Mikrokalorimeters durchgeführte Untersuchungen haben erlaubt, die Kinetik dieser Wärmefreisetzung während des Fließens und der Erholung zu verfolgen.

*Das verallgemeinerte Modell von Maxwell macht qualitative Aussagen über die beobachteten Vorgänge.*

## INTRODUCTION

Le fait que le caoutchouc s'échauffe lorsqu'on l'étire brusquement est connu depuis longtemps. D'après TRELOAR [1], c'est Gough qui, le premier, aurait signalé ce phénomène en 1805, mais il a fallu attendre 1859 pour que Joule mesurât cet échauffement avec un couple thermoélectrique.

Ces mesures ont été reprises plus récemment par Dart et rapportées par JAMES et GUTH en 1943 [2]. L'échauffement  $\Delta T$ , en fonction de l'allongement  $\epsilon$ , présente l'allure parabolique de la figure 1. Un allongement modéré du caoutchouc est endothermique. Il devient exothermique à partir de 12 ou 14 %.

En dehors du caoutchouc, la littérature des hauts polymères est assez pauvre en travaux de cette nature, surtout dans le domaine des petites déformations.

En ce qui concerne les grandes déformations, il y a lieu de citer les travaux de CHATAIN [3], qui a étiré des fils de nylon dans un calorimètre. Cet auteur a observé d'abord une absorption de chaleur, puis un dégagement de l'ordre de grandeur du travail mécanique fourni.

MÜLLER et WEIMANN [4] ont effectué des mesures précises sur la chaleur dégagée lors de l'étirement d'un polycarbonate et ont trouvé que le travail mécanique dépensé pour l'étirement était supérieur à la quantité de chaleur produite. Comme la structure du polymère étiré est différente de celle du polymère initial, les auteurs s'attendaient à retrouver ces différences d'enthalpie sous forme d'une différence entre les chaleurs de dissolution de ces deux produits, mais le bilan thermique ne s'équilibre finalement pas bien. Ils attribuent le reliquat au vieillissement.

## 1. TRACTIONS OU COMPRESSIONS INSTANTANÉES

L'allure parabolique de la courbe de la figure 1 suggère de décomposer en deux termes la chaleur de déformation par unité de volume d'un polymère brusquement allongé :

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Le terme  $Q_1$  serait du premier degré en contrainte ou en allongement et le terme  $Q_2$  du second degré.

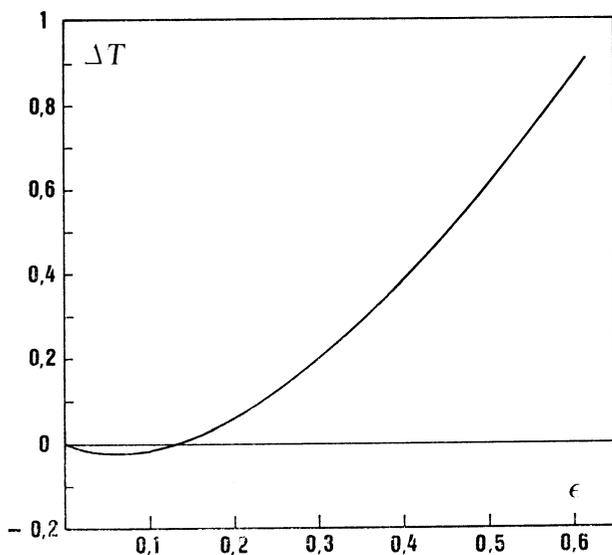


FIG. 1. — Courbe de Joule précisée par Dart, d'après TRELOAR [1]  
Échauffement du caoutchouc, fonction de l'allongement

L'expression du premier terme  $Q_1$ , qui est classique, se trouve dans les cours de thermodynamique : un échauffement allonge le matériau, une traction produit le refroidissement qui tend à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance et l'on a finalement :

$$(1) \quad Q_1 = -\alpha T \sigma$$

$\alpha$  : coefficient de dilatation linéaire;

$T$  : température absolue;

$\sigma$  : contrainte de traction.

Le même raisonnement, pour une sollicitation plus générale, conduit à l'expression [5] :

$$(2) \quad Q = -3\alpha T K \theta$$

$3\alpha$  : coefficient de dilatation cubique;

$T$  : température absolue;

$K$  : module de compressibilité;

$\theta$  : variation relative de volume.

Pour une traction simple, cette équation (2) s'identifie avec (1), dans la mesure où la variation de volume est :

$$\theta = \varepsilon (1 - 2\nu)$$

$\varepsilon$  : allongement;

$\nu$  : rapport de Poisson.

Mais si la structure de la matière est telle qu'un allongement  $\varepsilon$  dans la direction 1 provoque dans les deux autres directions un rétrécissement de la forme :

$$(3) \quad \varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon + p \varepsilon^2,$$

$\varepsilon_{22}$  : dilatation dans la direction 2;

$p$  : coefficient positif pour un verre, négatif pour un caoutchouc;

c'est-à-dire si la variation de volume contient un terme du second ordre :

$$\theta = \varepsilon (1 - 2\nu) + 2p \varepsilon^2$$

cela fait apparaître dans  $Q$  le terme quadratique :

$$(4) \quad Q_2 = -\frac{2p\alpha TE\varepsilon^2}{1-2\nu} = -\frac{4p\alpha T}{1-2\nu} W$$

$E$  : module d'Young;

$W$  : travail de traction.

Quelques expériences de traction et de compression ont été exécutées sur du polyméthacrylate de méthyle commercial en barreau de 15 millimètres de diamètre. Quatre couples thermoélectriques étaient fixés à la surface du barreau par une bande adhésive et reliés à un microvoltmètre enregistreur. Les soudures de référence, isolées, étaient encastrées dans un anneau de plomb entourant l'éprouvette.

Les enregistrements ont l'allure indiquée figure 2. Une petite extrapolation permet d'en dégager la variation instantanée  $\Delta T$  de température.

Celle-ci est représentée (fig. 3) en fonction de la contrainte  $\sigma$  pour des mesures faites à la température ambiante. C'est chaque fois la moyenne entre la charge et la décharge, espacées de 2 à 3 minutes. La linéarité semble assez

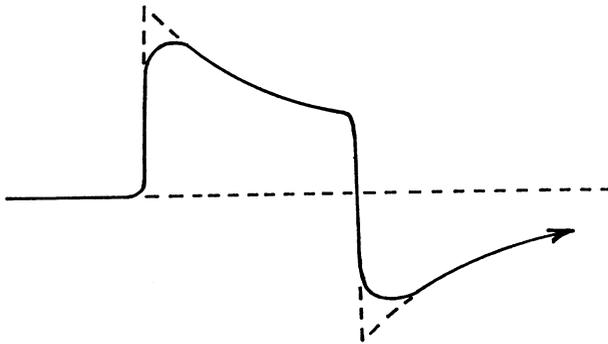


FIG. 2. — Enregistrement au microvoltmètre et schéma des extrapolations

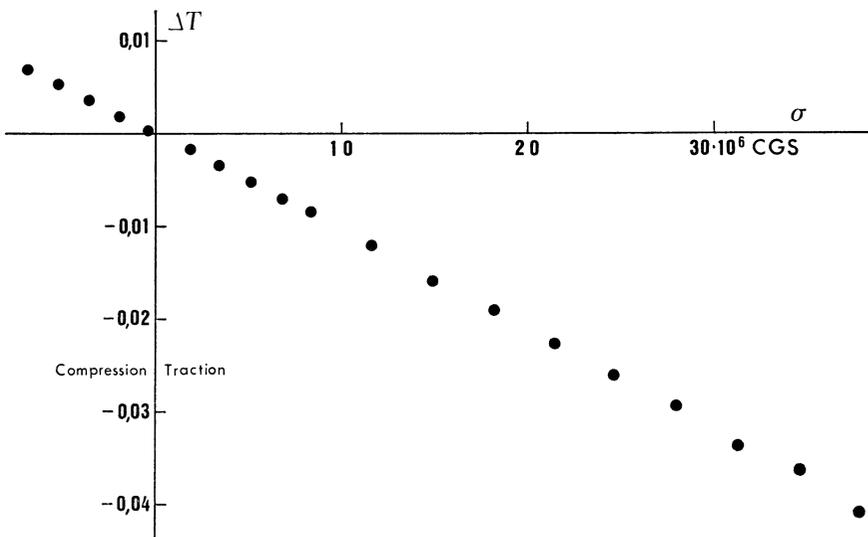


FIG. 3. — Variation de température  $\Delta T$ , fonction de la contrainte  $\sigma$  (traction ou compression) Polyméthacrylate de méthyle à 20 °C

bonne, mais il y a cependant une certaine courbure, qu'il est possible de mettre en évidence en représentant (fig. 4)  $\frac{\Delta T}{\sigma}$  en fonction de  $\sigma$ . Les points expérimentaux apparaissent alors assez dispersés : les écarts avec la droite des moindres carrés sont de 3 à 4 %. C'est assez habituel pour ce genre de mesures thermiques, pas très précises en valeur relative, puisque la variation de température ne dépasse pas 0,05 °C.

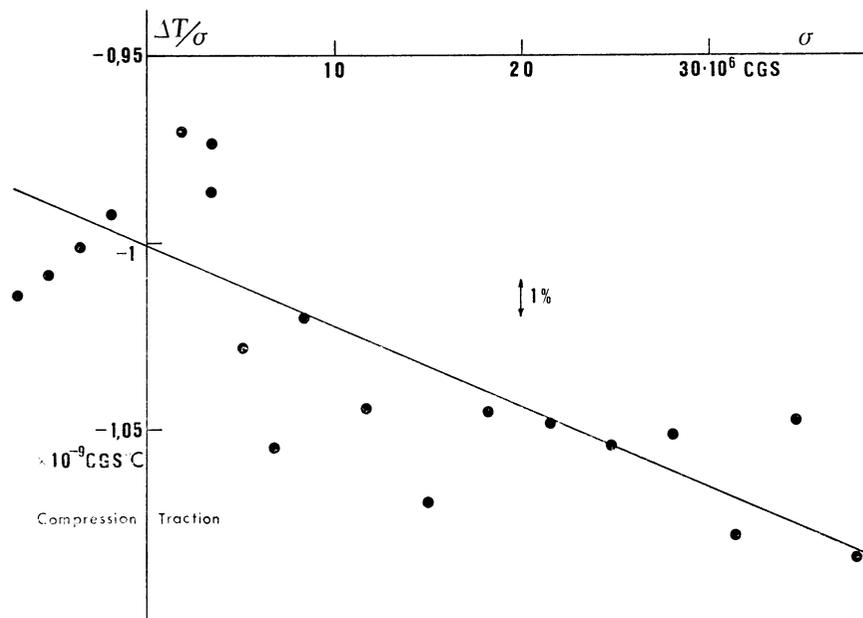


FIG. 4. — Rapport  $\frac{\Delta T}{\sigma}$ , fonction de la contrainte  $\sigma$  (traction ou compression)  
Polyméthacrylate de méthyle à 20 °C

L'équation de la parabole des moindres carrés qui traduit ces mesures est la suivante :

$$\Delta T = -10^{-9} \sigma - 1,6 \cdot 10^{-18} \sigma^2 \quad (\text{CGS, } ^\circ\text{C})$$

L'incertitude (probabilité de 50 %) sur le premier terme est de 0,6 %, tandis qu'elle est de 20 % sur le second.

Ces expériences ont été reprises à 39,35 °C sur le même polymère (fig. 5) et ont conduit à :

$$\Delta T = -1,1 \cdot 10^{-9} \sigma - 2 \cdot 10^{-18} \sigma^2 \quad (\text{CGS, } ^\circ\text{C})$$

L'incertitude (50 %) est de 1,24 % sur le premier terme et de 24 % sur le second.

En convertissant ces résultats en dégagement de chaleur  $Q$  par unité de volume et en faisant intervenir, dans le second terme, le travail de déformation par traction ou compression,  $W = \frac{\sigma^2}{2E}$ , on trouve :

$$(5) \left. \begin{array}{l} \text{à } 20 \text{ } ^\circ\text{C} : Q = -0,015 \sigma - 1,5 \frac{W}{W} \\ \text{à } 39,35 \text{ } ^\circ\text{C} : Q = -0,019 \sigma - 2 \frac{W}{W} \end{array} \right\} \text{(Les coefficients sont sans dimension.)}$$

D'après l'expression classique (1) le premier coefficient devrait être :

$$\text{à } 20 \text{ } ^\circ\text{C} : -0,026;$$

$$\text{à } 39,35 \text{ } ^\circ\text{C} : -0,028.$$

La moindre valeur expérimentale de ce premier coefficient est due à ce que les soudures des couples, simplement fixées sur la surface de l'éprouvette avec une bande adhésive, ont accusé une variation de température plus faible que la réelle, mais elles ont pu aussi être influencées par les propriétés thermomécaniques de la bande elle-même. Quant au deuxième coefficient, si l'on en croit l'expression (4), il conduit à attribuer une valeur numérique de l'ordre de 5 au paramètre  $p$  de (3) pour le polyméthacrylate de méthyle.

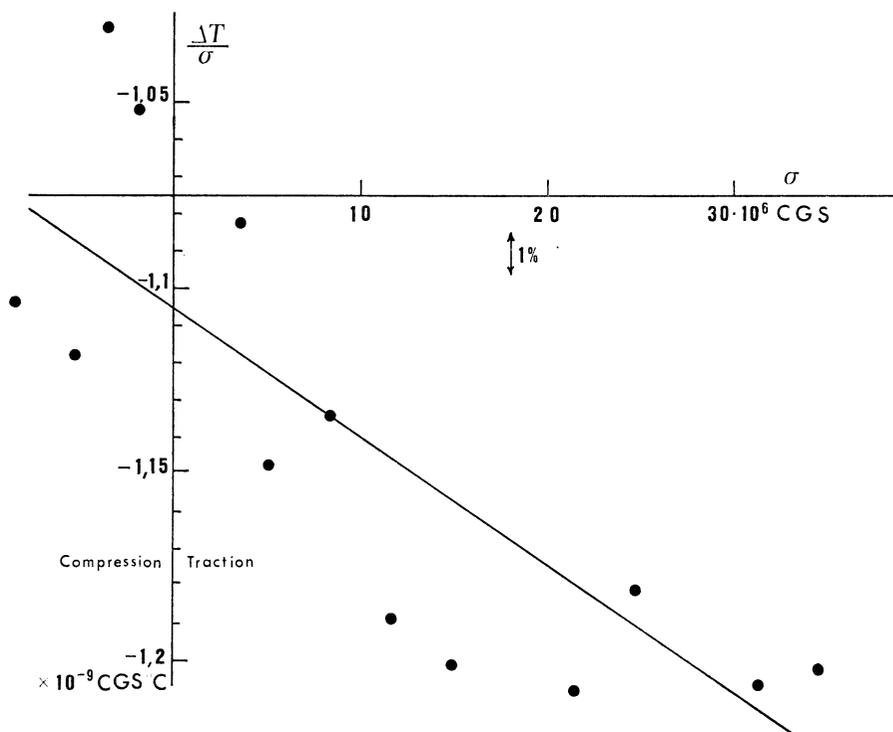


FIG. 5. — Rapport  $\frac{\Delta T}{\sigma}$ , fonction de la contrainte  $\sigma$  (traction ou compression)  
Polyméthacrylate de méthyle à 39,35 °C

## 2. TORSION INSTANTANÉE

Les expériences précédentes de traction-compression ont mis en évidence le fait que, pour les polymères vitreux faiblement contraints, le terme complémentaire  $Q_2$  est petit par rapport au premier  $Q_1$ . Par exemple, pour une contrainte de l'ordre de  $0,4 \cdot 10^8$  baryes ( $400 \text{ g/mm}^2$ ), ce qui est déjà beaucoup pour un polymère, le deuxième terme est le quinzième du premier ( $Q_1 \simeq 15 Q_2$ ).

L'idée qui vient alors tout naturellement à l'esprit est d'exercer sur la matière un cisaillement simple. De cette façon le premier terme  $Q_1$  est éliminé et l'étude expérimentale du second devient plus facile. Néanmoins, il n'est pas certain que la chaleur ainsi mesurée corresponde exactement au terme quadratique ( $Q_2$ ) d'une traction, car la déformation n'est pas de même nature. Autrement dit, il n'est pas certain qu'en superposant à angle droit une traction et une compression, les effets secondaires s'additionnent.

Les expériences qui vont être décrites conduisent à définir un coefficient  $h$  par la relation simple :

$$(6) \quad Q = h W$$

$Q$  : chaleur dégagée par le corps soumis à un cisaillement;

$W$  : énergie mécanique fournie au corps.

La déformation d'un polymère vitreux perturbe l'ordre moléculaire qui s'était établi au repos et entraîne par conséquent une augmentation de volume. Inversement, dans le cas d'un caoutchouc, une déformation parallélise les chaînes moléculaires, augmente l'ordre et diminue le volume. D'après la relation (2) cette variation de volume serait en valeur relative :

$$(7) \quad \theta = - \frac{h \gamma^2}{\alpha T} \frac{1-2\nu}{4(1+\nu)}$$

$h$  : paramètre de l'équation (6);

$\gamma$  : « glissement » (si les points matériels ne se déplacent que dans la direction 1, proportionnellement à  $x_2$  et indépendamment de  $x_3$  :

$$\gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2 \epsilon_{12}$$

$\alpha$  : coefficient de dilatation linéaire;

$T$  : température absolue;

$\nu$  : rapport de Poisson.

Nous avons essayé de la mesurer sur un barreau de polyméthacrylate de méthyle dont la valeur de  $h$  était connue par ailleurs, mais cela n'a pas été possible. Nous avons bien mesuré l'allongement du barreau, qui est propor-

tionnel au carré du couple (allongement de  $10^{-4}$  pour un couple de  $15 \cdot 10^7$  dynes cm appliqué à un barreau de 15 millimètres de diamètre). C'est l'effet Poynting. Mais la variation du diamètre était trop faible pour être mesurée. Un montage dans un dilatomètre à liquide n'était pas non plus indiqué à cause des effets thermiques de la déformation, de sorte que la vérification de l'équation (7) a finalement été laissée de côté.

Les expériences thermiques ont été faites en collant sur une éprouvette cylindrique les 4 couples précédemment décrits et en exerçant sur cette éprouvette une torsion avec un système poids-poulies. L'extrapolation à  $t = 0$  était faite sur les enregistrements comme la figure 2 l'indique.

Il a d'abord été constaté sur divers polymères que la variation de température  $\Delta T$  était, avec une très bonne approximation, proportionnelle au carré du couple appliqué, donc proportionnelle au travail mécanique fourni (équation 6).

En second lieu, nous avons constaté que le signe du coefficient  $h$  dépendait de l'état moléculaire du polymère étudié ; endothermique pour les vitreux et exothermique pour les caoutchoutiques. Pour ces derniers, en particulier, une torsion même faible est toujours exothermique (alors qu'une traction était d'abord endothermique [fig. 1]).

Dans le cas des polymères cristallins, les phénomènes thermiques sont perturbés par la chaleur latente de fusion des cristallites, car le degré de cristallinité se trouve modifié (en général diminué) par la contrainte. Cela complique l'étude de ces polymères qui est écartée ici.

La figure 6 représente les variations du coefficient  $h$  du polyméthacrylate de méthyle avec la température. Les mesures n'ont pas été faites à des températures plus élevées, car elles devenaient trop imprécises.

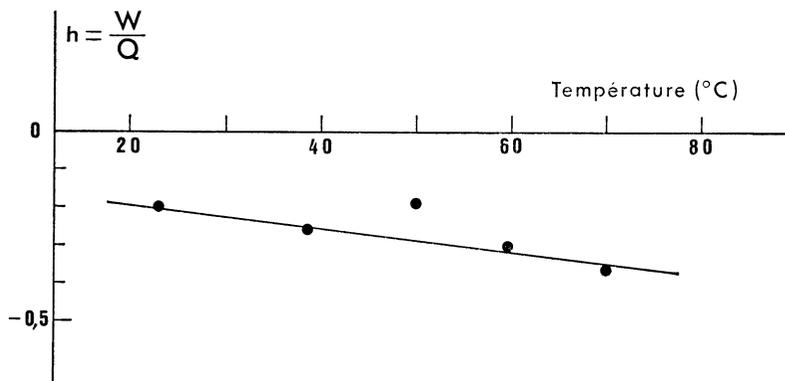


FIG. 6. — Coefficient  $h$  ( $= \frac{Q}{W}$  en torsion) du polyméthacrylate de méthyle, fonction de la température. Le point à 50 °C est aberrant par suite d'un léger vieillissement ou d'un changement d'état de l'éprouvette. Pour tenir compte du mode de fixation des thermocouples, ces valeurs devraient être multipliées par un facteur de l'ordre de 1,5.

Une série d'expériences a été pratiquée sur un polymère, repéré par le n° 43, préparé par l'un de nous [7] et qui présente l'avantage d'avoir une transition vitreuse assez basse : entre 46 et 90 °C. La figure 7 représente les variations de la complaisance de traction à 6 secondes en fonction de la température. Il s'agit d'un succinofumarate de diéthylèneglycol, réticulé par du styrène. Les chaînes de polyester comprennent en moyenne 4 molécules d'acide fumarique (diacide comportant une double liaison), 6 molécules d'acide succinique (diacide saturé) et 10 molécules de diéthylèneglycol (dialcool). Ces chaînes sont « pontées » par du styrène à raison de 3 molécules de styrène par molécule d'acide fumarique. Ce sont les doubles liaisons de ce dernier qui s'ouvrent et fixent le styrène.

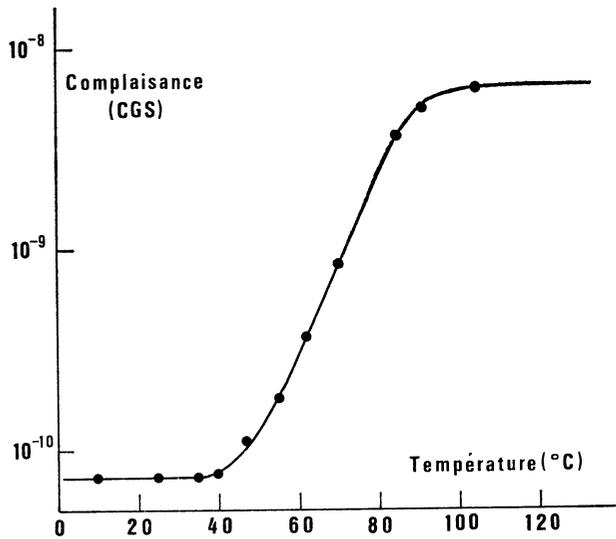


FIG. 7. — Complaisance du polymère n° 43 en traction, pour 6 secondes, fonction de la température

Pour ce polymère n° 43, la figure 8 représente les variations thermiques du coefficient  $h$ . Négatif pour l'état vitreux, il passe par un minimum, puis change de signe et prend des valeurs considérables avant de redécroître pour tendre vraisemblablement vers l'unité.

En troisième lieu, nous avons retrouvé sur le polyméthacrylate de méthyle le phénomène de *restauration sous contrainte* déjà signalé il y a quelques années [6, 7] à la suite d'expériences faites au microcalorimètre sur les polymères vitreux préparés par l'un de nous.

Pour diverses durées de fluage, c'est-à-dire en faisant varier le temps pendant lequel l'éprouvette reste sous charge, nous avons mesuré les chaleurs dégagées :  $Q_a$  à l'application de la charge et  $Q_l$  à la libération de l'éprouvette. A l'ambiante le rapport  $Q_l/Q_a$  est de l'ordre de  $-1,5$  à  $-2$ , pour des temps

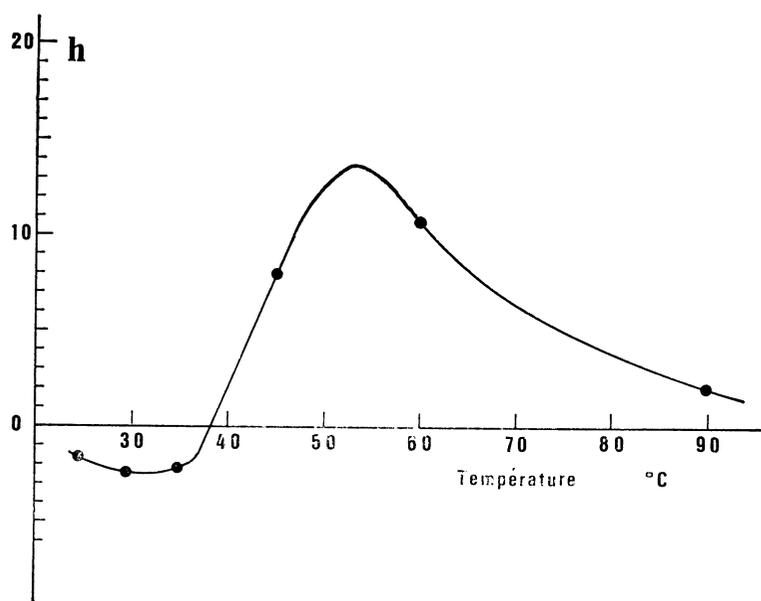


FIG. 8. — Coefficient  $h$  ( $= \frac{Q}{W}$  en torsion) du polymère n° 43,  
fonction de la température

de 1 à 6 min. Cela signifie que la chaleur dégagée à la libération est plus grande que celle qui est absorbée à la mise en charge, l'éprouvette ayant dissipé en chaleur une partie de l'énergie mécanique fournie. A cette température nous n'avons pas tenté de voir comment ce rapport variait avec la durée du fluage, car il aurait fallu attendre des temps très longs.

Par contre, à 60 °C, la courbe du rapport  $Q_l/Q_a$  a été tracée en fonction de la durée du fluage (fig. 9). L'inversion du signe se produit vers 4 heures et demie. Autrement dit, pour des temps plus longs, la libération de l'éprouvette est endothermique comme sa mise sous charge. Une restauration de l'ordre moléculaire s'est donc produite pendant que la contrainte était appliquée. Le dernier point du graphique semble plus bas et suggère un vieillissement de l'éprouvette, ce qui a été confirmé par la suite.

A 70 °C en effet, une courbe analogue a été obtenue, mais l'inversion, qui aurait dû se produire pour un temps plus court, n'est apparue que vers une durée de fluage de 40 heures (fig. 10).

C'est après cette série que les mesures à 50 °C ont été entreprises sur la même éprouvette. Le module de Coulomb (à 3 secondes), mesuré chaque fois, reste bien sur la courbe générale (fig. 11), mais les propriétés thermomécaniques sont aberrantes (fig. 6). Le temps d'inversion est de 83 heures.

En résumé, dans l'état actuel des choses, en torsion instantanée, ce qu'il faut principalement retenir, c'est :

— que la mise sous charge est endothermique dans le domaine vitreux, exothermique dans le domaine caoutchoutique;

— que dans le domaine vitreux, si la libération suit de près la mise sous charge, elle produit le phénomène inverse, mais que si l'éprouvette est restée longtemps sous contrainte constante, une restauration de l'ordre moléculaire s'est opérée et que la libération se trouve endothermique comme la mise sous charge;

— enfin qu'un vieillissement affecte beaucoup plus les propriétés thermomécaniques que les propriétés mécaniques pures.

Une trempe modifie également les manifestations thermiques de la déformation, mais cet effet n'a pas encore été étudié systématiquement.

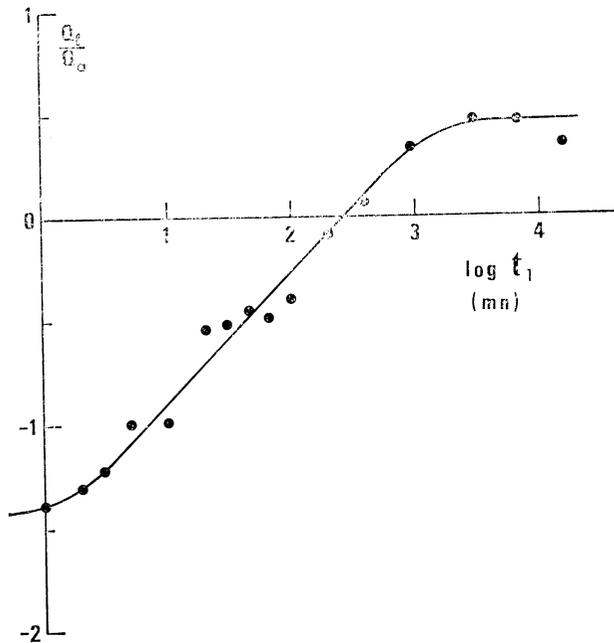


FIG. 9. — Rapport  $\frac{Q_t}{Q_a}$ , fonction de la durée  $t_1$  du fluage en torsion.

Polyméthacrylate de méthyle à 59,5 °C

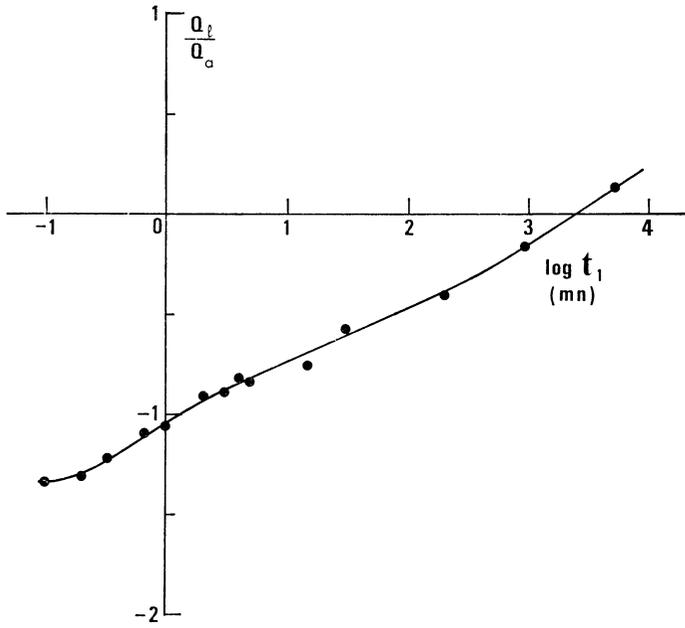


FIG. 10. — Rapport  $\frac{Q_t}{Q_a}$ , fonction de la durée  $t_1$  du fluage en torsion.  
Polyméthacrylate de méthyle à 70 °C

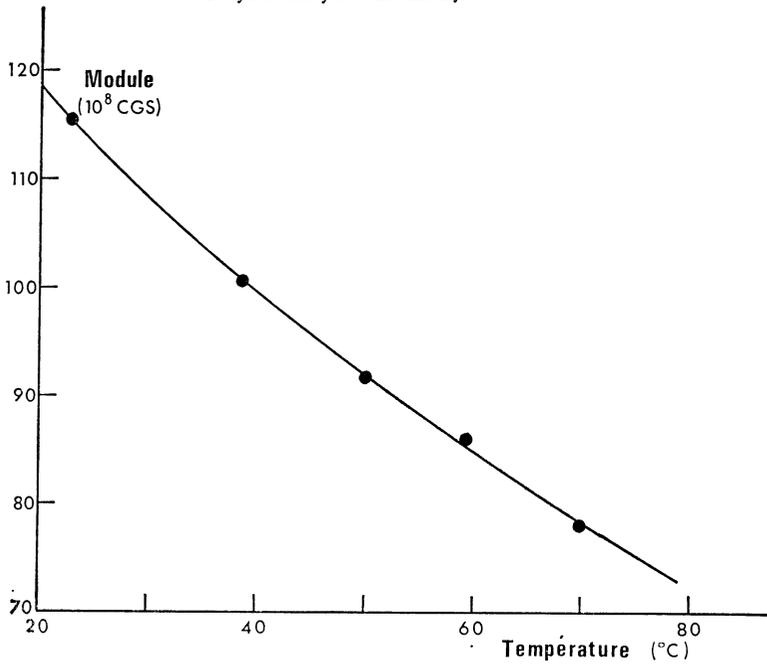


FIG. 11. — Module de Coulomb (3 secondes) du polyméthacrylate de méthyle, fonction de la température

### 3. DESCRIPTION DU MICROCALORIMÈTRE ET DU MONTAGE EMPLOYÉ

Tout ce qui vient d'être dit concerne les manifestations thermiques qui suivent immédiatement la mise en charge ou la libération d'une éprouvette. Mais il était intéressant aussi de suivre le dégagement de chaleur qui se produit pendant le fluage proprement dit. C'est pourquoi nous avons fait appel au microcalorimètre Tian-Calvet, lequel a été abondamment décrit dans la littérature [8].

Rappelons simplement que des couples thermoélectriques en grand nombre ont chacun une soudure sur le tube laboratoire et l'autre sur la paroi d'un gros bloc de cuivre ou d'aluminium purs à température constante (fig. 12). Un commutateur permet d'isoler quelques couples et de s'en servir pour établir une compensation par effet Peltier. Cette possibilité n'a d'ailleurs pas été utilisée dans les expériences décrites ici.

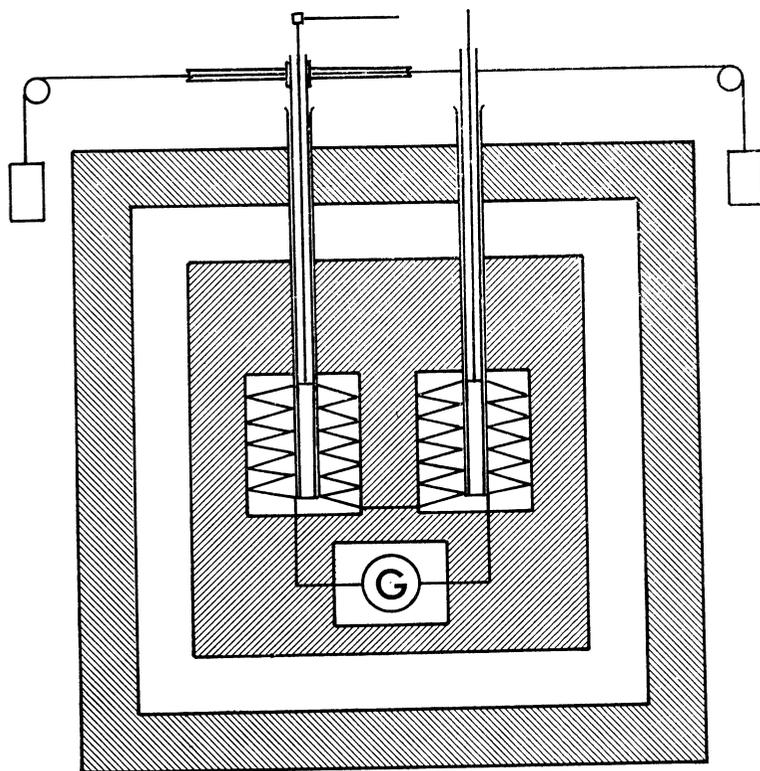


FIG. 12. — Schéma du microcalorimètre

En fait, il existe deux (ou quelquefois quatre) cellules identiques placées en opposition sur un galvanomètre. De cette façon, si, malgré les précautions prises, la température du gros bloc métallique vient à varier un peu, elle perturbe également les deux cellules et n'intervient pas sur le galvanomètre. C'est d'ailleurs pour accroître la symétrie de l'appareil que l'on place toujours dans la deuxième cellule une éprouvette identique à celle qui est en expérience dans la première, avec les mêmes tubes de commande. Ces derniers tubes en effet, bien qu'isolants (papier bakélinisé), sont susceptibles de transmettre de la chaleur de l'intérieur vers l'extérieur.

Le bloc métallique dont il vient d'être question, est placé dans une succession d'enceintes, dont l'une, intermédiaire, est thermostatique. Le tout est situé dans un laboratoire en sous-sol, lui-même thermoréglé.

Dans un premier microcalorimètre construit à l'O.N.E.R.A., le galvanomètre était situé dans le bloc métallique lui-même et ses mouvements enregistrés en dehors du microcalorimètre sur un papier photographique enroulé sur un cylindre. La sensibilité en statique était de 2,5 km/W, mais le bruit de fond (mouvements aléatoires du zéro du galvanomètre) devenait gênant par mauvais temps, à cause des fluctuations de la pression atmosphérique. Le diamètre du tube laboratoire était de 15 millimètres et la température fixe : 30 °C.

Un deuxième appareil, du commerce, est 15 fois moins sensible, mais son zéro, plus stable à la température ambiante, le rend plus intéressant, d'autant plus que le tube laboratoire, ayant un diamètre de 40 millimètres, permet d'employer des éprouvettes plus grosses. Le fait que le galvanomètre soit à l'extérieur de l'appareil permet de faire varier la température de celui-ci de l'ambiante à 150 °C, mais plus la température est élevée, moins le zéro est stable. C'est un suiveur de spot qui enregistre le signal.

Dans les deux cas c'est une torsion et non une traction qui est exercée sur l'échantillon. L'une des raisons a été exposée ci-dessus : un cisaillement élimine le terme du premier degré en  $\sigma$ . L'autre est liée à l'appareillage. Dans une torsion, tous les éléments du tube de commande restent au même niveau, donc à la même température. Lors d'une traction, le changement d'altitude de ces mêmes éléments peut entraîner des échanges thermiques supplémentaires en raison des divers gradients de température qui règnent au-dessus des cellules.

Le montage mécanique destiné à appliquer un couple sur l'éprouvette est schématisé figure 13. Le tube laboratoire en Pyrex, rodé à la partie inférieure, est solidement fixé à la partie supérieure qui dépasse de l'appareil. L'éprouvette est collée au fond de ce tube. Le haut de l'éprouvette également collé sur une pièce de plastique dur fixée elle-même par goupille à un tube de papier bakélinisé chargé de transmettre le couple qui lui est appliqué par un système poulie-ficelles-poids. Un tube central, également en papier bakélinisé, soutenu et centré en haut par une pointe de compas, transmet à l'observateur l'angle dont l'éprouvette a été tordue.

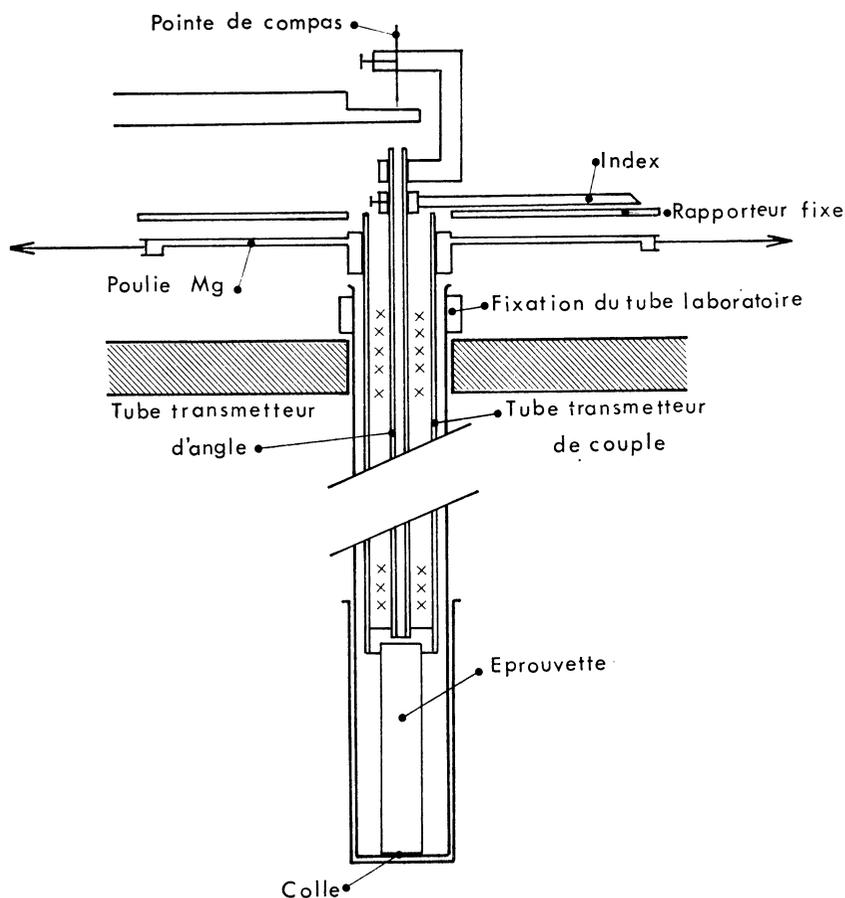


FIG. 13. — Montage mécanique sur le microcalorimètre

Le tube laboratoire est considéré comme indéformable. A cause de son diamètre plus grand, la contrainte qu'il subit est faible par rapport à celle de l'éprouvette et les effets thermiques qui pourraient en résulter sont négligés.

Comme on va le voir, le microcalorimètre ne permet pas de connaître la chaleur dégagée au début de l'opération. Il n'en fournit que l'intégrale qui est suffisamment exacte après 5 ou 10 minutes pour l'ancien appareil, 1 ou 2 minutes pour le nouveau. Inversement, il n'est pas possible de connaître avec suffisamment de précision l'intégrale d'un faible dégagement de chaleur au bout d'un temps très long, de plusieurs jours par exemple, car il suffit d'une petite dérive du zéro pour tout fausser.

Les enregistrements se dépouillent de la façon suivante. Si  $q = \frac{dQ}{dt}$  est la chaleur dégagée dans l'éprouvette par unité de temps et  $y$  la déviation du galvanomètre, l'examen des échanges thermiques entre l'éprouvette et les

enveloppes successives : tube laboratoire, cellules d'argent, couche isolante, thermocouples, conduit à écrire, tenant compte de l'amortissement et de l'inertie du galvanomètre :

$$(8) \quad q = a y + b \dot{y} + c \ddot{y} + \dots$$

$\dot{y}$  et  $\ddot{y}$  étant les dérivées première et seconde de la déviation  $y$  par rapport au temps. Pratiquement la dérivée troisième ne peut pas être relevée avec assez de précision sur les courbes expérimentales, de sorte qu'il est convenable de se placer dans des conditions telles qu'elle soit négligeable ainsi que les suivantes. C'est cette circonstance qui rend imprécises les premières minutes du dépouillement.

En régime permanent la relation (8) se réduit à :

$$q = a y.$$

Le facteur d'étalonnage  $a$  se détermine une fois pour toutes avec un micro-enroulement chauffant et des mesures potentiométriques, ou encore avec un corps radioactif à longue période. Par contre, les facteurs  $b$  et  $c$ , qui interviennent en régime transitoire, dépendent aussi de la masse calorifique de l'éprouvette et doivent être déterminés à nouveau chaque fois que l'éprouvette est changée. Leurs valeurs peuvent être estimées en faisant décrire à l'éprouvette deux ou trois cycles rapides de torsion. Après quelques minutes l'éprouvette ne dégage plus de chaleur et l'analyse de l'enregistrement (aire totale de la courbe, ordonnée du maximum, pente au point d'inflexion descendant, exposants des deux exponentielles de retour au zéro, etc.) conduit aux valeurs numériques de  $b$  et  $c$ .

Par la suite, après cet étalonnage préalable, nous avons étudié l'évolution dans le temps de la chaleur totale  $Q$  dégagée depuis le début du fluage (pour lequel  $t = y = \dot{y} = 0$ ) :

$$(9) \quad Q = \int_0^t q dt = a \int_0^t y dt + b y + c \dot{y}$$

Cela suppose un planimétrage de la courbe jusqu'à l'instant considéré, une lecture d'ordonnée et une lecture de pente, ce qui est assez facile.

Cette chaleur  $Q$  est comparée à l'énergie mécanique  $W$  fournie à l'éprouvette. Les poids étant accrochés à la main, rapidement mais sans oscillation, l'énergie fournie à l'origine est :

$$\frac{1}{2} P \alpha_0.$$

$P$  : moment du couple produit par les poids,

$\alpha_0$  : angle de torsion extrapolé à  $t = 0$ .

Ensuite, pendant la déformation retardée et pour l'angle de torsion  $\alpha$ , le supplément d'énergie est  $P(\alpha - \alpha_0)$ . Soit au total :

$$(10) \quad W = P \left( \alpha - \frac{\alpha_0}{2} \right)$$

La difficulté réside dans l'appréciation de  $\alpha_0$ , délicate puisque la courbe de fluage des polymères, étant parabolique, est tangente à l'axe des angles.

Après un temps  $t_1$ , l'angle de déformation étant  $\alpha_1$ , l'opérateur enlève brusquement, mais délicatement les poids. L'énergie fournie à ces derniers provient pour moitié de l'éprouvette et pour moitié de l'opérateur, de sorte qu'elle est liée à la moitié de la brusque diminution  $\Delta\alpha_1$  de l'angle  $\alpha$  consécutive à l'enlèvement des poids. Cette variation  $\Delta\alpha_1$ , difficile également à apprécier, n'est pas toujours égale à  $\alpha_0$  comme la linéarité du comportement l'exigerait. Après cette libération l'énergie totale depuis le début reste constamment égale à :

$$P \left( 1 - \frac{\alpha_0 + \Delta\alpha_1}{2} \right).$$

#### 4. RÉSULTATS OBTENUS SUR LE CAOUTCHOUC

Les éprouvettes employées, sans noir de carbone, ont été fournies gracieusement par la Compagnie Michelin. Elles ont environ 2 centimètres de diamètre et 8 centimètres de hauteur.

Notons tout de suite un petit détail. A l'application du couple, les enregistrements au microcalorimètre ont donné une très petite déviation vers le froid. Il était important de vérifier si cette endothermie était réelle et, dans le cas contraire, d'en rechercher l'origine. Or, avec le dispositif des quatre couples thermoélectriques fixés sur la surface de l'éprouvette, c'est bien de la chaleur qui apparaît dès le début d'une petite torsion. D'autre part une éprouvette métallique, placée dans le microcalorimètre et pour laquelle le couple de torsion utilisé pour le caoutchouc était beaucoup trop faible pour produire toute manifestation thermique que ce soit, redonnait exactement la même petite déviation endothermique que le caoutchouc. Cette brusque absorption de chaleur était donc due à la colle de l'extrémité inférieure de l'éprouvette. Les courbes du caoutchouc ont été corrigées de cette valeur.

Elles sont représentées figure 14 en fonction du temps. On voit, principalement sur la courbe supérieure, que l'énergie mécanique  $W$ , fournie au caoutchouc pendant le fluage pour le déformer, est restituée à 3 % près sous forme de chaleur  $Q$ . L'énergie interne du caoutchouc varie donc très peu et cela confirme l'une des hypothèses de la fameuse théorie de l'élasticité entropique de Kuhn et autres.

Longtemps après la libération de l'éprouvette, aux erreurs expérimentales près, la chaleur résiduelle correspond à l'énergie mécanique dissipée par la viscoélasticité du produit pendant l'opération.

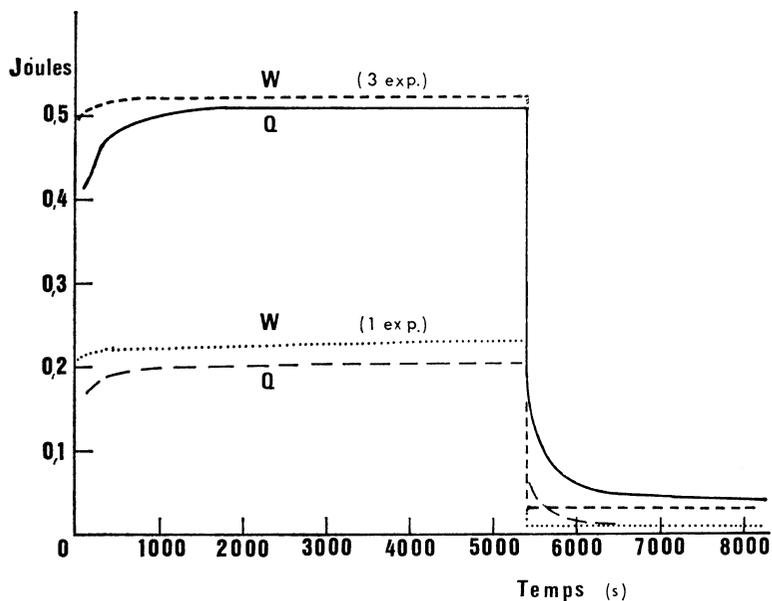


FIG. 14. — Chaleur  $Q$  dégagée par le caoutchouc pendant le fluage en torsion et la recouvrance, comparée à l'énergie mécanique  $W$  fournie à l'éprouvette. Température : 25 °C. Courbe du haut : moyenne de trois expériences. Courbe du bas : expérience unique avec contrainte faible

## 5. AUTRES POLYMÈRES

Des résultats intéressants ont été obtenus il y a plusieurs années sur divers polymères vitreux ou dans la zone de transition et ont été publiés en leur temps [6, 7], mais, depuis cette époque, certaines courbes ont été précisées, grâce notamment au deuxième microcalorimètre rapide reçu depuis.

Les figures 15 et 16 représentent les résultats obtenus sur le polymère 43 décrit ci-dessus, à la température de 25 °C et pour trois durées  $t_1$  de fluage. L'absorption de chaleur à l'application de la contrainte ne semble pas immédiatement suivie par le dégagement dû au fluage proprement dit, mais se poursuit pendant une heure. La libération de l'éprouvette est exothermique si elle suit de près l'application de la contrainte, mais elle devient endothermique lorsque la restauration sous contrainte a pu s'opérer pendant plus d'un jour.

La figure 17 montre le comportement du même polymère au début de la zone de transition à 38,5 °C. A cette température, comme l'indique la figure 8, la chaleur dégagée instantanément à l'application de la contrainte est à peu près nulle. Par contre elle est négative peu après la suppression de la contrainte.

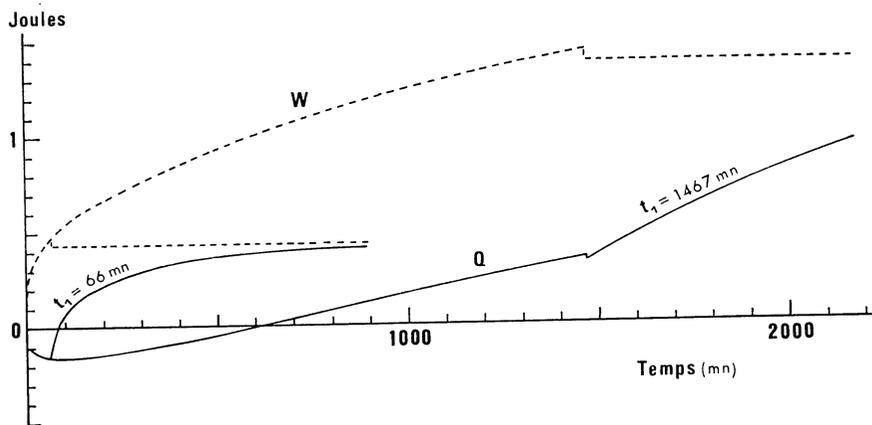


FIG. 15. — Chaleur  $Q$  dégagée par le polymère n° 43 (fluage en torsion et recouvrance) et énergie mécanique  $W$  fournie pour deux durées  $t_1$  de fluage : environ 1 heure et 1 jour. Température 25 °C

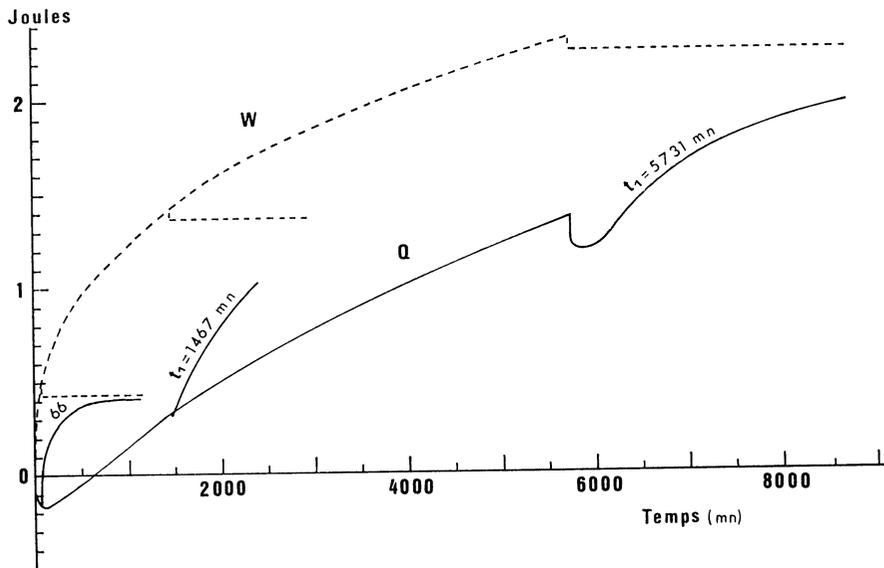


FIG. 16. — Chaleur  $Q$  dégagée par le polymère n° 43 (fluage en torsion et recouvrance) et énergie mécanique  $W$  fournie, pour trois durées  $t_1$  de fluage : environ 1 heure, 1 jour et 4 jours. Température 25 °C

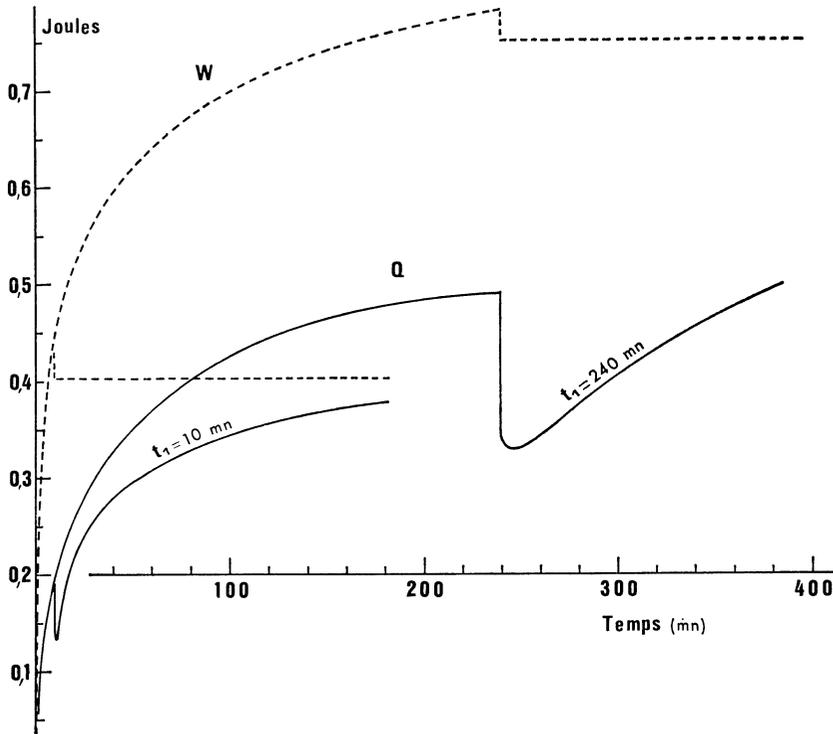


FIG. 17. — Chaleur  $Q$  dégagée par le polymère n° 43 (fluage en torsion et recouvrance) et énergie mécanique  $W$ , pour deux durées  $t_1$  de fluage : 10 min et 4 h. Température 38,5 °C

## 6. LES MODÈLES RHÉOLOGIQUES

Il nous a paru intéressant, au moins qualitativement, d'essayer de rendre compte des phénomènes thermiques expérimentaux par les modèles rhéologiques classiques. Si ceux-ci, en effet, reproduisent convenablement le comportement mécanique des corps sous faible déformation, aucune étude systématique ne semble avoir été tentée sur le plan thermique.

Dans cet esprit, il est nécessaire de formuler diverses hypothèses, aussi simples que possible, sur le comportement thermique des divers éléments qui constituent les modèles.

Pour l'amortisseur de Newton, il semble logique de considérer que toute l'énergie mécanique absorbée est dégradée en chaleur :

$$Q = W.$$

Si nous avons à considérer des patins à frottement solide, il serait logique d'admettre la même hypothèse de dissipation, mais cela sort du cadre de la présente étude.

Pour le ressort de Hooke, par contre, il ne s'agit plus d'une dégradation, mais d'un dégagement réversible. Nous poserons :

$$Q = h W$$

et l'hypothèse admise est l'invariabilité du coefficient  $h$ , positif ou négatif, pour un ressort donné.

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé ne peut pas rendre compte de la restauration sous contrainte, puisqu'en déformation instantanée, le ressort célibataire est le seul à jouer (fig. 18).

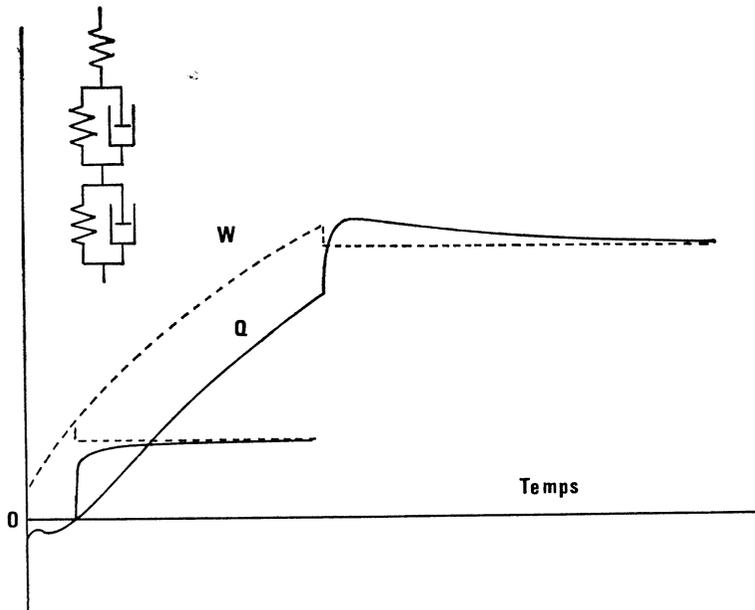


FIG. 18. — Résultats fournis par le modèle de Kelvin-Voigt généralisé, pour deux durées de fluage

Pour le modèle de Maxwell généralisé comportant deux temps de relaxation et équivalent, du point de vue mécanique, au modèle de Kelvin-Voigt précédent, l'endothermicité est progressive (fig. 19) et la recouvrance, exothermique pour un temps  $t_1$  court, devient endothermique pour un temps  $t_1$  long. Les principaux faits expérimentaux se retrouvent donc ici. La figure 20 donne la restauration sous contrainte  $Q_1/Q_a$  en fonction de la durée  $t_1$  du fluage pour ces deux modèles classiques.

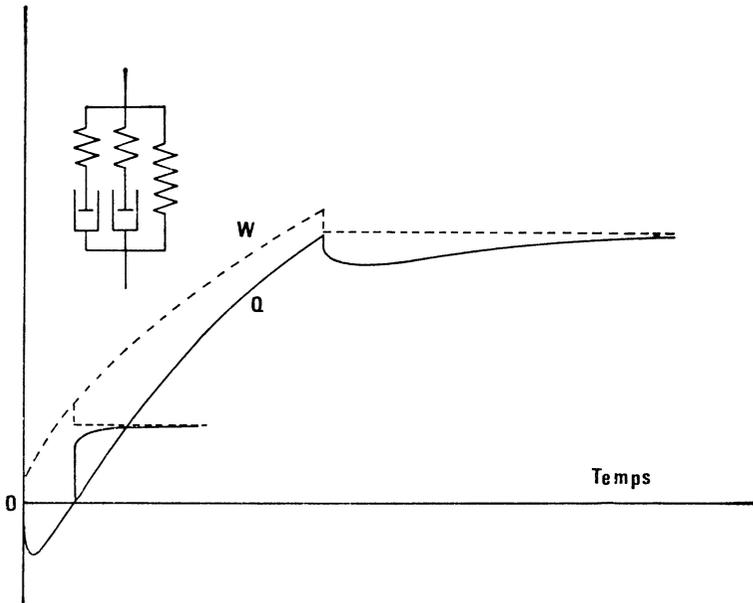


FIG. 19. — Résultats fournis par le modèle de Maxwell généralisé pour deux durées de fluage

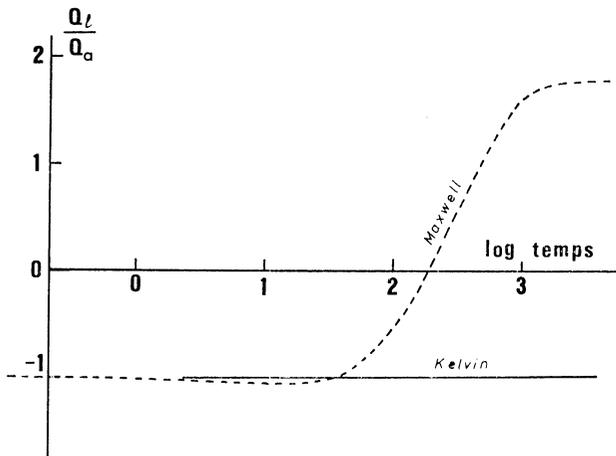


FIG. 20. — Restauration sous contrainte pour les deux modèles précédents

La constatation selon laquelle divers modèles, équivalents sur le plan mécanique, ne le sont plus sur le plan énergétique, a déjà été faite par Staverman et Schwarzl en 1953.

Le modèle « échelle », constitué d'une chaîne élastique homogène avec, réparti latéralement, un amortisseur de propriétés constantes, relié à la base, ne donne pas de restauration sous contrainte. D'ailleurs il fournit en fluage un départ en  $t^{0.5}$ , tandis que les polymères ont un départ en  $t^{0.3}$  à  $t^{0.4}$ .

Le modèle de Marvin est un perfectionnement du précédent, en ce sens que l'amortisseur réparti est remplacé par une branche de Maxwell répartie de la même façon. La restauration sous contrainte apparaît, mais la courbe de chaleur s'éloigne de l'allure expérimentale. En outre la courbe de fluage n'a pas un départ parabolique puisqu'il n'y a pas de temps de retard infiniment petit. Le spectre des temps de retard  $\tau$ , en effet, est en  $\frac{\sqrt{a\tau-1}}{\tau}$ , si  $a$  est la constante de temps de la branche de Maxwell répartie latéralement.

Dans l'état actuel des choses et en attendant qu'un modèle à peu de paramètres soit trouvé pour reproduire les propriétés des polymères, il semble que ce soit celui de Maxwell à branches multiples, qui concorde le mieux avec les manifestations thermiques de fluage.

## CONCLUSION

Cette étude expérimentale, effectuée à l'O.N.E.R.A. <sup>(1)</sup>, confirme qu'un cisaillement appliqué à un polymère amorphe fait intervenir au moins deux mécanismes : l'un perturbe l'ordre à petite distance en créant vraisemblablement une augmentation de volume, tandis que l'autre, dit entropique, doit diminuer le volume en parallélisant les longues chaînes moléculaires. Pour les caoutchoucs, le second mécanisme intervient presque seul et le travail mécanique se trouve réversiblement converti en chaleur. Pour les polymères vitreux et les temps courts, c'est le premier mécanisme seul qui entre en jeu et une déformation brusque se traduit par une absorption de chaleur quasi-réversible.

Dans les autres cas il apparaît une compétition entre ces deux mécanismes et notamment, dans un polymère vitreux soumis pendant très longtemps à une contrainte constante, celle-ci finit, semble-t-il, par être supportée presque entièrement par les longues chaînes, ce qui permet à l'ordre à petite distance de se réorganiser : c'est la restauration sous contrainte.

Dans le modèle de Maxwell généralisé le ressort célibataire symbolise les longues chaînes, tandis que les autres branches correspondent aux interactions entre parties de molécules ou groupes latéraux voisins.

Le lecteur peu averti pourrait être tenté d'appliquer ces propriétés thermomécaniques à la construction de machines frigorifiques ou de pompes à chaleur. Il se heurterait à de sérieuses difficultés.

<sup>(1)</sup> Office national d'études et de recherches aérospatiales, 29, avenue Division-Leclerc, 92320 Châtillon.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] L.R.G. TRELOAR. — *The physics of rubber elasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1949.
- [2] JAMES et GUTH. — *J. Chem. Phys.*, 1943, 11, p. 455.
- [3] M. CHATAIN. — *Thèse de docteur de l'université*, Paris, 1963.
- [4] F.H. MÜLLER et N. WEIMANN. — *J. Polym. Sc. C.*, 1944, n° 6, p. 117.
- [5] J. MANDEL. — *Cours de mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [6] J.C. ROSSO, G. GRENIER et B. PERSOZ. — *C.R. Acad. sci.*, 1965, 260, p. 3068.
- [7] J.C. ROSSO. — *Thèse de docteur ès sciences physiques*, n° A 0 1287, Paris, 7 mars 1967.
- [8] E. CALVET. — *Ind. Plast. Mod.* 1961, 13, n° 8, pp. 2 et 13; *Mémorial des services chim. de l'État*, 1953, 38, p. 209; *Bull. Soc. Chim. Fr.*, 1965, n° 8, p. 2139.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Résumé (français, anglais, allemand).....	11
INTRODUCTION.....	12
1. TRACTIONS OU COMPRESSIONS INSTANTANÉES.....	13
2. TORSION INSTANTANÉE.....	18
3. DESCRIPTION DU MICROCALORIMÈTRE ET DU MONTAGE EMPLOYÉ.....	24
4. RÉSULTATS OBTENUS SUR LE CAOUTCHOUC.....	28
5. AUTRES POLYMÈRES.....	29
6. LES MODÈLES RHÉOLOGIQUES.....	31
CONCLUSION.....	34
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	35



# VARIABLES CACHÉES PUISSANCE DISSIPÉE DISSIPATIVITÉ NORMALE<sup>(1)</sup>

*(Hidden variables. Dissipated power. Normal dissipativity)*

*(Verborgene Variablen. Verlustleistung. Normale Dissipativität)*

par

J. MANDEL<sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — *L'auteur montre que les variables cachées nécessaires pour définir complètement l'état d'un milieu doué de mémoire peuvent être différentes, suivant qu'on utilise comme variables commandées les déformations ou les contraintes. Partant de l'inégalité de Clausius-Duhem, il établit que l'expression couramment admise pour la puissance dissipée n'est pas toujours correcte. Il introduit ensuite l'hypothèse de la dissipativité normale. Il montre que la connaissance de deux fonctions thermodynamiques (énergie libre et fonction dissipative) détermine complètement les équations d'évolution du milieu, et permet notamment de préciser dans quel cas existe un potentiel pour les vitesses de déformation inélastique.*

**SUMMARY.** — *The hidden variables we need in order to describe the thermodynamical state of materials with memory may be different according as either strains or stresses are chosen as controlled variables. Starting from the Clausius-Duhem inequality, the author proves that the usual expression*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Ingénieur général des Mines, laboratoire de Mécanique des Solides, École polytechnique.

for the dissipated power may sometimes be in error. Next, introducing the normal dissipativity hypothesis, he shows that two thermodynamical functions (e.g. free energy and dissipative function) enable us to obtain all the equations of evolution and in particular to say in which case there exists a potential function for the inelastic stretches.

ZUSAMMENFASSUNG. — Der Verfasser zeigt, daß die verborgenen Variablen, die erforderlich sind, um den Zustand eines Mediums mit Gedächtnis vollständig zu bestimmen, unterschiedlich sein können, je nachdem ob man als auferlegte Werte die Verformungen oder die Spannungen nimmt. Ausgehend von der Clausius-Duhemschen Ungleichung legt er dar, daß der gewöhnlich für die Verlustleistung angenommene Ausdruck nicht immer korrekt ist. Er führt dann die Hypothese der normalen Dissipativität ein. Er zeigt, daß die Kenntnis zweier thermodynamischer Funktionen (freie Energie und Dissipationsfunktion) die Medium-Entwicklungsgleichungen vollständig bestimmt und insbesondere erlaubt, genau anzugeben, in welchem Fall für die Geschwindigkeiten der unelastischen Verformung ein Potential vorhanden ist.

## INTRODUCTION

Une étude approfondie de la thermodynamique avec variables internes a été faite par COLEMAN et GURTIN [1] en 1967. Je présenterai brièvement les résultats qu'ils ont obtenus, en y ajoutant deux compléments : 1° l'extension à des matériaux comme le matériau de Kelvin, à qui les hypothèses de Coleman-Gurtin ne s'appliquent pas; 2° l'introduction de l'hypothèse de la dissipativité normale.

### 1. VARIABLES CACHÉES

L'étude des systèmes dont le comportement rhéologique dépend de l'histoire impose en toute généralité l'emploi de fonctionnelles qui prennent en compte toutes les valeurs passées des variables contrôlées [2]. Mais, sauf dans le cas linéaire, c'est très malcommode. On fait alors l'hypothèse que l'effet de l'histoire est en quelque sorte condensé dans les valeurs actuelles d'un nombre fini de variables baptisées *cachées* <sup>(1)</sup>. Ce sont des variables  $a$  qu'il faut ajouter aux variables *commandées*  $x$  pour que l'état du système à l'instant  $t$  soit entièrement défini par les valeurs *actuelles* des variables, c'est-à-dire pour que toutes les propriétés du système soient déterminées, soit encore :

$$(1) \quad y = f(x, a),$$

<sup>(1)</sup> Dénomination usuelle, mais peu satisfaisante. Un physicien habile réussira toujours à les détecter et à les mesurer. La distinction entre variables observables et variables cachées n'est pas objective; elle dépend des moyens d'observation. Les variables cachées sont en fait mesurables, mais non contrôlées.

les variables  $\gamma$ , conjuguées des  $x$  dans l'expression du travail, constituant la *réponse* du système.

L'exemple le plus simple est celui du modèle de Maxwell supposé placé dans une boîte noire (fig. 1). Son état peut être défini par  $x = \varepsilon$  et  $a$ , si  $\varepsilon$  est

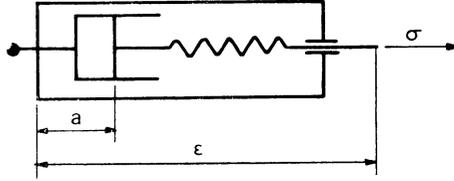


Fig. 1

variable commandée (dans ce cas la réponse est la contrainte  $\sigma$ ), ou bien par  $x = \sigma$  et  $a$  si  $\sigma$  est la variable commandée (dans ce cas la réponse est  $\varepsilon$ ).

Comme  $a = \frac{\sigma}{\eta}$  ( $\eta$  : viscosité de l'amortisseur), on voit bien que :

$$a = \int_{-\infty}^t \frac{\sigma(\tau)}{\eta} d\tau$$

est une variable « mémoratrice ».

Dans cet exemple le nombre des variables cachées est le même, qu'on utilise  $\varepsilon$  ou  $\sigma$  comme variable contrôlée. Mais il n'en est pas toujours ainsi. C'est ce que montre le modèle de Kelvin-Voigt (fig. 2). Si nous utilisons  $\varepsilon$

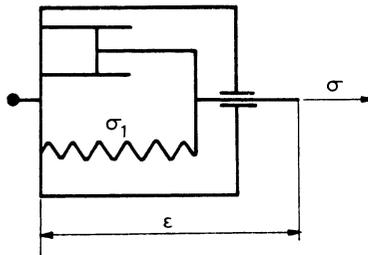


Fig. 2

comme variable commandée, il n'y a pas de variable cachée. Notons que, dans ce cas, l'état *hors d'équilibre* est défini par les valeurs actuelles de  $\varepsilon$  et de  $\dot{\varepsilon}$ , comme le montre par exemple la relation :

$$\sigma = G\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$$

Si par contre nous utilisons  $\sigma$  comme variable commandée, il y a une variable cachée qui sera par exemple la tension  $\sigma_1$  du ressort. L'état est défini par  $\sigma$  et  $\sigma_1$ .

Quelles que soient les variables commandées  $x$ , la connaissance de leurs valeurs et de celles des variables cachées  $a$  à l'instant  $t$ , puis la connaissance des seules fonctions  $x(t)$  dans l'intervalle  $t, t + \Delta t$ , détermine l'état à  $t + \Delta t$ , donc en particulier les variations  $\Delta a$  des variables cachées. En faisant tendre  $\Delta t$  vers zéro, on en déduit, moyennant certaines conditions de régularité, qu'on peut poser :

$$(2) \quad \dot{a} = g(x, a) \dot{x} + h(x, a),$$

équation qui définit l'évolution des variables cachées.

Dans toute la suite nous supposons qu'on a pu choisir les variables  $a$  de manière que  $g(x, a)$  soit identiquement nul <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire de manière qu'une variation instantanée des  $x$  n'entraîne pas de variation instantanée des  $a$  (comme on le vérifie dans les deux exemples précédents). D'après l'équation (1) notre hypothèse équivaut à la suivante :

H 1 : les déformations instantanées sont élastiques ou nulles.

## 2. PUISSANCE DISSIPÉE

Nous nous proposons d'appliquer les principes de la thermodynamique à un élément de matière à l'échelle macroscopique. La formulation du 1<sup>er</sup> principe ne soulève pas de problème. Il n'en est pas de même de celle du 2<sup>e</sup> principe. En effet, il ne s'agit pas ici de thermostatique et la notion de température pour un état *hors d'équilibre* est déjà discutable. Même si on admet l'existence et l'unicité de la température  $\theta$ , on peut discuter l'existence et l'unicité de l'entropie  $\eta$ . Dans des tentatives récentes, COLEMAN et OWEN [4] et indépendamment DAY [5] ont réussi à démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction entropie des variables d'état, en partant d'une généralisation naturelle de l'inégalité de Clausius pour un cycle <sup>(2)</sup>. Cependant ce résultat n'est obtenu qu'au prix d'hypothèses accessoires très restrictives. C'est pourquoi dans le présent exposé nous *postulons* l'existence et l'unicité de la fonction d'état entropie  $\eta(x, a)$ , fonction telle que dans toute transformation il y ait *génération d'entropie* à l'intérieur du système étudié. Appliquée à

(1) LUBLINER [3] a fait une étude approfondie du cas général où cette possibilité n'existerait pas.

(2) L'idée de base est que l'inégalité de Clausius est applicable à un cycle fermé dans l'espace  $r$ , quoique non fermé dans l'espace  $x, a$ .

un élément de matière cette condition se traduit (cf. p. ex. [6]) par l'inégalité dite de Clausius-Duhem qu'on peut (en utilisant le 1<sup>er</sup> principe) mettre sous la forme suivante :

$$(3) \quad \sigma_{ij} D_{ij} - \rho(\dot{e} - \theta\dot{\eta}) - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0$$

$\sigma$  est le tenseur des contraintes au sens usuel (contraintes de Cauchy);  
 $\mathbf{D}$  le tenseur des vitesses de déformation;  
 $\rho$  la masse de l'unité de volume actuel;  
 $e$  l'énergie interne par unité de masse;  
 $\mathbf{q}$  le vecteur flux de chaleur;  
 $x_i$  les coordonnées actuelles de l'élément de matière.

Pour discuter l'inégalité (3) il est mathématiquement commode de substituer aux coordonnées  $x_i$  les coordonnées  $X_\alpha$  de l'élément dans une configuration de référence fixe, c'est-à-dire d'opérer en variables de Lagrange <sup>(1)</sup>.

On désigne par  $F_{i\alpha}$  le gradient  $\partial x_i / \partial X_\alpha$  de la transformation  $X \rightarrow x$ , par  $\Delta$  le tenseur de déformation de Green (défini par  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{1} + 2 \Delta$ ), par  $\Pi$  le tenseur des contraintes de Kirchhoff <sup>(2)</sup>, dont la définition est telle que  $\sigma_{ij} D_{ij} / \rho = \pi_{\alpha\beta} \dot{\Delta}_{\alpha\beta} / \rho_0$  ( $\rho_0$  masse par unité de volume dans la configuration fixe) par  $\mathbf{q}'$  le vecteur flux de chaleur par rapport à la configuration fixe <sup>(2)</sup>, l'inégalité (3) devient :

$$(4) \quad \pi_{\alpha\beta} \dot{\Delta}_{\alpha\beta} - \rho_0 (\dot{\varphi} + \eta\dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} q'_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial X_\alpha} \geq 0$$

où nous avons remplacé l'énergie interne  $e$  par l'énergie libre d'Helmholtz  $\varphi = e - \theta \eta$ .

Définissons l'état thermodynamique de l'élément par  $\Delta$  <sup>(3)</sup>, éventuellement  $\dot{\Delta}$ ,  $\theta$  <sup>(4)</sup>,  $g_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial X_\alpha}$  et les variables cachées  $a_k$ .  $\varphi$  est une fonction de ces diverses variables. En calculant  $\dot{\varphi}$ , portant ses différents termes dans (4) et divisant par  $\rho_0$ , il vient :

$$(5) \quad \left( \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\rho_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta_{\alpha\beta}} \right) \dot{\Delta}_{\alpha\beta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\Delta}_{\alpha\beta}} \ddot{\Delta}_{\alpha\beta} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial g_\alpha} \dot{g}_\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} \dot{a}_k - \frac{q'_\alpha g_\alpha}{\rho_0 \theta} \geq 0.$$

<sup>(1)</sup> L'inconvénient (évident dans le cas des fluides) de ces variables est qu'elles introduisent artificiellement des grandeurs qui n'ont pas de signification physique. Nous ne pouvons pas ici discuter ce point faute de place.

<sup>(2)</sup>  $\Pi = \mathbf{JF}^{-1} \sigma (\mathbf{F}^{-1})^T$  ,  $\mathbf{q}' = \mathbf{JF}^{-1} \mathbf{q}$  où  $\mathbf{J} = \frac{\rho_0}{\rho}$ .

<sup>(3)</sup> La possibilité d'introduire  $\Delta$  au lieu de  $\mathbf{F}$  dans la définition de l'état résulte du principe d'objectivité.

<sup>(4)</sup> Nous n'introduisons pas la dérivée  $\dot{\theta}$ , parce que  $\theta$  est variable intensive, tandis que  $\Delta$  (dont nous introduisons la dérivée) est extensive. Cela résulte du principe de non-dualité cf. [6], p. 65.

On fait alors le raisonnement suivant :  $\dot{\Delta}_{\alpha\beta}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{g}_\alpha$  n'intervenant pas dans la définition de l'état, on peut choisir arbitrairement leurs valeurs à l'instant  $t^+$  (il n'en est pas de même pour  $\dot{a}_k$  imposé par l'équation d'évolution (2)). Donc les facteurs de ces quantités dans l'inégalité (5) doivent être nuls. Il en résulte que :

$$a. \quad \eta = - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta};$$

*b.*  $\varphi$  ne dépend ni de  $\dot{\Delta}$ , ni de  $\mathbf{g}$  (et par suite il en est de même de  $\eta$  et de  $e$ ). Ainsi se trouve justifié le postulat de l'état d'équilibre local suivant lequel les fonctions  $e$ ,  $\varphi$ ,  $\eta$  des variables d'état sont les mêmes qu'en thermodynamique.

Nous ajoutons maintenant l'hypothèse suivante :

H 2 :  $Ni \Pi$ ,  $ni \dot{a}_k = h_k(\Delta, \dot{\Delta}, \theta, \mathbf{a})$  ne dépendent du gradient thermique  $\mathbf{g}$ .

En prenant  $\mathbf{g} = 0$  dans (5) nous obtenons alors l'inégalité dite de la *puissance intrinsèque dissipée* ( $\Phi$  par unité de masse) :

$$(6) \quad \Phi = \left( \frac{\Pi}{\rho_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta} \right) \dot{\Delta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{a}} \dot{\mathbf{a}} \geq 0$$

Si, avec Coleman, on suppose que  $\dot{\Delta}$  n'intervient pas dans la définition de l'état, on peut choisir arbitrairement la valeur de  $\dot{\Delta}$  à l'instant  $t^+$  et par conséquent on obtient les relations de Coleman :

$$(7) \quad \frac{\pi_{\alpha\beta}}{\rho_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta_{\alpha\beta}}$$

$$(8) \quad \Phi = - \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} \dot{a}_k$$

La relation (7) avait été obtenue par COLEMAN dès 1964 dans le cadre de la représentation fonctionnelle [7].

En fait l'hypothèse de Coleman est trop restrictive puisqu'elle ne s'applique pas au fluide visqueux ni au modèle de Kelvin par exemple. En se reportant à la figure 2 on voit bien que (7) et (8) sont erronés :  $\frac{\partial \varphi}{\partial \Delta}$  est la tension dans le ressort seulement ( $\sigma_1$ ); de plus il n'y a pas de variable cachée et cependant il y a de la puissance dissipée.

L'expression (8) communément admise dans la littérature pour la puissance dissipée n'est donc pas toujours correcte. L'expression générale correcte est l'expression (6).

On peut donner une expression formellement plus simple en définissant l'état par les contraintes  $\Pi$  au lieu de  $\Delta$ ,  $\dot{\Delta}$ , puis  $\theta$ ,  $g$  et certaines variables cachées  $\alpha$  <sup>(1)</sup>. Le fait que  $\dot{\Pi}$  n'entre pas dans la définition de l'état résulte du

<sup>(1)</sup> On peut prendre  $\alpha = a$  lorsque la définition de l'état par les déformations ne nécessite pas l'introduction de  $\dot{\Delta}$ . Dans ce cas  $L$  est la transformée de Legendre partielle de  $\varphi$ .

principe de non-dualité entre déformation et contrainte. Introduisant alors comme fonction thermodynamique, au lieu de  $\varphi$ , l'enthalpie libre changée de signe :

$$(9) \quad L = \frac{\pi_{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\beta}}{\rho_0} - \varphi$$

on obtient cette fois-ci, toujours par le même mode de raisonnement :

$$(10) \quad \Delta_{\alpha\beta} = \rho_0 \frac{\partial L}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \quad \eta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

puis :

$$(11) \quad \Phi = \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k$$

Les relations (10) sont celles que nous avons obtenues en 1967 dans le cadre de la représentation fonctionnelle [8].

### 3. DISSIPATIVITÉ NORMALE

En partant de l'expression de la puissance intrinsèque dissipée, nous pouvons préciser davantage la forme des relations de comportement et d'évolution si nous faisons l'hypothèse H 3 de la *dissipativité normale*. REMARQUE IMPORTANTE : *Cette hypothèse ne s'applique pas aux systèmes présentant des frottements du type de Coulomb* <sup>(1)</sup>. Voici en quoi elle consiste.

Comme le montrent les expressions (6) et (11),  $\Phi$  est une somme de termes dont chacun est le produit d'une force ou action thermodynamique  $U_k$  par un flux  $\dot{u}_k$ . Au voisinage de l'équilibre les flux sont fonctions linéaires des actions :

$$(12) \quad \dot{u}_k = M_{kj} U_j$$

et on a les relations de réciprocity d'Onsager :

$$(13) \quad M_{kj} = M_{jk}.$$

<sup>(1)</sup> Dans le frottement de Coulomb entre deux corps, les deux facteurs de la puissance dissipée sont T, réaction tangentielle, et  $v_g$ , vitesse de glissement. Mais la réaction normale N intervient elle aussi dans la relation de comportement. Si N n'est pas connue, H3 ne s'applique pas.

Pour un écart plus grand à l'équilibre, la généralisation des relations (13) consiste à admettre, avec MOREAU [9], l'existence d'un pseudo-potentiel des dissipations  $\Omega(U_k)$  tel que :

$$(14) \quad \dot{u}_k = \frac{\partial \Omega}{\partial U_k}.$$

Dans le cas de l'expression (11) de  $\Phi$  :  $u = \alpha$ ,  $U_k = \frac{\partial L}{\partial \alpha_k}$  et  $\Omega$  peut en plus des  $U_k$  dépendre de  $\Pi$ ,  $\theta$  et des  $\alpha_k$ .

Dans le cas de l'expression (6) de  $\Phi$ ;  $u = \{\Delta, a\}$ , les actions  $U_k$  sont

$$\frac{\Pi}{\rho} - \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta} = \frac{\Pi_1}{\rho_0} \quad \text{et} \quad - \frac{\partial \Phi}{\partial a_j}.$$

Les équations (14) s'écrivent alors :

$$(15) \quad \dot{\Delta} = \rho_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \Pi_1}, \quad \dot{a}_j = \frac{\partial \Omega}{\partial A_j} \quad \text{avec} \quad A_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_j}$$

$\Omega$  peut, en plus de  $\Pi_1$  et des  $A_j$  dépendre de  $\Delta$ ,  $\theta$  et des  $a_j$ .

Au lieu de (14), on peut aussi bien écrire en introduisant un pseudo-potentiel  $D(\dot{u}_k)$  :

$$(16) \quad U_k = \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_k}$$

car si  $\dot{u}_k dU_k$  est une différentielle exacte, il en est de même de  $U_k d\dot{u}_k$ . On passe de (14) à (16) par la transformation de Legendre (plus généralement de Fenchel).

La forme (15) a été utilisée par HALPHEN et NGUYEN [10] pour définir l'évolution des variables caractérisant l'écroutissage des métaux. Ces auteurs ont supposé  $\Omega$  indépendant de  $\Delta$  et des  $a_k$  et nommé *standards généralisés* les matériaux qui obéissent à la règle de normalité (15) ainsi précisée. Ceci leur a permis de généraliser les théorèmes de la plasticité classique sous une forme très esthétique au milieu plastique à écroutissage standard.

En fait, en adoptant cette hypothèse, on n'atteint pas une généralité suffisante pour décrire le comportement plastique des métaux [11]. Il faut donc introduire les  $a_k$  dans  $\Omega$ . Mais on se heurte alors à la difficulté suivante : *au départ* on a défini les actions  $A_j$  par  $-\frac{\partial \Phi}{\partial a_j}$ , donc par une relation avec les  $a_j$ . Donc par la suite il est impossible de dissocier les  $A_j$  et les  $a_j$  dans le pseudo-potentiel  $\Omega$ .

Il n'en est pas de même si nous utilisons l'hypothèse de la dissipativité normale sous la forme (16) en utilisant la fonction  $D(\dot{u}_k, u_k)$  (qui dépend en outre de  $\pi$ ,  $\theta$  ou  $\Delta$ ,  $\theta$  suivant les variables utilisées) que nous appelons *grandeur dissipative*. Dans cette fonction les variables d'état et leurs dérivées

temporelles sont dissociées.  $\partial D / \partial \dot{u}_k$  est une *résistance* fonction des vitesses et l'équation (16) exprime l'égalité entre la force (ou action) thermodynamique et cette résistance thermodynamique.

*La grandeur dissipative D ne coïncide pas avec la puissance dissipée  $\Phi$ , mais les deux fonctions sont liées. On a en effet <sup>(1)</sup> :*

$$(17) \quad \Phi(u) = \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_k} \dot{u}_k$$

et réciproquement :

$$(18) \quad D(\dot{u}) = \int_0^1 \Phi(p\dot{u}) \frac{dp}{p}$$

Il résulte de là que la grandeur D a une valeur numérique indépendante des variables choisies. C'est une grandeur physique au même titre que la puissance dissipée  $\Phi$ . Mais son expression mathématique dépend du choix des variables.

Avec les variables  $\Pi, \theta, \alpha$ , la relation (16) donne d'après l'expression (11) de  $\Phi$  :

$$(19) \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_k}$$

équations qui complètent les équations (10).

Ainsi les 2 fonctions L ( $\Pi, \theta, \alpha$ ) et D ( $\dot{\alpha}, \Pi, \theta, \alpha$ ) définissent complètement le comportement et l'évolution des variables cachées.

Avec les variables  $\Delta, \dot{\Delta}, \theta, a$ , et d'après l'expression (6) de  $\Phi$ , nous obtenons :

$$(20) \quad \frac{\Pi}{\rho_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\Delta}}$$

$$(21) \quad - \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{\partial D}{\partial \dot{a}}$$

Les 2 fonctions  $\varphi$  ( $\Delta, \theta, a$ ) et D ( $\dot{\Delta}, \dot{a}, \Delta, \theta, a$ ) définissent de nouveau complètement le comportement (éq. 20) et l'évolution des variables cachées (éq. 21).

<sup>(1)</sup> Si  $\Phi$  est une somme de fonctions homogènes de degrés 1, 2, ... m en  $\dot{\alpha}$  :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_m$$

on a :

$$D = \Phi_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 + \dots + \frac{1}{m} \Phi_m.$$

La fonction  $D(\dot{\Delta}, \dot{a}, \Delta, \theta, a)$  n'est pas autre chose que la fonction dissipative de RAYLEIGH [12] qui, pour des forces généralisées  $Q_i$  et déplacements généralisés  $q_i$ , posait (on reconnaît les équations 20) :

$$(22) \quad Q_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}.$$

$\varphi(q_j, \theta)$  énergie libre,  $D(\dot{q}_j, q_j, \theta)$  fonction dissipative. L'hypothèse de dissipativité normale n'est qu'une généralisation de l'hypothèse de Rayleigh, <sup>(1)</sup> introduisant en plus des déplacements commandés  $q_j$  les variables cachées  $a_k$ . Pour ces dernières, il n'y a pas d'action extérieure ( $Q_i = 0$ ), d'où les relations (21), déjà proposées par BIOT [13] dans le cadre de la viscoélasticité linéaire.

#### 4. MILIEUX STANDARDS GÉNÉRALISÉS

L'utilisation de la grandeur dissipative  $D$ , où les variables  $u$  et  $\dot{u}$  sont dissociées, de préférence au pseudo-potentiel  $\Omega$ , a des avantages évidents. Par exemple, on voit immédiatement à quelle condition un matériau à dissipativité normale est standard généralisé au sens de Nguyen.

*Il faut et il suffit*, puisque :

$$\Omega(A, \Pi_1, \Delta, a, \theta) = \text{Sup}_{\dot{a}, \dot{\Delta}} \{a\dot{A} + \dot{\Delta}\Pi_1 - D(\dot{\Delta}, \dot{a}, \Delta, \theta, a)\}$$

que la grandeur dissipative ne dépende que des vitesses  $\dot{\Delta}$ ,  $\dot{a}$  (ou bien  $\dot{a}$ ) et de la température.

On peut montrer [14] que, lorsque les liaisons entre les éléments d'un système ne sont pas dissipatives :

1. Si la dissipativité est normale pour les éléments, elle l'est aussi pour le système (*i.e.* les relations (22) s'appliquent au système). La grandeur dissipative du système est la somme des grandeurs dissipatives des éléments.
2. Si les éléments sont standards généralisés et s'il y a linéarité géométrique (petites déformations), le système lui-même est standard généralisé.

Tel est en particulier le cas pour tous les modèles et structures sans écrouissage <sup>(2)</sup>. La structure, elle, possède un écrouissage. Il est défini par les contraintes résiduelles entre ses éléments (variables cachées intensives) ou par les dislocations nécessaires pour ramener ces contraintes à zéro (variables cachées extensives). Cet écrouissage est standard [15].

<sup>(1)</sup> Que celui-ci a énoncée pour les résistances du type viscosité, mais s'est gardé d'étendre au frottement de Coulomb.

<sup>(2)</sup> Suivant une expression de Nayroles on peut parler de plasticité parfaite ou viscoplasticité parfaite sous-jacentes.

## 5. POTENTIEL INÉLASTIQUE

En dérivant par rapport à  $t$  la relation (10), nous obtenons :

$$(23) \quad \dot{\Delta}_{\alpha\beta} = \rho_0 \frac{\partial^2 L}{\partial \pi_{\alpha\beta} \partial \pi_{\gamma\delta}} \dot{\pi}_{\gamma\delta} + \rho_0 \frac{\partial^2 L}{\partial \pi_{\alpha\beta} \partial \theta} \dot{\theta} + \rho_0 \frac{\partial^2 L}{\partial \pi_{\alpha\beta} \partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k.$$

Au 2<sup>e</sup> membre de (23) les 2 premiers termes sont ce à quoi se réduirait  $\dot{\Delta}$  si les variables cachées étaient maintenues fixes : ils représentent donc la vitesse de déformation thermoélastique. Le dernier terme est la vitesse de déformation inélastique  $\dot{\Delta}^{\text{iné}}$ . En tenant compte de (14) nous pouvons l'écrire :

$$(24) \quad \dot{\Delta}_{\alpha\beta}^{\text{iné}} = \rho_0 \frac{\partial U_k}{\partial \pi_{\alpha\beta}} \frac{\partial \Omega}{\partial U_k}.$$

$\Omega$  transformée de Legendre de  $D$  est une fonction de  $U, \Pi, \alpha, \theta$ . Supposons que  $\Pi$  n'y figure pas (*i.e.* ne figure pas dans  $D$ , ou encore dans l'expression des résistances thermodynamiques). Cette hypothèse est moins restrictive que celle du milieu standard généralisé (suivant laquelle  $D$  ne dépend, ni de  $\Pi$ , *ni de*  $\alpha$ ). En remplaçant alors, dans  $\Omega$ ,  $U$  par  $\partial L / \partial \alpha$ , nous obtenons une fonction :

$$(25) \quad \Omega\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}, \alpha, \theta\right) = \hat{\Omega}(\Pi, \alpha, \theta)$$

qui ne dépend de  $\Pi$  que par l'intermédiaire de  $U$  et la relation (24) devient :

$$(26) \quad \dot{\Delta}_{\alpha\beta}^{\text{iné}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \pi_{\alpha\beta}}.$$

$\hat{\Omega}(\Pi, \alpha, \theta)$  est le potentiel inélastique introduit par RICE [16] dans le cadre de la viscoplasticité <sup>(1)</sup>.

## 6. UN EXEMPLE

Considérez le modèle de Kelvin (fig. 2) en adoptant la définition de l'état par la contrainte variable commandée  $\pi = \sigma$  et la variable cachée  $\sigma_1$  tension du ressort. En fait on simplifie les équations en remplaçant  $\sigma_1$  par la variable

<sup>(1)</sup> (26) découlerait directement de l'hypothèse de dissipativité normale si l'on pouvait identifier  $\Pi$  :  $\dot{\Delta}^{\text{iné}}$  à la puissance dissipée. Mais ce n'est pas possible en général parce qu'une partie de la puissance dissipée apparente (non récupérée à la décharge) correspond à une variation de l'énergie élastique bloquée [17] [18].

extensive correspondante  $\alpha = \varepsilon$  qui, si visible soit-elle, joue ici le rôle de variable cachée. On a alors :

$$L = \sigma\alpha - \frac{1}{2} G\alpha^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \alpha = \varepsilon \quad \text{en accord avec (10).}$$

La force thermodynamique est  $U = \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sigma - G\alpha$ ; c'est la force transmise à la tige de l'amortisseur.

Si la résistance de l'amortisseur est  $\eta (\dot{\alpha})^m$  ( $m = 1$  viscosité newtonienne,  $m = 0$  frottement de Tresca de seuil  $\eta$ ) la dissipativité est normale. La fonction dissipative et la puissance dissipée sont :

$$D = \frac{\eta}{1+m} (\dot{\alpha})^{1+m} \quad \Phi = \eta (\dot{\alpha})^{1+m}$$

La transformée de Legendre de D est :

$$\Omega = \eta \frac{m}{m+1} \left( \frac{U}{\eta} \right)^{1+\frac{1}{m}}$$

et l'on vérifie bien l'équation (14).

Enfin, le potentiel inélastique est :

$$\hat{\Omega} = \eta \frac{m}{m+1} \left( \frac{\sigma - G\alpha}{\eta} \right)^{1+\frac{1}{m}}$$

La vitesse de déformation élastique est nulle. La vitesse de déformation inélastique est  $\dot{\alpha}$ . Elle vérifie l'équation (26).

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B. D. COLEMAN et M. E. GURTIN, *J. Chemical Phys.*, v. 47, n° 2, p. 597, 1967.  
 [2] B. D. COLEMAN, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17, p. 230, 1964.  
 [3] J. LUBLINER, *Acta Mechanica* 17, p. 109, 1973.  
 [4] B. D. COLEMAN et D. R. OWEN, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 54, p. 1, 1974, et 59, p. 25, 1975.  
 [5] W. A. DAY, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 62, 4, p. 367, 1976.  
 [6] J. MANDEL, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, éd. PWN, Varsovie, 1974, CNRS Paris, 1976.  
 [7] B. D. COLEMAN, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17, p. 230, 1964.  
 [8] J. MANDEL, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 264, A, p. 133, 1967.  
 [9] J. J. MOREAU, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 271, A, p. 608, 1970.  
 [10] B. HALPHEN et Q. S. NGUYEN, *Journal de Mécanique*, 14, 1, p. 41, 1975.  
 [11] J. ZARKA, *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 179, 1971.  
 [12] Lord RAYLEIGH, *Proc. Royal Soc. London*, 1873.  
 [13] M.A. BIOT, *J. Appl. Phys.*, 25, p. 1385, 1954.  
 [14] J. MANDEL, *Mech. Res. Comm.*, 5 (4), p. 225, 1978.  
 [15] J. MANDEL, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 284, A, p. 257, 1977.  
 [16] J. R. RICE, *J. Mech. Phys. Solids*, 19, p. 433, 1971.  
 [17] J. MANDEL, *Proc. 11th Int. Cong. App. Mech.*, p. 502, 1964.  
 [18] J. MANDEL, *Cah. Groupe Franç. Rhéologie*, I, 1, p. 9, 1965.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Résumé (français, anglais, allemand).....	37
INTRODUCTION.....	38
1. VARIABLES CACHÉES.....	38
2. PUISSANCE DISSIPÉE.....	40
3. DISSIPATIVITÉ NORMALE.....	43
4. MILIEUX STANDARDS GÉNÉRALISÉS.....	46
5. POTENTIEL INÉLASTIQUE.....	47
6. UN EXEMPLE.....	47
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	49



# THERMODYNAMIQUE ET CAUSALITÉ EN THÉORIE LINÉAIRE DES MILIEUX CONTINUS <sup>(1)</sup>

*(Thermodynamics and causality in the linear theory of continua)*

*(Thermodynamik und Kausalität in der linearen  
Theorie der kontinuierlichen Medien)*

par

G. MAYNÉ <sup>(2)</sup> et P. BOULANGER <sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — *Dans ce travail, nous étudions des continus dont le comportement est caractérisé par une relation linéaire entre deux champs  $\sigma$  (contrainte, champ électrique, ...),  $\varepsilon$  (déformation, polarisation, ...), et un certain nombre de leurs dérivées par rapport au temps. Nous constatons que, contrairement à la thermodynamique de Coleman, une exigence thermodynamique plus forte proposée par Meixner implique toujours la causalité du modèle, ainsi que l'existence d'un modèle rhéologique ou analogique associé. Les restrictions fournies par la thermodynamique de Meixner sont explicitées lorsque l'ordre des dérivées de  $\sigma$  intervenant dans l'équation constitutive n'excède pas 2. Nous montrons, qu'en électrodynamique des corps rigides, de telles équations constitutives fournissent une théorie macroscopique des diélectriques présentant une ou deux résonances optiques. En théorie de la viscoélasticité, elles peuvent conduire à la définition de zones de fréquences disjointes où les ondes sont faiblement absorbées, mais aussi à des résultats plus classiques si le modèle rhéologique associé ne comporte pas d'éléments d'inertie.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Département de Mathématiques, université libre de Bruxelles (Belgique).

ABSTRACT. — *In this work, we consider continua with a behavior characterized by a linear relation between two fields  $\sigma$  (stress, electrical field, ...),  $\varepsilon$  (deformation, polarization, ...) and their time derivatives up to a certain order. We observe that Coleman's thermodynamics does not imply the causality of the model, but that a stronger requirement of Meixner does always imply it. Moreover, this requirement implies the existence of associated rheological and analogical models. The restrictions of Meixner's thermodynamics are stated in explicit form when the derivatives of  $\sigma$  involved in the constitutive equation are of order not greater than 2. We show that, in electrodynamics of rigid bodies, these constitutive equations lead to a macroscopic theory of dielectrics with one or two optical resonances. In viscoelasticity theory, they may lead to the definition of disjointed intervals of frequencies where waves are weakly absorbed. But, when the rheological model does not involve inertial elements, they lead to more usual results.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *In dieser Arbeit untersuchen wir Kontinua, deren Verhalten durch eine lineare Beziehung zwischen zwei Feldern  $\sigma$  (Beanspruchung, elektrisches Feld, ...),  $\varepsilon$  (Deformation, Polarisierung, ...) sowie einige ihrer Ableitungen in Abhängigkeit von der Zeit gekennzeichnet ist. Wir stellen fest, daß — entgegen der Thermodynamik von Coleman — eine von Meixner vorgeschlagene stärkere thermodynamische Forderung immer die Kausalität des Modells sowie das Vorhandensein eines rheologischen oder zugeordneten analogen Modells mit einbegreift. Die von der Meixnerschen Thermodynamik gelieferten Einschränkungen sind in expliziter Form geschrieben, wenn die Ordnung der Ableitungen von  $\sigma$ , die in die Spannungs-Dehnungsgleichung eingehen, nicht grösser als 2 ist. Wir zeigen, dass in der Elektrodynamik der starren Körper derartige Spannungs-Dehnungsgleichungen eine makroskopische Theorie für die Dielektrika liefern, die eine oder zwei optische Resonanzen aufweisen. In der Theorie der Viskoelastizität können sie zur Definition von Zonen disjunktiver Frequenzen führen, bei denen Wellen schwach absorbiert werden, aber auch zu klassischeren Ergebnissen, wenn das zugeordnete rheologische Modell keine Trägheitselemente aufweist.*

## 1. INTRODUCTION

En plus des équations de bilan habituelles, la mécanique des continus fait appel à des équations constitutives qui fournissent une expression macroscopique de la mécanique interne du continu. Dans le cas simple de problèmes unidimensionnels où intervient un seul type d'action (mécanique, électromagnétique, ...), l'équation constitutive est une relation entre deux champs scalaires,  $\sigma$  (contrainte, champ électrique, ...) et  $\varepsilon$  (déformation, polarisation, ..) pouvant faire intervenir les valeurs de ces grandeurs à tout instant  $t$ .

Dans de nombreuses applications, on peut supposer que les champs sont faibles et linéariser la relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$ . On adopte alors comme équation constitutive une relation fonctionnelle linéaire entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  :  $\sigma$  à un instant est fonctionnelle linéaire de  $\varepsilon(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , ou  $\varepsilon$  à un instant est fonctionnelle linéaire de  $\sigma(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ . Par exemple, en viscoélasticité, la contrainte  $\sigma$  à un instant est souvent donnée par une intégrale portant sur toutes les valeurs de la déformation  $\varepsilon$  jusqu'à cet instant [1]. Cependant, le noyau d'une telle intégrale ne peut en général être déterminé expérimentalement sur tout son domaine de définition [2]. C'est la raison pour laquelle on préfère parfois caractériser les milieux viscoélastiques par des relations faisant intervenir un nombre fini de coefficients phénoménologiques. Tel est le cas des modèles caractérisés par des équations constitutives de la forme :

$$(1.1) \quad \sigma = a_0 \varepsilon + a_1 \varepsilon^{(1)} + \dots + a_n \varepsilon^{(n)},$$

$$(1.2) \quad b_0 \sigma + b_1 \sigma^{(1)} + \dots + b_n \sigma^{(n)} = a_0 \varepsilon + a_1 \varepsilon^{(1)} + \dots + a_n \varepsilon^{(n)},$$

où :

$$\sigma^{(i)} \equiv \frac{d^i \sigma}{dt^i}, \quad (i=1, \dots, m), \quad \varepsilon^{(j)} \equiv \frac{d^j \varepsilon}{dt^j}, \quad (j=1, \dots, n), \quad \text{et où } a_0, a_1, \dots, a_n,$$

$b_0, b_1, \dots, b_m$  sont des constantes. Le modèle caractérisé par (1.1) sera appelé *différentiel de degré  $n$* , celui caractérisé par (1.2) *intégré-différentiel de degré  $(m, n)$* .

Les équations (1.1) (1.2) définissent en fait des relations fonctionnelles linéaires particulières entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  : en effet, en utilisant la transformation de Fourier, on peut montrer que ces équations définissent univoquement les fonctionnelles :

$$(1.3) \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \varepsilon(t-s) ds, \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) \sigma(t-s) ds,$$

où  $g(s)$  et  $h(s)$  sont des distributions tempérées <sup>(1)</sup> [3].

Comme dans le cadre d'une théorie de champ macroscopique classique on ne peut savoir si c'est  $\varepsilon$  qui est cause de  $\sigma$ , ou  $\sigma$  cause de  $\varepsilon$ , nous introduirons la définition suivante de la notion de causalité : le modèle caractérisé par (1.1) ou (1.2) sera dit *causal* lorsque :

$$(1.4) \quad g(s) = h(s) = 0 \quad \text{pour tout } s < 0.$$

Cette notion de causalité permet à la fois d'interpréter  $\varepsilon$  comme cause de  $\sigma$ , et  $\sigma$  comme cause de  $\varepsilon$ . Une telle exigence est habituellement imposée en

<sup>(1)</sup> Avec toutefois exception des cas où un des polynômes  $B(u) \equiv b_0 + b_1 u + \dots + b_m u^m$   $A(u) \equiv a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n$  admet des racines imaginaires pures. On ne pourra alors définir univoquement les distributions tempérées  $g(s)$ ,  $h(s)$  que si ces cas sont considérés comme cas limites.

théorie classique de la viscoélasticité linéaire [1]. Elle implique une influence immédiate de la cause sur son effet : par exemple, un modèle où une déformation ne produirait une contrainte qu'après un laps de temps fini ne satisfait pas à cette notion de causalité. La condition (1.4) peut encore s'exprimer simplement en utilisant les transformées de Laplace  $G(u)$ ,  $H(u)$  des distributions tempérées  $g(s)$ ,  $h(s)$  :

$$(1.5) \quad G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-us} g(s) ds, \quad H(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-us} h(s) ds,$$

où  $u$  est une variable complexe. En effet, un théorème de TITCHMARSH [4] généralisé aux distributions tempérées permet d'affirmer que la condition (1.4) est vérifiée si et seulement si  $G(u)$  et  $H(u)$  sont holomorphes dans le demi-plan complexe  $\operatorname{Re} u > 0$ .

Par ailleurs, en mécanique des continus, le *second principe de la thermodynamique* est généralement utilisé afin d'obtenir des restrictions sur les équations constitutives, donc, dans notre cas, des restrictions sur les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  des équations (1.1) (1.2).

Dans ce travail, nous examinons les relations qu'il peut y avoir entre ces restrictions thermodynamiques et celles que l'on obtient en exigeant la causalité du modèle. Nous constatons en particulier qu'une condition thermodynamique proposée par MEIXNER [5] permet d'obtenir des restrictions qui impliquent toujours la causalité du modèle. Ensuite, afin de juger de l'intérêt des équations constitutives (1.1) (1.2) soumises à ces restrictions nous les appliquons à l'étude de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les corps rigides, et d'ondes mécaniques dans les corps déformables.

Une première partie est consacrée aux modèles de type différentiel et une seconde à ceux de type intégral-différentiel.

## 2. MODÈLES DIFFÉRENTIELS

### 2.1. THERMODYNAMIQUE DE COLEMAN.

COLEMAN [6] [7] a proposé une méthode pour obtenir des restrictions sur certaines équations à partir du second principe de la thermodynamique exprimé par l'inégalité de Clausius-Duhem. Dans le cas qui nous occupe, celle-ci se réduit simplement à :

$$(2.1) \quad -\frac{d\psi}{dt} + \sigma \varepsilon^{(1)} \geq 0,$$

où  $\psi$  est l'énergie libre de Helmholtz. La méthode de Coleman consiste ici à supposer que  $\psi$  est une fonction quadratique de  $\varepsilon, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}$  et exiger

que (2.1) soit satisfaite quelles que soient les valeurs de ces variables. Par souci de simplicité nous nous limitons ici au cas  $n = 3$ . Outre des restrictions faisant intervenir  $\psi$ , on obtient ainsi [8] les restrictions suivantes sur les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_3$  :

$$(2.2) \quad a_1 \geq 0, \quad a_3 \leq 0.$$

Ces inégalités expriment en fait la dissipation d'énergie dans un cycle partant de  $\varepsilon = 0$ , en effet, elles sont satisfaites si et seulement si :

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \varepsilon^{(1)} dt \geq 0$$

pour toute fonction  $\varepsilon(t)$  s'annulant identiquement avant un instant  $t_0$  et après un instant  $t_1$ .

Si  $\varepsilon$  est interprété comme polarisation et  $\sigma$  comme champ électrique, l'équation (1.1), avec  $n = 3$ , peut caractériser un diélectrique rigide isotrope non magnétisable. Grâce à (2.2), le terme faisant intervenir la dérivée troisième de la polarisation s'interprète alors [8] comme une expression macroscopique du freinage de rayonnement introduit par Lorentz. Or celui-ci pose des problèmes de causalité dans l'étude du mouvement d'un électron. Il était donc naturel de se demander si le modèle (1.1), avec  $n = 3$ , est causal lorsque les inégalités (2.2) sont vérifiées. Pour ce modèle, on a :

$$(2.4) \quad G(u) = A(u) \equiv a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3, \quad H(u) = A^{-1}(u).$$

La fonction  $G(u)$  est holomorphe dans tout le plan complexe, mais on peut prouver que, compte tenu de (2.2),  $H(u)$  a toujours un pôle dans le demi-plan  $\operatorname{Re} u > 0$ , du moins si  $a_3 \neq 0$  [8]. Ceci montre que si on se contente d'appliquer la thermodynamique de Coleman à un modèle différentiel, on obtient en général un modèle acausal et donc dénué de signification physique.

## 2.2. THERMODYNAMIQUE DE MEIXNER.

MEIXNER [5], en se basant sur une étude de l'inégalité de Clausius et sur une condition de stabilité de l'état  $\varepsilon = 0$ , a proposé une thermodynamique des continus basée sur une inégalité fondamentale où n'apparaît pas l'énergie libre. Dans notre cas, celle-ci se réduit à :

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{\tau} \sigma \varepsilon^{(1)} dt \geq 0.$$

Un modèle différentiel ou intégral linéaire est compatible avec la thermodynamique de Meixner lorsque la fonctionnelle (1.3)<sub>1</sub> est telle que pour toute fonction  $\varepsilon(t)$  s'annulant identiquement en dehors d'un intervalle borné,  $\sigma(t)$  soit bornée par un polynôme pour  $t \rightarrow \infty$ , et telle que l'inégalité

(2.5) soit vérifiée à tout instant  $\tau$ , pour toute fonction  $\varepsilon(t)$  s'annulant identiquement avant un instant  $t_0$ . Ces conditions impliquent en particulier la dissipation d'énergie dans un cycle partant de  $\varepsilon = 0$ , mais elles sont plus restrictives. Dans un travail de 1958 [9], KÖNIG et MEIXNER ont montré qu'elles sont satisfaites si et seulement si la fonction :

$$(2.6) \quad Z(u) = \frac{1}{u} G(u)$$

est holomorphe à partie réelle (strictement) positive dans le demi-plan  $\operatorname{Re} u > 0$ . De telles fonctions sont dites positives [9]; elles ont beaucoup été étudiées en théorie des circuits électriques [10]. La fonction  $Z(u)$  définie par (2.6) est appelée impédance du modèle.

Les fonctions positives n'ayant ni pôles, ni zéros dans le demi-plan  $\operatorname{Re} u > 0$  [9], on peut affirmer que *l'exigence thermodynamique de Meixner implique toujours la causalité du modèle.*

Dans le cas du modèle (1.1) les restrictions obtenues à partir de cette exigence sont [8] :

$$(2.7) \quad a_0 \geq 0, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_3 = \dots = a_n = 0,$$

et les modèles de degré supérieur à 2 sont donc rejetés. On peut donc affirmer que la thermodynamique de Meixner fournit des conditions plus restrictives que celle de Coleman, ne devant pas être complétées par des exigences de causalité ou de stabilité.

### 2.3. MODÈLES RHÉOLOGIQUES ET ANALOGIQUES.

A l'équation constitutive (1.1) soumise aux restrictions (2.7), on peut associer un modèle rhéologique ou un circuit électrique. Le modèle rhéologique est un modèle de Kelvin généralisé par l'introduction d'un élément inertie. Il se réduit au modèle de Kelvin classique au cas où  $a_2 = 0$ . Le circuit électrique est constitué d'une résistance, d'une capacité et d'une self branchées en série. Les restrictions provenant de la thermodynamique de Meixner sont indispensables à l'obtention de ces modèles.

### 2.4. PROPAGATION D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

L'équation constitutive (1.1) soumise aux restrictions (2.7) peut être utilisée pour caractériser un diélectrique rigide isotrope, non magnétisable. Pour cela,  $\sigma$  doit être interprété comme vecteur champ électrique et  $\varepsilon$  comme vecteur polarisation, ce qui se justifie parce qu'une relation entre ces vecteurs prend en vertu de l'isotropie la même forme qu'une relation entre scalaires.

En adjoignant cette équation constitutive aux équations de Maxwell, on obtient un système qui permet notamment l'étude de la propagation d'ondes

sinusoïdales planes dans le milieu supposé infini. Nous avons ainsi obtenu [8] une valeur de l'indice de réfraction  $n$  donnée en fonction de la fréquence angulaire  $\omega$  par :

$$(2.8) \quad n^2 - 1 = \frac{1}{A(i\omega)} = \frac{f}{\omega^{\circ 2} - \omega^2 + i\omega\gamma},$$

avec :

$$\omega^{\circ 2} \equiv \frac{a_0}{a_2} \geq 0, \quad \gamma \equiv \frac{a_1}{a_2} \geq 0, \quad f \equiv \frac{1}{a_2} \geq 0.$$

Si  $\gamma^2 \omega^{\circ -2}$  est négligeable devant 1 (dissipation faible), le diélectrique présente une résonance optique à la fréquence  $\omega^{\circ}$ . L'expression (2.8) est d'ailleurs identique à celle fournie par la théorie microscopique classique de l'indice de réfraction des diélectriques à une seule espèce d'électrons.

## 2.5. PROPAGATION D'ONDES MÉCANIQUES.

Pour caractériser un milieu déformable isotrope, on peut utiliser deux équations constitutives de type (1.1) soumises chacune aux restrictions (2.7); dans l'une  $\sigma$  et  $\epsilon$  doivent être interprétés comme déviateurs des tenseurs de contrainte et de déformation, dans l'autre comme parties sphériques de ces tenseurs. Nous désignerons par  $a'_0, a'_1, a'_2$  les coefficients qui interviennent dans la relation entre déviateurs, et par  $a''_0, a''_1, a''_2$  ceux qui interviennent dans la relation entre parties sphériques.

En adjoignant ces équations au bilan de quantité de mouvement, on obtient un système qui permet, par linéarisation, d'étudier la propagation d'ondes sinusoïdales planes dans le milieu supposé infini. Nous avons ainsi obtenu des valeurs des vitesses  $v_T, v_L$  des ondes transversales et longitudinales données en fonction de la fréquence angulaire  $\omega$  par :

$$(2.9) \quad \frac{1}{v_T^2} = \frac{f_T}{\omega_T^{\circ 2} - \omega^2 + i\omega\gamma_T},$$

$$\frac{1}{v_L^2} = \frac{f_L}{\omega_L^{\circ 2} - \omega^2 + i\omega\gamma_L},$$

avec :

$$\omega_T^{\circ 2} \equiv \frac{a'_0}{a'_2} \geq 0, \quad \gamma_T \equiv \frac{a'_1}{a'_2} \geq 0, \quad f_T \equiv \frac{2\rho}{a'_2} \geq 0,$$

$$\omega^{\circ 2} \equiv \frac{2a'_0 + a''_0}{2a'_2 + a''_2} \geq 0, \quad \gamma_L \equiv \frac{2a'_1 + a''_1}{2a'_2 + a''_2} \geq 0, \quad f_L \equiv \frac{3\rho}{2a'_2 + a''_2} \geq 0,$$

où  $\rho$  est la masse spécifique du milieu. Les expressions (2.9) permettent de montrer qu'au delà de la fréquence critique  $\omega_T^{\circ}$  ( $\omega_L^{\circ}$ ) les ondes transversales (longitudinales) sont fortement absorbées car leur décroissement logarithmique [11] est supérieur à  $2\pi$ .

### 3. MODÈLES INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELS

#### 3.1. THERMODYNAMIQUE DE MEIXNER.

Comme nous avons constaté, dans le cas particulier des modèles différentiels, que la thermodynamique de Coleman fournit des restrictions insuffisantes, nous utilisons ici directement l'exigence thermodynamique de Meixner qui assure toujours la causalité du modèle. Celle-ci est satisfaite si et seulement si l'impédance  $Z(u)$  est une fonction positive. Pour le modèle (1.2), on a :

$$(3.1) \quad Z(u) = \frac{A(u)}{u B(u)}.$$

où :

$$A(u) \equiv a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n, \quad B(u) \equiv b_0 + b_1 u + \dots + b_m u^m.$$

Supposons que les polynômes  $A(u)$ ,  $B(u)$  n'aient pas de racines communes et que  $b_0 \neq 0$ . On peut alors, sans restreindre la généralité, prendre  $b_0 > 0$ , et un théorème (cf. [10], p. 244) permet d'affirmer que  $Z(u)$  est une fonction positive si et seulement si :

a.  $n - m \leq 2$ ,  $a_0 \geq 0$ ,  $a_{m+2} \geq 0$ ;

b.  $B(u)$  n'a pas de racines à partie réelle (strictement) positive;

c. Les racines imaginaires pures de  $B(u)$  sont simples et les résidus en les pôles correspondants de  $Z(u)$  sont (strictement) positifs;

d.  $\operatorname{Im} [A(i\omega) B(-i\omega)] \geq 0$  pour tout  $\omega \geq 0$ .

On peut montrer alors qu'on a également  $n - m \geq 0$ , que tous les coefficients sont positifs ou nuls, et que  $A(u)$  n'a pas de racines à partie réelle (strictement) positive [10].

La condition (d) exprime la dissipation dans un cycle partant de  $\varepsilon = 0$  (inégalité 2.3). La thermodynamique de Meixner fournit donc des conditions beaucoup plus restrictives. Si dans (2.3), l'égalité est valable pour toute fonction  $\varepsilon(t)$  s'annulant identiquement avant un certain instant  $t_0$  et après un certain instant  $t_1$ , on dira que le modèle est non dissipatif.

Si on suppose que  $b_0 = 0$ ,  $Z(u)$  ne peut être une fonction positive que si  $a_0 = 0$ , et le modèle se ramène alors à un modèle intégré-différentiel de degré  $(m-1, n-1)$ . Une telle réduction de degré peut également s'opérer si les polynômes  $A(u)$ ,  $B(u)$  ont une racine commune.

Dans la suite, nous nous limiterons, par souci de simplicité, aux cas où  $m = 1$  et où  $m = 2$ . Nous supposons toujours que  $A(u)$ ,  $B(u)$  n'ont pas de racines communes et que  $b_0 > 0$ .

Lorsque  $m = 1$ , les conditions (a) (b) (c) (d) sont équivalentes à :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} b_1 \geq 0, \quad a_0 \geq 0, \quad a_3 \geq 0, \quad a_4 = \dots = a_n = 0 \\ a_1 b_0 - a_0 b_1 \geq 0, \quad a_2 b_1 - a_3 b_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Un tel modèle (avec  $b_1 \neq 0$ ) est toujours dissipatif.

Lorsque  $m = 2$ , les conditions (a) (b) (c) (d) sont équivalentes à :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} b_1 \geq 0, \quad b_2 \geq 0, \quad a_0 \geq 0, \quad a_4 \geq 0, \quad a_5 = \dots = a_n = 0 \\ a_1 b_0 - a_0 b_1 \geq 0, \quad a_3 b_2 - a_4 b_1 \geq 0, \quad a_0 b_3^2 - a_2 b_0 b_2 + a_4 b_0^2 \leq 0^{(1)}, \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_3 b_0 \geq -2\sqrt{(a_3 b_2 - a_4 b_1)(a_1 b_0 - a_0 b_1)}. \end{aligned}$$

Un tel modèle est non dissipatif si et seulement si  $b_1 = a_1 = a_3 = 0$ .

### 3.2. MODÈLES RHÉOLOGIQUES ET ANALOGIQUES.

Les fonctions rationnelles, positives, à coefficients réels ont beaucoup été étudiées en théorie des circuits électriques [10]. En 1949, BOTT et DUFFIN [12] ont démontré qu'une fonction est de ce type si et seulement si elle est l'impédance d'un circuit électrique constitué uniquement de résistances, capacités, selfs (sans transformateurs). Un modèle intégral-différentiel est donc compatible avec la thermodynamique de Meixner si et seulement si son équation constitutive (1.2) peut être associée à un circuit électrique comportant ces trois types d'éléments. De plus, si on introduit dans les modèles rhéologiques un élément inertie jouant le même rôle que la self dans les circuits électriques, on peut faire correspondre un modèle rhéologique à tout circuit électrique et inversement un circuit électrique à tout modèle rhéologique.

Souvent les modèles rhéologiques employés en théorie de la viscoélasticité ne comportent que des ressorts et des amortisseurs (cf. [11] pour une expression générale de l'impédance de ces modèles). Pour qu'on puisse associer un tel modèle à une équation constitutive de type intégral-différentiel, il y a lieu de compléter les conditions de la thermodynamique de Meixner : dans le cas où  $m = 1$ , on doit compléter (3.2) par :

$$(3.4) \quad a_3 = 0, \quad b_1 (a_1 b_0 - a_0 b_1) - a_2 b_0^2 \geq 0;$$

<sup>(1)</sup> Cette condition est redondante si  $b_1 \neq 0$ .

dans le cas où  $m = 2$ , on doit compléter (3.3) par :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} a_4 &= 0, \quad b_1 (a_1 b_0 - a_0 b_1) - b_0 (a_2 b_0 - a_0 b_2) \geq 0, \\ (a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_3 b_0) (a_1 b_0 - a_0 b_1) - (a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 &\geq 0, \\ [b_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_3 b_0) - a_3 (b_1^2 - 4 b_0 b_2)] (a_1 b_0 - a_0 b_1) \\ - b_2 (a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 + a_3 b_0^2 (a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_3 b_0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Les conditions (3.4) et (3.5) ont été obtenues en exprimant que les racines du polynôme  $A(u^2) + uB(u^2)$  sont à partie réelle négative (cf. [10]).

### 3.3. PROPAGATION D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

On peut utiliser l'équation constitutive (1.2), soumise aux restrictions thermodynamiques de Meixner, pour caractériser un diélectrique rigide isotrope non magnétisable. L'étude de la propagation d'ondes sinusoïdales planes dans ce diélectrique, supposé infini, nous a fourni [13] une valeur de l'indice de réfraction  $n$  donnée en fonction de la fréquence angulaire  $\omega$  par :

$$(3.6) \quad n^2 - 1 = \frac{B(i\omega)}{A(i\omega)}.$$

Pour un modèle intégral-différentiel de degré (2, 4), la décomposition de la fraction rationnelle (3.6) en fractions partielles conduit, compte tenu de (3.3) à :

$$(3.7) \quad n^2 - 1 = \frac{\overset{1}{f} + i\omega g}{\overset{1}{\omega^2} - \omega^2 + i\omega \overset{1}{\gamma}} + \frac{\overset{2}{f} - i\omega g}{\overset{2}{\omega^2} - \omega^2 + i\omega \overset{2}{\gamma}},$$

où  $\overset{1}{\omega^2}$ ,  $\overset{2}{\omega^2}$ ,  $\overset{1}{\gamma}$ ,  $\overset{2}{\gamma}$  sont des nombres positifs liés aux racines du polynôme  $A(u)$ , et où  $\overset{1}{f}$ ,  $\overset{2}{f}$ ,  $g$  s'expriment en fonction de ces racines et des coefficients  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  (cf. [13]).

Si les coefficients  $b_1$ ,  $a_1$ ,  $a_3$  sont suffisamment faibles (dissipation faible),  $\overset{1}{\omega}$  et  $\overset{2}{\omega}$  sont les racines positives de l'équation  $a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0 = 0$ , et on peut montrer que  $\overset{1}{f}$  et  $\overset{2}{f}$  sont positifs [13]. Lorsque  $g = 0$ , l'expression (3.7) s'identifie alors à celle fournie par la théorie microscopique classique d'un diélectrique à deux espèces d'électrons. Un tel diélectrique présente deux résonances optiques aux fréquences angulaires  $\overset{1}{\omega}$ ,  $\overset{2}{\omega}$ . Grâce à l'hypothèse de dissipation faible, on peut constater que ce comportement n'est pas modifié si  $g \neq 0$ .

Un modèle intégral-différentiel de degré (2, 4) fournit donc une théorie macroscopique des diélectriques à deux résonances optiques. Par ailleurs, l'étude de (3.6) pour un modèle de degré (1, 3) montre que celui-ci présente tout au plus une résonance optique.

### 3.4. PROPAGATION D'ONDES MÉCANIQUES.

Considérons maintenant un milieu déformable isotrope caractérisé par deux équations constitutives de type (1.2), de même degré, soumises chacune aux restrictions thermodynamiques de Meixner. Nous désignerons par  $A'(u)$ ,  $B'(u)$  les polynômes associés à l'équation qui lie les déviateurs des tenseurs de contrainte et de déformation, et par  $A''(u)$ ,  $B''(u)$  ceux associés à l'équation qui lie les parties sphériques de ces tenseurs.

L'étude de la propagation d'ondes sinusoïdales planes dans ce milieu supposé infini fournit des valeurs des vitesses  $v_T$ ,  $v_L$  des ondes transversales et longitudinales données en fonction de la fréquence angulaire  $\omega$  par :

$$(3.8) \quad \frac{1}{v_T^2} = 2 \rho \frac{B'(i\omega)}{A'(i\omega)}, \quad \frac{1}{v_L^2} = 3 \rho \frac{B'(i\omega) B''(i\omega)}{A''(i\omega) B'(i\omega) + 2 A'(i\omega) B''(i\omega)},$$

où  $\rho$  est la masse spécifique du milieu.

Pour un modèle de degré (1, 3), les expressions (3.8) permettent de montrer, compte tenu des restrictions thermodynamiques de Meixner, que les ondes transversales (ou longitudinales) ont un décrétement logarithmique supérieur à  $2\pi$  au-delà d'une certaine fréquence critique. Ce résultat ne diffère pas qualitativement de celui obtenu avec un modèle différentiel.

Pour un modèle de degré (2, 4), l'étude des expressions (3.8) conduit aux résultats suivants : lorsque les coefficients des dérivées d'ordre impair sont suffisamment faibles (dissipation faible), le décrétement logarithmique des ondes transversales n'est inférieur à  $2\pi$  que dans deux zones de fréquences  $0 \leq \omega \leq \omega_T^1$ ,  $\omega_T^1 < \omega_T^2 \leq \omega \leq \omega_T^3$ ; le décrétement logarithmique des ondes longitudinales n'est inférieur à  $2\pi$  que dans trois zones de fréquences  $0 \leq \omega \leq \omega_L^1$ ,  $\omega_L^1 < \omega_L^2 \leq \omega \leq \omega_L^3$ ,  $\omega_L^3 < \omega_L^4 \leq \omega \leq \omega_L^5$ . Les fréquences caractéristiques  $\omega_T^1$ ,  $\omega_T^2$ ,  $\omega_T^3$ , et  $\omega_L^1$ ,  $\omega_L^2$ ,  $\omega_L^3$ ,  $\omega_L^4$ ,  $\omega_L^5$  sont liées aux coefficients des polynômes  $A'(u)$ ,  $B'(u)$ ,  $A''(u)$ ,  $B''(u)$ .

De tels résultats peuvent sembler surprenants, mais on notera qu'ils ne s'appliquent pas aux modèles qui peuvent être représentés uniquement à l'aide de ressorts et d'amortisseurs (modèles de degré (1, 2), (2, 3), ..., soumis aux restrictions supplémentaires (3.4), (3.5), ...).

## 4. CONCLUSIONS

Les équations constitutives de type différentiel ou intégro-différentiel soumises aux restrictions thermodynamiques de Meixner fournissent des résultats en ce qui concerne la propagation des ondes. En électrodynamique, elles conduisent à une théorie macroscopique du phénomène de résonance optique (résonance simple, résonances multiples). En théorie de la viscoélasticité, elles peuvent conduire à la définition de zones de fréquences disjointes

où les ondes sont faiblement absorbées, mais aussi à d'autres résultats si on impose des restrictions supplémentaires afin de rejeter l'élément inertie des modèles rhéologiques.

Les restrictions thermodynamiques de Meixner, impliquant la causalité du modèle, sont fondamentales dans l'obtention de toutes ces conclusions. L'interprétation de résultats obtenus à partir d'une équation constitutive ne satisfaisant pas à ces restrictions soulève des difficultés graves telles que celles liées au freinage de rayonnement en électrodynamique, ou à l'absence de modèle rhéologique en théorie de la viscoélasticité. A notre connaissance, la thermodynamique de Meixner n'a pas encore pu être mise en œuvre pour obtenir des restrictions en théorie non linéaire des continus; cependant, il y a vraisemblablement lieu d'y imposer également des restrictions plus fortes que celles de la thermodynamique de Coleman pour obtenir des modèles physiquement acceptables.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A.C. PIPKIN. — *Lectures on viscoelasticity*, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- [2] H. KOLSKY. — *International symposium on stress wave propagation in materials*, 59, Interscience Publishers, New York, 1960.
- [3] L. SCHWARTZ. — *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950-1951.
- [4] E.C. TITCHMARSH. — *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford, Univ. Press, 1948.
- [5] J. MEIXNER. — *J. Appl. Mech.*, 33, 481, 1966.
- [6] B.D. COLEMAN et V.J. MIZEL. — *J. Chem. Phys.*, 40, 1116, 1964.
- [7] B.D. COLEMAN. — *Arch. Rational Mech. Anal.*, 17, 1, 1964.
- [8] P. BOULANGER et G. MAYNÉ. — *Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci.*, 62, 22, 1976.
- [9] V.H. KÖNIG et J. MEIXNER. — *Math. Nachrichten.*, 19, 265, 1958.
- [10] L. WEINBERG. — *Network analysis and synthesis*, Mc Graw-Hill Book Company, inc., New York, 1962.
- [11] J. MANDEL. — *Cours de mécanique des milieux continus*, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [12] R. BOTT et R.J. DUFFIN. — *J. App. Phys.*, 20, 816, 1949.
- [13] P. BOULANGER et G. MAYNÉ. — Modèles intégrro-différentiels en électrodynamique linéaire des continus, *Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci.* (à paraître).

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Résumé (français, anglais, allemand).....	51
1. INTRODUCTION.....	52
2. MODÈLES DIFFÉRENTIELS.....	54
2.1. Thermodynamique de Coleman.....	54
2.2. Thermodynamique de Meixner.....	55
2.3. Modèles rhéologiques et analogiques.....	56
2.4. Propagation d'ondes électromagnétiques.....	56
2.5. Propagation d'ondes mécaniques.....	57
3. MODÈLES INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELS.....	58
3.1. Thermodynamique de Meixner.....	58
3.2. Modèles rhéologiques et analogiques.....	59
3.3. Propagation d'ondes électromagnétiques.....	60
3.4. Propagation d'ondes mécaniques.....	61
4. CONCLUSIONS.....	61
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	62

*thermodynamics-mechanics frame is reviewed and a special reference is made to Mandel's and other french researchers work as well as to author's one.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *Da die Rheologie die Lehre von der Strömung und der Materialverformung — oder einfach die Fließlehre — ist, sieht man, dass man es, abgesehen von dem idealen Medium, hauptsächlich mit irreversiblen Prozessen zu tun hat. Daraus ergibt sich die bekannte Schwierigkeit, die Rheologie einer angewandten Mechanik gleichzustellen. Die Theorie von Onsager hat erlaubt, ein erstes Dissipationspotential zu konzipieren mit genauer Bedeutung in der Thermodynamik, und hat die Arbeiten von M. Biot seit den fünfziger Jahren angeregt. Die Fortschritte in Richtung auf eine rheologische Theorie im Rahmen der Thermodynamik-Mechanik werden überprüft unter besonderer Bezugnahme auf die Arbeiten von Mandel und anderer französischer Wissenschaftler sowie diejenigen des Verfassers.*

La rhéologie est une science de convergence entre mécanique et thermodynamique et surtout, à notre avis, une science frontière entre la recherche scientifique fondamentale, poursuivie par ceux qui regardent le monde physique et la recherche scientifique appliquée ou technologique, poursuivie par ceux qui agissent sur le monde physique. De ce caractère de convergence résulte le fait que la rhéologie attire l'intérêt de chercheurs qui travaillent en des domaines très divers et y apportent une richesse singulière de contributions.

Une des découvertes fondamentales de nos jours est d'avoir compris qu'il y a différents niveaux de description des phénomènes physiques qu'il ne faut pas confondre, niveaux qui présentent des objets et des méthodes spécifiques.

La constatation, de nos jours, qu'il n'y a pas de théorie générale des particules nucléaires et qu'on y trouve même des vocabulaires divers n'a rien de dramatique, mais elle le serait aux yeux des scientifiques du XIX<sup>e</sup> siècle et, en grande partie, aussi du XX<sup>e</sup>, se proposant de tout décrire en termes de positions et de vitesses d'éléments ou particules.

Le Groupe français de rhéologie a défini la rhéologie comme la science des relations entre les contraintes et les déformations d'un élément de volume compte tenu, le cas échéant, de leur histoire. La définition la plus usuelle est que la rhéologie est la science de l'écoulement et de la déformation de la matière ou, simplement, la science de l'écoulement, strictement d'accord avec la sémantique du mot rhéologie. Si l'on exclut le fluide idéal, on conclut qu'on a affaire à des phénomènes essentiellement irréversibles.

Les recherches des physicochimistes et des ingénieurs ont démontré que la description et l'évolution des systèmes dits macroscopiques pouvaient ou devaient se faire en termes de grandeurs telles que la pression, la température, la concentration, le degré d'avancement, toutes concernant un grand nombre de molécules.

En créant une fonction entropie, fonction extensive associée à la mesure de l'évolution dans le temps d'un système physicochimique, la thermodynamique associait à nouveau temps et irréversibilité, irréversibilité que la mécanique avait depuis longtemps exorcisée. De là découle la difficulté bien connue d'identifier la rhéologie à une mécanique appliquée.

Une forme plus élaborée du deuxième principe de la thermodynamique est le principe extrémal d'évolution, soit sous la forme de minimum de dissipation d'énergie, soit sous la forme de minimum de production d'entropie. On a bien démontré l'équivalence de ces deux principes, qui sont, à notre avis, seulement deux formes d'un même principe d'évolution, dont la forme définitive constitue probablement le défi fondamental soit pour la thermodynamique, soit pour la rhéologie, soit, essentiellement, pour une dynamique des processus, en général. Pourra-t-on arriver, de ces premiers pas, à bâtir une théorie cohérente comme la théorie d'Hamilton l'a été pour la mécanique? Voilà le défi qui s'impose à nous.

Il suffirait de constater que les processus physicochimiques, soit en laboratoire, soit surtout dans l'industrie, sont contrôlés par des variables physiques macroscopiques, pour comprendre l'importance fondamentale d'une dynamique cohérente des processus.

Déjà en 1920, de Donder insistait, contre le courant mécaniciste, sur le fait que les aspects d'irréversibilité ou de non-équilibre étaient indispensables en théorie chimique.

Je me souviens, avec une certaine émotion, de la première visite que j'ai rendue au vieux laboratoire de de Donder, où Prigogine, avec son enthousiasme particulier, m'a fait remarquer qu'on pouvait déjà progresser hors du sacré domaine linéaire. Oui, selon Prigogine, on y connaissait quelque chose de solide. Pour des conditions aux limites indépendantes du temps, la partie de la production d'entropie due aux variations des forces est non positive, bien que la différentielle respective :

$$d_X P = \int dv J_i dX_i \leq 0$$

ne soit pas, en général, une différentielle exacte.

L'exemple classique est la conduction de chaleur par un solide,  $J_i = W$  et  $X_i = \nabla T^{-1}$ , admettant, par simplicité de calcul que le solide est, du point de vue physique, à une dimension.

On introduit dans le bilan local de conservation d'énergie :

$$\rho \partial e / \partial t = - \nabla \cdot W$$

un facteur convenable,  $\partial T^{-1} / \partial t$ , arrivant ainsi à :

$$- \rho c / T^2 (\partial T / \partial t)^2 \leq 0$$

c'est-à-dire, à un terme de signe bien défini grâce à un facteur de stabilité thermodynamique, la chaleur spécifique,  $c > 0$ .

L'intégration de volume est faite par parties, les conditions stationnaires aux limites permettant d'éliminer l'intégrale de surface, et on arrive à :

$$\partial_x P/\partial t = - \int dv (\nabla \cdot W) \partial T^{-1}/\partial t \leq 0$$

Prigogine introduit, alors, la loi de Fourier :

$$W = -\lambda \nabla T,$$

arrivant à :

$$\Phi = 1/2 \int dv \lambda_0 T_0^2 (\nabla T^{-1})^2,$$

avec :

$$\partial\Phi/\partial t \leq 0$$

et  $T^2$  prenant des valeurs fixées pour l'état stationnaire.

$\Phi$  est une fonctionnelle avec une condition extrémale à l'état stationnaire :

$$\left( \frac{\delta\Phi}{\delta T} \right)_{T_0} = 0,$$

que Prigogine appelle potentiel local. Il considère comme cas général un système ouvert présentant des phénomènes irréversibles correspondant à la conductibilité calorifique, à la diffusion et à des réactions chimiques. Des arguments parallèles sont possibles grâce à des termes de stabilité de diffusion en termes de potentiels chimiques.

Le mélange de variables fixes avec des variables fluctuantes dans le potentiel ou le lagrangien a été bien critiqué, mais le point le plus criticable serait l'introduction même des lois macroscopiques avec la nuance de ne pas forcer les coefficients de ces lois à être constants, permettant, ainsi, un développement en série des coefficients et une évaluation de ceux-ci par une méthode self-consistante, avec une technique du type Rayleigh-Ritz.

Toute la théorie admet, bien sûr, la validité des relations locales de Gibbs-Duhem, dérivées des travaux célèbres de Gibbs sur l'équilibre des substances hétérogènes. C'est une circonstance heureuse que de telles relations soient valables même pour des réactions chimiques très loin de l'équilibre. Il faut citer, à propos, l'analyse de Kluitenberg des relations locales pour des systèmes viscoélastiques et plastiques, s'appuyant sur le concept de relaxation locale de Eckart.

L'école hongroise de Gyarmati et collaborateurs s'intéresse à l'analyse d'un Lagrangien :

$$L = \rho \dot{s} - \psi,$$

$\psi$  étant le potentiel de dissipation d'Onsager en fonction des forces :

$$\psi = 1/2 L_{ik} X_i X_k.$$

Pour le cas classique de conduction de chaleur par un solide, on a, respectivement :

$$\dot{s} = c/T \partial T/\partial t;$$

$$\Psi = 1/2 \lambda (\nabla T)^2;$$

$$L = \rho c/T \partial T/\partial t - 1/2 \lambda (\nabla T)^2.$$

La variation  $\delta \int dv L$  se traduit alors par :

$$\int dv \delta T [\rho c \partial T/\partial t - \lambda \nabla (\nabla T)] = 0$$

d'où,  $\delta T$  étant arbitraire :

$$\rho c \partial T/\partial t = \lambda \nabla (\nabla T),$$

qui est la loi de Fourier. Ce résultat est très intéressant. La loi du processus irréversible est, exactement, la condition extrême du Lagrangien.

Cette théorie est plus détaillée et, à notre avis, plus utile pour les applications que celle de Prigogine et Glandsdorff. Pour le domaine non-linéaire, Gyarmati est plus prudent que Prigogine en faisant dépendre l'extension de la structure force-flux aux domaines non-linéaires de l'existence de relations de symétrie d'ordre supérieur.

Heisenberg a bien remarqué que, en physique, il n'y a vraiment pas de phénomènes linéaires ou non-linéaires, la linéarité étant plutôt une stratégie de calcul qu'un aspect physique essentiel.

Un système thermodynamique est, du point de vue de la mécanique statistique, un système microcanonique avec un grand nombre de degrés de liberté, dont la plus grande partie est interne du point de vue macroscopique. C'est sur le caractère conservatif et non gyroscopique du système que Onsager a bâti ses relations et sa théorie. La symétrie par rapport au temps de la fonction de corrélation :

$$\overline{x_i(t) x_k(t + \tau)} = \overline{x_i(t) x_k(t - \tau)}$$

n'a, évidemment, rien à voir avec l'hypothèse sur le caractère linéaire ou non des relations entre variables macroscopiques intervenant dans la loi d'irréversibilité, traduite par des fonctions  $X_i(\dot{x}_k)$ , entre les forces et les flux, respectivement.

Si nous considérons un processus adiabatique, le travail produit va se transformer en énergie interne :

$$X_i \dot{x}_i = \Delta \dot{U} > 0.$$

Si nous fixons les valeurs des forces en  $X_{i0}$  les vitesses vont fluctuer autour de valeurs moyennes  $\dot{x}_{k,m}$ , avec des fluctuations :

$$\delta \dot{x}_k = \dot{x}_k - \dot{x}_{k,m}.$$

Si, maintenant, nous admettons, comme Onsager, que les fluctuations sont lentes par rapport aux vitesses moléculaires, alors on a :

$$X_k \dot{x}_k = X_k \dot{x}_{k,m},$$

ou :

$$X_k \delta \dot{x}_k = 0,$$

donc les forces sont orthogonales aux surfaces  $U = C^{\text{te}}$  au point  $\dot{x}_k$  :

$$X_k = a(\dot{x}_i) \partial U / \partial \dot{x}_k,$$

$a(\dot{x}_i)$  étant une fonction arbitraire des  $\dot{x}_i$ . En conséquence, on peut assurer l'existence de relations de symétrie :

$$\partial X_k / \partial \dot{x}_i = \partial X_i / \partial \dot{x}_k$$

sans restriction de linéarité.

Pour un corps parfaitement plastique, la relation de von Mises, selon Ziegler, se justifie parce que le potentiel plastique a des propriétés analogues à l'énergie interne pour un processus adiabatique. Nous y sommes aussi arrivés <sup>(1)</sup> en construisant un lagrangien inspiré de la théorie de Gyarmati.

Nous avons aussi démontré <sup>(2)</sup> que, pour un fluide viscoélastique ou de Reiner-Rivlin, il existe une symétrie complète entre composantes des tenseurs de tension et des vitesses de déformation, ce qui assure l'existence d'un potentiel de dissipation. A ce propos, Truesdell assure, à partir de son principe d'indifférence des repères, l'isotropie de tous les écoulements rhéologiques pour lesquels on admet que le tenseur des tensions a la forme d'un produit d'un tenseur de viscosité par le gradient des vitesses :

$$\mathbf{T} = \mathbf{W} \nabla (\dot{x}_i).$$

Il nous est aussi agréable de faire référence aux travaux de Edelen, en particulier à son potentiel  $\psi(X, w)$  exprimé avec les forces et les variables thermodynamiques extensives, respectivement. Selon Edelen, les processus macroscopiques doivent être admissibles au sens d'une thermodynamique plus générale que celles de Onsager, Prigogine ou Gyarmati, thermodynamique qu'il a bâtie sous le nom de « Primitive thermodynamics ». Dans ce cadre, il a démontré que le tenseur de viscosité est admissible s'il admet  $\psi(d_{ik}, w)$  comme potentiel de  $d_{ik}$ , le tenseur déviateur, de même que l'énergie libre  $A$  est potentiel pour le tenseur de Piola-Kirchoff pour un corps élastique.

Dans les entretiens que nous avons eus avec Edelen et Rivlin à la Lehigh University, nous avons fait remarquer que la « primitive thermodynamics » unifiait la dynamique viscoélastique avec la dynamique plastique, la distinction étant l'existence, dans le cas plastique, de discontinuités du potentiel de

<sup>(1)</sup> FRIAS [2].

<sup>(2)</sup> FRIAS [3].

dissipation à  $X = 0$ . Edelen a bien accepté ce commentaire et nous a fait remarquer que le potentiel de dissipation était toujours une fonction d'arguments qui sont des fonctions homogènes de degré un du tenseur vitesse de déformation.

Nous avons bien remarqué <sup>(1)</sup> que la recherche de potentiels ou fonctions de dissipation serait vraisemblablement la clé des progrès fondamentaux en rhéologie. Nous sommes bien d'accord avec Prigogine quand il remarque que l'intérêt des relations de Onsager est aujourd'hui bien surpassé et qu'il y a dans la science de l'irréversibilité d'autres domaines bien plus importants, comme sa théorie des structures dissipatives, qu'il a, avec un succès éclatant, introduit en biologie. La théorie de Onsager a eu, néanmoins, le mérite de construire un potentiel de dissipation et d'attirer l'intérêt des chercheurs sur la structuration des processus irréversibles.

Il faut toujours se référer aux travaux fondamentaux de Biot, inspirés par les relations de Onsager, et les précisions et développements précieux faits ici par Mandel et aussi Zarka, Zaoui, Halphen et Huet. Je voudrais aussi faire référence aux travaux de Weber et à ceux de Sidoroff et de Persoz.

Nous voudrions faire une remarque finale. Pour remplir l'hiatus entre rhéologie et science des matériaux, certaines précisions sur des catégories générales d'équations constitutives semblent d'une portée fondamentale pour construire les lagrangiens et bâtir les potentiels. Il suffirait d'en rappeler les matériaux à élasticité entropique. Il nous semble qu'il y aura une réaction importante à mettre à jour entre science des matériaux et rhéologie.

Nous remercions la J.N.I.C.T., autorité portugaise de recherche scientifique et technologique, pour certaines facilités qui nous ont été accordées.

---

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D. EDELEN. — *Int. J. Engng. Sci.*, 1972.
- [2] M. FRIAS. — *Act. Con. Mec. Teor. Apl., Mec. M. Contin. e Termomec.*, Lisboa, 1974.
- [3] M. FRIAS. — VII Int. Cong. Rheolog., Gothenb., 1976.
- [4] P. GLANSDORFF et I. PRIGOGINE. — *Physica XX*, 773-780, 1954.
- [5] I. GYARMATI. — *Ann. Phys.*, 7-23, 353-377, 1969.
- [6] G. KLUITENBERG. — *Physica*, 28, 217-232, 1962.
- [7] J. MANDEL. — *Cahiers Rhéo.*, 4-1, 181-190, 1967.

<sup>(1)</sup> FRIAS [3].



# RELAXATION ANISOTHERME DES ARMATURES DE PRÉCONTRAINTE SOUMISES A L'ÉTUVAGE <sup>(1)</sup>

*(Anisothermal relaxation of pre-tensioning reinforcement  
submitted to steam curing)*

*(Anisotherme Relaxation von vorgespannten  
Armierungen bei Ausheizung)*

par

J. DARDARE <sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — *Au cours de cette étude, dont l'objectif final est la détermination des pertes de précontrainte qui se produisent en cours et après fabrication d'éléments précontraints par adhérence dont le durcissement du béton est accéléré par un étuvage, on examine l'évolution de la relaxation d'une armature de précontrainte durant et après l'application d'un cycle thermique.*

*Les résultats montrent que l'application du cycle thermique permet d'obtenir rapidement en fin de cycle une fraction importante de la relaxation produisant ainsi en quelque sorte une stabilisation de cette perte.*

**ABSTRACT.** — *The object of this study is to determine the loss in prestressing which occurs in the course of and after the manufacturing of pre-tensioned concrete elements, whose hardening is accelerated by steam curing. The relaxation behaviour of the prestressing reinforcement is examined during and after the application of the thermal curing cycle.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Ingénieur E.T.P., Centre d'études et de recherches de l'industrie du béton manufacturé.

*The result show that a major part of the relaxation effect is rapidly obtained by the end of the thermal curing cycle, thus leading to a sort of stabilization of the loss in prestressing.*

*ZUSAMMENFASSUNG. — Im Verlauf dieser Studie, deren Hauptziel die Bestimmung des Vorspannungsverlustes ist, der sich bei und nach der Herstellung von durch Adhäsion vorgespannten Elementen ergibt, bei denen die Betonhärtung durch Ausheizung beschleunigt wird, wird der Verlauf der Relaxation einer vorgespannten Armierung während und nach einem Temperaturwechselversuch untersucht.*

*Die Ergebnisse zeigen, dass die Anwendung eines thermischen Zyklus erlaubt, am Ende des Zyklus schnell einen Grossteil der Relaxation zu erreichen und so gewissermassen diesen Verlust zu stabilisieren.*

## 1. POSITION DU PROBLÈME

L'étude, effectuée au C.E.R.I.B. <sup>(1)</sup>, sur l'évolution de la relaxation des armatures de précontrainte, pendant et après l'application d'un cycle thermique, entre dans un thème plus général qui est la détermination de l'ensemble des pertes qui se produisent dans des éléments précontraints par adhérence pour lesquels le durcissement du béton est accéléré par un étuvage.

La précontrainte par adhérence consistant, du point de vue technologique, à mouler l'élément autour de son armature préalablement tendue entre deux points fixes et à reporter, par l'intermédiaire de l'adhérence, la force supportée par l'armature, il est nécessaire, si l'on veut dresser le bilan final des pertes, de déterminer celles qui interviennent au cours des différentes phases de la vie de l'élément. Ces phases sont au nombre de trois :

- *la phase de fabrication* qui s'étend entre l'instant où l'armature est tendue sur le banc de précontrainte et celui où elle est relâchée;
- *la phase de mise en précontrainte* qui correspond au relâchement des armatures;
- *la phase qui suit la mise en précontrainte.*

En ce qui concerne plus particulièrement la perte due à la relaxation des armatures, il y a donc lieu de considérer la part qui s'effectue au cours de la phase de fabrication et celle qui a lieu après la mise en précontrainte de l'élément.

En cours de fabrication, la perte par relaxation est une perte par relaxation pure, l'armature bloquée à chacune de ses extrémités conservant une longueur constante. Cette perte est donc une fonction du temps qui dépend de la nuance de l'acier, de la contrainte initiale et du cycle thermique appliqué.

<sup>(1)</sup> Centre d'études et de recherches de l'industrie du béton manufacturé.

Après mise en précontrainte, c'est-à-dire après relâchement des armatures, la perte par relaxation s'effectue sous une longueur continuellement décroissante par suite de l'effet combiné du fluage et du retrait du béton. En outre, la tension initiale qui règne dans les armatures sitôt après leur relâchement est réduite par suite des pertes par relaxation des armatures et par retrait du béton effectués en cours de fabrication, auxquelles il convient d'ajouter la perte due au raccourcissement instantané du béton qui intervient au moment de la mise en précontrainte et celle due à la perte par dilatation thermique non récupérable lors du refroidissement. A ce sujet, on rappelle que l'armature subit, au cours de la montée en température, une diminution de contrainte due à la dilatation thermique, entraînant une perte pouvant être récupérée en partie au moment du refroidissement, la partie récupérable dépendant de l'instant où l'acier et le béton se comportent monolithiquement et de l'évolution de leurs modules d'élasticité au cours des phases de montée en température.

Pour fixer les idées, si l'adhérence acier-béton devient effective au début de la phase de montée en température, la perte entraînée par la dilatation thermique est pratiquement récupérée au refroidissement; *a contrario*, si l'adhérence ne devient effective qu'à la fin de la phase de montée en température, la perte par dilatation thermique demeure.

#### 1.1. ÉVOLUTION DE LA PERTE PAR RELAXATION DURANT LA PHASE DE FABRICATION DANS LE CAS OÙ L'ON A TRAITEMENT THERMIQUE.

Les traitements thermiques retenus pour accélérer le durcissement du béton afin d'obtenir dans les meilleurs délais une résistance suffisante permettant de reporter sur le béton la force contenue dans l'armature, sont en général des étuvages comprenant quatre phases (fig. 1) :

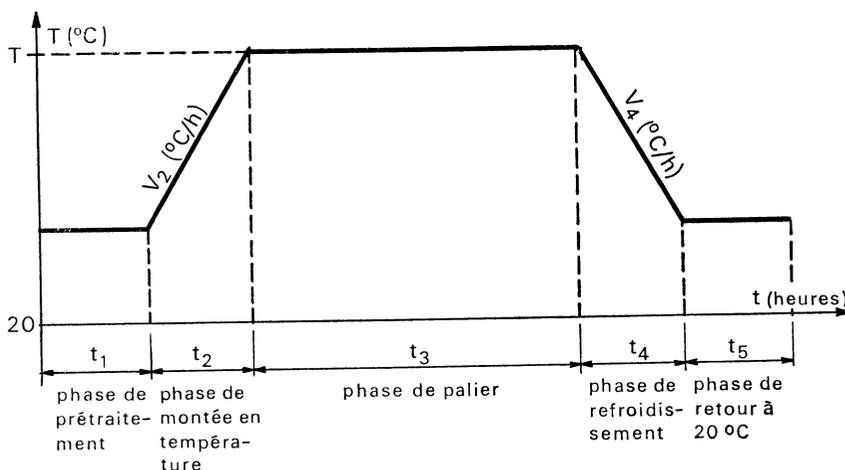


FIG. 1

— *une phase de prétraitement ou de préprise*, d'une durée comprise entre 0 et 4 heures, au cours de laquelle la température est, à la chaleur d'hydratation du béton près, celle de l'atmosphère ambiante;

— *une phase de montée en température* durant laquelle la température croît avec le temps suivant un gradient de montée en température de l'ordre de 20 °C/h à 30 °C/h;

— *une phase de maintien à une température constante* de l'ordre de 60 °C à 80 °C appliquée pendant une durée de 4 heures à 8 heures;

— *une phase de refroidissement* qui se fait naturellement et qui, par conséquent, dépend de la taille du produit, de la conductibilité thermique du béton et de la température ambiante.

Au niveau de l'évolution de la relaxation effectuée au cours de la fabrication, on voit que celle-ci comporte elle aussi, comme le montrent d'ailleurs les essais effectués, quatre parties qui reflètent les différentes phases du cycle thermique.

Lors de la phase de prétraitement la relaxation s'effectue à 20 °C avec, comme valeur de la contrainte initiale, celle qui règne dans l'armature après sa mise en tension.

Au cours de la phase de montée en température, la relaxation, pour laquelle la contrainte initiale à considérer est celle atteinte en fin de prétraitement, s'effectue sous contrainte continuellement décroissante du fait de la dilatation gênée de l'armature. Elle est, par ailleurs, activée par suite de l'augmentation de température.

Au cours de la phase de maintien à la température de palier, bien que la contrainte initiale relative à cette phase soit considérablement diminuée du fait des pertes par relaxation et par dilatation thermique qui se sont effectuées au cours des phases précédentes, la relaxation continue à croître par suite de la température élevée sous laquelle elle se produit.

Au cours de cette phase de refroidissement la relaxation s'effectue avec, comme valeur de la contrainte initiale, celle atteinte en fin de la phase de palier à laquelle il convient de retrancher, dans le cas où la mise en précontrainte a lieu au début de la phase de refroidissement; la perte due au raccourcissement élastique du béton.

## 1.2. ÉVOLUTION DE LA PERTE PAR RELAXATION QUI S'EFFECTUE APRÈS LA MISE EN PRÉCONTRAINTE C'EST-A-DIRE APRÈS RELÂCHEMENT DES ARMATURES.

Après relâchement des armatures, la perte par relaxation s'effectue sous une contrainte initiale réduite étant donné la chute de contrainte due aux différentes pertes déjà effectuées. Elle a lieu, par ailleurs, sous une longueur décroissante du fait de l'action combinée du fluage et du retrait du béton.

Le problème posé par l'évolution de la perte par relaxation des armatures dans le cas où le béton est traité thermiquement est donc double. D'une part, il convient de déterminer la valeur de la perte par relaxation atteinte à la fin du traitement, ou plus exactement au moment de la mise en précontrainte, d'autre part il y a lieu de connaître l'influence du traitement thermique sur les

caractéristiques rhéologiques futures de l'armature, ceci afin de voir la part de relaxation restant à effectuer après traitement.

Pour répondre à ce problème, plusieurs types d'essais ont été effectués au C.E.R.I.B.

## 2. ESSAIS RÉALISÉS

Les essais réalisés au C.E.R.I.B. dont l'objet, on le rappelle, est l'étude de l'influence d'un traitement thermique sur la relaxation des armatures, ont porté sur des aciers à relaxation normale (R.N.) et à très basse relaxation (T.B.R.) tendus initialement à 70 % ou à 80 % de leur résistance réelle de rupture.

Les différentes caractéristiques de ces aciers sont données par le tableau I.

TABLEAU I

	Acier à relaxation normale	Acier à très basse relaxation
		cranté
<i>Caractéristiques géométriques :</i>		
Diamètre.....	5 mm	5 mm
Section nominale.....	19,7 mm	19,7 mm <sup>2</sup>
<i>Composition chimique :</i>		
C .....	0,725 %	0,800 %
Mn .....	0,700 %	0,750 %
Si .....	0,235 %	0,205 %
S .....	0,022 %	0,014 %
P .....	0,019 %	0,023 %
Ni .....	0,042 %	
Cr .....	0,051 %	
Cu .....	0,059 %	
<i>Caractéristiques mécaniques :</i>		
Module d'élasticité à 20° C.....	19 906 hb	21 670 hb
Limite d'élasticité conventionnelle à 1 <sup>o</sup> /100.	3 350 daN ( $\sigma_T=170$ hb)	3 480 daN ( $\sigma_R=176,64$ hb)
Limite de rupture.....	3 590 daN ( $\sigma_R=182,2$ hb)	3 910 daN ( $\sigma_R=199$ hb)

Trois types d'essai ont été retenus :

— des essais isothermes à 20 °C qui devaient servir de référence aux essais effectués à température variable (série A);

— des essais avec cycle thermique pour lesquels on supposait que la perte par dilatation thermique était entièrement récupérée au refroidissement (série B);

— des essais avec cycle thermique pour lesquels on supposait que la perte par dilatation thermique était conservée. Pour ce faire, l'armature était, en fin de cycle de traitement, détendue d'une force égale à celle correspondant à la surtension qu'aurait provoquée la récupération de la dilatation thermique.

Les figures 2 et 3 donnent le détail de l'appareillage mis au point au C.E.R.I.B. pour la réalisation de ces essais.

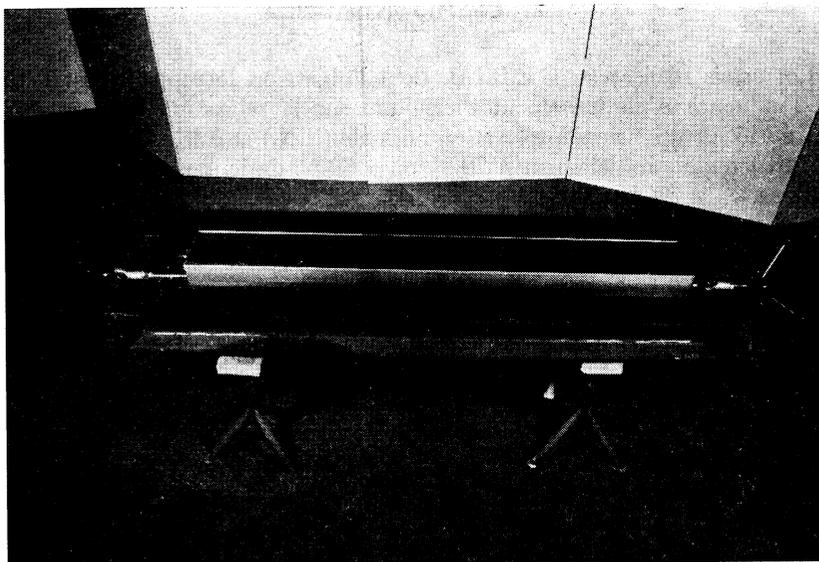


FIG. 2. — Vue générale du banc de relaxation

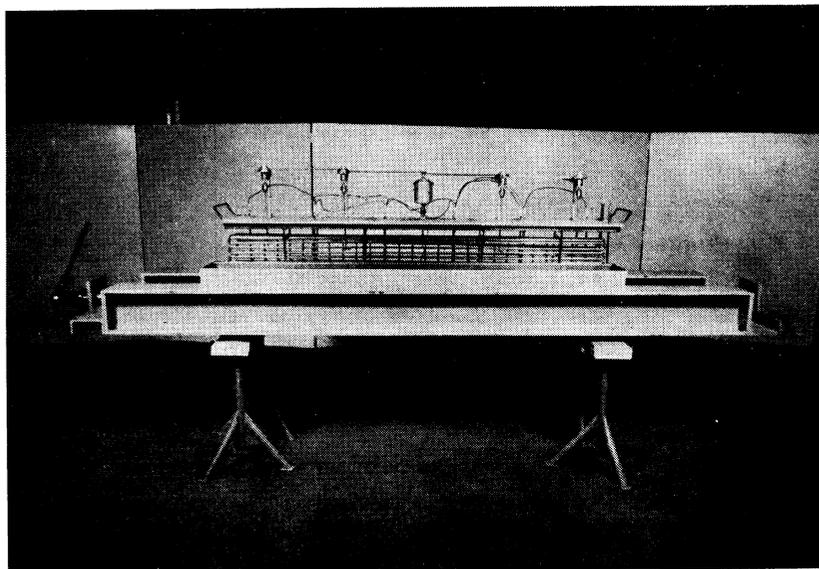


FIG. 3. — Vue générale du système de chauffage et de refroidissement

Les figures 4 et 5 fournissent, quant à elles, les profils des cycles retenus pour cette expérimentation.

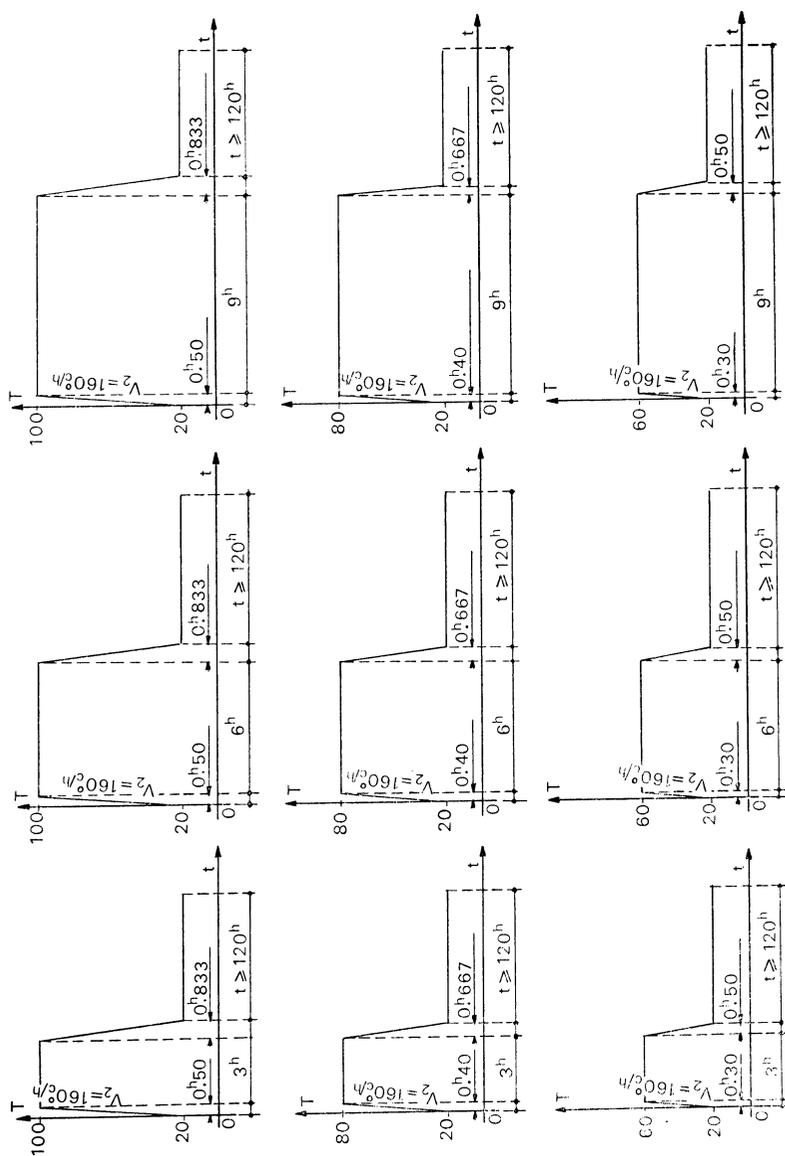


FIG. 4. — Paramètres des cycles thermiques étudiés lors des essais de la série B

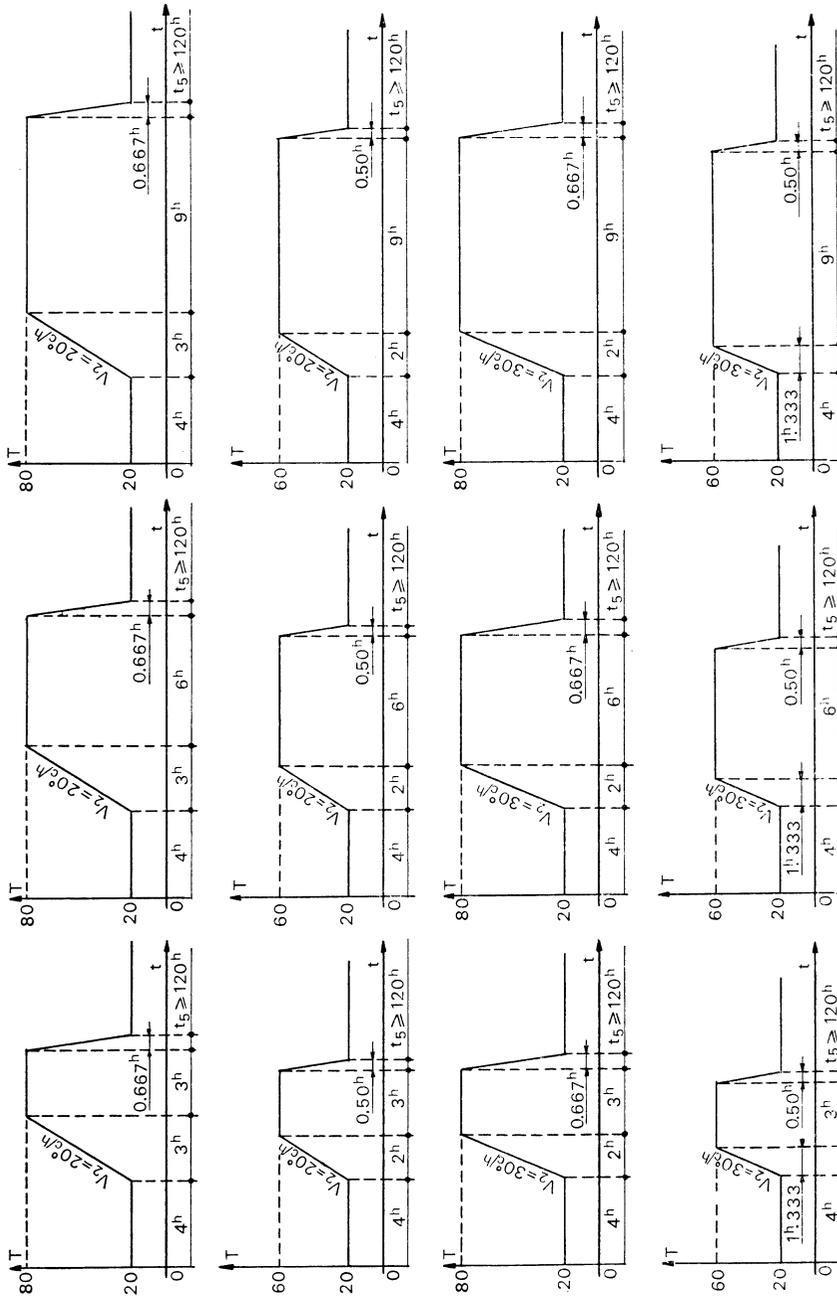


FIG. 5. — Paramètres des cycles thermiques étudiés lors des essais de la série C

### 3. RÉSULTATS DES ESSAIS

#### 3.1. RÉSULTATS DES ESSAIS ISOTHERMES A 20 °C (série A).

La figure 6 fournit la variation de la perte par relaxation en fonction du temps pour les deux nuances d'acier utilisées.

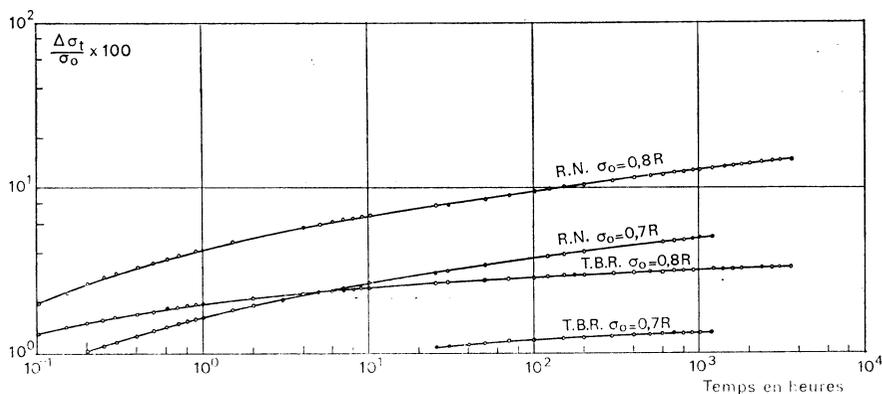


FIG. 6. — Résultats des essais de relaxation à 20 °C, série A

Cette variation comprend deux parties :

Au cours des premières heures de l'essai, l'évolution de la relaxation en fonction du temps peut être représentée par une fonction de la forme :

$$R_t = \frac{\Delta\sigma_t}{\sigma_0} \times 100 = \frac{\sigma(0) - \sigma(t)}{\sigma(0)} \times 100 = at^b$$

où l'on désigne par :

$\sigma(0)$  : la contrainte initiale,

et par :

$\sigma(t)$  : la contrainte restant dans l'armature au temps  $t$ .

A partir d'un certain moment, la variation de la vitesse de la relaxation, qui décroît continuellement avec le temps, est donnée par la relation suivante :

$$\log V_{R(t)} = \log B - A \log t$$

et la loi de variation de la relaxation correspondante peut donc se mettre sous la forme :

$$R(t) = a' t^{b'} + Cte$$

avec :

$$a' = \frac{B}{1-A}$$

$$b' = 1 - A$$

$$C^{te} = a' t_0^{b'}$$

Il est à noter à ce sujet que l'instant à partir duquel la seconde loi s'applique dépend de la nuance de l'acier, de la tension initiale et de la température à laquelle se déroule l'essai.

Un programme de régression établi à partir des valeurs obtenues au cours des essais effectués à 20 °C, a permis d'établir une loi de variation de la relaxation en fonction du temps de la forme :

$$R_t = \frac{\sigma_{(0)} - \sigma_{(t)}}{\sigma_{(0)}} \times 100 = ct^m$$

cù  $c$  et  $m$  sont deux constantes qui prennent pour les deux nuances d'acier étudiées les valeurs données par le tableau II :

TABLEAU II

Contrainte initiale	Acier à relaxation normale	Acier à très basse relaxation
0,8 R (hb)	pour 1 h < t = 4 h c = 4,255 m = 0,206	pour 1 h < t = 4 h c = 1,969 m = 0,09995
	pour t > 4 h c = 4,8659 m = 0,13857	pour t > 4 h c = 2,17 m = 0,0521
0,7 R (hb)	pour 1 h < t = 4 h c = 1,654 m = 0,207	pour 1 h < t = 4 h c = 0,7629 m = 0,1195
	pour t > 4 h c = 1,878 m = 0,1418	pour t > 4 h c = 0,85071 m = 0,06470

## 3.2. INFLUENCE DE LA TENSION INITIALE.

On notera, à l'examen des résultats obtenus au cours de ces essais, que les valeurs de la relaxation et de sa vitesse croissent avec la contrainte initiale.

On constate, en effet, lorsque la valeur de la contrainte initiale passe de 0,7 R à 0,8 R que la relaxation à 1 000 heures, augmente de :

4,97 % à 12,69 % pour l'acier à relaxation normale,  
et de :

1,32 % à 3,12 % pour l'acier à très basse relaxation.

Afin de tenir compte de l'influence de la contrainte initiale ( $\sigma_{(0)}$ ) sur la vitesse de relaxation, on propose comme loi de variation de celle-ci en fonction du temps  $t$ , dans le cas où l'essai se déroule à 20 °C :

$$V_{R(t)} = \frac{d(R_t)}{dt} = C_1 e^{(k \sigma_0 - C_2 Lgt)} \quad (\text{pour } t \geq 4 \text{ h})$$

qui conduit pour la relaxation  $R_t$  à l'expression :

$$R_t = \frac{\sigma_{(0)} - \sigma(t)}{\sigma_0} \times 100 = C_1 \frac{t}{1 - C_2} e^{(k \sigma_0 - C_2 Lgt)} \quad (\text{pour } t \geq 4 \text{ h})$$

L'application de ces expressions aux essais réalisés conduit à prendre pour  $t$  supérieur à 4 heures :

$C_1 = 4,3010 \cdot 10^{-4}$   $k = 5,028 \cdot 10^{-2}$   $C_2 = 0,8598$  pour l'acier à relaxation normale (RN);

$C_1 = 6,0433 \cdot 10^{-4}$   $k = 3,262 \cdot 10^{-2}$   $C_2 = 0,9416$  pour l'acier à très basse relaxation (T.B.R.).

On notera que les constantes  $C_1$ ,  $k$  et  $C_2$  sont indépendantes de la tension initiale pour les deux nuances d'acier étudiées lorsque l'essai se déroule à une température constante de 20 °C.

## 3.3. RÉSULTATS DES ESSAIS AVEC CYCLES THERMIQUES.

*Résultats des essais de la série B.*

Ces essais, qui ont porté uniquement sur des aciers à relaxation normale pour lesquels la perte par dilatation thermique était récupérée au refroidissement, avaient pour objet de voir si la perte ( $\Delta\sigma_{Tr}$ ) due à l'influence de la température sur la relaxation, était réversible ou non.

On donne, figure 7, la variation en fonction du temps de la perte totale (relaxation + dilatation thermique) obtenue au cours de l'un des essais de la série B.

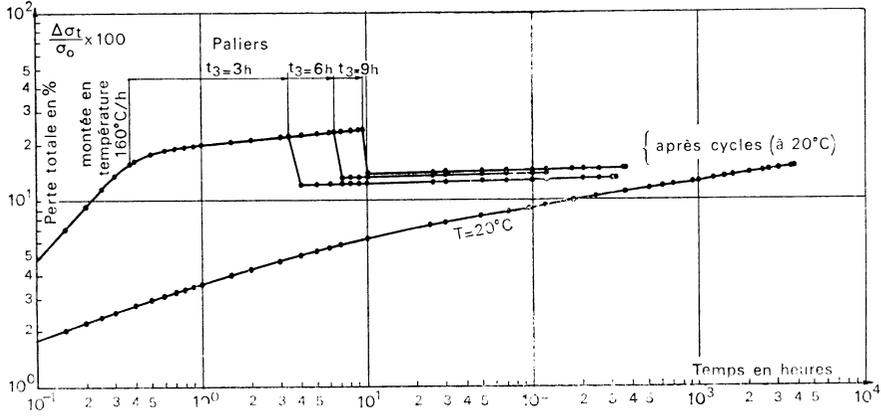


FIG. 7. — Essai de relaxation sur  $\varnothing$  RN  
 Température de palier 80 °C  
 $\sigma_0 = 146,27$  hb  
 Comparaison de l'effet de palier sur la perte totale au bout de 120 heures à 20 °C.

On a, par ailleurs schématisé figure 8, un essai de ce genre en représentant le logarithme de la perte totale  $\frac{\Delta\sigma_t}{\sigma_0} \times 100$  en fonction du logarithme du temps.

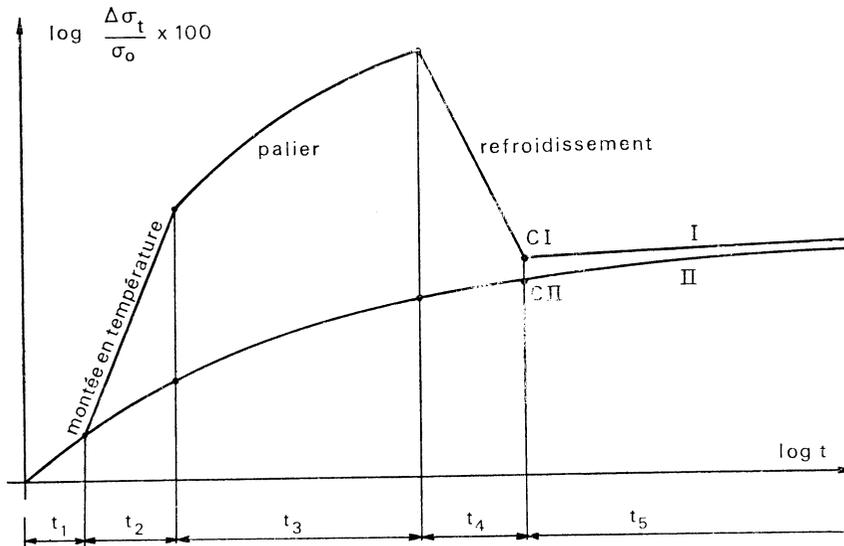


FIG. 8

Si l'on se reporte aux courbes (I) et (II) de cette figure, on constate, en fin de refroidissement — temps  $t_4$  — que la perte totale  $\Delta\sigma_{tI}$  relative au fil chauffé (point C<sub>I</sub>) est supérieure à celle ( $\Delta\sigma_{tII}$ ) relative au fil conservé à 20 °C (point C<sub>II</sub>).

Étant donné que la perte  $\Delta\sigma_d$  due à la dilatation thermique est, dans ce type d'essai, entièrement récupérée au refroidissement, l'inégalité  $\Delta\sigma_{tI} > \Delta\sigma_{tII}$  indique que la perte due à l'effet de la température sur la relaxation est irréversible. Cette inégalité montre, en outre, que la valeur de la contrainte qui règne après refroidissement dans le fil ayant subi le cycle thermique est inférieure à celle qui existe dans le fil conservé à 20 °C au bout d'un temps égal à la durée du cycle. *Le traitement thermique active par conséquent la perte par relaxation.*

La détermination des vitesses de relaxation à partir des résultats expérimentaux montre que celles-ci deviennent faibles après retour à la température ambiante.

*Le fait que la vitesse de relaxation devient faible et que la perte par relaxation évolue peu après l'application du cycle thermique montre que ce dernier stabilise en partie la perte par relaxation. Il s'ensuit pour la nuance d'acier étudiée — un acier à relaxation normale — que la valeur à terme de la relaxation de l'acier étuvé pourrait être inférieure à celle présentée par le même acier non étuvé tendu initialement à la même valeur de contrainte.*

Cependant, deux questions restent posées.

La première est de savoir si à terme l'évolution suivie par la relaxation après l'application du cycle thermique est telle que la courbe représentative de l'évolution de l'acier étuvé coupe celle de l'acier non étuvé ou bien si elle tend asymptotiquement vers cette dernière à partir d'un certain temps.

La seconde question que l'on peut se poser est de savoir si l'on ne peut pas avoir, pour certaines nuances d'armature ou pour certains cycles thermiques une perte après traitement supérieure à celle obtenue au bout d'un temps infini par la même armature conservée à 20 °C.

#### *Résultats des essais de la série C.*

La figure 9 donne la forme du diagramme représentant la variation de la perte totale en fonction du temps dans le cas où la perte par dilatation thermique n'est pas récupérée au refroidissement.

*La première partie* correspond à la phase de prétraitement. Effectuée à 20 °C, la perte par relaxation qui est acquise à la fin de cette période est égale à celle trouvée lors des essais de la série A au bout d'un temps égal à celui du prétraitement.

*La seconde partie* correspond à la phase de montée en température. Au cours de cette phase, la relaxation s'effectue sous une contrainte continuellement décroissante par suite de la dilatation thermique et sous une température continuellement croissante.

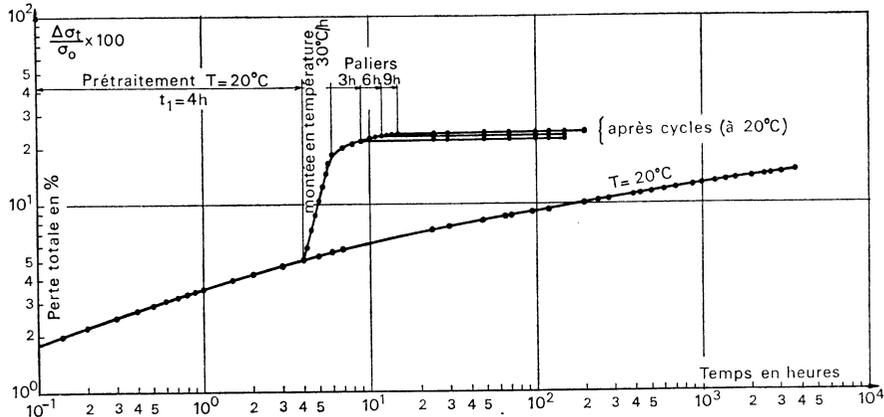


FIG. 9. — Essai de relaxation sur  $\varnothing$  5 RN  
 Température de palier 80 °C  
 $\sigma_0 = 146,27$  hb  
 Comparaison de l'effet de palier sur la perte totale au bout  
 de 120 heures à 20 °C.

Au cours de cette phase, la relaxation est à la fois « freinée » par suite de la diminution de contrainte et « accélérée » par l'activation thermique due à l'accroissement de la température. L'ensemble des résultats montre cependant que la relaxation acquise en fin de montée en température est supérieure à celle qui se serait produite durant le même laps de temps pour le même acier conservé à 20 °C; ce qui tend à prouver par conséquent que l'activation thermique prédomine sur la chute de tension.

Par ailleurs, on peut faire les constatations suivantes :

Une augmentation de la vitesse de montée en température se traduit par une diminution du temps de montée en température et ainsi par une diminution de la perte par effet thermique sur la relaxation.

L'effet thermique sur la relaxation dépend de la nuance de l'acier. Elle est plus importante pour les aciers à relaxation normale que pour les aciers à très basse relaxation. L'effet thermique est d'autant plus important que la valeur de la contrainte initiale est plus élevée. Le gradient thermique provoque ainsi un accroissement de perte d'autant plus élevé qu'il est appliqué tôt après la mise en tension de l'armature.

La troisième partie correspond à la phase de maintien à la température de traitement. Au cours de cette phase, bien que la température de l'essai soit élevée, la relaxation évolue relativement peu par suite de la valeur réduite de la contrainte qui règne dans l'armature au début de cette phase.

On a représenté schématiquement, figure 10, la variation de la perte par relaxation qui se produit au cours de cette phase en fonction de la durée de maintien à la température de palier.

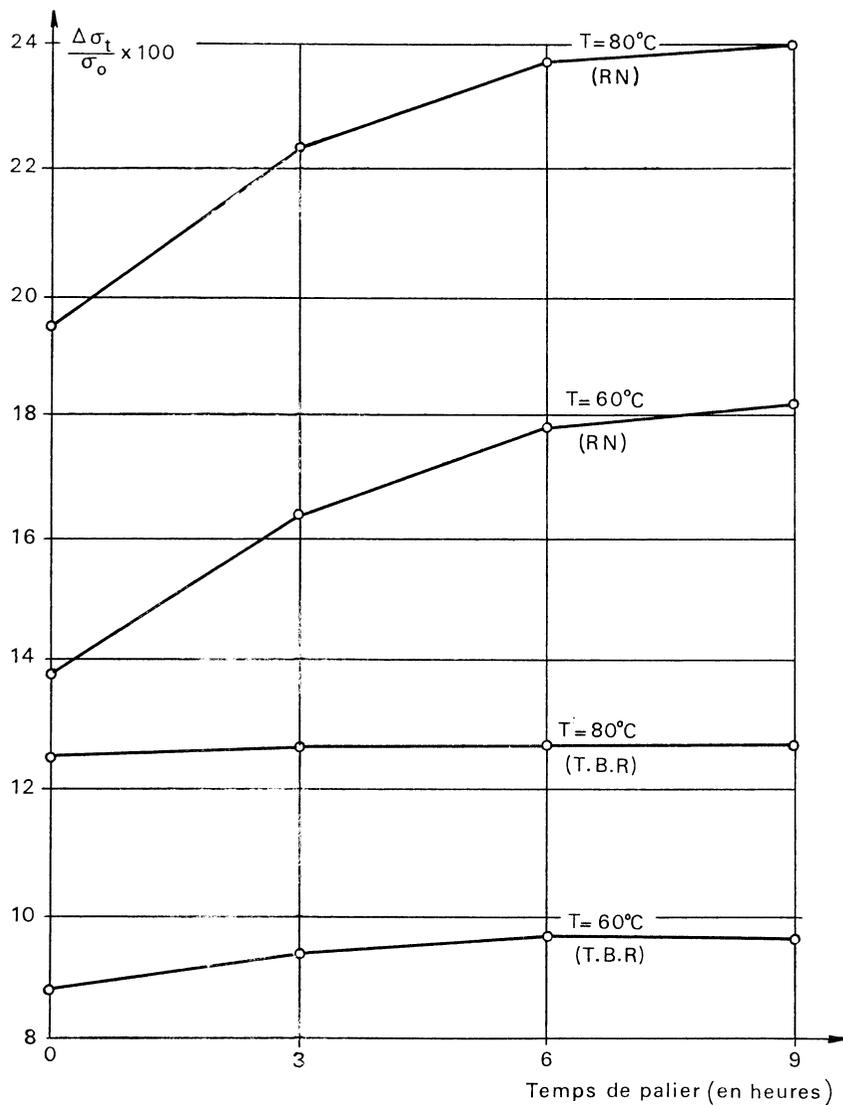


FIG. 10

On constate sur ce diagramme que la variation de la perte par relaxation est plus importante au cours des premières heures de traitement qu'en fin de traitement et qu'elle est, par ailleurs, plus élevée pour les aciers à relaxation normale que pour les aciers à très basse relaxation ce qui tendrait à montrer qu'un acier à relaxation normale est plus sensible à l'action de la température qu'un acier à très basse relaxation.

La quatrième et la cinquième parties correspondent respectivement à la phase de refroidissement et à la poursuite de l'essai à 20 °C.

Pour cette série d'essais où l'on a empêché artificiellement la récupération de la perte par dilatation thermique en détendant l'armature d'une force égale à la surtension qu'elle aurait provoquée, on constate que la relaxation n'évolue que très peu au cours de ces phases par suite de la valeur très réduite de la contrainte qui règne dans l'armature au départ de la quatrième phase.

#### 4. APPROCHE THÉORIQUE DU PROBLÈME

L'approche théorique qui a été faite du problème n'avait pas d'autre objectif que d'essayer de déterminer, au moyen des connaissances actuelles en matière des phénomènes du fluage et de la relaxation, la valeur de la perte par relaxation acquise en fin de traitement thermique. La connaissance de la valeur de la perte atteinte à ce stade revêt en effet, une grande importance sur le plan pratique, étant donné, comme on l'a rappelé précédemment, que le reliquat restant à effectuer pour la relaxation dans la phase de postfabrication entraînera une perte de précontrainte relativement faible par suite du retrait et du fluage du béton qui agissent en concomitance. Aussi, cette approche théorique n'a-t-elle pas d'autre ambition que de fournir une méthode de calcul approchée permettant d'estimer la perte par relaxation au cours des différentes phases du traitement thermique. Cette méthode de calcul, bien que conduisant à une précision acceptable pour les différents cas présentement étudiés, peut cependant ne pas être applicable à toutes les nuances d'acier, par suite des modifications de structure que pourrait entraîner au niveau du matériau l'application de tel ou tel traitement thermique. Par ailleurs, l'action de la température peut avoir sur le comportement rhéologique du matériau, certaines incidences qui peuvent ne pas être prises en compte par une telle approche. En outre, ne disposant pas d'essais isothermes effectués à des températures supérieures à 20 °C, on s'est orienté vers des méthodes permettant l'établissement d'équivalences température-temps. Pour cela, on a retenu l'hypothèse sur laquelle est fondée la théorie de l'« épuisement thermo-activité des dislocations » à savoir que les phénomènes de fluage et de relaxation ont pour origine un déblocage progressif des dislocations sous l'action de l'énergie d'activation résultant de la vibration des atomes.

Ainsi, à un instant quelconque, la relaxation est le résultat de l'épuisement d'un nombre  $\int_0^H N_{(H)} dH$  de dislocations dont l'énergie d'activation  $H$  est inférieure à la valeur atteinte par cette dernière au temps  $t$  considéré.

Par conséquent, si l'on assimile à une droite, comme l'ont proposé la plupart des auteurs, la courbe matérialisant le front d'avancement des dislocations épuisées, on a (fig. 11) :

$$\frac{\sigma_{(0)} - \sigma_{(t)}}{\sigma_{(0)}} = a \int_{H=0}^H N_{(H)} dH$$

De plus, si l'on suppose que l'état du matériau à l'instant  $t$  est uniquement caractérisé par son énergie d'activation  $H$  d'expression :

$$H = kT \log (\nu t)$$

où l'on désigne par :

$k$  : la constante de Boltzmann;

$T$  : la température absolue à laquelle se déroule l'essai;

$\nu$  : la fréquence de la redistribution de l'énergie ( $\nu = 10^{12}/s$ );

$t$  : le temps exprimé en secondes.

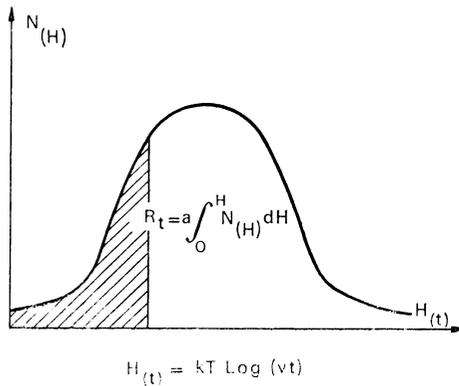


FIG. 11

On voit que le temps  $t_1$  nécessaire pour atteindre à la température  $T_1$  la même valeur de la relaxation que celle acquise au bout du temps  $t_2$  lorsque l'essai se déroule à la température  $T_2$  se déduit de l'égalité :

$$T_1 \log (\nu t_1) = T_2 \log (\nu t_2)$$

ou :

$$T_1 [\log \nu + \log t_1] = T_2 [\log \nu + \log t_2]$$

expression qui est à rapprocher de la relation  $T [c + \log t] = C^{te}$  qui a été proposée par Larson et Miller.

Afin de suivre par le calcul la variation de la perte résultant de la relaxation et de la dilatation thermique qui se produit pour une nuance d'acier donné lors de l'application d'un cycle thermique, on a déterminé pour cet acier les courbes expérimentales de relaxation à 20 °C pour deux valeurs de la contrainte initiale (0,8 R et 0,7 R) ce qui a permis de calculer les constantes  $C_1$ ,  $k$  et  $C_2$  intervenant dans les expressions établies précédemment.

La perte qui s'effectue au cours de la phase de prétraitement ayant lieu sous une température de 20 °C, on a considéré que la perte atteinte en fin de prétraitement est celle donnée par la courbe expérimentale au bout d'un temps  $t_1$  correspondant à la durée du prétraitement.

On a ensuite divisé la phase de montée en température en cycles élémentaires de durée  $\Delta t$  caractérisés par une température  $T_i$ . Puis on a déterminé le temps équivalent au temps élémentaire  $\Delta t$  du cycle effectué à la température  $T_i$  qui conduirait à la même perte par relaxation dans le cas où l'essai serait réalisé à 20 °C.

On a enfin cherché la perte par relaxation qui se serait produite dans un laps de temps égal au temps équivalent, en prenant comme contrainte initiale la valeur de la contrainte de départ de l'essai diminuée des pertes par dilatation acquises lors de l'application des cycles élémentaires précédant le cycle considéré. Le temps initial qui intervient dans ce calcul est celui de l'origine de la phase de montée en température augmenté de la somme des temps équivalents correspondant aux cycles élémentaires qui précèdent le cycle élémentaire considéré.

Par ailleurs, afin d'obtenir à chaque instant la valeur de la perte totale on a ajouté après l'application de chacun des cycles élémentaires, la perte due à la dilatation thermique acquise pendant l'application de celui-ci.

Lors de la phase de traitement à la température de palier, le temps équivalent est déterminé en considérant une température constante qui est celle du traitement et comme valeur de la contrainte initiale, la contrainte de départ de l'essai diminuée des pertes par dilatation.

Le tableau III donne, pour différents essais effectués, les différentes valeurs expérimentales et les valeurs calculées ( $\Delta t = 0,05$  heures) :

- en fin de phase de prétraitement;
- en fin de montée en température;
- en fin de phase de maintien à température constante.

Après refroidissement et relâchement des armatures, la relaxation des aciers évoluera lentement, la tension sous laquelle elle se produit étant très réduite. Par ailleurs, si l'on suppose par l'hypothèse que la perte à terme est la même pour l'acier ayant subi le traitement thermique que pour celui conservé à 20 °C, on voit qu'un cycle thermique caractérisé par une phase de palier de durée et de température suffisamment élevées conduit à une valeur importante pour le temps équivalent.

Ainsi, pour un acier à relaxation normale (R.N.) tendu initialement sous une contrainte de 0,8 R et ayant subi un cycle présentant :

- une durée de prétraitement de 4 heures;
- un gradient de montée en température de 20 °C/h;
- une température de palier de 60 °C maintenue pendant 6 heures.

conduit en fin de phase de palier à une perte due uniquement à la relaxation de 10 % et à un temps équivalent de 1 000 heures.

TABLEAU III  
Tableau comparatif des valeurs calculées et expérimentales  
de la perte totale acquise à la fin des phases du traitement thermique

Acier Tension Initiale	Essai n°	Fin de phase de prétraitement						Fin de phase de montée en température						Fin de phase de maintien en température					
		Temps réel en h.	Température en °C	Temps équivalent en h.	Pertes totales en % calculées	Pertes totales en % expérimentales	Temps réel en h.	Gradient thermique en °C/h.	Température en °C	Temps équivalent en h.	Pertes totales en % calculées	Pertes totales en % expérimentales	Temps réel en h.	Température en °C	Temps équivalent en h.	Pertes totales en % calculées	Pertes totales en % expérimentales		
R.N. 0,8 R	1	4	20	4	5,82	5,66	6	20	60	45,20	13,89	13,97	12	60	1.064	16,76	17,69		
	3	4	20	4	5,82	5,66	7	20	80	395,2	18,68	19,69	16	80	22.034	22,86	23,96		
	4	4	20	4	5,82	5,66	6	30	80	272	18,29	19,02	15	80	21.911	22,74	23,41		
R.N. 0,7 R	2	4	20	4	5,82	5,66	6	20	60	45,20	13,89	13,97	15	60	1.660,5	17,27	18,37		
	1	4	20	4	2,32	2,20	6	20	60	45,20	10,24	10,40	12	60	1.064	11,38	12,53		
	3	4	20	4	2,32	2,20	7	20	80	395,2	14,50	15,52	16	80	22.034	16,17	19,32		
T.B.R. 0,8 R	4	4	20	4	2,32	2,20	6	30	80	272	14,24	14,34	15	80	21.911	16,12	18,86		
	2	4	20	4	2,32	2,20	6	20	60	45,20	10,24	10,40	15	60	1.660,5	11,59	13,15		
	1	4	20	4	2,02	2,26	6	20	60	45,20	8,08	8,93	12	60	1.064	8,43	9,57		
T.B.R. 0,7 R	3	4	20	4	2,02	2,26	7	20	80	395,2	11,19	12,67	16	80	22.034	11,64	12,92		
	4	4	20	4	2,02	2,26	6	30	80	272	11,15	11,82	15	80	21.911	11,63	12,37		
	2	4	20	4	2,02	2,26	6	20	60	45,20	8,08	8,93	15	60	1.660,5	8,48	9,67		
T.B.R. 0,7 R	1	4	20	4	1,05	0,90	6	20	60	45,20	7,82	7,33	12	60	1.064	8,00	7,66		
	3	4	20	4	1,05	0,90	7	20	80	395,2	11,24	10,64	16	80	22.034	11,48	10,81		
	4	4	20	4	1,05	0,90	6	30	80	272	11,22	10,49	15	80	21.911	11,47	10,83		
2	4	20	4	1,05	0,90	6	20	60	45,20	7,82	7,33	15	60	1.660,5	8,03	7,72			

## 5. CONCLUSION DE L'ÉTUDE

L'ensemble des résultats obtenus au cours de cette étude montre qu'un traitement thermique simulant l'étuvage du béton se manifeste sur le plan de la relaxation des armatures de précontrainte par une contraction de son temps d'évolution, ce que traduit sur le plan théorique l'application de la théorie de l'épuisement thermoactivé des dislocations et la prise en considération d'une équation d'état. Cependant ces hypothèses, bien que conduisant à des résultats théoriques tout à fait acceptables eu égard aux valeurs expérimentales trouvées au cours des présents essais et qui ont l'avantage de permettre l'évaluation de la valeur de la relaxation atteinte après l'application d'un cycle thermique à partir d'essais effectués à 20 °C sous différents taux de contrainte initiale, ne doivent pas être considérées comme fondamentales et applicables de ce fait à tous les cas de figure. En effet, elles ne rendent pas compte de l'action que peut avoir une élévation de la température sur une éventuelle modification de la structure interne de l'acier et de son comportement rhéologique.

Sur un plan plus pratique, ces essais montrent qu'une grande part de la relaxation peut, pour les nuances d'aciers étudiées, être considérées comme étant acquises en fin de traitement thermique, à condition que la phase de maintien à température soit caractérisée par une température relativement élevée et par une durée assez longue. Cependant, le nombre des essais effectués et la limitation de leur durée après traitement ne permettent pas encore de conclure définitivement sur la position relative à terme de la courbe traduisant l'évolution de la relaxation de l'acier ayant subi un cycle thermique par rapport à celle donnant l'évolution de la relaxation du même acier conservé à 20 °C. En outre, ces essais ne permettent pas de dire a priori si la perte en fin de traitement ne peut pas, pour certains cas de traitement ou pour certaines nuances d'armatures, être éventuellement supérieure à celle atteinte à terme par la même nuance conservée à 20 °C.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. D'HAVE et B. DE HALLEUX. — Influence de la température sur le fluage et la relaxation des aciers de précontrainte, *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics*, février 1970.
- [2] F.R. LARSON et MILLER. — A time temperature relation ship for rupture and creep stress, *Trans. of the A.S.M.E.*, juillet 1952.
- [3] N. NADER. — Influence de l'étuvage sur la perte de tension par relaxation d'une armature dans le cas de la précontrainte par fils adhérents, *thèse préparée au C.E.R.I.B.*, novembre 1975.

## TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
	—
Résumé (français, anglais, allemand) . . . . .	73
1. POSITION DU PROBLÈME . . . . .	74
1.1. Évolution de la perte par relaxation durant la phase de fabrication dans le cas où l'on a traitement thermique. . . . .	75
1.2. Évolution de la perte par relaxation qui s'effectue après la mise en précontrainte, c'est-à-dire après relâchement des armatures. . . . .	76
2. ESSAIS RÉALISÉS . . . . .	77
3. RÉSULTATS DES ESSAIS . . . . .	81
3.1. Résultats des essais isothermes à 20 °C (série A). . . . .	81
3.2. Influence de la tension initiale . . . . .	83
3.3. Résultats des essais avec cycles thermiques. . . . .	83
4. APPROCHE THÉORIQUE DU PROBLÈME . . . . .	88
5. CONCLUSION DE L'ÉTUDE . . . . .	92
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES . . . . .	92



DESCRIPTION  
DES  
COMPOTEMENTS RHÉOLOGIQUES  
PAR VARIABLES INTERNES <sup>(1)</sup>

*(Description of rheological behaviours by internal variables)*

*(Beschreibung rheologischer Verhaltensweisen  
mit Hilfe von inneren Variablen)*

par

F. SIDOROFF <sup>(2)</sup>

RÉSUMÉ. — *Cet article est consacré à la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques isotropes à l'aide de variables internes, donc par utilisation de la thermodynamique des phénomènes irréversibles. On présente d'abord une classification générale des comportements viscoélastiques isotropes en 50 types de comportement. On montre ensuite comment représenter par un modèle avec variables internes un type de comportement donné. Pour simplifier l'exposé, l'analyse est présentée dans le cas des petites déformations, et on présente ensuite les concepts permettant l'extension aux grandes déformations.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Chargé de recherches au laboratoire de Mécanique théorique, université Pierre et Marie-Curie, Paris; actuellement, maître de conférences à l'École centrale de Lyon.

mise en correspondance avec la structure de la théorie. Afin de ne pas masquer les réalités physiques derrière les difficultés géométriques liées aux grandes déformations, cette discussion sera présentée dans le cas linéaire, étant bien entendu qu'elle reste valable dans le cas non linéaire sur lequel nous ne donnerons que quelques indications. Le lecteur intéressé trouvera une discussion complète du cas non linéaire en [7], [8], [9], [10], [11], mais aux difficultés techniques près, l'essentiel se trouve présenté ici.

Nous ne nous intéresserons pas aux échanges de chaleur, et nous nous limiterons au comportement isotherme des matériaux, la thermodynamique intervenant uniquement pour restreindre ce comportement. La convention de sommation s'applique sur les indices  $i, j, k$ ; elle ne s'applique pas sur les indices  $a, b, \dots$  (numérotation des variables internes). Nous introduisons les décompositions du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  et du tenseur linéarisé des déformations  $\varepsilon_{ij}$  en partie sphérique et déviateur :

$$(4) \quad \sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij},$$

## 2. COMPORTEMENTS VISCOÉLASTIQUES ISOTROPES

En préliminaire à notre étude, nous allons donc présenter une caractérisation systématique des comportements viscoélastiques isotropes. Ceci nous permettra ensuite de discuter leur description à l'aide de variables internes.

### 2.1. COMPORTEMENT UNIDIMENSIONNEL.

Dans un premier temps, nous nous limitons au cas unidimensionnel, où les efforts appliqués et les déformations sont caractérisés chacun par une seule variable scalaire,  $\sigma$  pour les contraintes,  $\varepsilon$  pour les déformations. Le comportement est alors défini par la relation — supposée causale, voir [3] — entre ces deux variables.

**CRITÈRE 1.** — *Un comportement sera dit non-fluant s'il existe des états d'équilibre sous contrainte non nulle (c'est-à-dire des états  $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0$ ,  $\sigma(t) \equiv \sigma_0 = C^t \varepsilon_0$ ). Il sera dit fluant dans le cas contraire <sup>(1)</sup> (il existera alors en général des états de fluage stationnaire,  $\sigma(t) \equiv \sigma_0 = C^t \varepsilon_0$ ,  $\dot{\varepsilon}(t) = C^t \dot{\varepsilon}_0$ ).*

**CRITÈRE 2.** — *Un comportement sera dit non-visqueux s'il présente une élasticité instantanée (c'est-à-dire si une discontinuité de la contrainte  $\sigma$  entraîne une discontinuité de la déformation  $\varepsilon$ ). Il sera dit visqueux s'il présente une viscosité instantanée (c'est-à-dire si une discontinuité de  $\sigma$  entraîne une discontinuité de la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$ ).*

<sup>(1)</sup> Nous excluons ici les comportements de type viscoplastique qui seraient fluants ou non-fluants selon l'intensité de la contrainte appliquée  $\sigma_0$ .

Ces deux premiers critères caractérisent respectivement les comportements différés et instantanés, et ils traduisent le comportement des fonctions de relaxation  $E(t)$  et de fluage  $J(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini et vers zéro (fig. 1).

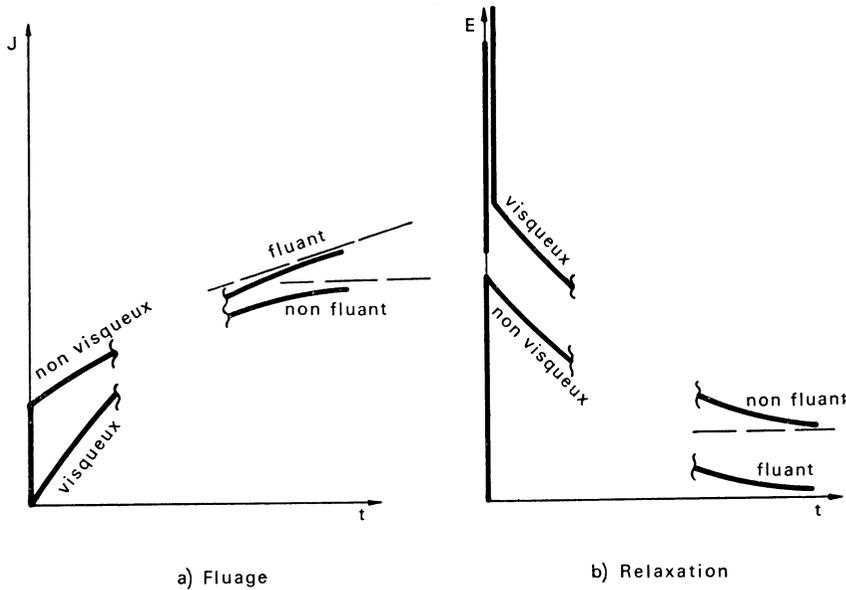


FIG. 1. — Comportements visqueux et non-visqueux, fluants et non-fluants

Ils conduisent à la définition de 4 types de comportement, mais cette classification est trop grossière car elle ne sépare pas par exemple le ressort élastique du modèle de Poynting-Thomson (tous deux ont un comportement non-visqueux, non-fluant). Pour raffiner notre classification, nous introduisons un troisième critère qui, en quelque sorte, caractérise le comportement de  $J(t)$  ou  $G(t)$  entre 0 et  $+\infty$ .

**CRITÈRE 3.** — *Un comportement non-fluant sera dit non-relaxant s'il ne se relaxe pas sous déformation nulle (c'est-à-dire si la contrainte  $\sigma$  s'annule avec la déformation  $\varepsilon$ ). Il sera dit relaxant dans le cas contraire.*

*Un comportement fluant sera dit non relaxant <sup>(1)</sup> s'il ne présente pas de recouvrance sous contrainte nulle (c'est-à-dire si la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  s'annule avec la contrainte  $\sigma$ ). Il sera dit relaxant dans le cas contraire.*

<sup>(1)</sup> Il serait plus conforme à la terminologie traditionnelle de la rhéologie de parler alors de comportement recouvrant ou non-recouvrant. Nous préférons néanmoins utiliser une terminologie commune pour les cas fluant et non-fluant.

Par combinaison de ces trois critères, nous obtenons huit types de comportement auxquels il faut rajouter, pour être complet, le comportement rigide ( $\epsilon \equiv 0$ ) et le comportement libre ( $\sigma \equiv 0$ ). Ces dix types de comportement élémentaires sont présentés dans le tableau I. Ils sont nommés d'après les modèles rhéologiques simples qui les représentent : H pour Hooke, K pour Kelvin, etc.

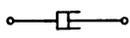
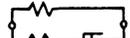
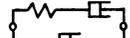
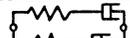
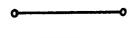
	fluant ?	visqueux ?	relaxant ?	
H	non	non	non	
N	oui	oui	non	
M	oui	non	non	
K	non	oui	non	
P	non	non	oui	
J	oui	oui	oui	
B	oui	non	oui	
A	non	oui	oui	
R	$\epsilon = 0, \quad \sigma$ quelconque			
O	$\sigma = 0, \quad \epsilon$ quelconque			

TABLEAU I. — Les 10 comportements scalaires

## 2.2. MATÉRIAUX ISOTROPES.

Pour un matériau viscoélastique linéaire isotrope, la loi de comportement se découple en deux lois de comportement scalaires : une loi pour les parties sphériques  $\sigma$  et  $\epsilon$ , mise en évidence dans un essai de dilatation simple ( $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij}$ ) et une loi pour les déviateurs  $s_{ij}$  et  $e_{ij}$ , mise en évidence dans un essai de cisaillement simple. Plus généralement, en grandes déformations, nous caractériserons le comportement d'un matériau viscoélastique isotrope par deux comportements scalaires :

a. Le comportement dans un essai de dilatation simple (fig. 2a) :

$$(5) \quad x_t = e^{-\alpha(t)} X_t, \quad \sigma_{ij} = -p(t) \delta_{ij}$$

(où  $x_i(X_j, t)$  représente la position à l'instant  $t$  de la particule ayant comme coordonnées  $X_j$  dans la configuration de référence), caractérisé par la relation entre la pression hydrostatique  $p$  et la « compression »  $\alpha$ , mesure de la déformation.

b. Le comportement en glissement simple (fig. 2b) :

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma(t) X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}, \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} N_1(t) & \tau(t) & 0 \\ \tau(t) & N_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(t) \end{bmatrix}$$

caractérisé par la relation entre le glissement  $\gamma$  et la contrainte de cisaillement  $\tau$  (les contraintes normales  $N_1, N_2, N_3$  sont des effets importants certes, mais non essentiels à la description du comportement).

DÉFINITION 4. — *Un milieu viscoélastique de type isotrope aura un comportement de type (x, y) (x, y désignant des types de comportement scalaires, R, H, K, P, ... introduits plus haut) s'il a un comportement de type x en dilatation simple et un comportement de type y en glissement simple.*

L'expérience suggère le postulat suivant.

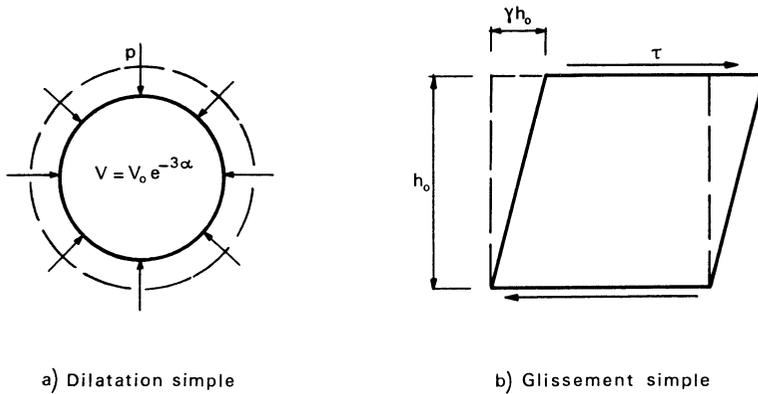


FIG. 2. — Dilatation simple et glissement simple

POSTULAT. — *Le comportement en dilatation simple est nécessairement non-fluant.*

Il nous reste donc 50 types de comportement : 25 types de comportement solides, c'est-à-dire non-fluant en glissement simple — comportement  $(x, y)$  avec  $x, y = R, H, K, P$  ou  $A$  — et 25 types de comportement fluides, c'est-à-dire fluant en glissement simple — comportement  $(x, y)$  avec  $x = R, H, K, P$  ou  $A$  et  $y = O, N, M, J$  ou  $B$ .

Les modèles classiques de la mécanique des milieux continus permettent de remplir un certain nombre de cases. Le solide rigide a un comportement de type (R, R). Le solide élastique a un comportement de type (H, H) en général, (R, H) s'il est incompressible et (H, R) s'il est « indistorsible » c'est-à-dire en théorie linéaire s'il est soumis à la liaison  $e_{ij} = 0$ , ce qui est concevable <sup>(1)</sup> mais non réaliste. Ceci montre que parmi les 50 comportements introduits, certains devraient être éliminés à l'aide d'un second postulat physique que, en termes vagues, nous pouvons postuler ainsi.

SECOND POSTULAT PHYSIQUE. — *Le comportement en dilatation simple doit être plus « résistant » que le comportement en glissement simple.*

Les fluides parfaits ont un comportement de type (R, O) ou (H, O) suivant qu'ils sont incompressibles ou compressibles. Les fluides visqueux classiques ont un comportement de type (R, N) s'ils sont incompressibles, (K, N) s'ils sont compressibles ou (H, N) s'ils sont compressibles sans viscosité de volume.

Les matériaux de Kelvin-Voigt caractérisés par la loi de comportement suivante, voir [4] :

$$(7) \quad \Pi = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\Delta}}$$

(qui ne nécessite pas l'introduction de variable interne) permettent de décrire tous les comportements de type  $(x, y)$  avec  $x = R, H$  ou  $K$  et  $y = R, H, K, O, N$ . Les autres types de comportement exigent l'introduction de variables internes, et c'est ce à quoi nous allons nous intéresser maintenant.

### 3. MODÈLES AVEC VARIABLES INTERNES

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre des milieux avec variables internes, tels qu'ils ont été introduits par MANDEL [4] et nous nous posons le problème fondamental suivant; comment faut-il choisir : a) les variables internes; b) les deux fonctions énergie libre  $\varphi$  et dissipation  $D$  pour décrire un type de comportement donné. La solution de ce problème est donnée en [7], [9], [10], [11] dans le cas tout à fait général d'une théorie non linéaire en grandes déformations. Le fait de considérer des grandes déformations — ce qui est indispensable, au moins pour les fluides — introduit des difficultés de nature purement technique et géométrique qui, en compliquant considérablement l'analyse, en masquent le contenu physique très simple. Afin de dégager ce contenu physique, nous présenterons ici les résultats de cette analyse dans le cas linéaire où elle devient très simple, car elle est implicitement incluse dans les modèles linéaires présentés par BIOT [5] pour le cas

<sup>(1)</sup> Il suffit en effet, dans la loi de l'élasticité linéaire, de faire tendre le module de Coulomb  $\mu$  vers l'infini en maintenant fini le module de compressibilité  $3\lambda + 2\mu$ . Il en résulte la liaison  $e_{ij} = 0$  et l'indétermination du déviateur des contraintes  $s_{ij}$ . Le coefficient de Poisson  $\nu$  vaut alors  $-1$ .

unidimensionnel et par KLUITENBERG [12] pour le cas tridimensionnel isotrope. L'originalité de ce paragraphe ne réside donc pas dans les modèles présentés, mais dans leur interprétation relativement à la classification du paragraphe précédent, et dans le fait que les résultats obtenus se généralisent pratiquement mot à mot au cas non linéaire.

### 3.1. LE CAS UNIDIMENSIONNEL.

Si l'on introduit, à côté de la déformation  $\varepsilon$ ,  $n$  variables internes  $\xi_a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), alors la loi de comportement s'écrit sous la forme suivante (voir [4]) :

$$(8) \quad \sigma = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}}, \quad 0 = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_a} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_a}$$

à partir de la fonction énergie libre  $\varphi(\varepsilon, \xi_a)$  et de la fonction de dissipation  $D(\varepsilon, \dot{\xi}_a)$ . Il est commode de remplacer dans l'énergie libre  $\varphi$  les variables  $\xi_a$  par les variables  $\eta_a = \varepsilon - \xi_a$  (voir par exemple le modèle de Maxwell dans [4]). Avec ces fonctions  $\varphi(\varepsilon, \eta_a)$  et  $D(\varepsilon, \dot{\xi}_a)$ , les relations (8) deviennent :

$$(9) \quad \sigma = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \rho \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_a} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}} = \sigma^\infty + \sum_a \sigma^a + \sigma^v$$

$$(10) \quad \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_a} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_a} = \sigma^a.$$

Dans le cas linéaire,  $\varphi$  et  $D$  sont deux formes quadratiques définies positives :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \varphi = \frac{1}{2} A \varepsilon^2 + \sum_a B^a \varepsilon \eta_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b} C^{ab} \eta_a \eta_b \\ D = \frac{1}{2} L \dot{\varepsilon}^2 + \sum_a M^a \dot{\varepsilon} \dot{\xi}_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b} N^{ab} \dot{\xi}_a \dot{\xi}_b \end{array} \right.$$

de sorte que les équations (9) et (10) donnent :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \left( A + \sum_a B^a \right) \varepsilon + \sum_a \left( B^a \eta_a + \sum_b C^{ab} \eta_b \right) + L \dot{\varepsilon} + \sum_a M^a \dot{\xi}_a \\ M^a \dot{\varepsilon} + \sum_b N^{ab} \dot{\xi}_b = B^a \varepsilon + \sum_b C^{ab} \eta_b, \quad a = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Si  $L = 0$ , alors  $M^a$  est également nul (puisque  $D$  est défini positif) et  $\dot{\xi}$  disparaît des équations (12); le modèle peut supporter des déformations instantanées, les variables internes  $\xi_a$  restant continues [ $\dot{\xi}_a$  est borné d'après (12)<sub>2</sub>]; le comportement est de type non visqueux et l'élasticité instantanée est caractérisée par :

$$(13) \quad \Delta \sigma = \left( A + 2 \sum_a B^a + \sum_{a,b} C^{ab} \right) \Delta \varepsilon$$

en notant  $\Delta\sigma$  et  $\Delta\varepsilon$  les discontinuités de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ . Au contraire, si  $L > 0$ , la dérivée  $\dot{\varepsilon}$  apparaît dans la loi de comportement, et le comportement est de type visqueux, une discontinuité  $\Delta\sigma$  de contrainte entraînant une discontinuité  $\Delta\dot{\varepsilon}$  de vitesse de déformation d'après la formule :

$$(14) \quad \Delta\sigma = \left( L - \sum_{a,b} M^a N_{a,b}^{-1} M^b \right) \Delta\dot{\varepsilon}$$

où  $N_{a,b}^{-1}$  désigne les éléments de la matrice  $N^{-1}$ , inverse de la matrice  $N$  d'éléments  $N^{ab}$ . Ainsi, le matériau est visqueux ou non-visqueux suivant que  $L$  est positif ou nul, c'est-à-dire selon que la fonction de dissipation dépend de  $\dot{\varepsilon}$ ,  $[D = D(\varepsilon, \dot{\xi}^a)]$  ou n'en dépend pas,  $[D = D(\dot{\xi}^a)]$ .

Le caractère fluant ou non-fluant s'étudie de manière analogue, par examen des équations (12) : le comportement est non-fluant ou fluant selon que  $A$  est positif ou nul, c'est-à-dire selon que l'énergie libre  $\varphi$  dépend de  $\varepsilon$ ,  $[\varphi = \varphi(\varepsilon, \eta_a)]$  ou n'en dépend pas,  $[\varphi = \varphi(\eta_a)]$ . Dans le premier cas, l'élasticité différée est définie par :

$$(15) \quad \sigma = \left( A - \sum_{a,b} B^a C_{a,b}^{-1} B^b \right) \varepsilon$$

tandis que dans le second cas, les états de fluage stationnaire sont définis par :

$$(16) \quad \sigma = \left( L + 2 \sum_a M^a + \sum_{a,b} N^{ab} \right) \dot{\varepsilon}$$

Pour étudier le caractère relaxant ou non-relaxant, il faut distinguer quatre cas, selon que chacun des coefficients  $A$  et  $L$  est positif ou nul. Considérons par exemple le cas où  $A$  et  $L$  sont nuls (donc aussi  $B^a$  et  $M^a$  puisque  $\varphi$  et  $D$  sont définis positifs); d'après ce qui précède, le comportement est fluant, et il faut étudier les processus de recouvrance sous contrainte nulle (critère 3 du paragraphe 2.1). Les équations (12) donnent alors :

$$(17) \quad \sigma = \sum_{a,b} C^{ab} \eta_b = 0, \quad \sum_b N^{ab} \dot{\xi}_b = \sum_b C^{ab} \eta_b$$

En notant  $t_0$  l'instant où débute ce processus, il s'y produit une discontinuité de contrainte  $\Delta\sigma = -\sigma(t_0)$ , ce qui, d'après (13), entraîne une discontinuité de  $\varepsilon$  et  $\eta_a$  donnée par :

$$(18) \quad \Delta\varepsilon = \Delta\eta_a = -\frac{1}{E_0} \sigma(t_0), \quad E_0 = \sum_{a,b} C^{ab}.$$

Le processus est ensuite gouverné par un système différentiel obtenu en éliminant  $\dot{\xi}_a = \dot{\varepsilon} - \dot{\eta}_a$  de (17)<sub>2</sub> et en dérivant (17)<sub>1</sub> :

$$(19) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_0} \sum_{a,b,c,d} C^{ab} N_{bc}^{-1} C^{cd} \eta_a, \quad \dot{\eta}_a = \dot{\varepsilon} - \sum_{b,c} N_{ab}^{-1} C^{bc} \eta_c$$

ce qui en général conduit à une évolution de  $\varepsilon$  et  $\eta_a$ . Cependant, s'il n'y a qu'une seule variable interne  $\eta$  alors (17) donne simplement :

$$(20) \quad C \eta = 0, \quad N (\dot{\varepsilon} - \dot{\eta}) = C \eta$$

qui donne  $\eta = 0$  et  $\dot{\varepsilon} = 0$ .

Ainsi, si A et L sont nuls, alors le comportement est non relaxant si  $n = 1$ , relaxant si  $n \geq 2$ . Dans les autres cas, une étude similaire montre que le comportement est non-relaxant si  $n = 0$ , relaxant si  $n \geq 1$ , c'est-à-dire sitôt qu'il y a une variable interne.

D'un point de vue plus global, ces résultats peuvent s'interpréter simplement à partir des lois de comportement (9) et (10) : la loi (9) donne la contrainte  $\sigma$  comme somme de  $(n + 2)$  termes : un terme « élastique »  $\sigma^\infty = \rho \partial\varphi/\partial\varepsilon$  donné par une loi élastique à partir de la déformation totale  $\varepsilon$ , un terme « visqueux »  $\sigma^v = \partial D/\partial\dot{\varepsilon}$  donné par une loi visqueuse à partir de la vitesse de déformation totale  $\dot{\varepsilon}$  et  $n$  termes « anélastiques »  $\sigma^a$  donnés d'après (10) par une loi élastique à partir de la déformation « élastique »  $\eta_a$  et par une loi visqueuse à partir de la vitesse de déformation « anélastique »  $\dot{\xi}_a$ . On peut donc interpréter notre modèle comme montage en parallèle <sup>(1)</sup> d'un ressort, d'un amortisseur et de  $n$  modèles de Maxwell. Le modèle sera donc visqueux ou non-visqueux selon que l'amortisseur sera présent ou absent, donc selon que D dépendra ou non de  $\dot{\varepsilon}$ ; le modèle sera non-fluant ou fluant selon que le ressort sera présent ou absent, donc selon que  $\varphi$  dépendra ou non de  $\varepsilon$ ; le modèle sera relaxant ou non-relaxant selon le nombre de modèles de Maxwell, donc de variables internes.

### 3.2. MILIEUX ISOTROPES. VARIABLES INTERNES SCALAIRES.

Nous passons maintenant au cas tridimensionnel des milieux isotropes. Ici se pose le problème de la nature tensorielle des variables internes. Le plus simple est bien sûr de prendre des variables internes scalaires  $\xi_a$ ,  $a = 1, \dots, n$ ;

<sup>(1)</sup> Cette interprétation n'est tout à fait rigoureuse que si les formes quadratiques (11) se réduisent à des sommes de carrés. Dans le cas général, il existe des couplages entre les diverses déformations, mais cela n'altère en rien notre analyse.

l'énergie libre  $\varphi(\varepsilon_{ij}, \xi_a)$  et la fonction de dissipation  $D(\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\xi}_a)$  sont alors deux formes quadratiques :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \varphi = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{ll} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \sum_a l^a \xi_a \varepsilon_{kk} + \sum_{a,b} l^{ab} \xi_a \xi_b \\ D = \frac{\alpha}{2} \dot{\varepsilon}_{kk} \dot{\varepsilon}_{ll} + \beta \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \sum_a A^a \dot{\xi}_a \dot{\varepsilon}_{kk} + \sum_{a,b} A^{ab} \dot{\xi}_a \dot{\xi}_b \end{array} \right.$$

qui donnent directement la loi de comportement suivante :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \left( \lambda \varepsilon_{kk} + \sum_a l^a \xi_a + \alpha \dot{\varepsilon}_{kk} + \sum_a A^a \dot{\xi}_a \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\beta \dot{\varepsilon}_{ij} \\ 0 = l^a \varepsilon_{kk} + \sum_b l^{ab} \xi_b + A^a \dot{\varepsilon}_{kk} + \sum_b A^{ab} \dot{\xi}_b, \quad a = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

qui se découple en une loi pour les parties sphériques (de la forme de celle étudiée dans le cas unidimensionnel) et une loi pour les déviateurs qui s'écrit simplement :

$$(23) \quad s_{ij} = 2\mu e_{ij} + 2\beta \dot{e}_{ij}.$$

Ainsi les variables internes scalaires n'interviennent que dans le comportement en dilatation simple, le comportement en glissement simple étant celui du modèle de Kelvin-Voigt. Des variables internes scalaires ne permettent donc pas la description d'un comportement vraiment viscoélastique.

### 3.3. MILIEUX ISOTROPES. LE MODÈLE GÉNÉRAL.

Il faut donc introduire des variables internes tensorielles. Il semble suffisant de prendre des tenseurs symétriques  $\xi_{ij}^a$  (que nous interpréterons plus tard comme des déformations « anélastiques »). Par analogie avec le cas unidimensionnel, nous introduisons les variables  $\varepsilon_{ij}^a = \varepsilon_{ij} - \xi_{ij}^a$  (déformations élastiques) et nous partons de l'énergie libre  $\varphi(\varepsilon_{ij}, \xi_{ij}^a)$  et de la fonction de dissipation  $D(\varepsilon_{ij}, \dot{\xi}_{ij}^a)$ , ce qui nous conduit aux lois de comportement :

$$(24) \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}} + \rho \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^a} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = \sigma_{ij}^\infty + \sum_a \sigma_{ij}^a + \sigma_{ij}^v$$

$$(25) \quad \sigma_{ij}^a = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^a} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}_{ij}^a}$$

forme analogue à (9), (10) et susceptible de la même interprétation en termes de modèle rhéologique. Pour séparer le comportement en dilatation simple et glissement simple, nous décomposons  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^a$  et  $\xi_{ij}^a$  en parties sphériques et déviateurs par (5) pour  $\varepsilon_{ij}$  et pour les autres par :

$$(26) \quad \varepsilon_{ij}^a = \varepsilon^a \delta_{ij} + e_{ij}^a, \quad \xi_{ij}^a = \xi^a \delta_{ij} + x_{ij}^a.$$

En considérant alors  $\varphi = \varphi(\varepsilon, \varepsilon^a, e_{ij}, e_{ij}^a)$  et  $D = D(\dot{\varepsilon}, \dot{\xi}^a, \dot{e}_{ij}, \dot{x}_{ij}^a)$ , les lois de comportement se découpent en deux systèmes pour les parties sphériques :

$$(27) \quad \begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + \rho \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^a} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}} = \sigma^\infty + \sum_a \sigma^a + \sigma^v \\ \sigma^a &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon^a} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}^a} \end{aligned}$$

et pour les déviateurs :

$$(28) \quad \begin{aligned} s_{ij} &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}} + \rho \sum_a \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}^a} + \frac{\partial D}{\partial \dot{e}_{ij}} = s_{ij}^\infty + \sum_a s_{ij}^a + s_{ij}^v \\ s_{ij}^a &= \rho \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}^a} = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_{ij}^a} \end{aligned}$$

Chacun de ces systèmes peut être interprété en termes de modèle rhéologique : montage en parallèle d'un amortisseur, d'un ressort et de  $n$  modèles de Maxwell, la présence ou l'absence de ces éléments étant liée à la présence ou à l'absence des variables correspondantes dans l'énergie libre et la fonction de dissipation, ceci étant récapitulé sur le tableau II.

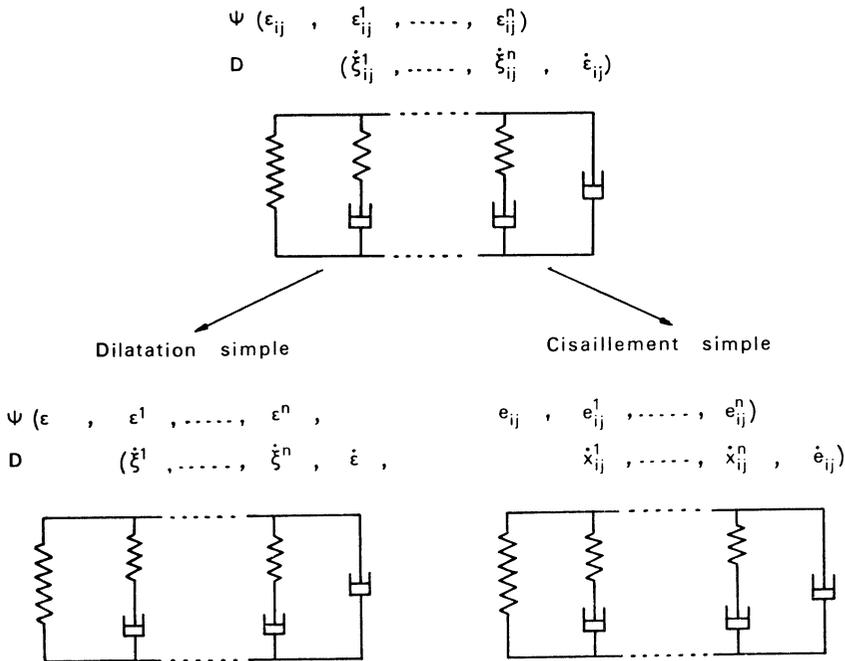


TABLEAU II. — Comportement d'un modèle isotrope

Ainsi, étant donné un modèle avec variables internes, nous savons caractériser son comportement (c'est-à-dire les deux modèles rhéologiques caractérisant son comportement en dilatation simple et glissement simple) à partir de la liste des variables intervenant dans l'énergie libre et dans la fonction de dissipation. Réciproquement, étant donné deux modèles rhéologiques, nous savons construire un modèle ayant leurs comportements en dilatation simple et glissement simple respectivement.

#### 4. EXTENSION AUX GRANDES DÉFORMATIONS

Comme nous l'avons indiqué précédemment, tous ces résultats s'étendent aux grandes déformations. Nous n'avons pas l'intention de rentrer dans les détails, mais nous voulons dégager les deux concepts essentiels permettant cette extension. Le lecteur intéressé trouvera les détails et une bibliographie complète en [7].

##### 4.1. MILIEUX AVEC CONFIGURATIONS INTERMÉDIAIRES.

Le concept de modèle rhéologique joue un rôle central dans notre étude, et l'extension aux grandes déformations passe par la construction de modèle rhéologique en grandes déformations, et donc par la séparation des contraintes et des déformations en plusieurs parties. Pour les contraintes, cela ne pose guère de problème; pour les déformations par contre, on sait bien que l'addition des déformations  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^a + \xi_{ij}^a$  est propre à la théorie linéaire. La solution nous vient des développements récents de l'élastoplasticité en grandes déformations : une décomposition additive des déformations correspond en fait à une composition de déformations, donc à une décomposition multiplicative du gradient de déformation  $\mathbf{F}$ , voir [4]. Nous introduisons donc une « configuration intermédiaire » (ou plusieurs si  $n \geq 2$ ), voir [13], ce qui donne la décomposition (fig. 3) :

$$(29) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^a \mathbf{P}^a$$

Nous introduisons donc comme variables internes les déformations élastiques  $\mathbf{F}^a$  associées à chacune des  $n$  configurations intermédiaires. Compte tenu de l'isotropie, l'énergie libre  $\varphi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^a)$  est fonction des tenseurs de Cauchy-Green gauches  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ ,  $\mathbf{B}^a = \mathbf{F}^a \mathbf{F}^{aT}$ . Pour simplifier, nous supposons que l'énergie libre se découple en :

$$(30) \quad \varphi(\mathbf{B}, \mathbf{B}^a) = \varphi^\infty(\mathbf{B}) + \sum_a \varphi^a(\mathbf{B}^a).$$

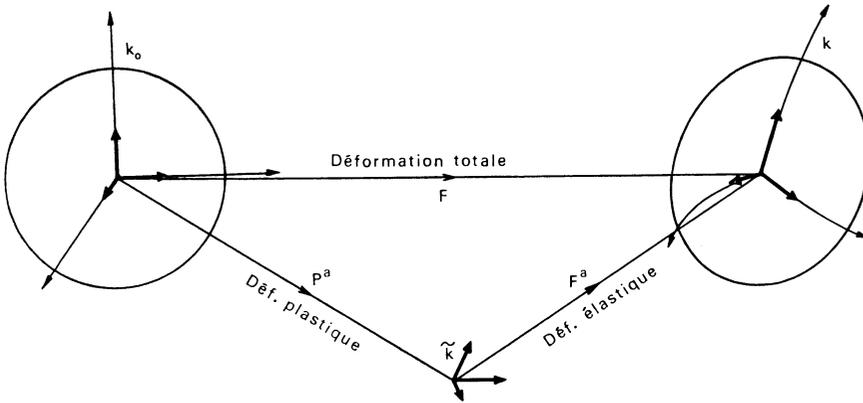


FIG. 3. — Configuration intermédiaire

On obtient alors finalement les lois de comportement suivantes :

$$(31) \quad \mathbf{T} = 2 \rho \mathbf{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}} + 2 \rho \sum_a \mathbf{B}^a \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}^a} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{T}^\infty + \sum_a \mathbf{T}^a + \mathbf{T}^v$$

$$(32) \quad \mathbf{T}^a = 2 \rho \mathbf{B}^a \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{B}^a} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{D}^a}$$

où le tenseur  $\mathbf{D}^a$  est défini par :

$$(33) \quad \mathbf{D}^a = \mathbf{R}^a (\mathbf{P}^a \mathbf{P}^{a-1})^S \mathbf{R}^{aT}$$

où  $\mathbf{R}^a$  désigne la rotation élastique  $\mathbf{F}^a = \mathbf{B}^{a1/2} \mathbf{R}^a$  et où  $\mathbf{A}^S$  désigne la partie symétrique d'un tenseur  $\mathbf{A}$ . Ce tenseur  $\mathbf{D}^a$  (généralisation non linéaire du tenseur  $\xi_{ij}^a$ ) mesure le taux de déformation anélastique. Ce système d'équations (31), (32) généralise le système (24), (25) aux grandes déformations, et est susceptible des mêmes interprétations.

#### 4.2. DILATATION SPHÉRIQUE ET DISTORSION.

Il convient ensuite de séparer les comportements en dilatation simple et glissement simple, et pour cela d'étendre aux grandes déformations la décomposition des contraintes et des déformations en parties sphériques et déviateurs. A nouveau cela ne pose pas de problèmes pour les contraintes, mais pour les déformations il faut passer à une décomposition multiplicative :

$$(34) \quad \mathbf{B} = J^{2/3} \bar{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{B}^a = J^{a2/3} \bar{\mathbf{B}}^a$$

où  $\mathbf{J} = \det \mathbf{F}$  et  $\mathbf{J}^a = \det \mathbf{F}^a$  caractérisent la « dilatation sphérique », c'est-à-dire le changement de volume, tandis que  $\bar{\mathbf{B}}$  et  $\bar{\mathbf{B}}^a$  (de déterminant 1) caractérisent la « distorsion », c'est-à-dire la déformation sans changement de volume. En notant  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^I + \mathbf{A}^D$  la décomposition d'un tenseur symétrique en partie sphérique et déviateur, le système (31), (32) se décompose <sup>(1)</sup> en deux sous systèmes gouvernant l'un le comportement en dilatation :

$$(35) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^I &= \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{J}} \mathbf{1} + \rho \sum_a \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}^a} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{J}^a} \mathbf{1} + \frac{\partial D}{\partial \mathbf{D}^I} = \mathbf{T}^{\infty I} + \sum_a \mathbf{T}^{aI} + \mathbf{T}^{vI} \\ \mathbf{T}^{aI} &= \rho \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{J}^a} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{J}^a} \mathbf{1} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{D}^{aI}} \end{aligned}$$

l'autre le comportement en distorsion :

$$(36) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^D &= 2\rho \left( \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \right)^D + 2\rho \sum_a \left( \bar{\mathbf{B}}^a \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{B}}^a} \right)^D + \frac{\partial D}{\partial \mathbf{D}^D} = \mathbf{T}^{\infty D} + \sum_a \mathbf{T}^{aD} + \mathbf{T}^{vD} \\ \mathbf{T}^{aD} &= 2\rho \left( \bar{\mathbf{B}}^a \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\mathbf{B}}^a} \right)^D = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{D}^{aD}}. \end{aligned}$$

On peut alors étendre l'analyse du paragraphe 3.3 et caractériser le comportement du modèle à partir des variables qui interviennent effectivement dans l'énergie libre  $\varphi(\mathbf{B}, \mathbf{B}^a) = \varphi(\mathbf{J}, \mathbf{J}^a, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{B}}^a)$  et dans la fonction de dissipation  $D(\mathbf{D}, \mathbf{D}^a) = D(\mathbf{D}^I, \mathbf{D}^{aI}, \mathbf{D}^D, \mathbf{D}^{aD})$ .

## 5. CONCLUSION

Ainsi l'utilisation de variables internes permet, dans un cadre thermodynamique sain qui nous assure un comportement physiquement raisonnable, de construire un modèle viscoélastique dont le comportement peut être modélé à volonté. Ceci nous permet donc de modéliser le comportement d'un matériau viscoélastique isotrope d'un point de vue qualitatif d'abord, puisque l'on sait associer un modèle à chacun des 50 types de comportement introduits au chapitre 2, voir tableau III, mais aussi d'un point de vue quantitatif pour lequel on peut proposer une démarche en trois étapes :

1. Modélisation linéaire, c'est-à-dire construction des deux modèles rhéologiques décrivant en petites déformations les comportements en dilatation simple et glissement simple;

<sup>(1)</sup> Cette fois-ci, il ne s'agit pas d'un découplage car les dilatations sphériques interviennent paramétriquement dans la loi de comportement pour les distorsions, mais cela ne change rien à nos conclusions.

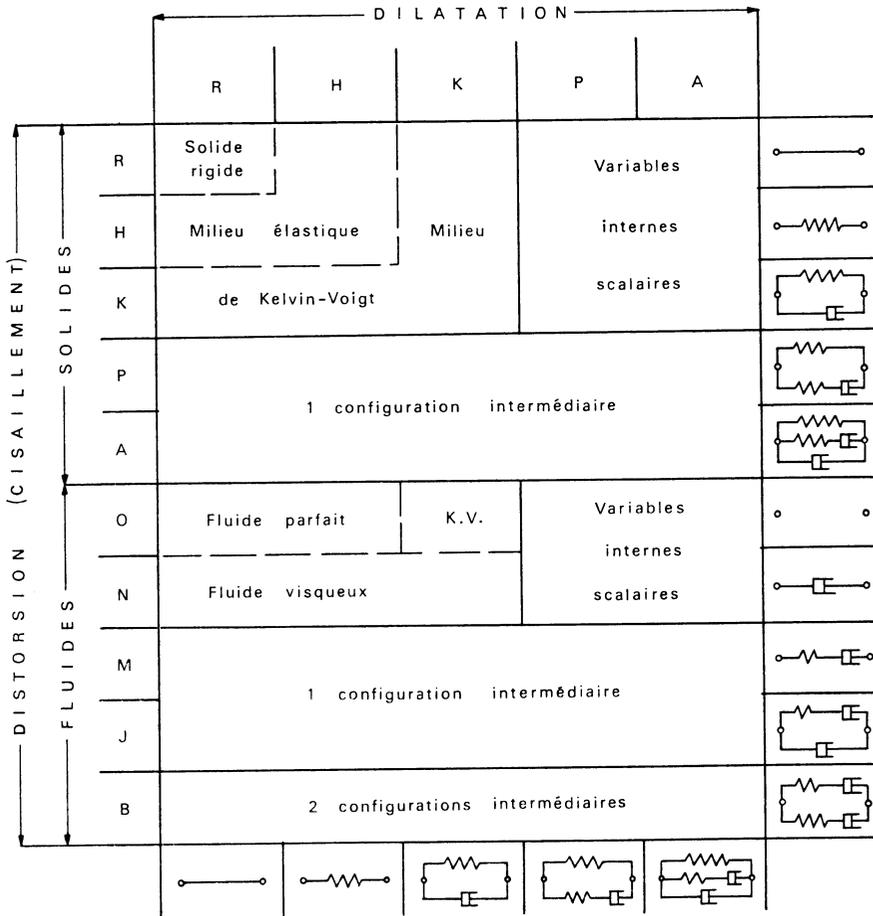


TABLEAU III. — Les 50 types de comportement

2. Extension aux grandes déformations en utilisant les résultats mentionnés au chapitre 4;

3. Choix d'une forme explicite des fonctions  $\varphi$  et  $D$  qui déterminent le modèle, et détermination des coefficients en ajustant la réponse du modèle aux courbes expérimentales. On trouvera en [7], chapitre VI, un exemple de modèle explicite et quelques courbes décrivant la réponse de ce modèle sous sollicitation simple.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. MOLINARI. — Viscoélasticité linéaire et fonctions complètement monotones, *J. Mécanique*, vol. 12, pp. 541-553, 1973.
- [2] J. MANDEL. — *Cours de mécanique des milieux continus*, tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [3] G. MAYNÉ et P. BOULANGER. — Thermodynamique et causalité en théorie linéaire des milieux continus, actes de ce colloque.
- [4] J. MANDEL. — Variables cachées. Puissance dissipée. Fonction dissipative, actes de ce colloque.
- [5] M. A. BIOT. — Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity, *Phys. Rev.*, vol. 97, n° 6, pp. 1463-1469, 1955.
- [6] J. MEIXNER et H. G. REIK. — Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, *Handbuch der Physik*, Bd III/2, Springer Verlag, Berlin, 1959.
- [7] F. SIDOROFF. — Variables internes en viscoélasticité et plasticité, thèse, université P. et M. Curie, octobre 1976.
- [8] F. SIDOROFF. — Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire, *J. Mécanique*, vol. 13, pp. 679-713, 1974.
- [9] F. SIDOROFF. — Variables internes en viscoélasticité, I. Variables internes scalaires et tensorielles, *J. Mécanique*, vol. 14, pp. 545-566, 1975.
- [10] F. SIDOROFF. — Variables internes en viscoélasticité, II. Milieux avec configuration intermédiaire, *J. Mécanique*, vol. 14, pp. 571-595, 1975.
- [11] F. SIDOROFF. — Variables internes en viscoélasticité, III. Milieux avec plusieurs configurations intermédiaires, *J. Mécanique*, vol. 15, pp. 95-118, 1976.
- [12] G. A. KLUITENBERG. — On rheology and thermodynamics of irreversible processes, *Physica*, vol. 28, pp. 1173-1183, 1962.
- [13] F. SIDOROFF. — The geometrical concept of intermediate configuration and elastic plastic finite strain, *Arch. Mech.*, vol. 25, pp. 299-309, 1973.

## TABLE DES MATIÈRES

---

	<b>Pages</b>
	<b>—</b>
Résumé (français, anglais, allemand).....	95
1. INTRODUCTION.....	96
2. COMPORTEMENTS VISCOÉLASTIQUES ISOTROPES.....	98
2.1. Comportement unidimensionnel.....	98
2.2. Matériaux isotropes.....	100
3. MODÈLES AVEC VARIABLES INTERNES.....	102
3.1. Le cas unidimensionnel.....	103
3.2. Milieux isotropes. Variables internes scalaires.....	105
3.3. Milieux isotropes. Le modèle général.....	106
4. EXTENSION AUX GRANDES DÉFORMATIONS.....	108
4.1. Milieux avec configurations intermédiaires.....	108
4.2. Dilatation sphérique et distorsion.....	109
5. CONCLUSION.....	110
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	112



# REMARQUES SUR LA FORME DU FLUX D'ENTROPIE <sup>(1)</sup>

*(Comments on the form of the entropy flux)*

*(Bemerkungen zur Form des Entropieflusses)*

par

M. LANCE <sup>(2)</sup>, J. N. GENGE <sup>(3)</sup> ET J. BATAILLE <sup>(4)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — *On établit un résultat permettant d'obtenir la forme du flux d'entropie tant dans le cadre de la théorie classique de la thermodynamique des phénomènes irréversibles que dans celui de la thermodynamique dite rationnelle. Des applications aux mélanges fluides et aux solides sont développées.*

**ABSTRACT.** — *A theorem is proved which allows to obtain the form of the entropy flux both in classical and rational thermodynamics. Applications to fluid mixtures and rigid solids are given.*

**ZUSAMMENFASSUNG.** — *Es wird ein Theorem aufgestellt, das erlaubt, die Form des Entropieflusses sowohl im Rahmen der klassischen Theorie der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse als auch der sog. rationellen Thermodynamik zu erhalten. Es wird auf flüssige Gemische und Festkörper angewandt.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Ingénieur E.C.L.

<sup>(3)</sup> Docteur ès sciences, laboratoire de Mécanique des Fluides, École centrale de Lyon.

<sup>(4)</sup> Docteur ès sciences, laboratoire de Mécanique des Fluides, École centrale de Lyon.

## 1. INTRODUCTION

On considère un milieu continu quelconque, de masse volumique  $\rho$ , d'entropie spécifique  $s$ , de champ de vitesse  $\vec{V}$ , en l'absence de forces extérieures et de distributions volumiques de chaleur. En thermodynamique des phénomènes irréversibles classiques ou en thermodynamique rationnelle, le second principe est exprimé localement par l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \vec{J}_s \geq 0,$$

$\vec{J}_s$  étant le flux d'entropie. En thermodynamique des phénomènes irréversibles classiques, la forme de  $\vec{J}_s$ , comme celle de la production d'entropie  $\tau_s$ , sont déduites de l'équation de Gibbs résultant de l'hypothèse d'état local, et mise sous forme de bilan selon :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \vec{J}_s = \tau_s, \tau_s \geq 0.$$

Toutefois, la décomposition ( $\vec{J}_s, \tau_s$ ) est souvent dictée par des considérations physiques, et il est aisé de vérifier que l'on peut aussi écrire :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} (\vec{J}_s + \vec{\varphi}) = \tau_s + \operatorname{div} \vec{\varphi} \geq 0,$$

$\vec{\varphi}$  étant un vecteur arbitraire.

En thermodynamique rationnelle, la forme de  $\vec{J}_s$  est souvent postulée, ou encore  $\vec{J}_s$  est considérée comme une quantité donnée, comme les autres flux, par une relation constitutive. Sa forme est alors déduite du fait qu'elle doit satisfaire l'inégalité de Clausius-Duhem quel que soit le processus au sens de Coleman. Dans ce qui suit, nous nous proposons de généraliser cette démarche, introduite en thermodynamique rationnelle par Müller, et de l'adapter à la thermodynamique des phénomènes irréversibles classiques. Dans les deux cas, si l'on considère que  $\Lambda$  est l'ensemble des variables définissant le processus, et si l'on pose :

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\Lambda),$$

on est conduit à discuter l'inégalité :

$$\operatorname{div} \vec{\varphi}(\Lambda) + f(\Lambda) \geq 0 \quad \forall \Lambda,$$

$f$  étant une fonction donnée de  $\Lambda$ . Nous allons donner sous forme de théorème un résultat permettant de trouver la forme de  $\vec{\varphi}$ .

## 2. REPRÉSENTATION DE $\vec{\varphi}$

On démontre le résultat suivant :

- soit  $\{ g^{(\mu)} \}$  une suite de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ ;
- soit  $\{ L^{(v)} \}$  une suite de champs de tenseurs d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^3$ .

$f(g^{(\mu)}, L^{(v)})$  étant une fonction donnée, si l'on a :

$$\forall (g^{(\mu)}, L^{(v)}), \operatorname{div} \vec{\varphi}(g^{(\mu)}, L^{(v)}) + f(g^{(\mu)}, L^{(v)}) \geq 0,$$

alors :

a.  $\vec{\varphi}$  ne dépend que des vecteurs  $g^{(\mu)}$  à gradient symétrique ou anti-symétrique, et des tenseurs  $L^{(v)}$  tels que :

$$\frac{\partial L_{kl}^{(v)}}{\partial x_i} = \frac{\partial L_{ki}^{(v)}}{\partial x_l} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial L_{kl}^{(v)}}{\partial x_i} = - \frac{\partial L_{ki}^{(v)}}{\partial x_l}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial L_{kl}^{(v)}}{\partial x_i} = \frac{\partial L_{il}^{(v)}}{\partial x_k} \quad (1) \qquad (2) \qquad (3)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial L_{kl}^{(v)}}{\partial x_i} = - \frac{\partial L_{il}^{(v)}}{\partial x_k} \quad (4)$$

b. Si les  $g^{(\mu)}$  sont à gradient symétrique, et si les  $L^{(v)}$  satisfont (1), alors  $\vec{\varphi}$  est de la forme :

$$\varphi_i(g^{(\mu)}, L^{(v)}) = a_i + A_{ij}^{(\mu)} g_j^{(\mu)} + \eta^{(\rho\sigma)} \varepsilon_{ijk} g_j^{(\rho)} g_k^{(\sigma)} + \lambda^{(\xi)} \varepsilon_{ijk} L_{jk}^{(\xi)}$$

avec

$$A_{ij}^{(\mu)} = - A_{ji}^{(\mu)}$$

(il y a sommation sur tout indice répété).

Donnons le principe de la démonstration :

$$\begin{aligned} & \forall g^{(\mu)}, L^{(v)}, \operatorname{div} \vec{\varphi}(g^{(\mu)}, L^{(v)}) + f(g^{(\mu)}, L^{(v)}) \geq 0 \\ \Rightarrow & \forall g^{(\mu)}, L^{(v)}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_j^{(\mu)}} \frac{\partial g_j^{(\mu)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_{kl}^{(v)}} \frac{\partial L_{kl}^{(v)}}{\partial x_i} + f(g^{(\mu)}, L^{(v)}) \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_j^{(\mu)}} \frac{\partial g_j^{(\mu)}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial L_{kl}^{(v)}} \frac{\partial L_{kl}^{(v)}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \text{ la partie a.} \end{aligned}$$

Dans un second temps, on cherche la forme nécessaire de  $\vec{\varphi}$  par rapport aux variables  $g^{(\mu)}$ , en supposant celles-ci à gradient symétrique.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial g_j^{(\mu)}} = - \frac{\partial \varphi_j}{\partial g_i^{(\mu)}} &\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial g_j^{(\mu)} \partial g_j^{(\mu)}} = - \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial g_j^{(\mu)} \partial g_i^{(\mu)}} = 0 \quad (\text{pas de sommation}) \\ &\Rightarrow \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial g_j^{(\mu)} \partial g_k^{(v)} \partial g_l^{(\xi)}} = 0. \end{aligned}$$

Par intégration, il vient :

$$\begin{aligned} \varphi_i = K_i + E_{ij}^{(\mu)} g_j^{(\mu)} + \frac{1}{2} S_{ijk}^{(\mu v)} (g_j^{(\mu)} g_k^{(v)} + g_j^{(v)} g_k^{(\mu)}) \\ + \frac{1}{2} A_{ijk}^{(\mu v)} (g_j^{(\mu)} g_k^{(v)} - g_j^{(v)} g_k^{(\mu)}). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai  $\forall g^{(\mu)}$ , on peut les choisir proportionnels à un même vecteur :

$$g_j^{(\mu)} = \lambda^{(\mu)} r_j$$

Ce qui entraîne la nullité de  $S_{ijk}^{(\mu v)}$  et l'antisymétrie de  $E_{ij}^{(\mu)}$  et  $A_{ijk}^{(\mu v)}$ . D'où :

$$\varphi_i = K_i + E_{ij}^{(\mu)} g_j^{(\mu)} + \alpha^{(\mu v)} \varepsilon_{ijk} g_j^{(\mu)} g_k^{(v)}, \quad E_{ij}^{(\mu)} = -E_{ji}^{(\mu)}.$$

La dépendance par rapport aux  $L^{(v)}$  se traite de façon très analogue, en exploitant le fait que les relations d'antisymétrie obtenues pour  $\vec{\varphi}$  doivent être vraies  $\forall L^{(v)}$ .

### 3. APPLICATION AUX MÉLANGES FORTS VISQUEUX

Nous illustrons ce résultat en l'appliquant à différents milieux, et en particulier aux mélanges forts qui sont caractérisés par le fait que le temps caractéristique des échanges de quantité de mouvement entre espèces est très inférieur aux temps macroscopique caractérisant les actions extérieures. Si  $c_\alpha$  et  $\mu_\alpha$  sont respectivement la fraction massique et le potentiel chimique du constituant  $\alpha$  la thermodynamique des phénomènes irréversibles classiques suggère :

$$\Lambda = \{ \rho, c_\alpha, \theta, \text{grad } \mu_\alpha, \text{grad } \vec{V}, \text{grad } \theta \}.$$

Si par ailleurs on pose :

$$\vec{J}_s = \frac{\vec{q} - \sum_\alpha \mu_\alpha \vec{J}_\alpha}{\theta} + \vec{\varphi},$$

$\vec{J}_\alpha$  étant le flux de diffusion du constituant  $\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= E_{ij}(\rho, \theta, c_\alpha) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \sum_\alpha F_{ij}^\alpha(\rho, \theta, c_\alpha) \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_j} \\ &+ \sum_\alpha \beta^\alpha(\rho, \theta, c_\alpha) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial x_k} + \lambda(\rho, \theta, c_\alpha) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

On constate en particulier que  $\vec{\varphi}$  est nul pour un fluide isotrope, ce qui prouve le bien-fondé du choix habituellement fait pour  $\vec{J}_s$ .

#### 4. MÉLANGES FAIBLES NON VISQUEUX

On peut s'intéresser de même aux mélanges faibles pour lesquels le temps caractéristique des échanges de quantité de mouvement est de l'ordre de celui des sollicitations externes, ce qui nécessite en particulier l'introduction d'un tenseur partiel des contraintes  $T_\alpha$ , associé à chaque constituant  $\alpha$ . On désignera par :

- $\vec{L}_\alpha$  la production de quantité de mouvement due à l'interaction entre espèces;
- $\vec{U}_\alpha$  la vitesse de diffusion du constituant  $\alpha$ ;
- $\vec{V}_\alpha$  la vitesse du constituant  $\alpha$ ;
- $\gamma_\alpha$  le taux de production de  $\alpha$  par réaction chimique;
- $\psi = \varepsilon - \theta s$  l'énergie libre spécifique.

Le système des équations de conservation s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\alpha + \rho \operatorname{div} \vec{V}_\alpha + \vec{U}_\alpha \operatorname{grad} \rho_\alpha &= \rho \gamma_\alpha \\ \rho_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} + \rho_\alpha (\operatorname{grad} \vec{V}_\alpha) \cdot \vec{U}_\alpha &= \operatorname{div} T_\alpha + \rho_\alpha \vec{L}_\alpha \\ \rho \dot{\varepsilon} + \operatorname{div} \vec{q} - \sum_\alpha (T_\alpha - \rho_\alpha \vec{U}_\alpha \otimes \vec{U}_\alpha) \operatorname{grad} \vec{V} &= 0 \\ \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{V} &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= \operatorname{div} \left( T - \sum_\alpha \rho_\alpha \vec{U}_\alpha \otimes \vec{U}_\alpha \right), \end{aligned}$$

auquel on ajoute l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \vec{J}_s \geq 0.$$

Nous adopterons le point de vue de la thermodynamique rationnelle en choisissant pour ensemble de variables indépendantes caractérisant le processus :

$$\Lambda = \{ \rho_\alpha, \theta, \operatorname{grad} \rho_\alpha, \operatorname{grad} \theta, \vec{U}_\alpha \}.$$

Les lois constitutives s'écriront donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha &= \widehat{\mathbf{T}}_\alpha(\Lambda), \quad \gamma_\alpha = \widehat{\gamma}_\alpha(\Lambda), \quad \vec{J}_s = \widehat{\mathbf{J}}_s(\Lambda), \\ s &= \widehat{s}(\Lambda), \quad \vec{L}_\alpha = \widehat{\mathbf{L}}_\alpha(\Lambda), \quad \psi = \widehat{\psi}(\Lambda). \end{aligned}$$

Si l'on pose alors :

$$\vec{k} = \vec{q} + \sum_\alpha \left( \mathbf{T}_\alpha^t - \frac{1}{2} \rho \vec{U}_\alpha^2 \mathbf{I} \right) \cdot \vec{U}_\alpha - \theta \vec{J}_s,$$

l'inégalité d'entropie entraîne que quel que soit le processus, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{k} - \frac{\partial \vec{k}}{\partial \vec{V}_\alpha} \frac{\partial \vec{V}_\alpha}{\partial x} + \rho \sum_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} (\rho \gamma_\alpha - \vec{U}_\alpha \cdot \operatorname{grad} \rho_\alpha) + \vec{J}_s \cdot \operatorname{grad} \theta \\ + \sum_\alpha \left( \rho_\alpha \vec{L}_\alpha + \frac{1}{2} \rho \gamma_\alpha \vec{U}_\alpha \right) \cdot \vec{U}_\alpha \leq 0. \end{aligned}$$

Le théorème donne immédiatement :

$$\begin{aligned} \vec{k}(\rho_\alpha, \theta, \operatorname{grad} \rho_\alpha, \operatorname{grad} \theta, \vec{U}_\alpha) &= \vec{a}(\rho_\alpha, \theta, \vec{U}_\alpha) \\ + \sum_\alpha \mathbf{E}^\alpha(\rho_\alpha, \theta, \vec{U}_\alpha) \operatorname{grad} \rho_\alpha + \mathbf{F}(\rho_\alpha, \theta, \vec{U}_\alpha) \operatorname{grad} \theta \\ + \sum_\alpha \mathbf{G}^\alpha(\rho_\alpha, \theta, \vec{U}_\alpha) \operatorname{grad} \theta \wedge \operatorname{grad} \rho_\alpha, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{E}^\alpha$  et  $\mathbf{F}$  antisymétriques.

Pour un mélange isotrope, cette forme se réduit à :

$$\vec{k} = \sum_\alpha A^\alpha(\rho_\alpha, \theta, |\vec{U}_\alpha|) \vec{U}_\alpha$$

On peut montrer par ailleurs que  $T^\alpha$  peut s'exprimer selon :

$$T^\alpha = \left( \frac{\partial \vec{k}}{\partial \vec{V}_\alpha} \right)^t - \rho \rho_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha} \mathbf{I}$$

En tenant compte de l'expression de  $\vec{k}$  et en reportant dans :

$$\vec{k} = \vec{q} + \sum_{\alpha} \left( T^\alpha - \frac{1}{2} \rho U_\alpha^2 \mathbf{I} \right) \vec{U}_\alpha - \theta \vec{J}_s$$

il vient au troisième ordre près en  $\vec{U}_\alpha$  :

$$\vec{q} - \theta \vec{J}_s = \sum_{\alpha} \mu_\alpha \vec{J}_\alpha, \quad \text{avec} \quad \mu_\alpha = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho_\alpha}, \quad \vec{J}_\alpha = \rho_\alpha \vec{U}_\alpha.$$

## 5. THERMOCONDUCTION DANS UN SOLIDE RIGIDE

Si les exemples proposés ne font que confirmer le bien-fondé du choix habituellement fait pour  $\vec{J}_s$  dans les milieux isotropes mêmes complexes, les conclusions sont beaucoup moins nettes en ce qui concerne les milieux anisotropes pour lesquels la forme du flux d'entropie semble nécessiter l'introduction d'hypothèses physiques supplémentaires. En effet, dans l'exemple simple d'un solide rigide dans lequel règne un champ de température non uniforme, la thermodynamique des phénomènes irréversibles classiques indique en particulier que :

$$\Lambda = (\theta, \text{grad } \theta)$$

et le théorème fournit :

$$\vec{J}_s = \frac{\vec{q}}{\theta} + \mathbf{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad } \theta}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{E}^t.$$

Parmi les groupes de symétries cristallines, seulement 19 permettent de conclure à la nullité de  $\mathbf{E}(\theta)$ . Il semble donc nécessaire d'imposer une hypothèse supplémentaire pour obtenir l'expression habituelle du flux d'entropie en thermoconduction, et à cette fin nous supposerons la continuité de la composante normale de  $\vec{J}_s$  à l'interface séparant deux matériaux quelconques, ce qui conduit à la nullité de  $\mathbf{E}$  dans tous les cas. Ce postulat physique supplémentaire n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du principe de paroi idéale de Müller.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
	—
Résumé (français, anglais, allemand).....	115
1. INTRODUCTION.....	116
2. REPRÉSENTATION DE $\vec{\varphi}$ .....	117
3. APPLICATION AUX MÉLANGES FORTS VISQUEUX.....	118
4. MÉLANGES FAIBLES NON VISQUEUX.....	119
5. THERMOCONDUCTION DANS UN SOLIDE RIGIDE.....	121

# SUR LA NOTION D'ÉTAT LOCAL EN RHÉOLOGIE <sup>(1)</sup>

*(On the concept of a local state in rheology)*

*(Über den Begriff des lokalen Zustands in der Rheologie)*

par

C. HUET <sup>(2)</sup>

**RÉSUMÉ.** — *On examine les possibilités d'application directe aux comportements rhéologiques de la thermodynamique des processus irréversibles (T.P.I.), laquelle est basée classiquement sur le « principe de l'état local (ou de l'équilibre local) ».*

*On montre que ce principe est incompatible avec les comportements présentant une réponse différée dans l'expérience de relaxation adiabatique, du fait que, pour ceux-ci, l'entropie hors équilibre est nécessairement différente de l'entropie d'équilibre. Il est montré par contre que, lorsque la réponse à cette expérience est instantanée, elle est isentropique, ce qui entraîne l'identité entre l'entropie hors équilibre et l'entropie à l'équilibre. Ceci suffit alors à rendre possible l'application directe de la T.P.I., et définit la classe des comportements markoviens. Mais l'énoncé habituel du principe de l'état local se révèle alors trop fort, car si certaines relations de l'équilibre se trouvent conservées, d'autres (et notamment la relation de Gibbs) sont nécessairement perdues, et ce d'une façon qui dépend de la classe de comportement et de la combinaison de variables indépendantes considérées.*

*Enfin, on montre que le succès de la méthode des variables cachées provient du fait qu'elle ramène au cas markovien des comportements héréditaires non markoviens, ce qui fournit une règle pratique d'identification de variables internes.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Directeur de recherches à l'École nationale des ponts et chaussées, Paris.

SUMMARY. — Possibilities of applying directly to rheological behaviours the thermodynamics of irreversible processes (T.I.P.), classically based on the so called « local state principal (or local equilibrium assumption) », are examined.

It is shown this principle cannot be valid for behaviours showing delayed response in an adiabatic relaxation experiment : for these, out of equilibrium entropy must differ from equilibrium entropy. On the other hand, it is shown that instantaneous adiabatic relaxation is isentropic, involving identity between equilibrium and out of equilibrium entropies. This suffices to ensure validity of direct application of T.I.P., and defines the class of markovian behaviours. But the usual statement of the local state principal appears then to be too strong : if a few equilibrium relations are maintained, others (namely Gibbs equality) are necessarily lost, in a way depending on the behaviour class, and on the considered combination of independent variables.

Finally, it is shown how the success of hidden variables methods comes from it reduces hereditary non markovian behaviours to the markovian case. This provides a practical criterium for internal variables identification.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird die Möglichkeit untersucht, die in klassischer Weise auf dem Prinzip des « lokalen Zustands (oder des lokalen Gleichgewichts) » beruhende Thermodynamik der irreversiblen Prozesse direkt auf das rheologische Verhalten anzuwenden.

Es wird gezeigt, daß dieses Prinzip unverträglich ist mit Verhaltensweisen, bei denen bei dem Versuch der adiabatischen Relaxation die Reaktion verzögert eintritt, da sich für diese die Entropie im Nichtgleichgewicht notwendigerweise von derjenigen im Gleichgewicht unterscheidet. Es wird dagegen gezeigt, daß die Reaktion isentrop ist, wenn sie bei diesem Versuch sofort eintritt, wodurch sich die Identität zwischen der Entropie im Nichtgleichgewicht und derjenigen im Gleichgewicht ergibt. Dies genügt dann, um die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse direkt anwenden zu können, und bestimmt die Klasse der Markowschen Verhaltensweisen. Die übliche Aussage des Prinzips des lokalen Zustands erweist sich jedoch als zu stark, denn wenn auch einige Gleichgewichtsbeziehungen bestehen bleiben, gehen andere (insbesondere die Gibbssche Fundamentalgleichung) notgedrungen verloren, und zwar in Abhängigkeit von der Verhaltensklasse und der Kombination der betrachteten unabhängigen Variablen.

Schliesslich wird gezeigt, daß der Erfolg der Methode der verborgenen Variablen dadurch bedingt ist, daß sie nicht-Markowsche, erbliche Verhaltensweisen auf den Markowschen Fall zurückführt, wodurch man eine praktische Regel für die Identifizierung interner Variablen erhält.

## 1. INTRODUCTION

Les phénomènes rhéologiques sont le plus souvent des processus se produisant hors équilibre et de façon irréversible.

On reconnaît actuellement deux principales méthodes pour aborder la thermodynamique des phénomènes hors équilibres, méthodes qui sont le plus souvent présentées comme indépendantes, voire incompatibles (cf. [1], [2], [3]).

La première méthode est celle connue maintenant sous le nom de thermodynamique des processus irréversibles (T.P.I.). Illustrée par des noms tels que ceux de Donder (1920), Onsager (1931), Prigogine (1947), Meixner (1959), elle a remporté d'indéniables succès dans diverses branches de la physique et se développe même actuellement dans celui de la biologie.

La seconde, plus récente, est liée à une approche directe de la théorie des milieux continus, et s'est développée à partir des travaux de COLEMAN [4] dans le cadre général de comportements rhéologiques héréditaires représentés par des fonctionnelles.

D'après ses propres fondateurs, l'un des points de départ essentiel de la T.P.I. est un postulat connu sous le nom de principe (ou d'axiome, ou d'hypothèse) de l'état local, ou encore hypothèse de l'équilibre local (cf. [5] à [13]).

Bien qu'il soit reconnu qu'un grand nombre de phénomènes physiques importants (tels que conduction de la chaleur, de l'électricité, diffusion de la matière, etc.) puissent être traités suivant ce principe, il est souvent indiqué qu'il ne peut être appliqué aux comportements dits à mémoire, *i.e.* tels que la réponse actuelle locale soit influencée, non seulement par les sollicitations actuelles, mais également par les événements antérieurs, et que l'on nomme encore (cf. VOLTERRA [14]) comportements héréditaires.

Ceci n'a pas empêché l'application de la T.P.I. à des comportements rhéologiques à mémoire, tels que les comportements viscoélastiques, notamment grâce à l'introduction de variables supplémentaires (méthode des variables cachées), si bien que la situation actuelle à ce sujet n'apparaît pas totalement claire.

La présente étude cherche à préciser les conditions d'application de la T.P.I. aux comportements rhéologiques (avec ou sans variables supplémentaires), et à examiner son degré de compatibilité avec les théories du deuxième type.

## 2. RAPPEL : THERMODYNAMIQUE DE L'ÉQUILIBRE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

La thermodynamique des états d'équilibre uniforme d'un système homogène est entièrement construite sur les propriétés géométriques d'une surface dans un espace affine, surface que l'on peut nommer la surface des états d'équilibre ou surface fondamentale. Pour un système ne donnant lieu qu'à des phénomènes thermiques, mécaniques et chimiques, cette surface est définie par l'équation donnant l'énergie interne  $U$  en fonction de l'entropie  $S$ , des déformations  $\varepsilon_{ij}$  (supposées uniformes) et des nombres de moles  $N_k$  de chaque constituant  $k$  (cf. par exemple [10]) soit, pour un volume initial (non déformé) égal à l'unité et en petites déformations de tenseur  $\varepsilon$  :

$$(2.1) \quad U = U(S, \varepsilon_{ij}, N_k) \quad k = 1 \text{ à } m$$

Les  $n$  variables  $S$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $N_k$  sont les variables propres (ou normales) de l'énergie interne  $U$  <sup>(1)</sup>.

L'équation (1) est une « équation fondamentale » du système, en ce sens que toutes les propriétés du système à l'équilibre peuvent être explicitement calculées à partir de la donnée d'une forme explicite de  $U$  en fonction de ses variables propres. On a ainsi les relations bien connues (où l'on somme sur les indices répétés) :

$$(2.2) \quad dU = TdS + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \mu_k dN_k \quad (\text{Gibbs})$$

$$(2.3) \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}; \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad \mu_k = \frac{\partial U}{\partial N_k} \quad (\text{Potentiel})$$

$$(2.4) \quad U = TS + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \mu_k N_k \quad (\text{Euler})$$

$$(2.5) \quad SdT + \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} + N_k d\mu_k = 0 \quad (\text{Gibbs-Duhem})$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial P_\alpha}{\partial X_\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \frac{\partial P_\beta}{\partial X_\alpha} \quad (\text{Maxwell-Schwarz})$$

avec :

$$(2.7) \quad X_\gamma = S, \text{ ou } \varepsilon_{ij}, \text{ ou } N_k; \quad P_\gamma = T, \text{ ou } \sigma_{ij}, \text{ ou } \mu_k$$

Les  $P_\gamma$  sont des tensions. Les  $X_\gamma$  des extensions par unité de volume initial.

<sup>(1)</sup> Pour simplifier l'exposé, nous notons ici et dans la suite  $U(S, \varepsilon_{ij}, N_k)$  pour  $U(S, \dots, \varepsilon_{ij}, \dots, N_k, \dots)$  et de même pour les autres fonctions d'état, et laissons de côté le caractère tensoriel de la dépendance par rapport aux déformations.

D'après (2.3), les  $P_\gamma$  sont des fonctions des  $X_\alpha$ . Les relations liant les  $P_\gamma$  aux  $X_\alpha$  sont des équations d'état, qu'il y a lieu de distinguer soigneusement de l'équation fondamentale (2.1) <sup>(1)</sup>. Celle-ci définit le système dans la représentation énergétique.  $U$  étant fonction monotone croissante de  $S$ , on peut inverser (2.1) par rapport à  $S$ , ce qui fournit la représentation de la surface d'équilibre dans la représentation entropique :

$$(2.8) \quad S = S(U, \varepsilon_{ij}, N_k)$$

Les variables  $U$ ;  $\varepsilon_{ij}$ ;  $N_k$  sont les variables propres de l'entropie  $S$ .

L'équation (2.8) est encore une équation fondamentale, et les diverses grandeurs thermodynamiques définies à l'équilibre sur le système sont encore complètement déterminées par la donnée d'une forme explicite de  $S$  en fonction de ses variables propres, à partir des relations suivantes, homologues dans la représentation entropique des relations (2.2) à (2.7) de la représentation énergétique :

$$(2.9) \quad dS = \frac{1}{T} dU - \frac{\sigma_{ij}}{T} d\varepsilon_{ij} - \frac{\mu_k}{T} dN_k \quad (\text{Gibbs})$$

$$(2.10) \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U}; \quad -\frac{\sigma_{ij}}{T} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad -\frac{\mu_k}{T} = \frac{\partial S}{\partial N_k} \quad (\text{Potentiel})$$

$$(2.11) \quad S = \frac{1}{T} U - \frac{\sigma_{ij}}{T} \varepsilon_{ij} - \frac{\mu_k}{T} N_k \quad (\text{Euler})$$

$$(2.12) \quad U d\frac{1}{T} - \varepsilon_{ij} d\frac{\sigma_{ij}}{T} - N_k d\frac{\mu_k}{T} = 0 \quad (\text{Gibbs-Duhem})$$

$$(2.13) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial X_\beta} = \frac{\partial^2 S}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \frac{\partial F_\beta}{\partial X_\alpha} \quad (\text{Maxwell-Schwarz})$$

avec :

$$(2.14) \quad X_\gamma = U, \text{ ou } \varepsilon_{ij} \text{ ou } N_k; \quad F_\gamma = \frac{1}{T}, \text{ ou } -\frac{\sigma_{ij}}{T}, \text{ ou } -\frac{\mu_k}{T}$$

Les  $P_\alpha$  et  $X_\alpha$  de même indice  $\alpha$  sont des variables conjuguées dans la représentation énergétique; les  $F_\alpha$  et  $X_\alpha$  le sont dans la représentation entropique.

Les grandeurs telles que la température  $T$ , la contrainte  $\sigma_{ij}$  et le potentiel chimique définies par (2.3) apparaissent alors chacune comme la pente d'une tangente à la courbe obtenue par intersection de la surface des états d'équilibre au point considéré avec l'hyperplan défini en maintenant fixes les variables non conjuguées de la grandeur considérée.

<sup>(1)</sup> Cette dernière est équivalente à un système complet d'équations d'état. Lorsqu'un tel système est incomplet, il existe en général plusieurs façons compatibles de le compléter. On a donc une certaine liberté d'écriture pour les équations d'état manquantes. Au contraire, lorsque l'équation fondamentale est donnée explicitement, on n'a plus aucune liberté dans l'écriture des équations d'état.

Dans le cas du milieu dans des conditions non uniformes, on considère alors que chacun de ces sous-domaines est l'élément de volume infinitésimal, ce qui ramène à une démarche tout à fait familière (au moins dans son principe), et qui est celle de la théorie des milieux continus.

Dans la thermodynamique des milieux continus, on est ainsi amené à poser que chaque élément de volume infinitésimal est dans un état homogène, ce qui rend plausible (puisque la condition nécessaire d'équilibre thermodynamique se trouve ainsi satisfaite), de le considérer, au moins à titre heuristique, comme un élément homogène en équilibre thermodynamique auquel s'appliquent les lois de la thermodynamique classique et les concepts, grandeurs, équations qui y sont souvent associés.

Il n'y a plus alors qu'à examiner comment ces éléments peuvent réagir les uns par rapport aux autres, et donc à considérer les processus irréversibles qui apparaissent au sein du système total comme le résultat des déséquilibres (thermodynamiques) mutuels (à la façon de la poutre brusquement fléchie).

Ces phénomènes irréversibles, qui se manifestent alors, en général, sous forme de flux (*i.e.* de transferts de grandeurs extensives) passant au travers de surfaces entourant l'élément de volume considéré et qui tendent à rétablir l'équilibre, apparaissent ainsi liés à des gradients exprimant la différence d'état entre éléments adjacents (gradient de température pour la conduction thermique, différence de potentiel pour la conduction électrique, gradient de concentration pour la diffusion d'une vapeur, pour ne prendre que les cas les plus simples).

La plupart des grandeurs donnant lieu à ces transferts (ou flux), obéissent à des lois de conservation (par exemple conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de la quantité d'électricité, etc.) qui permettent d'établir des bilans qui fournissent alors, avec les lois universelles, les conditions aux limites, et éventuellement certaines hypothèses complémentaires, les équations permettant de poser correctement un problème donné. Mais toutes les grandeurs donnant lieu à des flux ne sont pas conservatives, et il est bien connu que l'entropie, qui est l'extensité associée à l'énergie thermique, a la propriété particulière, et caractéristique de l'irréversibilité, de se prêter en outre à création.

Le principe de l'état local est alors en général énoncé comme suit :

« Pour un système hors d'équilibre, on postule (ou on suppose, ou on admet) [5] à [13] :

1. Qu'il existe localement les mêmes grandeurs et fonctions thermodynamiques (énergie interne, entropie, température, énergie libre,...) que celles définies dans le système en équilibre thermodynamique.
2. Que ces grandeurs ont mêmes expressions que si le système était localement en équilibre.
3. Qu'en particulier, les fonctions thermodynamiques telles que l'énergie interne, l'entropie, l'énergie libre, ..., ainsi définies sont indépendantes des vitesses de transformation. »

Certains auteurs [5], [7], [9] nomment ce principe : « hypothèse de l'équilibre local », ce qui correspond assez bien à son énoncé ci-dessus, et présente l'avantage d'éclairer davantage sur son contenu.

#### 4. PRINCIPE DE L'ÉTAT LOCAL ET COMPORTEMENTS RHÉOLOGIQUES

La perspective d'une application brutale de ce principe aux comportements rhéologiques que nous connaissons soulève bien entendu immédiatement toute une série de questions, auxquelles certains auteurs <sup>(1)</sup> semblent avoir répondu (au moins dans leur for intérieur), puisqu'ils font sans crainte référence à ce principe, tandis qu'elles semblent avoir provoqué chez d'autres <sup>(2)</sup> un recul prudent, puisqu'ils n'hésitent pas à avouer que, dans l'état actuel de la question, « l'application de ce principe aux phénomènes que présente la rhéologie semble encore hors de portée ». D'autres enfin rejettent totalement ce principe, et vont jusqu'à proposer une thermodynamique des milieux continus qui soit non locale <sup>(3)</sup> [15], [16].

La première série de difficultés est liée au fait qu'un comportement rhéologique est défini en lui-même comme un comportement local intrinsèque, si bien qu'on ne peut que difficilement envisager (sans changer d'échelle), de ne considérer les irréversibilités auxquelles il donne lieu que comme le résultat d'échanges mutuels entre un élément local et les éléments adjacents, sans qu'il y ait irréversibilité propre, interne à l'élément (avec alors toutes les difficultés qui en résultent pour la définition et l'estimation des grandeurs thermodynamiques).

Il est d'ailleurs bien connu qu'il est possible, en rhéologie, d'obtenir des comportements irréversibles dans un corps de volume fini en état de contrainte, déformation et température homogène (par exemple dans un cylindre en compression simple), alors qu'on ne peut faire circuler un flux thermique ou un courant électrique dans le même cylindre à température ou potentiel uniformes.

Une autre série de difficultés est liée au fait que, en supposant qu'on ait réussi à surmonter celles liées à la définition de fonctions thermodynamiques pour un état local qui est en fait hors d'équilibre, il paraît difficile de soutenir que les « expressions obtenues seront encore les mêmes que si, localement, il y avait équilibre ».

Il est donc nécessaire d'examiner de près ce qu'il en est, c'est-à-dire :

— s'il est des cas où le principe de l'état local peut effectivement s'appliquer directement, et quelles sont alors les conditions de cette application;

<sup>(1)</sup> Par exemple [12].

<sup>(2)</sup> Par exemple [5], [8], [11].

<sup>(3)</sup> Dans une contestation beaucoup plus radicale que la simple négation du « principe de l'état local » considéré ici, puisqu'elle rejette au départ l'écriture locale classique des lois de conservation et de l'inégalité de Clausius-Duhem telles que nous les utilisons plus loin.

— dans le cas contraire, quelles modifications, ou quels artifices (s'il en existe), y a-t-il lieu d'introduire pour permettre d'utiliser dans le cas de la rhéologie, les méthodes et résultats très puissants obtenus par la T.P.I. dans d'autres domaines de la physique;

— dans les deux cas, comment les résultats de cet examen peuvent contribuer à l'élaboration de méthodes permettant de mieux cerner et caractériser les comportements rhéologiques des matériaux réels, dans leur complexité considérable, dont les possibilités de représentation et de prise en compte restent encore très inférieures aux besoins des applications.

## 5. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

### 5.1. SUR LA NOTION D'ÉTAT.

L'analyse de la notion d'état local ne peut se faire sans un consensus sur, ou au moins une définition de, ce que l'on entend par la notion d'état.

En fait le mot « état » est un de ces mots passe-partout dont l'usage est tellement répandu qu'il devient difficile de lui attribuer un sens précis, même à l'intérieur du domaine étroit d'une discipline.

Dans la thermodynamique classique, le mot « état » est très directement lié à l'état d'équilibre thermodynamique, qu'il sous-entend à lui seul la plupart du temps.

Il n'y a alors aucune difficulté particulière à définir des grandeurs d'état, qu'elles soient variables d'état, dont la réunion en un vecteur de dimension suffisante (le vecteur d'état) suffit à déterminer toutes les autres (grandeurs déterminantes, ou variables indépendantes), ou fonctions d'état (grandeur déterminée ou variable dépendante) de valeur connue une fois que l'on a assigné au vecteur d'état une valeur particulière.

Mais, même dans ce cas le langage utilisé ne manque pas de laisser subsister une certaine ambiguïté dans la mesure où l'on emploie indifféremment le mot « état », tantôt pour désigner le vecteur d'un jeu de variables indépendantes complet, tantôt l'ensemble des valeurs prises par ces variables et l'une, voire même l'ensemble des fonctions et grandeurs thermodynamiques associées.

Hors d'équilibre, le langage est encore plus flou. Il arrive alors que l'on appelle « état » ce qui, dans le cas héréditaire, constitue en fait tout un processus et même une suite englobante de processus (cf. par exemple MEIXNER [17]).

Pour éviter de nous heurter aux difficultés conceptuelles liées à un langage insuffisamment précis, nous proposons les définitions suivantes (que nous utiliserons dans la suite du texte).

*État d'un système à l'instant  $t$*  : Ensemble des valeurs instantanées actuelles des diverses grandeurs mécaniques, physiques ou chimiques pouvant être définies sur le système.

*Vecteur des variables d'état d'un système à l'instant  $t$*  : Le plus grand sous-ensemble de grandeurs indépendantes prises dans l'ensemble précédent, et telles que, si on les fixe, le système évolue vers un état d'équilibre thermodynamique, qui sera atteint à plus ou moins long terme.

*Fonction d'état* : Toute grandeur définie sur le système et qui n'est fonction à chaque instant que du vecteur d'état en cet instant (et qui par conséquent se maintient à une valeur fixe unique lorsque le vecteur d'état est lui-même maintenu à une valeur fixe).

*Situation d'un système* : Ensemble de grandeurs constituant des données extérieures au système et agissant sur lui (par exemple en imposant des conditions aux limites).

Deux avantages de ces définitions sont que :

— lorsque l'état d'équilibre est atteint, les définitions de l'état, du vecteur d'état et des fonctions d'état se confondent avec celles couramment admises dans la thermodynamique de l'équilibre;

— elles évitent de prendre pour variables d'état des variables qui ne peuvent conduire à l'état d'équilibre lorsqu'on les maintient fixes dans le temps à partir d'un certain instant donné. En particulier, il est clair de ce point de vue que le gradient de température ne peut figurer dans le vecteur d'état (puisque, si on le fixe à une valeur non nulle, on ne peut atteindre l'équilibre thermique). Ceci impose que, pour un corps d'étendue finie, la température ne peut être prise comme variable d'état que si elle est uniforme (ce qui correspond bien à la condition imposée par la thermodynamique classique).

## 5.2. SUR LA NOTION DE « LOCALITÉ ».

Les matériaux réels de l'ingénieur et du rhéologue sont toujours plus ou moins discontinus, à une échelle plus ou moins fine, et qui, pour certains, est déjà l'échelle macroscopique (cas des bétons par exemple).

Les comportements rhéologiques sont définis par contre pour un milieu continu équivalent <sup>(1)</sup>, que l'on caractérise alors par un certain nombre de coefficients rhéologiques.

Ceci conduit nécessairement à l'apparition d'effets d'échelle et à la définition d'une taille critique en dessous de laquelle la notion de milieu continu, et donc les paramètres rhéologiques qui lui sont associés, perdent leur sens.

Si les inconvénients d'une telle situation restent relativement limités dans les situations d'équilibre (tout au moins tant que l'influence des phénomènes superficiels reste négligeable devant les effets de volume, ce qui est le cas

<sup>(1)</sup> Cf. par exemple, l'exposé de HALPHEN à ce même colloque pour l'étude des relations entre les grandeurs thermodynamiques définies sur le milieu discontinu et celles définies sur le milieu continu équivalent [18].

si les constituants ne sont pas trop finement divisés), il peut ne plus en être du tout de même dans les situations hors d'équilibre, où les gradients, les transferts et le temps interviennent directement dans la réponse du système.

Par exemple, si deux bétons bitumineux homothétiques peuvent avoir les mêmes propriétés élastiques à l'équilibre, leurs comportements hors d'équilibre pourront être sensiblement différents : du fait des surfaces d'échanges thermiques différentes et des inerties thermiques différentes, le bitume du béton à gros grains pourra avoir tendance à s'échauffer différemment, au cours de la déformation, de celui du béton à grains fins, ce qui réagira sur le comportement rhéologique du béton du fait de la sensibilité du comportement rhéologique du bitume à la température.

Par conséquent, s'il existe des fonctions thermodynamiques définies hors équilibre, on peut difficilement concevoir, dans ces conditions, qu'elles « auront mêmes expressions que si le système était localement en équilibre ».

### 5.3. SUR L'EMPLOI DES DIVERSES COMBINAISONS DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

A l'équilibre, une certaine liberté existe pour le choix des variables indépendantes définissant l'état thermodynamique.

Ceci est lié au fait, rapporté plus haut, que l'ensemble des propriétés thermodynamiques de l'équilibre sont totalement déterminées lorsqu'on connaît une fonction thermodynamique (ou plus précisément un potentiel thermodynamique) en fonction de ses variables propres (ou variables normales), ce qui définit une équation fondamentale (par opposition à une simple équation d'état).

Les équations fondamentales correspondant aux principales combinaisons de variables sont ainsi :

$$(5.3.1) \quad U = U(S, \varepsilon_{ij}, N_k) \quad (\text{énergie interne})$$

$$(5.3.2) \quad S = S(U, \varepsilon_{ij}, N_k) \quad (\text{entropie})$$

$$(5.3.3) \quad F = F(T, \varepsilon_{ij}, N_k) \quad (\text{énergie libre})$$

$$(5.3.4) \quad H = H(S, \sigma_{ij}, N_k) \quad (\text{enthalpie})$$

$$(5.3.5) \quad G = G(T, \sigma_{ij}, N_k) \quad (\text{enthalpie libre})$$

Dans des transformations qui sont réversibles (infiniment lentes), chacune des variables figurant dans les divers vecteurs arguments sont, au moins en principe, commandables expérimentalement.

En particulier l'entropie est une grandeur commandable puisqu'elle n'est alors liée qu'aux échanges de chaleur entre le système et l'extérieur, échanges que l'on sait en principe mesurer.

Suivant la commodité (et en particulier suivant les types d'environnement avec lesquels le milieu se trouve en contact) on pourra prendre indifféremment l'un ou l'autre de ces potentiels (énergie interne en adiabatique, énergie libre en isotherme, enthalpie à contrainte constante, enthalpie libre à température et contrainte constante).

Dans les processus hors d'équilibre, la symétrie des diverses combinaisons se trouve perdue.

D'une part, nous avons déjà remarqué que certaines combinaisons de variables indépendantes sont capables de conduire, lorsqu'on fixe ces dernières, le système à l'équilibre, alors que d'autres en sont totalement incapables.

Mais en outre, il devient impossible de considérer que l'on est maître à tout instant de l'entropie : en effet, aux variations d'entropie d'origine externe par échanges (commandables) de chaleur viennent s'ajouter, d'après le second principe, des variations d'entropie d'origine interne (dissipation thermique par gradients de température, dissipation mécanique, dissipation chimique, etc.).

En supposant qu'il soit possible de définir hors équilibre les fonctions ou potentiels thermodynamiques ci-dessus, il y aura semble-t-il intérêt, sur le plan de l'utilisation pratique, à éviter ceux où l'entropie apparaît comme variable indépendante, ce qui restreint la gamme des fonctions ou potentiels utilisables à S, F et G.

#### 5.4. PROCESSUS IRRÉVERSIBLES ET SITUATIONS HORS ÉQUILIBRE.

Il n'y a pas de difficulté à introduire les potentiels thermodynamiques pour des processus irréversibles commençant par un état d'équilibre et se terminant par un état d'équilibre.

Cela signifie simplement qu'on est alors capable de décrire l'intégrale des changements survenus dans le système entre ces deux états après que l'équilibre soit revenu. Mais par contre on n'est pas capable de dire de cette façon ce qui s'est passé à chaque instant de l'évolution entre deux états.

Or l'ambition de la thermodynamique des processus irréversibles est justement d'étudier, non seulement ce qu'il y a avant et après, mais aussi ce qui se passe à chaque instant de l'évolution.

On est donc alors conduit à définir les propriétés thermodynamiques au cours même de l'évolution, *i.e.* dans des situations hors d'équilibre. Mais les difficultés sont alors en général bien plus grandes. Il y a donc lieu de distinguer nettement trois catégories de processus irréversibles ayant pour point de départ un état d'équilibre :

- les processus irréversibles « achevés », pour lesquels, après une évolution hors équilibre à partir d'un état initial, on parvient à un état d'équilibre final (qui peut-être différent de l'équilibre initial, ou au contraire confondu avec lui);
- les processus irréversibles « inachevés », pour lesquels, à l'instant considéré, on n'est toujours pas parvenu à un état d'équilibre;
- les processus irréversibles stationnaires, pour lesquels, le vecteur des variables indépendantes étant fixé, on n'atteindra jamais l'équilibre, aussi longtemps qu'on attende.

Aux précédentes s'ajoutent des catégories de processus homologues, mais pour lesquels l'état initial est déjà un état hors d'équilibre (cas beaucoup plus fréquent dans la pratique qu'on n'accepte généralement de le considérer).

### 5.5. SUR L'EMPLOI DE LA TEMPÉRATURE COMME VARIABLE COMMANDÉE.

Sur un plan expérimental, on ne peut guère commander que ce qui se passe à l'extérieur et aux limites d'une éprouvette dont on étudie la réponse.

En présence de dissipations internes, cela rend à peu près irréalisables les transformations isothermes fréquemment considérées sur le plan théorique.

En effet, ceci suppose l'évacuation des calories provenant de la dissipation interne à l'éprouvette, ce qui ne peut se faire que par la surface de l'éprouvette où l'on ne peut guère imposer (en première approximation) que des conditions mixtes de Fourier liant le flux  $\varphi$  à la température superficielle  $T_1$  de l'éprouvette, pour une température donnée  $T_0$  du fluide caloporteur :

$$(5.5.1) \quad \varphi = k(T_1 - T_0)$$

le coefficient de transfert thermique  $k$  comportant des termes de conduction, convection et rayonnement.

Il en résulte que, même pour un matériau macroscopiquement homogène, la température au sein de l'éprouvette ne peut être uniforme, mais à l'allure indiquée sur la figure 1a.

Dans le cas hétérogène, on aura celle de la figure 1b.

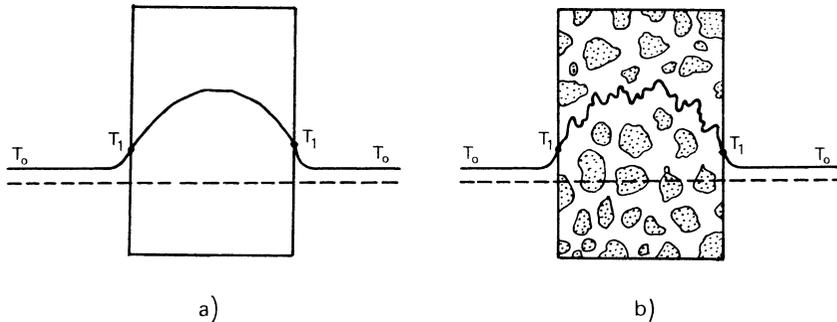


FIG. 1. — Répartitions de température dans deux éprouvettes hors équilibre :

- a. Matériau dissipatif homogène,
- b. Matériau dissipatif hétérogène.

D'autre part, la mesure de cette température en un nombre suffisant de points au sein de l'éprouvette pourra poser des problèmes pratiques considérables, et ne pourra guère se faire sans modifier le comportement rhéologique même de l'éprouvette.

Compte tenu de ces faits, et de l'impossibilité d'obtenir l'équilibre thermodynamique pour une température non uniforme, il y aura semble-t-il lieu d'éviter, en présence de comportements dissipatifs, et tout au moins dans une première approche, l'emploi des fonctions thermodynamiques où la température apparaît dans le vecteur d'état, ce qui élimine encore  $F$  et  $G$ .

Il ne reste plus alors que l'équation fondamentale (4.3.2) donnant l'entropie en fonction de ses variables propres, qui sont l'énergie interne, les déformations et les nombres de moles.

## 6. RECHERCHE D'UN CRITÈRE DE VALIDITÉ DU PRINCIPE DE L'ÉTAT LOCAL : LA RELAXATION ADIABATIQUE

Dans la représentation entropique, l'équation fondamentale, qui détermine totalement, nous le savons, l'ensemble des propriétés à l'équilibre du matériau considéré, s'écrit, pour une éprouvette en état de déformation homogène :

$$(6.1) \quad S = S(U, \varepsilon_{ij}, N_k)$$

En l'absence d'échanges de matière avec l'extérieur, et de réactions chimiques, nous sommes maîtres expérimentalement des arguments puisque :

- nous savons imposer la déformation  $\varepsilon$  ;
- nous savons imposer le flux de chaleur qui entre ou sort, ce qui détermine  $U$  à  $\varepsilon$  fixé.

On a en effet (principe des travaux virtuels) :

$$(6.2) \quad dU = d'W - dC + d'Q = d'W_{\text{def}} + d'Q$$

où  $d'W$  est le travail des forces extérieures,  $d'W_{\text{def}}$  le travail de déformation et  $dC$  la variation de l'énergie cinétique (négligeable dans une expérience quasi-statique) <sup>(1)</sup>. Or  $d'W_{\text{def}} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  est nul à  $\varepsilon$  fixé ( $d\varepsilon = 0$ ).

Et nous sommes maîtres de ces arguments que l'expérience soit un processus réversible ou non réversible, et que le système soit à l'équilibre ou hors d'équilibre.

En outre nous savons que le vecteur  $(U, \varepsilon, N)$  constitue un vecteur d'état au sens où nous l'avons défini en 5.1, *i.e.* : si nous le fixons à partir d'un certain moment (ce qui implique notamment l'adiabaticité à partir de ce moment), le système tendra spontanément vers l'équilibre interne s'il n'y est déjà.

<sup>(1)</sup> Nous notons  $d'x$  une différentielle non totale de la grandeur  $x$ .

Une telle expérience constitue une expérience de relaxation adiabatique.

Nous savons aussi que l'équilibre une fois atteint, l'entropie  $S$  est parfaitement définie, parfaitement déterminée, et qu'en outre elle est maximale.

Puisque, à  $N$  fixé une fois pour toutes <sup>(1)</sup>, nous savons commander  $U$ ,  $\varepsilon$  à volonté, nous pouvons dire que l'énergie interne et la déformation sont des grandeurs thermodynamiques qui ont un sens même dans une situation hors d'équilibre (contrairement à certaines affirmations rencontrées dans les manuels classiques à propos de  $U$ ).

En effet, si à un instant quelconque d'une évolution hors d'équilibre où  $U$ ,  $\varepsilon$ ,  $N$  varient éventuellement, on commande qu'elles restent fixes, on sait que le système évoluera vers l'équilibre où  $U$ ,  $\varepsilon$ ,  $N$  ont un sens précis.

Hors d'équilibre, on pourra donc affecter à ces grandeurs le sens et la valeur qu'elles ont lorsque l'équilibre est atteint.

Mais il n'en est pas de même pour l'entropie.

En effet, l'existence de l'entropie résulte de l'existence à l'équilibre d'un diviseur intégrant pour la forme différentielle exprimant la quantité de chaleur  $d'Q$  fournie au système, diviseur intégrant qui est la température  $T$ . Autrement dit, la quantité :

$$(6.3) \quad dS = \frac{d'Q}{T} = \frac{1}{T} dU - \frac{1}{T} d'W_{\text{def}} = \frac{1}{T} dU - \frac{1}{T} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

est alors une différentielle totale qui définit la surface des états d'équilibre, ou surface fondamentale, dont nous avons parlé au chapitre 2.

Lorsque, en partant de l'équilibre, le vecteur d'état  $K = (U, \varepsilon)$  varie entre deux valeurs  $K_1$  et  $K_2$  (« état » initial et « état » final dans la terminologie usuelle),  $S$  a varié, après retour à l'équilibre, entre deux valeurs d'équilibre  $S_1$  et  $S_2$  qui ne dépendent que de  $K_1$  et  $K_2$ , et non du trajet suivi, dans l'espace des  $K$  pour aller de  $K_1$  en  $K_2$ .

Ce trajet peut éventuellement être parcouru de façon réversible : ceci impose alors nécessairement qu'il soit parcouru sur la surface d'équilibre, et que de plus, il le soit à vitesse infiniment lente.

Mais il peut aussi correspondre à un processus irréversible, dont on peut imaginer qu'il fasse éventuellement sortir de la surface d'équilibre.

Sortir de la surface signifie qu'il n'y a plus de facteur intégrant, et donc, à la fois, plus de température et plus d'entropie, ce qui rend très délicat l'emploi de ces notions hors d'équilibre.

<sup>(1)</sup> Ce que nous supposons réalisé (ainsi que l'équilibre chimique interne) dans la suite, et nous conduit à ne considérer que les variations du sous-vecteur d'état  $K = (U, \varepsilon)$ , que nous nommons, pour abrégé, vecteur d'état.

Si l'on admet l'existence d'une température hors équilibre, que l'on considère par exemple comme mesurable empiriquement <sup>(1)</sup>, on peut (cf. par exemple [19]) construire une entropie hors d'équilibre qui apparaît alors, non plus comme une fonction du vecteur d'état, mais comme une fonctionnelle de ce vecteur considéré lui-même comme une fonction du temps.

Ceci signifie que l'entropie ainsi définie dépend, non seulement du trajet suivi de  $K_1$  à  $K_2$  mais encore, en général, de la chronologie suivant laquelle ce trajet est parcouru (*i.e.* de l'histoire du vecteur  $K$ ).

Si l'on admet que la température et l'entropie sont définies hors de la surface d'équilibre par des fonctionnelles appropriées, il est clair que les propriétés définies par les équations du chapitre 2, qui sont des propriétés géométriques de la surface, seront perdues pour de telles fonctionnelles, ce qui rendra peu plausible le principe de l'état local tel qu'énoncé au chapitre 3.

Envisageons maintenant un processus amenant le point  $M$  représentatif de l'entropie dans l'espace  $(S, K)$  d'un état d'équilibre initial  $M_0 = L_0 = (S_0, K_0)$  sur la surface d'équilibre en un point  $M_1 = (S_1, K_1)$  hors de la surface d'équilibre. Examinons comment peut se comporter  $M$  quand, à partir de là, on fixe  $K$  à la valeur  $K_1$ , ce qui revient à effectuer, à partir de  $M_1$ , une relaxation adiabatique (fig. 2).

A partir de  $M_1$ , le système est thermodynamiquement isolé, et son entropie ne peut donc (d'après ce que l'on attend des propriétés d'une entropie) qu'augmenter au fur et à mesure qu'il tend vers l'équilibre thermodynamique défini par le point  $L_1 = (S_1^q, K_1)$  sur la surface d'équilibre  $\Gamma$ .

Il en résulte immédiatement que, s'il existe des points  $M$  hors de la surface  $\Gamma$  accessibles à partir de  $M_0$ , ils sont nécessairement situés en-dessous de cette surface.

De plus, ce sera effectivement le cas pour les matériaux se prêtant à relaxation lente puisque, s'il y a relaxation lente c'est que l'équilibre thermodynamique interne n'est pas immédiatement atteint pour la valeur  $K_1 = (U_1, \varepsilon_1)$  que l'on a fixée.

Dans ces conditions s'il existe, pour de tels matériaux, une entropie définie hors équilibre, cette entropie évolue bien hors de la surface d'équilibre, *i.e.* est différente de celle  $S^{eq}(U_1, \varepsilon_1)$  représentée par le point  $L_1$  sur la surface d'équilibre <sup>(2)</sup>.

Puisque, pour la même valeur de  $K_1 = (U_1, \varepsilon_1)$ , cette entropie  $S_1$  hors équilibre est différente de  $S_1^q$ , il devient impossible d'admettre que, hors équilibre,  $S$  est liée à  $K$  par la même relation que celle qui lie  $S^{eq}$  au même vecteur  $K$ .

<sup>(1)</sup> *I.e.* par mise en équilibre thermique instantané avec un système pour lequel  $T$  est défini dans toute transformation.

<sup>(2)</sup> Un point tel que  $M_1$ , étant situé hors de la surface d'équilibre, est inaccessible par voie réversible, ce qui crée un problème pour l'écriture de l'inégalité de Clausius, couramment utilisée cependant.

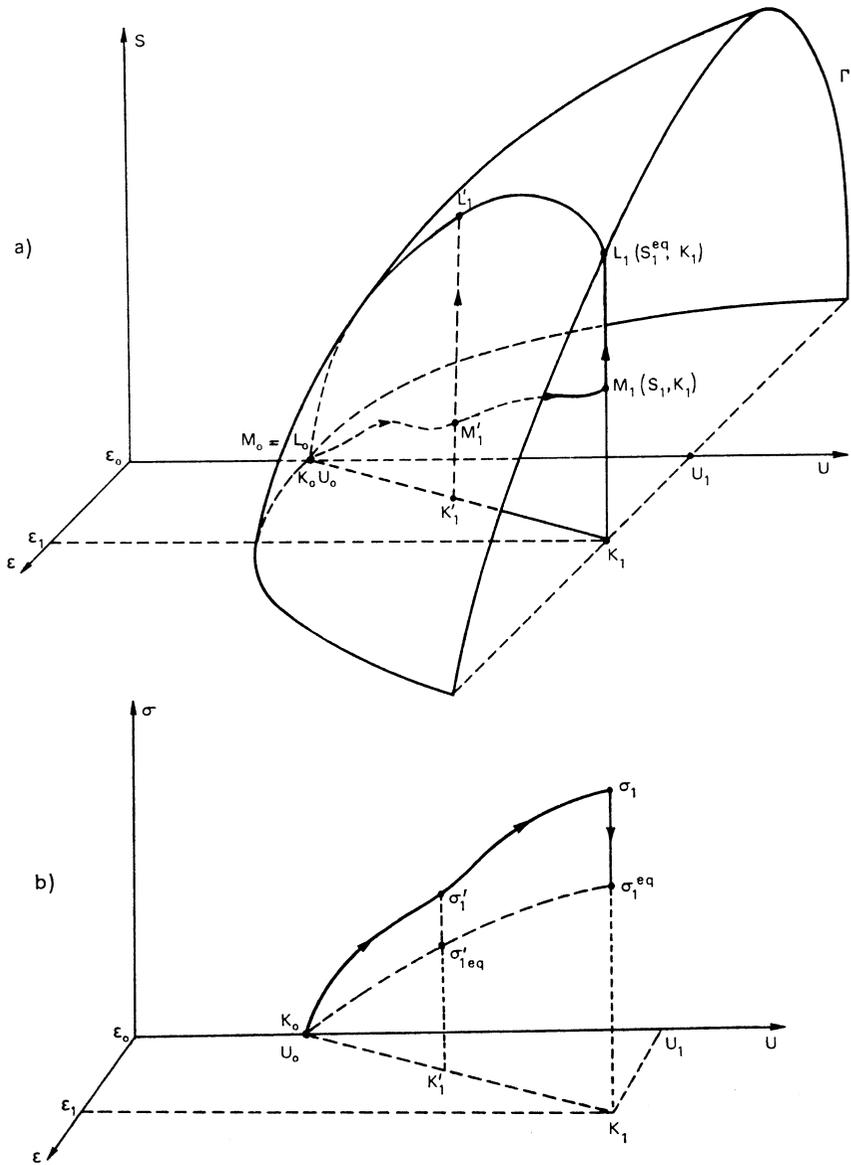


Fig. 2. — Évolution irréversible achevée par une relaxation adiabatique :  
 a. Surface d'équilibre et courbe de variation de l'entropie dans l'espace  $(S, U, \epsilon)$ ;  
 b. Courbe de variation de la contrainte dans l'espace  $(\sigma, U, \epsilon)$ .  
 L'existence de la relaxation adiabatique implique en général que l'on sorte de la surface d'équilibre.

*Nota.* — Pour permettre la visualisation de la surface  $\Gamma$ , nous symbolisons le tenseur symétrique  $\epsilon$  (à 6 composantes indépendantes  $\epsilon_{ij}$ ) par un seul axe de coordonnées. Il doit être clair que l'espace  $(S, K)$  est à 8 dimensions et que  $\Gamma$  est une hypersurface (à 7 dimensions) dans cet espace. Par ailleurs, le trajet  $K_0 \rightarrow K'_1 \rightarrow K_1$ , que nous avons figuré rectiligne pour simplifier la figure, pourrait à volonté ne pas l'être.

La deuxième partie au moins du principe (ou de l'hypothèse) de l'état local tel que nous l'avons rappelé au chapitre 3 ne peut donc être considérée comme satisfaisante, au moins pour les matériaux capables de relaxation lente (*i.e.* les matériaux à comportement héréditaire).

*A contrario*, une condition nécessaire pour que le principe de l'état local tel qu'énoncé au chapitre 3 soit valable est donc que, lors de la relaxation adiabatique, on ait à tout moment  $S = S^{\text{eq}}$ , *i.e.* que la relaxation adiabatique soit isentropique.

Puisque l'on peut effectuer une expérience de relaxation adiabatique à tout moment d'une évolution hors équilibre, une condition nécessaire et suffisante pour que la relaxation adiabatique soit isentropique est que l'évolution se fasse sur la surface d'équilibre.

Enfin, puisque nous venons de voir qu'il ne peut en être ainsi si la relaxation adiabatique est une relaxation lente, une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est encore que la relaxation adiabatique soit instantanée.

On notera que cette dernière condition n'est pas, *a priori*, une condition suffisante pour que la relaxation adiabatique soit isentropique : on peut en effet imaginer qu'une relaxation adiabatique instantanée s'accompagne d'un saut instantané d'entropie de  $M_1$  à  $L_1$ . Nous examinerons ce point de façon plus précise au paragraphe 7.2.

La relaxation adiabatique fournit donc sous forme de trois conditions nécessaires, un critère de validité du « principe » de l'état local.

Autrement dit, il fournit, sous forme de trois conditions suffisantes, un critère de non validité de ce principe.

Pour qu'un matériau n'obéisse pas au principe de l'état local, il suffit en effet, d'après ce que nous venons de voir, que l'une des trois conditions suivantes soit remplie :

- la relaxation adiabatique n'est pas isentropique;
- certaines évolutions peuvent se faire hors de la surface d'équilibre;
- la relaxation adiabatique n'est pas instantanée.

L'expérience de relaxation adiabatique étant, nous l'avons vu, toujours réalisable, ce critère présente l'avantage considérable d'être aussi un critère expérimental, indépendant de toute hypothèse *a priori* sur le comportement des matériaux.

La relaxation différée (*i.e.* non instantanée), est un phénomène rhéologique tout à fait courant. Le principe de l'état local ne peut donc être d'une validité générale en rhéologie, et ne peut par conséquent qu'exprimer des comportements particuliers dont, au stade actuel de l'exposé, l'existence même n'est encore qu'une éventualité. En outre, de tels comportements particuliers, s'ils existent, correspondront entre autres à une propriété d'équilibre instantanément établi au cours d'une relaxation adiabatique, ce qui précise le sens exact de la notion « d'équilibre local », souvent mentionné dans la littérature comme condition d'application de la T.P.I.

## 7. L'HYPOTHÈSE DE L'ÉTAT LOCAL ET LES DEUX PRINCIPES

### 7.1. RELATION DE GIBBS HORS ÉQUILIBRE ET 2<sup>e</sup> PRINCIPE.

Une démarche essentielle de la thermodynamique des processus irréversibles consiste, sur la base du « principe de l'état local », à utiliser l'équation de Gibbs (2.2), ou son homologue (2.9) de la représentation entropique, pour établir une expression explicite de la production d'entropie [5], [6], [9], [11].

Si  $u$  et  $s$  sont l'énergie interne et l'entropie (supposée définie) par unité de masse, et  $\rho$  la masse volumique, on montre facilement (cf. [13]) que l'équation (2.9) (qui est l'équation de Gibbs dans la représentation entropique) s'écrit sous forme locale en l'absence de phénomènes chimiques (*i.e.* avec  $dN_k = 0 \forall k$ ) <sup>(1)</sup> :

$$(7.1.1) \quad \frac{1}{T} \rho \dot{u} - \frac{\sigma_{ij}}{T} \dot{\varepsilon}_{ij} = \rho \dot{s}$$

Mais on a par ailleurs (cf. [12]) :

$$(7.1.2) \quad dU = d'W_{\text{ext}} - dC + d'Q_{\text{ext}} \quad (1^{\text{er}} \text{ principe})$$

$$(7.1.3) \quad d'W_{\text{ext}} - dC = d'W_{\text{def}} = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad \begin{array}{l} \text{(principe} \\ \text{des travaux virtuels)} \end{array}$$

où  $W_{\text{ext}}$  est le travail des forces extérieures,  $C$  l'énergie cinétique,  $Q_{\text{ext}}$  la chaleur transférée au système <sup>(2)</sup> et  $W_{\text{def}}$  le travail de déformation. On en tire :

$$(7.1.4) \quad \int_V (r - \text{div } q) dV \equiv \int_V (\rho \dot{u} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) dV$$

ou  $r$  correspond à une densité volumique de transferts thermiques, et où  $q$  est le vecteur courant de chaleur au travers d'une surface entourant le volume  $dV$ . Sous forme locale, (7.1.4) s'écrit :

$$(7.1.5) \quad r - \text{div } q = \rho \dot{u} - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

<sup>(1)</sup> En notant  $\dot{x}$  la dérivée de  $x(t)$  par rapport au temps  $t$ .

<sup>(2)</sup> Nous considérons ici que l'éprouvette dont nous voulons caractériser le comportement rhéologique macroscopique constitue un système fermé, pour lequel la chaleur transférée depuis l'extérieur est définie sans ambiguïté de façon indépendante de (7.1.2), laquelle définit donc  $dU$ . Le cas d'un système ouvert (par exemple matériau en cours de séchage) exigerait un autre examen, du fait que  $Q_{\text{ext}}$  ne possède plus alors de définition indépendante du 1<sup>er</sup> principe (cf. [6], p. 11 et [8], p. 58 à 60).

En supposant l'entropie définie hors d'équilibre, le deuxième principe s'exprime par l'inégalité de Clausius-Duhem pour un volume  $V$  limité par la surface  $\Sigma$  :

$$(7.1.6) \quad \dot{S}_e \equiv \int_V \frac{r}{T} dV - \int_{\Sigma} \frac{1}{T} q \cdot nd\Sigma \equiv \int_V \left( \frac{r}{T} - \operatorname{div} \frac{q}{T} \right) dV \leq \dot{S} \equiv \int_V \rho \dot{s} dV$$

où  $\dot{S}_e$  est le débit d'entropie externe correspondant aux transferts de chaleur.

Compte tenu de (7.1.5) et sous forme locale, (7.1.6) s'écrit encore :

$$(7.1.7) \quad \rho \dot{s}_e = \frac{1}{T} \rho \dot{u} - \frac{\sigma_{ij}}{T} \dot{\epsilon}_{ij} - q \operatorname{grad} \frac{1}{T} \leq \rho \dot{s}$$

où l'inégalité stricte vaut pour tout processus irréversible, qu'il soit sur ou hors de la surface d'équilibre.

A température macroscopique uniforme, (7.1.7) s'écrit donc, dans le cas irréversible :

$$(7.1.8) \quad \rho \dot{s}_e = \frac{1}{T} \rho \dot{u} - \frac{\sigma_{ij}}{T} \dot{\epsilon}_{ij} < \rho \dot{s}$$

qui est incompatible avec l'équation de Gibbs (7.1.1).

L'équation de Gibbs écrite en variables observables apparaît donc ici comme incompatible, pour les processus irréversibles, avec les deux principes fondamentaux de la thermo-dynamique. Il en est donc de même du principe de l'état local, du moins dans sa formulation habituelle énoncée au chapitre 3, et sauf peut-être cas particulier.

## 7.2. REPRISE INSTANTANÉE D'ENTROPIE ET 2<sup>e</sup> PRINCIPE.

Nous avons vu au chapitre 6 qu'une condition nécessaire pour que le principe de l'état local soit valable serait que la relaxation adiabatique soit isentropique, et qu'une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est qu'elle soit instantanée.

Nous avons noté qu'*a priori* cette dernière condition n'apparaît pas comme suffisante, puisqu'on pourrait concevoir qu'une relaxation adiabatique instantanée s'accompagne d'un saut instantané d'entropie.

Nous allons voir maintenant que le deuxième principe empêche qu'il en soit ainsi, et qu'il ne peut y avoir alors de saut instantané d'entropie. Autrement dit, toute relaxation adiabatique instantanée est isentropique.

Le principe de la démonstration est tout à fait analogue à un argument maintenant classique généralement attribué à COLEMAN (1964) [4], et utilisé en fait par DEFAY [20] [21] dès 1938.

Sur le plan purement mécanique, un matériau à relaxation instantanée est un matériau qui n'a aucune mémoire de l'histoire passée de ses déformations. La contrainte ne sera donc fonction que de grandeurs actuelles, par exemple la déformation actuelle <sup>(1)</sup>  $\varepsilon$ , et éventuellement de ses dérivées temporelles jusqu'à l'ordre  $n$  :

$$(7.2.1) \quad \sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(n)})$$

Comme cas particuliers bien connus, on a le comportement purement visqueux où le déviateur  $\sigma_d$  des contraintes n'est fonction que de la vitesse  $\dot{\varepsilon}_d$  du déviateur des déformations :

$$(7.2.2) \quad \sigma_d = \sigma_d(\dot{\varepsilon}_d)$$

et le comportement de Kelvin-Voigt (fig. 3).

$$(7.2.3) \quad \sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}).$$

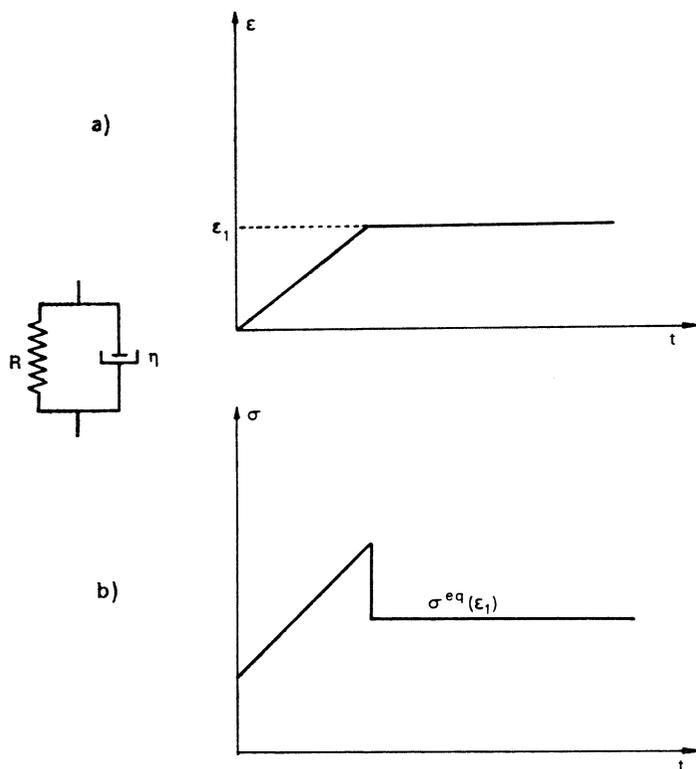


FIG. 3. — Relaxation instantanée du modèle de Kelvin après déformation rampe :

- a. Déformation en fonction du temps,
- b. Contrainte en fonction du temps,

<sup>(1)</sup> Tenseur de composantes  $\varepsilon_{ij}$ ,

En présence d'effets thermiques, imposés à  $\varepsilon$  fixé par la variable indépendante  $u$ , une relaxation adiabatique instantanée sera en outre caractérisée par le fait que  $\sigma$  ne dépend pas non plus du passé de  $u$ , mais seulement de sa valeur actuelle et, éventuellement, de ses dérivées temporelles jusqu'à l'ordre ( $m$ ).

On aura donc :

$$(7.2.4) \quad \sigma = \sigma(u, \dot{u}, \dots, u^{(m)} ; \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(n)})$$

Si à partir d'un instant  $t$  quelconque où  $\sigma$  est différent de sa valeur d'équilibre, on bloque  $u$  et  $\varepsilon$  (ce qui annule  $\dot{u}$  et  $\dot{\varepsilon}$  et leurs dérivées d'ordre supérieur), on passe bien brusquement de la valeur  $\sigma(t^-)$  à la valeur  $\sigma(t^+)$ , avec :

$$(7.2.5) \quad \sigma(t^-) \neq \sigma^{\text{éq}}; \quad \sigma(t^+) = \sigma(u, 0, \dots, 0; \varepsilon, \dots, 0) = \sigma^{\text{éq}}(u, \varepsilon)$$

De même pour qu'un équilibre thermique soit atteint instantanément lorsqu'on bloque  $u$  et  $\varepsilon$ , il faut et il suffit que l'on ait  $T$  de la forme :

$$(7.2.6) \quad T = T(u, \dot{u}, \dots, u^{(k)} ; \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(l)})$$

De même enfin, pour que l'entropie passe instantanément d'une valeur hors d'équilibre à sa valeur d'équilibre, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(7.2.7) \quad s = s(u, \dot{u}, \dots, u^{(p)} ; \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(q)})$$

On aura alors :

$$(7.2.8) \quad \begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial s}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial s}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \dots + \frac{\partial s}{\partial u^{(p)}} u^{(p+1)} \\ &+ \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \ddot{\varepsilon}_{ij} + \dots + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}^{(q)}} \varepsilon_{ij}^{(q+1)} \end{aligned}$$

(Convention d'Einstein).

Compte tenu de :

$$(7.2.9) \quad \dot{s}_e = \frac{1}{T} \dot{u} - \frac{\sigma}{\rho T} \dot{\varepsilon}_{ij} - q \frac{1}{\rho} \text{grad} \frac{1}{T}$$

l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$(7.2.10) \quad \dot{s}_t = \dot{s} - \dot{s}_e \geq 0$$

s'écrira, en notant par  $g$  le gradient de  $1/T$  :

$$(7.2.11) \quad \begin{aligned} \left( \frac{\partial s}{\partial u} - \frac{1}{T} \right) \dot{u} + \left( \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\sigma_{ij}}{\rho T} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho} q g + \frac{\partial s}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \dots \\ + \frac{\partial s}{\partial u^{(p)}} u^{(p+1)} + \frac{\partial s}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \ddot{\varepsilon}_{ij} + \dots + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}^{(q)}} \varepsilon_{ij}^{(q+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

L'entropie  $s$  étant par hypothèse indépendante de  $u^{(p+1)}$  et  $\varepsilon^{(q+1)}$ , le premier membre de la condition (7.2.11) constitue une forme linéaire par rapport à  $(u^{(p+1)}, \varepsilon_{ij}^{(q+1)})$  qui ne peut rester non négative quelles que soient ces grandeurs que si leurs coefficients sont nuls.

Il en résulte que  $s$  ne dépend pas de  $u^{(p)}$  ni de  $\varepsilon^{(q)}$ .

On peut alors répéter l'argument pour ces dernières et, en remontant ainsi, de proche en proche, jusqu'aux termes en  $\ddot{u}$  et  $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ , on constate que  $s$  ne dépendra d'aucune des dérivées actuelles de  $u$  et  $\varepsilon$ .

Par conséquent, l'expression (7.2.7) donnant l'entropie hors équilibre se réduit à :

$$(7.2.12) \quad s = s(u, \varepsilon)$$

et l'entropie ne dépend que des valeurs actuelles de  $u$  et  $\varepsilon$  quelles que soient l'histoire antérieure de  $(u, \varepsilon)$  et les valeurs des dérivées temporelles de  $u$  et  $\varepsilon$ .

Mais, lorsque la relaxation adiabatique est terminée, l'entropie atteint sa valeur d'équilibre  $s^{eq}(u, \varepsilon)$ , si bien que l'entropie hors d'équilibre s'identifie à sa valeur d'équilibre :

$$(7.2.13) \quad s = s(u, \varepsilon) \equiv s^{eq}(u, \varepsilon).$$

Autrement dit, il ne peut y avoir de saut instantané d'entropie, et tous les processus relatifs à un matériau dont le comportement donne lieu à relaxation adiabatique purement instantanée ont nécessairement lieu, dans l'espace  $(s, u, \varepsilon)$ , sur la surface d'équilibre.

Toute relaxation adiabatique instantanée est donc isentropique.

Nous avons vu en 6 qu'une condition nécessaire pour que le principe de l'état local soit satisfait était que  $s$  soit constamment égal à  $s^{eq}$ .

Nous avons vu qu'une condition nécessaire pour que cette condition nécessaire soit remplie est que la relaxation adiabatique soit instantanée, et nous venons de voir que cela est aussi suffisant. D'après ce que nous avons vu en 7.1, ceci ne veut cependant pas dire que cela soit suffisant pour assurer la validité du principe de l'état local lui-même.

Par contre, ce que nous venons de voir montre que, pour les comportements donnant lieu à relaxation adiabatique instantanée, le problème de définir une entropie hors équilibre se trouve d'emblée résolu.

### 7.3. CONSÉQUENCES POUR L'ARGUMENT DE COLEMAN.

Dans le cas général où la contrainte et la température dépendent, non seulement des valeurs actuelles de  $u$  et  $\varepsilon$  et de leurs dérivées, mais aussi de leur histoire antérieure, l'entropie (si on la suppose définie) sera non plus une fonction, mais une fonctionnelle que l'on pourra mettre sous la forme :

$$(7.3.1) \quad s = s \left[ \begin{array}{c} t^- \\ u(\tau), \varepsilon(\tau); u(t), \varepsilon(t); \dots; u^{(p)}(t), \\ -\infty \quad -\infty \\ \varepsilon^{(p)}(t); \dots, \varepsilon^{(q)}(t) \end{array} \right]$$

et, si l'on admet que l'on peut dériver en appliquant la règle des fonctions de fonction, on aura :

$$(7.3.2) \quad \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial s}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \dots + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}^{(q)}} \varepsilon_{ij}^{(q+1)} + \dot{s}_{u,\varepsilon}$$

où  $\dot{s}_{u,\varepsilon}$  est la vitesse de variation de  $s$  à partir du moment où  $u$  et  $\varepsilon$  sont maintenus constants (*i.e.* au cours d'une relaxation adiabatique). Alors, par un argument identique au précédent, on voit que  $s$  ne peut dépendre des dérivées temporelles de  $u$  et  $\varepsilon$  et que l'inégalité fondamentale se réduit à :

$$(7.3.3) \quad \rho \dot{s}_i = \rho \left( \frac{\partial s}{\partial u} - \frac{1}{T} \right) \dot{u} + \left( \rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\sigma_{ij}}{T} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho \dot{s}_{u,\varepsilon} + qg \geq 0$$

où  $T$  et  $\sigma$  sont des fonctionnelles de  $u$  et  $\varepsilon$ , et peuvent ou non dépendre en outre des valeurs actuelles des dérivées temporelles  $\dot{u}$  et  $\dot{\varepsilon}$ .

Si elles n'en dépendent pas, on aura par une nouvelle application de l'argument :

$$(7.3.4) \quad \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T}; \quad \rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\frac{\sigma_{ij}}{T}; \quad s \neq s^{eq} = s^{eq}(u, \varepsilon); \quad \rho \dot{s}_{u,\varepsilon} + qg > 0$$

où les deux premières équations sont données dans la littérature comme le principal résultat de l'argument de Coleman.

Mais si  $T$  et  $\sigma$  dépendent de  $u$ ,  $\varepsilon$  et de  $\dot{u}$ ,  $\dot{\varepsilon}$ , on aura <sup>(1)</sup> :

$$(7.3.5) \quad \frac{\partial s}{\partial u} \neq \frac{1}{T}; \quad \rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \neq -\frac{\sigma_{ij}}{T}; \quad s \neq s^{eq}; \quad \dot{u} = \dot{\varepsilon} = q = 0 \Rightarrow \dot{s}_{u,\varepsilon} > 0$$

Or nous venons de voir qu'une relaxation adiabatique instantanée correspond justement au cas où  $\sigma$  et  $T$ , et donc en général  $\frac{\sigma}{T}$  dépendent de  $\dot{u}$  et  $\dot{\varepsilon}$ .

Par conséquent, le principe de l'état local est incompatible avec les deux premières relations (7.3.4) et, réciproquement, la conséquence (7.3.4) ne saurait valoir dans les cas où le principe de l'état local serait éventuellement satisfait.

Par contre, dans le cas où il y a relaxation adiabatique purement instantanée, (7.3.5), du fait de l'égalité entre  $s$  et  $s^{eq}$ , se particularise en :

$$(7.3.6) \quad \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T^{eq}} \neq \frac{1}{T}; \quad \rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\frac{\sigma_{ij}^{eq}}{T^{eq}} \neq \frac{\sigma_{ij}}{T}; \quad s = s^{eq}; \quad \dot{s}_{u,\varepsilon} \equiv 0.$$

<sup>(1)</sup> Car si  $\frac{\partial s}{\partial u}$  était égal à  $\frac{1}{T}$  alors que  $s$ , et donc  $\frac{\partial s}{\partial u}$ , est indépendant de  $(\dot{u}, \dot{\varepsilon})$ , on aurait  $\frac{1}{T}$  indépendant de  $(\dot{u}, \dot{\varepsilon})$  ce qui est contraire à l'hypothèse; et de même pour  $\rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon}$  par rapport à  $-\frac{\sigma}{T}$ .

Mais les deux premières égalités (7.3.6) sont une conséquence triviale de la troisième par :

$$(7.3.7) \quad \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial s}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \equiv \frac{1}{T_{\text{eq}}} \dot{u} - \frac{\sigma_{ij}^{\text{eq}}}{\rho T_{\text{eq}}} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{s}^{\text{eq}}$$

et ne font donc appel à, ni n'expriment, aucun principe nouveau.

Par conséquent on ne peut trouver de comportement satisfaisant à l'ensemble des énoncés du chapitre 3 définissant le principe de l'état local. Par contre on peut trouver telle ou telle classe particulière de comportement satisfaisant hors équilibre à telle ou telle relation établie initialement pour le cas de l'équilibre. Mais ces diverses classes s'excluent mutuellement. Par exemple, si une certaine classe satisfait (7.3.4), elle ne peut satisfaire (7.3.6) et réciproquement.

Enfin, il existe des classes de comportement, telles que celle définie par (7.3.5), qui ne satisfont hors équilibre à aucune des relations caractéristiques de l'équilibre thermodynamique.

C'est le cas par exemple pour le modèle rhéologique unidimensionnel constitué par un élément de Maxwell en parallèle avec un amortisseur (fig. 4 : modèle M//A).

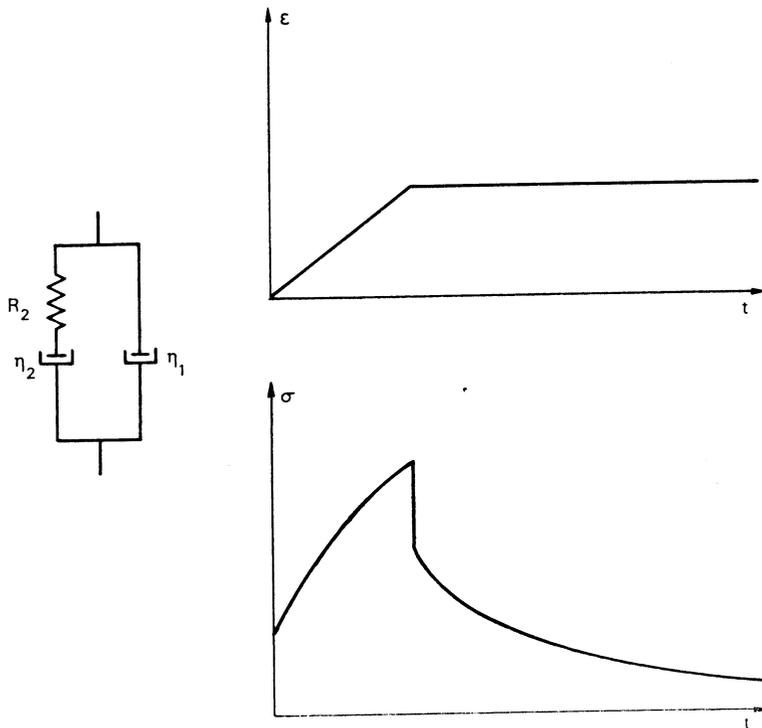


FIG. 4. — Relaxation (partiellement instantanée) du modèle (M//A) après déformation rampe.

Pour un tel modèle en effet, l'équation mécanique :

$$(7.3.8) \quad \sigma(t) = \gamma_1 \dot{\varepsilon}(t) + \int_0^t r_2(t-u) d\varepsilon(u)$$

montre que l'on n'a :

- ni  $\rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = -\frac{\sigma}{T}$  (car  $\sigma$  dépend de  $\dot{\varepsilon}$ )
- ni  $s = s^{eq}$  (car il existe relaxation différée)
- ni  $\rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} = -\frac{\sigma^{eq}}{T^{eq}}$  (car  $s \neq s^{eq}$ ).

Des classes intermédiaires seront définies en supposant que l'on a séparément :

- soit  $T$  indépendant de  $\dot{u}$  (avec  $\sigma$  dépendant de  $\dot{\varepsilon}$ );
- soit  $\sigma$  indépendant de  $\dot{\varepsilon}$  (avec  $T$  dépendant de  $\dot{u}$ ).

Dans le premier cas on aura :

$$(7.3.9) \quad \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{T}; \quad \rho \frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \neq -\frac{\sigma}{T}$$

La première égalité (7.3.9) est souvent utilisée comme une expression du principe de l'état local, ou considérée comme démontrée à partir de l'argument de Coleman. Elle correspond en fait à ce que, dans les équations de comportement considérées habituellement, on pose *a priori* que les grandeurs liées dépendent de la température (prise comme variable commandée), et éventuellement de son histoire, mais non de sa dérivée temporelle (cf. [4], [19]).

Il s'agit là d'une hypothèse restrictive <sup>(1)</sup> qui ne semble pas (sous réserve d'inventaire) posséder de justification *a priori* (notamment dans le cas de mélanges dont certains constituants sont dissipatifs).

Remarquons en passant que (7.3.3) confirme les bases de notre analyse du chapitre 6 puisque, pour une éprouvette en état uniforme soumise à relaxation adiabatique, la nullité de  $\dot{u}$ ,  $\dot{\varepsilon}$  et  $g$  entraîne :

$$(7.3.10) \quad \dot{s}_t = \dot{s}_{u,\varepsilon} > 0$$

L'équation (7.3.4) montre alors en outre <sup>(2)</sup> que, dans le cas où  $1/T$  et  $\sigma/T$  sont respectivement indépendants de  $\dot{u}$  et  $\dot{\varepsilon}$ , la vitesse de production d'entropie à chaque instant d'un processus en cours d'évolution hors équilibre à température macroscopique uniforme <sup>(3)</sup> est celle qui serait prise à l'origine d'une expérience de relaxation adiabatique qui serait effectuée à partir de cet instant.

(1) Non contradictoire du fait que ces auteurs ne se placent pas en variables propres.

(2) Par report dans (7.3.3).

(3) A  $\dot{u}$  et/ou  $\dot{\varepsilon} \neq 0$ .

Enfin, dans le cas où, comme dans l'exemple du modèle M//A, il y a une part de relaxation instantanée suivie ensuite de relaxation différée, l'argument exposé en 7.2 n'est pas modifié, si bien que la partie instantanée de la relaxation adiabatique est isentropique.

#### 7.4. CHANGEMENTS DE COMBINAISON DE VARIABLES INDÉPENDANTES : INTERVENTION DE LA DUALITÉ.

Les conclusions particulières obtenues dans le jeu de variables  $(u, \varepsilon)$  utilisé ici peuvent être modifiées lorsqu'on change de combinaison de variables.

En effet, posons :

$$(7.4.1) \quad D = \frac{1}{T}; \quad C_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{T}$$

Si C dépend de  $\dot{\varepsilon}$ , il pourra se faire que  $\varepsilon$  ne dépende pas de  $\dot{C}$ . Le recours à la fonction de Massieu.

$$(7.4.2) \quad \rho \dot{\gamma} = \rho \dot{s} - D \rho \dot{u} + C_{ij} \varepsilon_{ij}$$

homologue de l'enthalpie libre dans la représentation entropique pourra alors fournir des conditions d'existence d'un potentiel pour la combinaison de variable  $(D, C)$ .

L'inégalité fondamentale de la production d'entropie :

$$(7.4.3) \quad \rho \dot{s}_i = \rho \dot{s} + C_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - D \rho \dot{u} + qg > 0$$

pourra donc, compte tenu de :

$$(7.4.4) \quad \rho \dot{\gamma} + \rho u \dot{D} - \varepsilon_{ij} \dot{C}_{ij} = \rho \dot{s} - \rho D \dot{u} + C_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

et de l'analogue (7.4.5) de (7.3.2) :

$$(7.4.5) \quad \rho \dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial \gamma}{\partial C_{ij}} \dot{C}_{ij} + \dots + \dot{\gamma}_{D,C}$$

s'écrire :

$$(7.4.6) \quad \rho \left( \frac{\partial \gamma}{\partial D} + u \right) \dot{D} + \left( \rho \frac{\partial \gamma}{\partial C_{ij}} - \varepsilon_{ij} \right) \dot{C}_{ij} + \rho \dot{\gamma}_{D,C} + qg > 0$$

qui fournira :

$$(7.4.7) \quad u = - \frac{\partial \gamma}{\partial D}; \quad \varepsilon_{ij} = \rho \frac{\partial \gamma}{\partial C_{ij}} \quad \forall u, \varepsilon \quad \text{vérifiant} \quad \frac{\partial u}{\partial D} \equiv 0; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial C} \equiv 0$$

On pourra ainsi obtenir des potentiels pour des classes pouvant parfois être plus larges en pratique que dans la première combinaison de variables.

C'est ainsi que, dans la représentation énergétique, MANDEL [23] (1967) a obtenu des potentiels pour des milieux dépourvus d'élasticité instantanée en s'appuyant sur l'hypothèse suivant laquelle  $\varepsilon$  est indépendant de  $\dot{\sigma}$  et  $s$  indépendant de  $\dot{T}$ . La première partie de l'hypothèse correspond à la constatation expérimentale que la déformation instantanée n'est jamais modifiée par un changement dans la vitesse de chargement (principe dit de non-dualité [23]).

D'après ce résultat, un modèle de Kelvin peut être « colemanien » au sens de (7.4.7) dans l'espace  $(G, T, \sigma)$ , où  $G$  est l'enthalpie libre.

Ceci montre que la différence essentielle entre thermodynamique de l'équilibre (ou réversible), et thermodynamique irréversible ne réside pas dans l'existence ou la non-existence de potentiels, mais dans le fait que, de ce point de vue et dans le cas irréversible, toutes les combinaisons de variables ne sont en général pas équivalentes (alors qu'elles le sont dans le cas réversible). Ceci complète les remarques que nous avons faites en 5.3 sur l'emploi des diverses combinaisons de variables indépendantes.

Bien entendu, dans ce qui précède et suivant le cas d'espèce, on aura avantage à prendre telle ou telle combinaison de variable, ce qui fera intervenir les fonctions de Massieu respectivement homologues de l'énergie libre, de l'enthalpie et de l'enthalpie libre. Ces fonctions de Massieu s'ajoutent donc aux précédentes pour fournir des combinaisons de variables indépendantes adaptées à tel besoin particulier. Mais, au lieu de ne s'intéresser qu'à des comportements où, par exemple,  $u$  est indépendant de  $\dot{D}$  et  $\varepsilon$  indépendant de  $\dot{C}$ , on pourra s'intéresser à des comportements où ils en dépendent, mais où l'on a en outre :

$$(7.4.8) \quad \dot{\gamma}_{C,D} \equiv 0$$

*i.e.* absence de variation du potentiel  $\gamma$  après fixation de  $C$  et  $D$ , ce qui entraînera, dans l'exemple indiqué (et quel qu'en soit le réalisme) :

$$(7.4.9) \quad \gamma = \gamma(C, D) = \gamma^{eq}(C, D)$$

Ces comportements particuliers correspondent donc à une autre classe de processus se faisant sur une surface d'équilibre (définie cette fois dans un autre espace).

On voit donc que certains matériaux se prêtent à des processus irréversibles prenant place sur la surface d'équilibre pour certaines combinaisons de variables et pas pour d'autres combinaisons (les comportements réversibles étant caractérisés par le fait que les processus ont lieu simultanément sur les surfaces d'équilibre définies dans les divers espaces qui leur correspondent) (fig. 5).

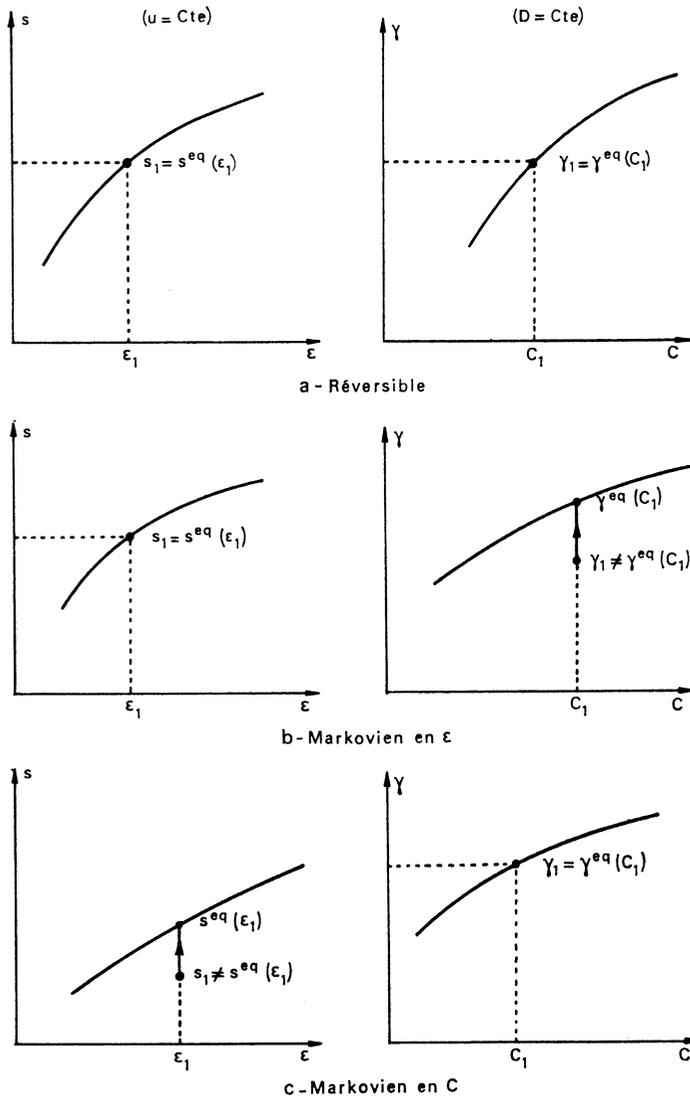


FIG. 5. — Relaxation et fluage adiabatique des comportements réversibles et markoviens

(entropie  $s$  et fonction de Massieu  $\gamma = s[C] = s \left[ \frac{\sigma}{\bar{T}} \right]$ ):

- a. Comportement réversible :  $s$  et  $\gamma$  restent tous deux sur leur surface d'équilibre quelle que soit l'évolution (relaxation adiabatique et fluage adiabatique nuls);
- b. Comportement markovien en  $\epsilon$  :  $s$  reste sur sa surface d'équilibre quelle que soit l'évolution (pas de relaxation adiabatique différée), mais  $\gamma$  sort de la sienne (fluage adiabatique différé);
- c. Comportement markovien en C :  $\gamma$  reste sur sa surface d'équilibre (pas de fluage adiabatique différé), mais  $s$  sort de la sienne (relaxation adiabatique différée).

*Nota.* — Si  $\epsilon$  est indépendant de  $\bar{T}$ , le principe de non-dualité de J. Mandel affirme en particulier (par  $\epsilon$  indépendant de  $\bar{\sigma}$ ) que tout comportement markovien en C est réversible (i. e. est aussi markovien en  $\epsilon$ ).

Suivant les cas et les objectifs, il pourra donc y avoir avantage à rechercher, soit les combinaisons de variables fournissant des propriétés de semi-potentiel <sup>(1)</sup> du type (7.3.4), soit des combinaisons de variables fournissant des propriétés de surface d'équilibre du type (7.3.6).

C'est sur des propriétés de ce dernier type qu'est construite la thermodynamique des processus irréversibles, et ce que nous venons de voir montre que la possibilité ou l'impossibilité de cette construction pourra dépendre en général du choix des variables indépendantes.

## 8. LE DOMAINE D'APPLICATION DIRECTE DE LA T.P.I. : LES COMPORTEMENTS MARKOVIENS

Nous avons vu plus haut que toute relaxation adiabatique instantanée est isentropique, mais que cela ne suffit pas à faire que le principe de l'état local dans son énoncé du chapitre 3, soit totalement satisfait.

Mais en fait, ce principe de l'état local n'est pas vraiment nécessaire à l'application directe de la T.P.I. Il suffit en effet, pour que cette application soit possible dans les variables  $(u, \varepsilon)$  que la condition :

$$(8.1) \quad s = s(u, \varepsilon) = s^{eq}$$

soit remplie, *i.e.* que la relaxation adiabatique soit isentropique. En effet, ce dont a besoin la T.P.I., c'est d'une expression explicite de la production d'entropie.

Or, pour les comportements à relaxation adiabatique instantanée, la production d'entropie peut effectivement, grâce à (7.3.6) reporté dans (7.3.3), être totalement exprimée en fonction de quantités connues, par :

$$(8.2) \quad \rho \dot{s}_t = \left( \frac{1}{T^{eq}} - \frac{1}{T} \right) \rho \dot{u} - \left( \frac{\sigma^{eq}}{T^{eq}} - \frac{\sigma_{ij}}{T} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + qg > 0$$

dès que l'on connaît la surface d'équilibre donnée par (8.1).

De (8.2), on tire :

$$(8.3) \quad \left( \frac{1}{T^{eq}} - \frac{1}{T} \right) \dot{u} > 0 \quad \forall \dot{\varepsilon} = g = 0; \quad \left( \frac{\sigma}{T} - \frac{\sigma_{ij}^{eq}}{T^{eq}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} > 0 \quad \forall \dot{u} = g = 0$$

<sup>(1)</sup> Qui toutefois ne semblent vraiment utilisables que lorsqu'on connaît *a priori* une expression explicite de ce semi-potentiel. Ceci, et ce qui précède, ne concerne que des équations écrites, hors équilibre comme à l'équilibre, en variables propres. S'il n'en est pas ainsi, la liberté d'écriture est plus grande, mais tout choix restreint alors le degré de généralité.

qui montrent que :

— dans un processus à  $\varepsilon$  constant et  $T$  uniforme,  $T$  est supérieur à  $T^{\text{eq}}$  si  $\dot{u}$  est positif (apport de chaleur), et lui est inférieur si  $\dot{u}$  est négatif (extraction de chaleur) : il peut donc éventuellement y avoir « relaxation de température » (en faisant  $\dot{u} = 0$  à partir d'un certain moment), qui sera ici instantanée par hypothèse <sup>(1)</sup>;

— dans un processus adiabatique à  $T$  uniforme,  $\frac{\sigma}{T}$  est supérieur à  $\frac{\sigma^{\text{eq}}}{T^{\text{eq}}}$  si  $\dot{\varepsilon}$  est positif, et inférieur si  $\dot{\varepsilon}$  est négatif (ce qui correspond à la relaxation, instantanée, de  $\frac{\sigma^{\text{eq}}}{T^{\text{eq}}}$ , *i.e.* aussi de contrainte dans le cas particulier où l'équilibre thermique interne  $T = T^{\text{eq}}$  est réalisé à tout instant).

Dans l'équation (8.2) la production d'entropie apparaît comme une forme bilinéaire par rapport aux vitesses de  $u$  et  $\varepsilon$ , et aux écarts à l'équilibre de  $1/T$  et  $\sigma/T$ , soit :

$$(8.4) \quad \rho \dot{s}_i \equiv \rho A \dot{u} + B_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + qg \geq 0$$

avec :

$$(8.5) \quad A = \frac{1}{T^{\text{eq}}} - \frac{1}{T}; \quad B = \frac{\sigma}{T} - \frac{\sigma^{\text{eq}}}{T^{\text{eq}}}$$

où  $A$  et  $B$  s'annulent avec  $\dot{u}$  et  $\dot{\varepsilon}$  (et de même pour  $\dot{s}_i$  si en outre  $g = 0$ ) et ne dépendent pas de l'histoire de  $u$  et  $\varepsilon$ .

On peut donc développer, suivant le traitement T.P.I. classique,  $\dot{u}$ ,  $\dot{\varepsilon}$  et  $q$  (notés  $x_i$ ) en fonction des  $A$ ,  $B$  et  $g$  (notés  $F_j$ ) soit :

$$(8.6) \quad x_i = a_{ij} F_j + \frac{1}{2!} b_{ijk} F_j F_k + \dots$$

Si, parmi les coefficients <sup>(2)</sup>, seuls les  $a_{ij}$  sont différents de zéro, on a la T.P.I. linéaire, et non linéaire dans le cas contraire.

On voit donc que l'on a retrouvé le traitement de la T.P.I. sans faire appel à l'équation de Gibbs, qui n'est pas vérifiée ici, comme nous l'avons vu, mais en utilisant simplement :

- d'une part l'inégalité fondamentale du deuxième principe;
- d'autre part le fait que, lorsque la relaxation adiabatique est instantanée, l'entropie ne dépend que de  $u$  et  $\varepsilon$ , et se confond donc à tout instant avec sa valeur à l'équilibre, quelle que soit l'histoire du couple  $(u, \varepsilon)$ .

Avec CALLEN [10], nous nommons markoviens les comportements irréversibles particuliers ainsi caractérisés.

D'après ce qui a été dit en 7.4, le caractère markovien apparaît dépendre de la combinaison de variables adoptées.

<sup>(1)</sup> Hypothèse réalisée en pratique pour les transferts par rayonnement.

<sup>(2)</sup> Qui dépendent, en général, du vecteur d'état, c'est-à-dire ici de  $u$  et  $\varepsilon$ .

On pourra en effet trouver des comportements irréversibles particuliers qui, markoviens pour une certaine combinaison de variables, seront héréditaires pour une autre combinaison (*i.e.* évolueront à vecteur d'état restant fixe et ce à vitesse non constante). Un exemple simple en est donné par le modèle de Kelvin, qui se relaxe instantanément à sa valeur d'équilibre lorsqu'on fixe  $\varepsilon$ , mais flue de façon non stationnaire (*i.e.* à vitesse non constante), lorsqu'on fixe  $\sigma$ . Nous appellerons semi-markoviens ces comportements.

De façon à éliminer les difficultés liées aux comportements héréditaires, il est intéressant de rechercher s'il existe des comportements ne faisant pas intervenir l'hérédité, quelle que soit la combinaison de variable envisagée. Nous les appellerons totalement markoviens ou markoviens stricts.

Ceci peut se produire lorsque les valeurs à l'équilibre de  $\frac{\sigma}{T}$  et  $\frac{1}{T}$  ne dépendent ni de  $\varepsilon$ , ni de  $u$ , *i.e.* sont des constantes.

En effet, on a par exemple pour l'approximation linéaire :

$$(8.7) \quad \begin{cases} \dot{u} = a_{11} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T^{eq}} \right) + a_{12} \left( \frac{\sigma}{T} - \frac{\sigma^{eq}}{T^{eq}} \right) \\ \dot{\varepsilon} = a_{21} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T^{eq}} \right) + a_{22} \left( \frac{\sigma}{T} - \frac{\sigma^{eq}}{T^{eq}} \right) \end{cases}$$

Lorsqu'on fixe  $1/T$  et  $\sigma/T$ , (8.7) devient dans le cas général un système différentiel par rapport à  $u$  et  $\varepsilon$ .

$$(8.8) \quad \begin{cases} \dot{u} + a_{11} \frac{1}{T^{eq}(u, \varepsilon)} + a_{12} \frac{\sigma^{eq}(u, \varepsilon)}{T^{eq}(u, \varepsilon)} = b_1 \\ \dot{\varepsilon} + a_{21} \frac{1}{T^{eq}(u, \varepsilon)} + a_{22} \frac{\sigma^{eq}(u, \varepsilon)}{T^{eq}(u, \varepsilon)} = b_2 \end{cases}$$

où  $b_1$  et  $b_2$  sont des constantes.

En général, la résolution de ce système introduit un caractère héréditaire du fait que  $\dot{u}$  et  $\dot{\varepsilon}$  sont alors nécessairement non constants (puisque  $T^{eq}$  et  $\sigma^{eq}$  varient sous l'influence des variations de  $u$  et  $\varepsilon$ ), même lorsque le système est découplé ( $a_{21} = a_{12} = 0$ ).

On obtiendrait par contre un comportement mécanique non héréditaire si le matériau était tel que  $T^{eq}$ ,  $\sigma^{eq}/T^{eq}$  et les  $a_{ij}$  soient des constantes indépendantes de  $u$  et  $\varepsilon$ .

C'est le cas en particulier du comportement mécanique (2<sup>e</sup> équation 8.8) d'un fluide visqueux newtonien sans viscosité de volume lorsqu'on sépare les contraintes et déformations en parties isotropes et déviateurs et lorsqu'on suppose en outre que  $T^{eq}$  et la viscosité sont indépendants de  $\varepsilon$ .

On a alors en effet, sous déviateur  $\sigma_d$  constant :

$$(8.9) \quad \dot{\varepsilon}_d = \text{Constante}$$

c'est-à-dire fluage stationnaire <sup>(1)</sup>.

L'étude des comportements markoviens stricts est particulièrement facile.

D'où le rôle privilégié qu'ils jouent dans l'établissement de modèles de comportement, obtenus par assemblages de comportements plus simples (méthode des variables cachées).

Comme nous l'avons indiqué plus haut, le fait que les comportements markoviens donnent lieu à relaxation instantanée rend compte de la notion « d'équilibre instantané » souvent donnée dans la littérature comme condition de validité de l'application de la T.P.I. (ou justification du principe de l'état local), et permet de lui donner une signification plus précise : il s'agit de l'équilibre instantanément établi lorsque, à partir d'un certain moment, on fixe les variables du vecteur d'état.

On a vu en 7.4, dans le cas du modèle de Kelvin, que ceci n'exclut pas la possibilité d'une approche par la méthode des équations (7.4.7), qui n'est donc pas contradictoire à la première, mais simplement complémentaire en ce qu'elle permet de changer de combinaison de variables indépendantes. Le choix est alors lié essentiellement à la relation entre le type de comportement considéré, et le type d'histoire des sollicitations envisagé.

En tout cas, il apparaît que l'expérience de relaxation adiabatique fournit un critère expérimental de validité de l'application directe de la T.P.I. : celle-ci est applicable lorsque la relaxation adiabatique est instantanée <sup>(2)</sup>.

L'expérience de relaxation adiabatique permet donc de distinguer trois grandes classes de comportements rhéologiques :

1. Les comportements réversibles pour lesquels la relaxation adiabatique est toujours nulle.

2. Les comportements irréversibles markoviens pour lesquels la relaxation adiabatique est instantanée.

3. Les comportements irréversibles héréditaires, pour lesquels il existe une relaxation différée, soit de contrainte, soit de température, soit des deux.

Les comportements réversibles sont justiciables de la thermodynamique classique de l'équilibre.

Les comportements markoviens sont justiciables de la T.P.I.

<sup>(1)</sup> Ce pourra être également le cas pour son comportement énergétique (1<sup>re</sup> équation 8.8) si ce fluide newtonien est constitué d'un mélange en cours de changement de phase, ayant lieu à température constante, cette dernière étant alors également indépendante de l'énergie interne.

<sup>(2)</sup> Il en sera de même dans d'autres combinaisons de variables si le comportement est tel que le vecteur d'état correspondant soit capable de conduire à l'équilibre lors de son maintien fixe, et qu'en outre cet équilibre soit atteint instantanément.

Les comportements de la classe 3 ne peuvent être directement traités par les méthodes de la T.P.I. et l'on doit faire appel à d'autres approches.

Parmi les comportements markoviens, une place particulière doit être faite aux comportements pour lesquels  $T^{eq}$  et  $\frac{\sigma^{eq}}{T^{eq}}$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$ . Lorsqu'on prend pour origine de  $T$  et  $\sigma$  leurs valeurs à l'équilibre initial, ceci correspond à une relaxation instantanée totale (effective, cas du corps purement visqueux, ou simplement possible, cas du corps rigide-plastique qui peut être déchargé totalement à  $\varepsilon$  constant).

## 9. RÉDUCTION DU CAS HÉRÉDITAIRE AU CAS MARKOVIEU : LA MÉTHODE DES VARIABLES INTERNES (OU DES MODÈLES)

D'après ce qui vient d'être dit, on voit immédiatement que la méthode des variables internes bien connue (ou son équivalent la méthode des modèles rhéologiques) doit sa capacité et sa puissance au fait qu'elle réduit le cas héréditaire au cas markovien par l'introduction de variables internes  $\xi_k$  identifiées lors de la décomposition de l'élément de volume en un certain nombre de sous-systèmes, avec dans ce cas :

$$(9.1) \quad s = s(u, \varepsilon, \xi_k)$$

et :

$$(9.2) \quad \dot{s}_{u, \varepsilon, \xi} \equiv 0$$

ce qui fait que les transformations se font sur la surface d'équilibre de l'espace  $(s, u, \varepsilon, \xi)$  <sup>(1)</sup>.

En effet, lorsqu'on ne considère que l'espace des observables  $(s, u, \varepsilon)$ , il est clair que de telles transformations sur la surface d'équilibre dans l'espace  $(s, u, \varepsilon, \xi)$  font en général sortir de la trace de cette surface dans  $(s, u, \varepsilon)$ , ce qui rend compte des comportements héréditaires observés (fig. 6).

Ce qui précède fournit alors une règle permettant de s'assurer que la décomposition effectuée est suffisamment poussée. En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les sous-systèmes identifiés lors de la décomposition soient ou bien à comportement réversible, ou bien à comportement markovien.

<sup>(1)</sup> C'est la méthode employée en chimie, où les  $\xi_k$  sont les degrés d'avancement des réactions, supposées toutes identifiées.

De plus, la relaxation adiabatique (appliquée cette fois à chaque élément individuel) fournit un critère permettant de s'assurer qu'il en est bien ainsi.

Toutefois, dans un grand nombre de cas pratiques, la décomposition devra être si poussée, et le nombre de variables internes à prendre en compte tellement grand, qu'on peut se poser des questions sur les possibilités de la méthode.

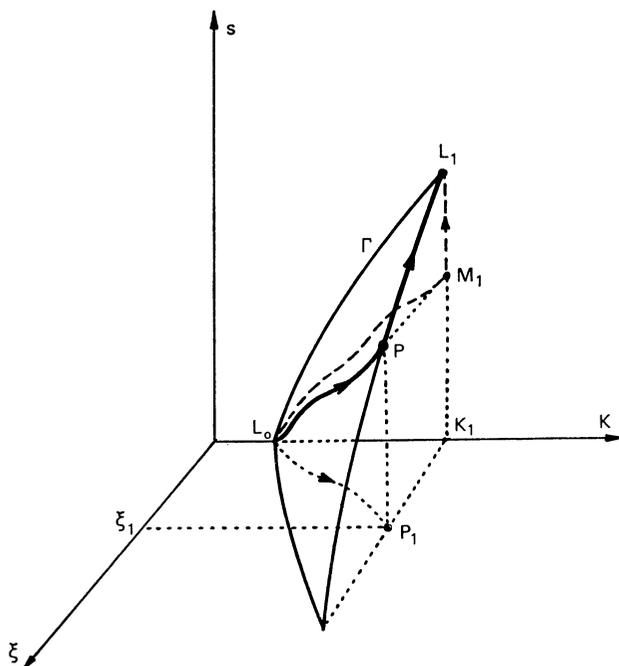


FIG. 6. — Évolution hors surface d'équilibre dans l'espace  $(S, K) = (S, U, \varepsilon)$  et variable supplémentaire  $\xi$  (« interne » ou « cachée »).

C'est ainsi que pour un matériau bitumineux, qui obéit comme on le sait d'après l'expérience [24] à une loi de fluage biparabolique, le nombre de variables internes <sup>(1)</sup> est non seulement infini, mais possède deux fois la puissance du continu.

Il y aura alors intérêt dans ce cas à rechercher la possibilité d'une autre approche, telle que celle basée sur l'abandon des équations (7.3.6) au profit des équations (7.3.4).

L'inconvénient est que l'on ne connaîtra pas en général l'expression explicite de  $s$ .

<sup>(1)</sup> Correspondant classiquement à une décomposition spectrale [26].

Après ce qui précède, on peut se demander comment il a été possible de construire des théories sur la thermodynamique des comportements héréditaires et, en particulier des comportements viscoélastiques, ne donnant pas lieu à relaxation instantanée.

C'est que ces théories étaient toutes basées sur une démarche inverse de celle que nous avons adoptée ici en nous plaçant du point de vue de l'expérimentation rhéologique.

En effet les auteurs de ces théories :

— ou bien sont partis d'un modèle rhéologique dont ils connaissaient tout *a priori* (y compris sa constitution interne, et ce de façon assez fine pour que les éléments des composants soient réversibles ou markoviens : c'est le cas par exemple de STAVERMANN et SCHWARZL [25]) : on peut alors, à l'aide des propriétés d'additivité, calculer effectivement les fonctions thermodynamiques du système en fonction de celles des constituants;

— ou bien sont partis de la donnée *a priori* des fonctions thermodynamiques (en fait à partir des formes fournies par les modèles précédents) : c'est par exemple le cas pour BRUN [22].

Lorsqu'on s'est ainsi donné *a priori* toute l'information nécessaire, on peut alors calculer les différentes grandeurs thermodynamiques non encore explicitées.

Par contre, la démarche inverse, qui est nécessairement celle de l'expérimentateur confronté à un matériau réel, apparaît comme impossible.

En effet, il apparaît (et il est même démontré [22]) que l'on ne peut pas remonter à la connaissance totale du système à partir d'expériences directes sur son comportement : en effet, le nombre d'inconnues est alors supérieur au nombre d'équations disponibles, si bien qu'il existe une infinité de solutions possibles.

Autrement dit, il existe une infinité de modèles donnant par exemple la même réponse à une histoire donnée de la déformation. Comme l'a indiqué MEIXNER [17] ceci est d'ailleurs bien connu pour les réseaux électriques.

Ceci conduit à la nécessité de considérer avec circonspection les démarches, pourtant assez fréquemment rencontrées, consistant à inférer la forme d'une structure microscopique à partir d'expériences de comportement macroscopique hors équilibre, tout au moins pour ce qui est des comportements non markoviens.

## 10. CONCLUSION

La présente étude nous a permis d'examiner quelques unes des difficultés engendrées par l'utilisation en rhéologie du principe de l'état local, considéré au départ comme formant la base de la thermodynamique classique des processus irréversibles.

Nous avons vu que l'énoncé habituel de ce principe est trop fort, et que l'on ne peut jamais (même en T.P.I.) appliquer hors équilibre l'ensemble des relations applicables à l'équilibre.

Par contre, au moins pour certaines classes de comportements irréversibles, il est possible d'appliquer dans certains cas hors équilibre certaines des relations de l'équilibre; mais alors, il en existe toujours d'autres qui ne sont pas applicables directement.

Nous avons montré en outre que la relaxation adiabatique fournit un critère expérimental d'identification des comportements justiciables de la T.P.I. et que nous nommons markoviens : pour ceux-ci la relaxation adiabatique est instantanée (ce qui entraîne qu'elle est isentropique).

Ceci permet de partager les comportements rhéologiques en trois grandes classes qui sont les comportements respectivement réversibles, irréversibles markoviens et irréversibles non markoviens.

Les comportements markoviens sont caractérisés par le fait qu'il existe au moins une combinaison de variables observables indépendantes telles que toute évolution, irréversible aussi bien que réversible, ait lieu sur la surface d'équilibre que l'on peut définir dans l'espace produit de ces variables par la fonction thermodynamique correspondante <sup>(1)</sup>. Les écarts à l'équilibre des grandeurs conjuguées de ces variables observables ne sont alors fonction que des dérivées de ces observables, ce qui élimine toute mémoire des valeurs antérieures de ces dernières (il peut cependant y avoir réponse héréditaire pour d'autres combinaisons de variables).

Au contraire, les comportements irréversibles non markoviens sont héréditaires (*i.e.* pourvus de mémoire) quelle que soit, en variables propres, la combinaison de variables observables considérée.

Les comportements non markoviens sont donc totalement héréditaires, alors que les markoviens peuvent n'être que semi-héréditaires.

Lorsque le comportement est markovien par rapport à une certaine fonction thermodynamique, celle-ci est une fonction d'état (la même qu'à l'équilibre) par rapport à ses variables propres.

Dans le cas non markovien, la puissance de la méthode des modèles rhéologiques apparaît alors liée au fait que l'on peut parfois se ramener au comportement markovien en introduisant des variables supplémentaires convenables en nombre suffisant (variables « internes », ou « cachées »).

<sup>(1)</sup> *I.e.* qui les admet pour variables propres. Dans certains cas (modèle de Maxwell par exemple), il arrive qu'on puisse choisir (sans incompatibilité mais sans y être forcé) de compléter un système incomplet d'équations d'évolution par une équation d'état exprimant une fonction thermodynamique en variables non propres. Il n'en résulte pas que l'évolution se fasse alors sur la surface d'équilibre (qui peut ne pas exister dans l'espace considéré).

Notre étude fournit ainsi un critère d'identification d'une variable interne convenable : le comportement auquel elle correspond lorsqu'on l'isole doit lui-même être réversible ou markovien.

On peut alors construire, dans le cas non markovien (*i.e.* totalement héréditaire), des expressions explicites de l'ensemble des fonctions thermodynamiques en se donnant *a priori* un modèle rhéologique constitué d'éléments qui soient réversibles ou markoviens (ou encore eux-mêmes décomposables en réversibles ou markoviens), ce qui justifie la méthode des modèles, tout en précisant ses conditions d'emploi.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. KESTIN. — Entropy and entropy production : Discussion paper, *International symposium « Fondations of continuum thermodynamics »*, Bussaco (Portugal), 22-26 juillet 1973; Macmillan Press Ltd, G.B., pp. 143-151, 1974.
- [2] D. G. MILLER. — The Onsager relations; experimental evidence, *International symposium « Fondations of continuum thermodynamics »*, Bussaco (Portugal), 22-26 juillet 1973; Macmillan Press Ltd, G.B., pp. 185-214, 1974.
- [3] P. GERMAIN. — The role of thermodynamics in continuum mechanics, *International symposium « Fondations of continuum thermodynamics »*, Bussaco (Portugal), 22-26 juillet 1973, Macmillan Press Ltd, G.B., pp. 317-333, 1974.
- [4] B. N. COLEMAN. — Thermodynamics of materials with memory, *archive for rational, mechanics analysis*, vol. 17, pp. 1-46, 1964.
- [5] P. GLANSDORFF et I. PRIGOGINE. — *Structure, stabilité et fluctuations*, Masson éd., Paris, pp. 27-28, 1971.
- [6] I. PRIGOGINE. — *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles*, Dunod éd., Paris, 1968.
- [7] L. NAPOLITANO. — Thermodynamique des systèmes composites, *Mémoires de sciences physique*, fascicule 71, pp. 22-23, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [8] F. FER. — *Thermodynamique macroscopique*, t. II, p. 33, Gordon et Breach, éd. Paris, 1971.
- [9] N. BOCCARA. — Les principes de la thermodynamique classique, p. 103, P.U.F. éd., 1968.
- [10] H. B. CALLEN. — *Thermodynamics*, p. 286, John Wiley and sons, New York, 1960.
- [11] P. GLANSDORFF et I. PRIGOGINE. — Thermodynamique, article d'*Encyclopedia universalis*, vol. 16, 2. Le second principe, p. 33.
- [12] P. GERMAIN. — *Mécanique des milieux continus*, p. 143, Masson Paris, 1973.
- [13] J. MANDEL. — *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*, p. 97, Éditions scientifiques de Pologne, Varsovie, 1974.
- [14] V. VOLTERRA. — Leçons sur les fonctions de ligne, *Sorbonne*, 1912; *collection Borel*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.  
L'application du calcul aux phénomènes d'hérédité, *Revue du mois*, t. 13, pp. 556-574, 1912.  
La théorie des fonctionnelles appliquées aux phénomènes héréditaires, *Revue générale sciences pures et appliquées*, t. 41, pp. 197-206, 1930.

- [15] A. C. ERINGEN. — On non-local continuum thermodynamics; extrait de *Modern developments in thermodynamics*, ouvrage coordonné par B. Gal-Or; John-Wiley and sons, New York, pp. 121-142, 1974.
- [16] *Colloque Euromech 93 « Non-local theory of materials »*, Jablonna (Pologne), 29 août au 2 septembre 1977.
- [17] J. MEIXNER. — Entropy and entropy production, Int<sup>al</sup> *symposium « Foundations of continuum thermodynamics »*, 22-26 juillet 1973, Bussaco (Portugal), Macmillan Press Ltd (G.B.), pp. 129-142, 1974.
- [18] B. HALPHEN. — Sur la thermodynamique du polycristal métallique, *colloque* du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », Paris, 7-8 décembre 1977.
- [19] W. A. DAY. — *The Thermodynamics of simple materials with fading memory*, Springer, Berlin, 1972.
- [20] R. DEFAY. — *Bull. Ac. Roy. Belg.* (Cl. sc.), séance du 3 mai 1938, p. 347 (cité en 20).
- [21] I. PRIGOGINE et R. DEFAY. — *Thermodynamique chimique*, p. 40, Desoer, Liège, 1950.
- [22] L. BRUN. — Thermodynamique et viscoélasticité, *colloque* du Groupe français de rhéologie « Aspects énergétiques en rhéologie », 17 mai 1966; Cahiers du G.F.R., t. 1, n° 4, pp. 191-202, avril 1967.
- [23] J. MANDEL. — Application de la thermodynamique aux milieux viscoélastiques à élasticité instantanée nulle ou restreinte, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, t. 264, pp. 133-134, 16 janvier 1967.
- [24] C. HUET. — Étude, par une méthode d'impédance, du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés, *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 6, novembre-décembre 1965.
- [25] A. J. STAVERMANN et P. SCHWARZL. — Thermodynamics of visco-elastic behaviour, *Proc. Roy. Acad. Sc.*, t. 55, p. 474, 1952.
- [26] J. MANDEL. — *Mécanique des milieux continus*, t. II, annexe XXI, Gauthier-Villars, Paris, 1966.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Résumé (français, anglais, allemand).....	123
1. INTRODUCTION.....	125
2. RAPPEL : THERMODYNAMIQUE DE L'ÉQUILIBRE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE.....	126
3. THERMODYNAMIQUE HORS ÉQUILIBRE ET NOTION D'ÉTAT LOCAL.....	129
4. PRINCIPE DE L'ÉTAT LOCAL ET COMPORTEMENTS RHÉOLOGIQUES.....	131
5. REMARQUES PRÉLIMINAIRES.....	132
5.1. <i>Sur la notion d'état</i> .....	132
5.2. <i>Sur la notion de « localité »</i> .....	133
5.3. <i>Sur l'emploi des diverses combinaisons de variables indépendantes</i> .....	134
5.4. <i>Processus irréversibles et situations hors équilibre</i> .....	135
5.5. <i>Sur l'emploi de la température comme variable commandée</i> .....	136
6. RECHERCHE D'UN CRITÈRE DE VALIDITÉ DU PRINCIPE DE L'ÉTAT LOCAL : LA RELAXATION ADIABATIQUE.....	137
7. L'HYPOTHÈSE DE L'ÉTAT LOCAL ET LES DEUX PRINCIPES.....	142
7.1. <i>Relation de Gibbs hors équilibre et 2<sup>e</sup> principe</i> .....	142
7.2. <i>Reprise instantanée d'entropie et 2<sup>e</sup> principe</i> .....	143
7.3. <i>Conséquences pour l'argument de Coleman</i> .....	146
7.4. <i>Changements de combinaison de variables indépendantes : intervention de la dualité</i> .....	150
8. LE DOMAINE D'APPLICATION DIRECTE DE LA T.P.I. : LES COMPORTEMENTS MARKOVIENS.....	153
9. RÉDUCTION DU CAS HÉRÉDITAIRE AU CAS MARKOVIEU : LA MÉTHODE DES VARIABLES INTERNES (OU DES MODÈLES).....	157
10. CONCLUSION.....	159
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	161



# INTERVENTION DE PROCESSUS DISSIPATIFS SUPERFICIELS DANS UN PROBLÈME DE MINIMUM D'ÉNERGIE<sup>(1)</sup>

*(Interference of the surface dissipation processes  
in a matter of minimum energy)*

*(Auftreten von Dissipationsprozessen an der Oberfläche  
bei einem Energieminimumproblem)*

par

R. COURTEL<sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — *On étudie les vitesses d'évolution hors d'équilibre d'un système bille de verre/plan viscoélastique adhésif. L'expérience révèle une forte dissymétrie du phénomène selon que l'aire de contact va en décroissant (décollement) ou en croissant (recollement). Dans le premier cas, un calcul simple, dû à D. Maugis et M. Barquins, et basé sur une extension du domaine de validité des formules établies pour l'équilibre et sur certaines caractéristiques du phénomène de dissipation en tête de « fissure », rend compte rigoureusement de tous les aspects observés. Dans le deuxième cas, on présente l'hypothèse que l'augmentation de vitesse constatée est à mettre en rapport avec la modification du profil du contact observée expérimentalement.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Professeur à l'I.S.M.C.M., directeur de recherche au Centre national de la recherche scientifique, Meudon-Bellevue.

**SUMMARY.** — *The kinetics of contact between a rigid glass sphere and a smooth viscoelastic rubber plane is studied. The system is viewed as a circular crack which can move through the interface glass/rubber; experiments show that its speed is much higher when loading than for unloading. A simple presentation by D. Maugis and M. Barquins permits to interpret and calculate all the effects observed during the unloading process. An hypothesis is made to explain the much higher speeds occurring when one loads the system.*

**ZUSAMMENFASSUNG.** — *Es werden die Entwicklungsgeschwindigkeiten im Nichtgleichgewicht für ein System Glaskugeln/adhäsive viskoelastische Ebene untersucht. Der Versuch ergibt, dass der Vorgang stark asymmetrisch ist, je nachdem ob die Kontaktfläche kleiner (Ablösung) oder grösser (Wiederanlegen) wird. Im ersteren Fall werden alle beobachteten Aspekte in einer einfachen Rechnung streng berücksichtigt, die auf D. Maugis und M. Barquins zurückzuführen ist und die auf einer Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches der für das Gleichgewicht aufgestellten Formeln und auf einigen Kenngrössen des Dissipationsprozesses zu Beginn der Rissbildung beruht. Im zweiten Fall wird angenommen, dass die festgestellte Geschwindigkeitszunahme mit der experimentell beobachteten Änderung des Kontaktprofils in Zusammenhang zu bringen ist.*

## 1. INTRODUCTION

Le problème d'équilibre d'une bille dure et d'un plan élastique adhésif en contact a été résolu pour la première fois par JOHNSON, KENDALL et ROBERTS [1], en écrivant une condition de minimum pour la fonction énergie totale :

$$(1) \quad W_T = W_P + W_E + W_S$$

Si le système est décrit par les paramètres  $A$  (aire de contact =  $\pi a^2$ ), et  $P$  (charge), les expressions des trois termes inclus dans  $W_P$  sont respectivement  $W_P = -P\delta$  ( $W_P$  énergie potentielle,  $\delta$  rapprochement des solides);

$$W_E = \frac{a^5 K}{15 R^2} + \frac{P^2}{3 a K}$$

( $W_E$  énergie élastique stockée;  $R$  rayon de la bille;

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2} \right)$$

$W_E$  serait,

$$\frac{2 a^5 K}{5 R^2},$$

dans le cas d'une action purement hertzienne, sans adhésion),

$$W_S = -A w = -\pi a^2 w$$

( $W_S$  énergie superficielle,  $w$  travail d'adhésion de Dupré).

La condition d'équilibre stable à charge  $P$  imposée s'écrit :

$$(2) \quad \left( \frac{\partial W_T}{\partial A} \right)_P = 0;$$

$$(2 \text{ bis}) \quad \left( \frac{\partial^2 W_T}{\partial A^2} \right)_P > 0$$

Si, par analogie avec la théorie de la rupture fragile de Griffith, on pose :

$$G = \left( \frac{\partial W_P + \partial W_E}{\partial A} \right)_P,$$

( $G$  est le taux de restitution de l'énergie), cette condition prend la forme :

$$(3) \quad G = w$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \left( \frac{\partial G}{\partial A} \right)_P > 0$$

qui sera utilisée plus loin.

La relation ainsi établie entre  $A$  et  $P$  a été parfaitement vérifiée par l'expérience, et un certain nombre de publications, notamment de KENDALL [2] et de MAUGIS [3], ont eu l'occasion de préciser la théorie de cet équilibre, ou l'ont étendue à d'autres géométries (poinçon plat, pelage sous un angle  $\alpha$  notamment).

## 2. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIE DU RETOUR A L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME BILLE-PLAN

Il était intéressant de compléter cette étude par celle de l'évolution du système lorsqu'il a été écarté de son état d'équilibre. C'est ce qu'on fait Barquins et Maugis dans notre laboratoire de mécanique des surfaces du C.N.R.S., en suivant la variation dans le temps du rayon du contact  $a$  quand on modifie brusquement la charge  $P_0 \rightarrow P_0 + \Delta P$ . On savait depuis longtemps que la variation initiale de  $a$  était beaucoup plus rapide dans le cas

d'un recollement ( $\Delta P > 0$ ) que dans le cas d'un décollement ( $\Delta P < 0$ ). KENDALL avait même suggéré [4] qu'il pouvait y avoir un hystérésis des positions d'équilibre (comme cela semble être le cas dans le mouillage), mais il n'en est manifestement rien avec le matériau utilisé au laboratoire. Dans un premier temps, nous allons examiner la théorie et les résultats expérimentaux qui concernent le processus du décollement. Nous verrons ensuite ce qui a pu être établi concernant le recollement.

### 2.1. ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT.

Les résultats de BARQUINS et MAUGIS concernant le décollement d'une bille de verre d'un plan de caoutchouc ont été exposés dans une récente note aux comptes rendus [5].

Partant des équations (3) et (3 bis), les auteurs posent que, quand  $G > w$ , la force  $G-w$  est communiquée à l'unité de longueur de la fissure, qui prend rapidement une vitesse limite  $v$  fonction des pertes viscoélastiques. Ces pertes en tête de fissure étant admises proportionnelles à  $w$  [6], on peut écrire :

$$(4) \quad G - w = w \varphi (a_T v)$$

où  $\varphi$  est une fonction de la vitesse  $v$ , et de la température ( $a_T$  est le facteur de William, Landel et Ferry (WLF)) et indépendante de la géométrie du système. Or, pour une sphère de rayon  $R$  reposant en équilibre sur un plan, sous la charge  $P$ , on a [7] :

$$(5) \quad G = \frac{(P_1 - P)^2}{6 \pi R P_1}$$

où  $P_1$  est lié au rayon de contact  $a$  par :

$$(6) \quad a^3 = \frac{P_1 R}{K}$$

avec :

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2} \right)$$

( $\nu_i$  et  $E_i$  sont les coefficients de Poisson, et modules d'Young).

MAUGIS avait par ailleurs eu l'occasion de suggérer [3] que les formules (5) et (6) restaient valables hors d'équilibre, et pouvaient rendre compte de la cinétique de la fissure lors d'un déchargement instantané de la charge  $P$  à la charge  $P' < P$ . Le taux de restitution  $G$  prend immédiatement une valeur  $G > w$  correspondant à la nouvelle valeur  $P'$ . La fissure se propage alors, réduisant le rayon  $a$ , donc  $P_1$  et  $G$  : la fissure ralentit à mesure que  $G$  tend vers  $w$  et donc que  $a$  tend vers sa nouvelle valeur d'équilibre. Ce

retour à l'équilibre, d'autant plus lent que  $R$  est élevé, n'est possible que si le déchargement n'est pas trop fort. Pour  $P' < -\frac{3}{2}\pi w R$ , valeur correspondant à un rayon d'équilibre minimal :

$$a_{\min}^3 = \frac{3\pi w R^2}{2K}$$

la fissure commence par ralentir, puis quand  $a$  atteint une valeur critique pour laquelle  $\left(\frac{\partial G}{\partial A}\right)_{P'} = 0$ , elle devient instable, et accélère spontanément jusqu'à la séparation de la sphère et du plan. Cette valeur de  $a > a_{\min}$  est donné par :

$$(7) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial A}\right)_{P'} = \frac{P_1 - P'^2}{4\pi a^2 R P_1}$$

c'est-à-dire  $P_1 = -P'$  ( $P_1 = P'$  est impossible, [7]).

A chaque instant, la vitesse de la fissure est fixée par  $G$ , et est la même que celle obtenue pour la même valeur de  $G$  avec une autre géométrie, comme pour le pelage sous un angle  $\alpha$  d'un film d'épaisseur  $h$  et de largeur  $b$  pour lequel on a [2] :

$$(8) \quad G = \left(\frac{P}{b}\right)^2 \frac{1}{2Eh} + \frac{P}{b} (1 - \cos \alpha)$$

Les expériences ont été effectuées avec des billes de verre ( $R = 0,219$  cm ou  $0,715$  mm) sur des plaques de polyuréthane (PSM 4 Vishay d'épaisseur  $h = 3,175$  mm,  $E = 5.10^7$  dynes . cm<sup>-2</sup>,  $\nu = 0,5$ ) à l'aide de l'appareillage décrit antérieurement [8, 9]. Une caméra permet d'enregistrer à 25 i/s l'évolution de l'aire de contact avec le temps, lors d'une brusque décharge de  $P$  à  $P'$ .

La figure 1 montre l'évolution du rayon de contact pour divers déchargements à partir de la valeur  $P = 10.000$  dynes. Le rayon de contact initial,  $a = 312 \mu m$ , a été obtenu par chargement, phénomène beaucoup plus rapide que la décharge; il correspond à la valeur d'équilibre avec  $w = 65$  ergs cm<sup>-2</sup>. Pour de faibles déchargements ( $P' = 2.000$  dynes et  $P' = 0$ ) on observe un lent retour à l'équilibre vers les valeurs calculées  $a_2$  et  $a_0$ . Après 120 s, le rayon de contact pour  $P' = 0$  est encore égal à 1,85 fois sa valeur d'équilibre; celle-ci n'est pas encore atteinte après 4 heures de contact. Pour les forts déchargements, on observe bien, conformément à la théorie, un ralentissement de la fissure suivi d'une accélération. Les rayons donnés par la formule (7) [tiretés perpendiculaires aux courbes] se situent bien aux points d'inflexion. (La limite entre les deux régions ( $P' = -\frac{3}{2}\pi w R = -67$  dynes) est représentée par la courbe en tireté qui a été construite point par point à partir des données de la figure 3).

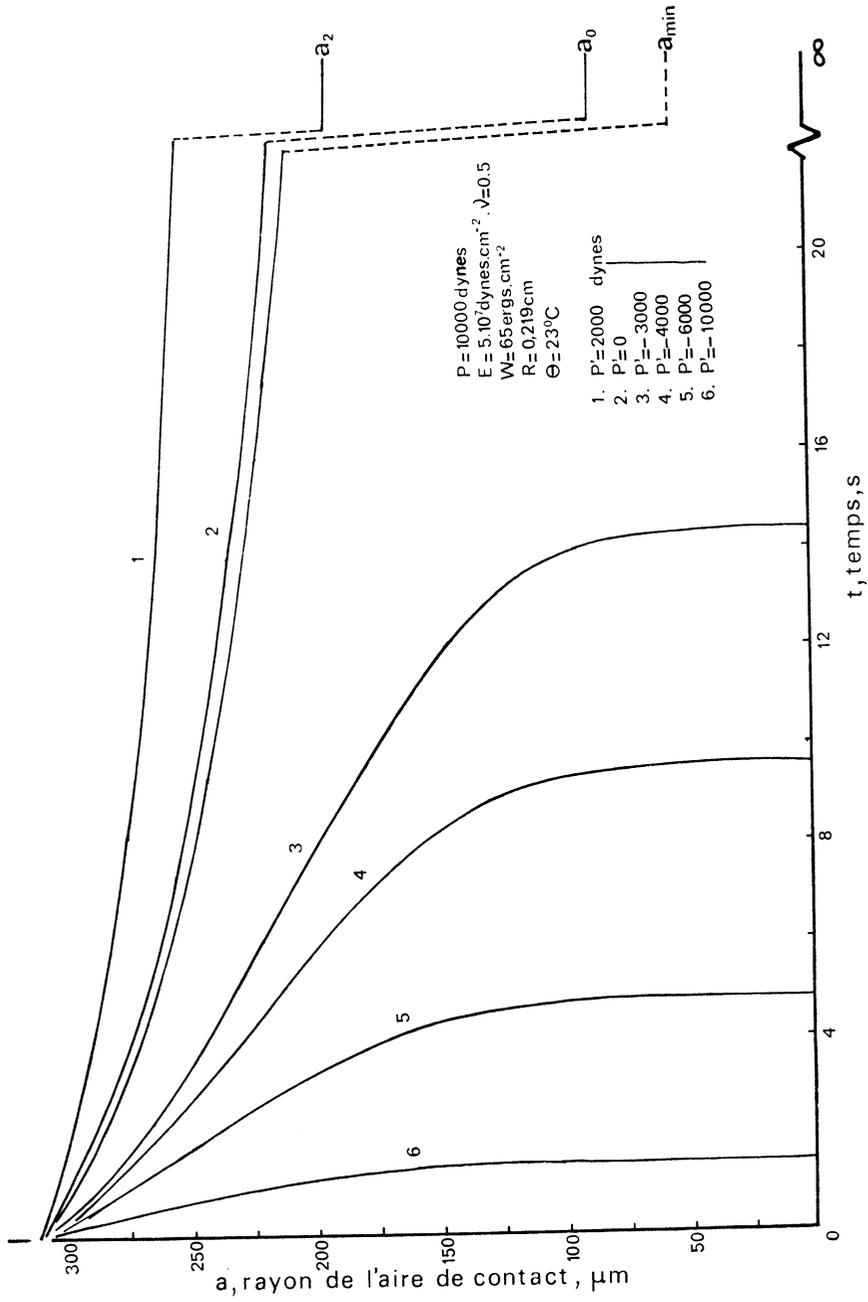


FIG. 1. — Évolution du rayon  $a$  du contact en fonction du temps pour divers déchargements

La figure 2 montre la relation entre  $G$  calculé et la vitesse  $v$  de la fissure lors du déchargement à  $P' = -4.000$  dynes : les points correspondant au ralentissement ( $\left(\frac{\partial G}{\partial A}\right)_{P'} > 0$ ) et à l'accélération de la fissure ( $\left(\frac{\partial G}{\partial A}\right)_{P'} < 0$ ) se placent effectivement sur une courbe unique.

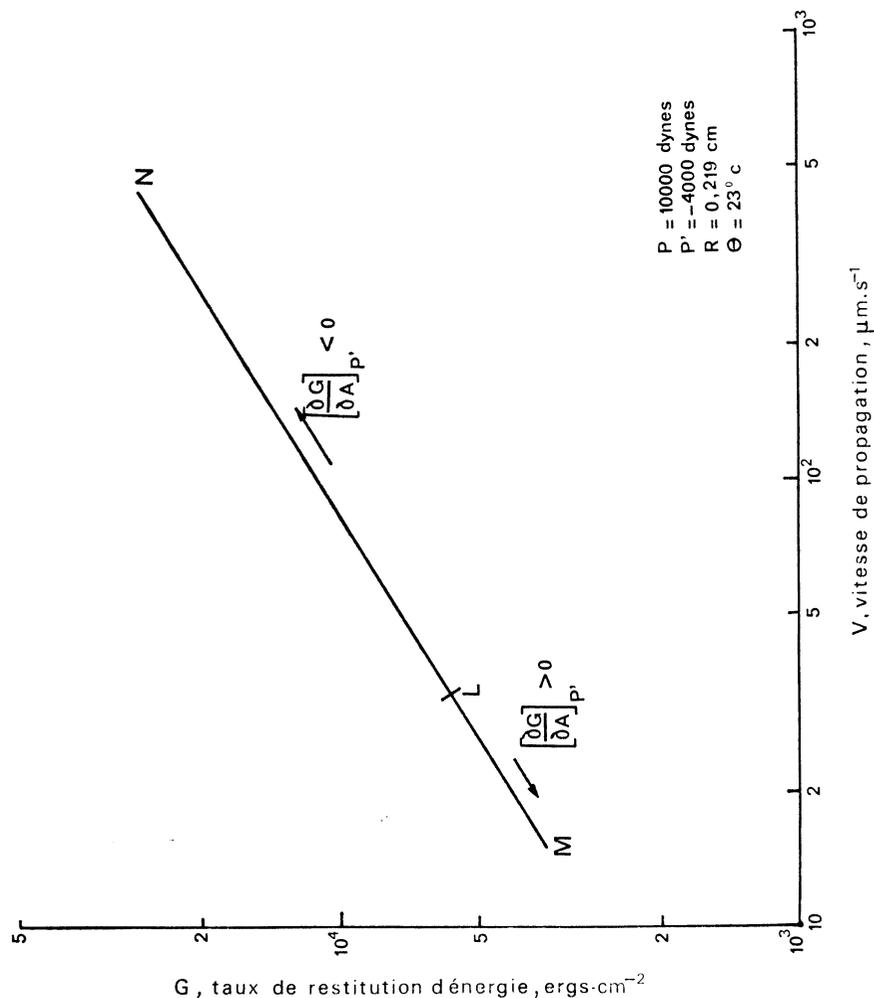


FIG. 2. — Relation entre  $G$  calculé et la vitesse  $v$  de la fissure

Sur la figure 3 sont réunis les résultats de mesures concernant diverses charges de départ  $P$  et d'arrivée  $P'$ , pour deux rayons de courbure, et deux températures. Les résultats obtenus à  $\theta = 29$  °C ont été translétés sur ceux à  $23$  °C par la transformation WLF (en prenant comme température de transition vitreuse  $T_g = -50$  °C). Tous ces points se placent sur la courbe en



trait plein obtenue par pelage sous des angles  $\alpha = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  [emploi de la formule (8)] de plaques de largeur  $b$  variant de 1 à 3 cm. La figure 3 représente donc une courbe maîtresse donnant la relation entre le « moteur normalisé » de la fissure et sa vitesse de propagation. D'après la formule (4) ce moteur est égal au facteur dissipation  $\varphi(a_T v)$ ; pour les faibles vitesses il est de la forme  $(a_T v)^{0,6}$ . Cette courbe maîtresse permet de déduire la force d'adhérence du polyuréthane au verre en fonction de la vitesse de la fissure dans tous les cas de figure où  $G$  est calculable. Dans une autre note [10], les mêmes auteurs ont étudié de la même façon le décollement du poinçon plat, qui est toujours un processus instable. Leur théorie rend parfaitement compte des faits d'expérience.

Il est donc bien établi que, non seulement le retour vers l'équilibre, mais aussi l'évolution en phase instable par valeurs de  $a$  décroissantes (décollement), obéissent à la loi  $G - w = w \varphi(a_T v)$ , qui définit à la fois un moteur :  $G - w$  et une résistance de type visqueux :  $\varphi(a_T v)$ .

## 2.2. VARIATION DU RAPPROCHEMENT $\delta$ DES SOLIDES, AU COURS DU DÉCOLLEMENT.

### 2.2.1. Résultats expérimentaux.

La théorie ci-dessus implique que, dans la phase d'évolution quasi statique qui vient d'être observée et analysée, la formule qui lie  $\delta$  à  $a$  et à  $P$  à l'équilibre, reste valable avec les valeurs actuelles de  $a$  et  $P$  :

$$(9) \quad \delta = \frac{a^2}{3R} + \frac{2P}{3aK}$$

En effet, c'est à cette condition que l'énergie potentielle  $W_P = -P\delta$  a la valeur voulue pour que le moteur du mouvement soit bien  $\left(\frac{\partial W_T}{\partial A}\right)_P = G - w$ , comme on l'a trouvé.

On doit donc s'attendre que, dans le court laps de temps qui précède la phase de variation observable de  $a$  ( $\sim 1/5$  sec.),  $\delta$  passe de sa valeur initiale d'équilibre  $\delta_0 = 23 \mu 5$ , à la valeur quasi statique  $\delta_1 = 9,5 \mu$ , correspondant aux valeurs actuelles de  $a$  et  $P$ , ici  $a = 250 \mu$  et  $P' = 5\,000 - 5\,000 = 0$ . L'existence d'une telle variation est décelée qualitativement par la brusque disparition des anneaux de Newton dans la zone périphérique, indiquant la présence d'un « mur » de plusieurs microns de hauteur (fig. 4) [11].

Les résultats des mesures effectuées dans notre laboratoire par Barquins ont fait l'objet d'une note aux comptes rendus de BARQUINS et MAUCIS [12]. Ils sont représentés sur la figure 5, où on a tracé en traits pleins l'évolution de  $\delta$  en fonction de  $a$ , observée à partir du premier  $1/50$  s après que la modification de charge soit survenue. Pour permettre de situer la trajectoire LMN de  $\delta$  par rapport aux divers états possibles du système, on a représenté la courbe d'équilibre  $\delta(a)$ , sur laquelle se trouve le point de départ L, ainsi que

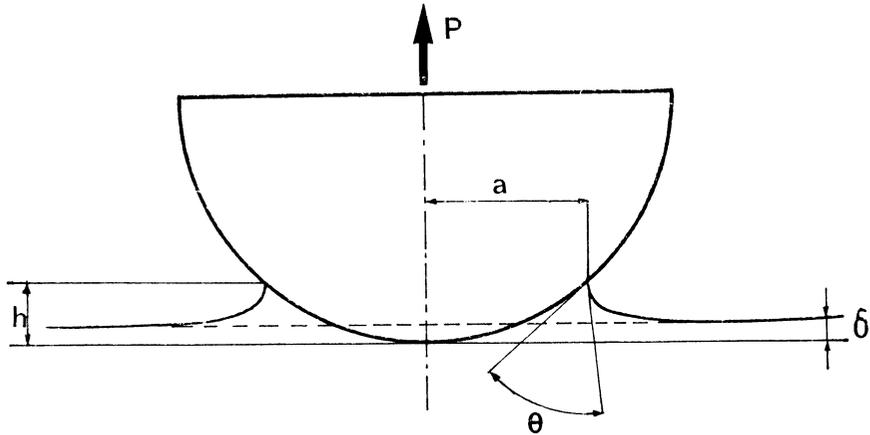


FIG. 4. — Formation d'un « mur » lors du décollement

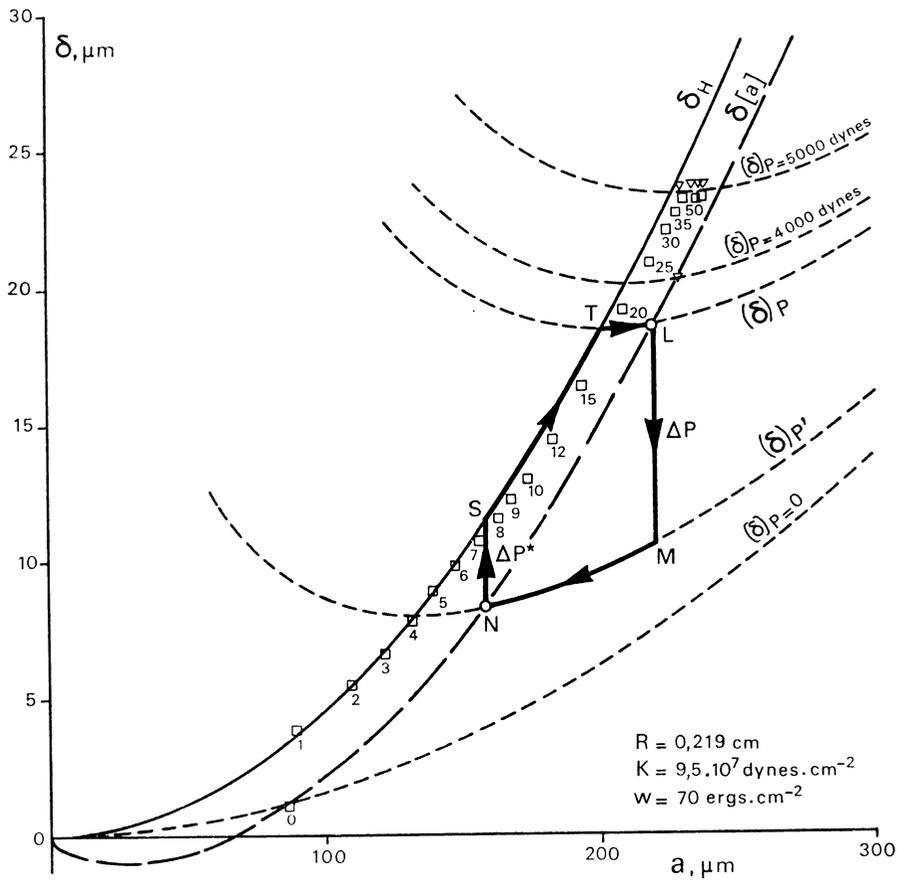


FIG. 5. — Variations de  $\delta$  en fonction de  $a$ , observées lors des processus de décollement (valeurs décroissantes de  $a$ ) et de recollement (valeurs croissantes de  $a$ )

le point d'arrivée N lorsqu'il en existe un (équilibre final stable). On y a adjoint le réseau des courbes  $\delta_p(a)$  obtenues en fixant  $P'$  dans la formule (9), et faisant varier  $a$  pour chaque  $P'$  imposé. En effet, dans la mesure où cette formule (9) est déduite de considérations de caractère statique, une condition pour qu'elle soit valable est que le système ne possède pas d'énergie cinétique, et  $\delta$  peut évoluer alors suivant une telle loi. Enfin on a tracé la courbe  $\delta_H(a)$  de l'équilibre hertzien (en l'absence d'adhésion). On voit que, dans l'exemple choisi, le passage de  $\delta_0 = 23,5 \mu m$  à  $\delta_1 = 9,5 \mu m$  a effectivement lieu avant toute variation notable de  $a$ , et qu'ensuite on se déplace le long de  $\delta(a)$ .

### 2.2.2. Discussion.

Lors du décollement, la variation de  $\delta$  apparaît donc comme ayant un caractère purement élastique, c'est-à-dire extrêmement rapide, aussi longtemps que les phénomènes dissipatifs superficiels en tête de fissure ne se manifestent pas. On peut se demander à ce sujet ce que devient l'énergie mécanique  $\Delta W = -P'(\delta_0 - \delta_1) + W_{oE}(a_0, \delta_0) - W_{1E}(a_0, \delta_1)$  qui est libérée dans ce processus rapide à  $a$  constant. Comme  $\Delta W$  n'apparaît pas sous forme d'énergie cinétique (ce qui conduirait à des oscillations), il est probable qu'elle est dissipée dans la masse à mesure que le déplacement évolue de  $\delta_0$  à  $\delta_1$ .

## 2.3. RÉSULTATS RELATIFS AU RECOLLEMENT.

### 2.3.1. Résultats expérimentaux.

On a représenté aussi sur la figure 5 la variation de  $\delta$  observée par MAUGIS et BARQUINS [13] au cours du processus de recollement (trajet NSTL). On peut distinguer deux phases distinctes : pendant la première, une variation instantanée de  $\delta$ , primitivement à aire de contact constante (branche NS) correspondant au déplacement  $\Delta\delta = 2\Delta P^*/3\alpha K$  d'un poinçon sous la surcharge :

$$\Delta P^* = \frac{a^3 N K}{R} - P' = 3 \pi \omega R + \sqrt{6 \pi \omega R P + (3 \pi \omega R)^2},$$

amène le système dans les conditions d'un contact hertzien pur (point S), contact qui évolue (branche ST) sous l'action du chargement de  $P' + \Delta P^*$  à  $P$ . La deuxième phase (branche TL) est réalisée à charge constante le long de la courbe  $(\delta)_p$ , étape pendant laquelle la fissure ralentit puis s'arrête.

### 2.3.2. Discussion.

Les observations faites par MAUGIS et BARQUINS dans le cas des chargements faibles les ont conduits à admettre pendant la première phase la présence d'une lame d'air persistante entre les surfaces, empêchant toute interaction moléculaire, ce qui expliquerait que la réponse élastique corresponde à celle d'un système à énergie superficielle nulle. Cette pellicule serait expulsée au cours de la deuxième phase, qui dure beaucoup plus longtemps [13].

On peut penser à une autre explication, de caractère plus spécifiquement rhéologique. Le fait que la vitesse de recollement puisse être considérable, alors que la quantité d'énergie à dissiper reste très limitée, n'est pas compatible avec la loi de dissipation utilisée dans le cas du décollement. On montre facilement que, dans ce dernier cas, la puissance dissipée est de la forme  $D_1(\dot{a}) = 2na \cdot \dot{a}^{1,6} \cdot k$ ; l'application de cette formule aux données du tableau I conduirait à une énergie dissipée de l'ordre de 80 ergs, alors que l'énergie disponible est inférieure à 1 erg de quelque façon qu'on la calcule. Il faut donc se référer à un autre mécanisme de dissipation, ou tout au moins adapter d'autres critères pour le processus dissipatif superficiel. Notons que si la dissipation en tête de fissure est essentiellement la conséquence du mouvement relatif rapide des grosses molécules et agrégats moléculaires situés au voisinage immédiat de la périphérie du contact (tête de fissure), un paramètre représentatif de cette situation locale doit être pris en compte. A défaut de l'angle effectif de contact (qui n'est pas mesurable) on peut penser au paramètre  $\text{tg } \alpha$ , coefficient moyen d'écartement des surfaces, bien que le choix de la distance  $10 \mu m$  pour sa définition (qui correspond à la distance du premier anneau de Newton) soit arbitraire. *Le paramètre à  $\text{tg } \alpha$*  représenterait une vitesse moyenne de séparation normale des surfaces. Son introduction, au lieu de  $\dot{a}$ , dans l'expression de la puissance dissipée (dans le terme  $\dot{a}^{0,6}$ ), diviserait par un facteur  $> 50$  la grandeur  $D_1$  d'un cas à l'autre.

### 3. CONCLUSION

L'ensemble de ces résultats contribue manifestement à éclaircir la question du comportement des corps viscoélastiques en contact quasi-statique. L'interprétation de la pente 0,6 de la courbe maîtresse de la figure 3 reste à trouver; une localisation éventuelle de la dissipation d'énergie dans la masse constitue toujours une hypothèse plausible dans le cas des régimes dynamiques.

L'étude approfondie de ces points serait fort utile en vue de l'analyse du phénomène de roulement sur un matériau viscoélastique (qui associe un décollement à l'arrière et un recollement à l'avant).

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K. L. JOHNSON, K. KENDALL et A. D. ROBERTS. — Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A 324, pp. 301-313, 1971.
- [2] K. KENDALL. — The adhesion and surface energy of elastic solids, *J. Phys.*, D 4, pp. 1186-1195, 1971.
- [3] D. MAUGIS. — Mécanismes physiques de l'adhésion des solides, *Le Vide*, n° 186, pp. 1-20, 1977.
- [4] K. KENDALL. — Kinetics of contact between smooth solids, *J. Adhesion*, v. 7, pp. 55-72, 1974.
- [5] M. BARQUINS et D. MAUGIS. — Cinétique de propagation de fissure et adhérence des solides viscoélastiques, *C. R. Ac. Sci. Paris*, t. 285 B, pp. 125-128, 1977.
- [6] A. N. GENT et J. SCHULTZ. — Effect of wetting liquids on the strength of adhesion of viscoelastic materials, *J. Adhesion*, vol. 3, pp. 281-294, 1972.
- [7] D. MAUGIS, M. BARQUINS et R. COURTEL. — Fissure de Griffith et adhésion des solides élastiques, *Métaux, Corrosion, Industrie*, n° 605, pp. 1-10, 1976.
- [8] M. BARQUINS et R. COURTEL. — Rubber friction and the rheology of viscoelastic contact, *Wear*, vol. 32, pp. 133-150, 1975.
- [9] M. BARQUINS, R. COURTEL et D. MAUGIS. — Détermination des constantes mécaniques superficielles de caoutchoucs chargés par l'étude du contact adhésif d'une bille de verre, 8<sup>e</sup> conférence mondiale sur les essais non destructifs, Cannes (France), communication 4 B 11, 1976.

## Références complémentaires postérieures au colloque

- [10] D. MAUGIS et M. BARQUINS. — Adhérence d'un poinçon à base plane sur un massif viscoélastique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, B, vol. 286, pp. 1-4, 1978.
- [11] D. MAUGIS et M. BARQUINS. — Fracture mechanics and adherence of viscoelastic bodies, *J. Phys. D. : Appl. Phys.*, vol. 11, pp. 1989-2023, 1978.
- [12] M. BARQUINS et D. MAUGIS. — Étude des déplacements élastiques au cours du décollement d'une bille d'un massif viscoélastique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, B, t. 286, pp. 57-60, 1978.
- [13] M. BARQUINS et D. MAUGIS. — Adhérence d'une bille de verre sur un massif viscoélastique : étude du recollement, *C. R. Acad. Sci. Paris*, B, t. 287, pp. 49-52, 1978.

## TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
	—
Résumé (français, anglais, allemand).....	165
1. INTRODUCTION.....	166
2. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIE DU RETOUR A L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME BILLE-PLAN.	167
2.1. <i>Étude du décollement</i> .....	168
2.2. <i>Variation du rapprochement <math>\delta</math> des solides, au cours du décollement</i> .....	173
2.2.1. Résultats expérimentaux.....	173
2.2.2. Discussion.....	175
2.3. <i>Résultats relatifs au recollement</i> .....	175
2.3.1. Résultats expérimentaux.....	175
2.3.2. Discussion.....	175
3. CONCLUSION.....	176
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	177

# SUR LA THERMODYNAMIQUE DU POLYCRISTAL MÉTALLIQUE <sup>(1)</sup>

*(The thermodynamics of metallic polycrystal)*

*(Über die Thermodynamik des metallischen Polykristalls)*

par

B. HALPHEN <sup>(2)</sup>

RÉSUMÉ. — *On établit les définitions des grandeurs thermodynamiques macroscopiques et en particulier de la température, pour un polycristal. On montre ensuite comment le comportement thermoélastique ou thermoélastoplastique du polycristal se déduit de celui des cristaux qui le constituent.*

ABSTRACT. — *This document gives the definitions of the macroscopic thermodynamic values for a polycrystal, and particularly the temperature. It then shows how the thermoelastic or thermoelastoplastic behaviour of the polycrystal can be deduced from that of its constituent crystals.*

ZUSAMMENFASSUNG. — *Es werden für einen Polykristall die makroskopischen thermodynamischen Grössen, insbesondere die Temperatur, bestimmt. Anschliessend wird gezeigt, wie sich das thermoelastische bzw. thermoelastoplastische Verhalten des Polykristalls aus demjenigen der Kristalle, aus denen er gebildet wird, ableitet.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Ingénieur des Ponts et Chaussées, docteur ès sciences, laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique.

## 1. INTRODUCTION

Considérons un volume  $V$ , infiniment petit à l'échelle macroscopique, de matériau hétérogène, mais statistiquement homogène. Définissons le tenseur contrainte macroscopique  $\mathbf{C}$  par :

$$(1) \quad \mathbf{C} = \frac{1}{V} \int_v \mathbf{c} \, dv$$

et le tenseur vitesse de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  par :

$$(2) \quad \mathbf{D} = \frac{1}{V} \int_v \mathbf{d} \, dv$$

où  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  désignent les tenseurs contrainte et vitesse de déformation microscopiques.

MANDEL [3], [5] et HILL [2] ont démontré que, au moins lorsque le champ des vitesses est continu, la puissance des contraintes macroscopiques dans le champ de vitesses de déformation macroscopique est égale à la valeur moyenne de la puissance des contraintes  $\mathbf{c}$  dans le champ  $\mathbf{d}$  :

$$(3) \quad \mathbf{C}\mathbf{D} = \frac{1}{V} \int_v \mathbf{c} \mathbf{d} \, dv$$

Pour répondre à un problème soulevé par NOWACKI et ZARKA [6], l'objet de notre étude est de déterminer comment il est possible de définir les grandeurs thermodynamiques macroscopiques, et en particulier la température du polycristal, à partir des mêmes grandeurs à l'échelle microscopique. Ceci nous permettra d'examiner ensuite comment le comportement thermoélastique ou thermoélastoplastique du polycristal résulte de celui des cristaux qui le constituent.

## 2. FLUX DE CHALEUR MACROSCOPIQUE

Soit  $dS$  un élément de surface petit à l'échelle macroscopique, de normale  $\mathbf{n}$ . Si  $\frac{dQ}{dt}$  désigne la quantité de chaleur qui traverse  $dS$  dans le sens de  $\mathbf{n}$ , on peut écrire :

$$(4) \quad - \frac{dQ}{dt} = \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

où  $\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}$  est la valeur moyenne du flux microscopique  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  sur l'élément de surface. Pour que cette formule (4) définisse en chaque point un vecteur flux de chaleur macroscopique il faut que le vecteur  $\bar{\mathbf{q}}$  soit indépendant de

l'orientation de l'élément de surface  $dS$ . Il faut donc que l'hypothèse suivante, de macrohomogénéité (HILL [2]), soit vérifiée : si  $d$  est la longueur caractéristique d'un élément monocristallin, et si  $l$  est la longueur du côté d'un élément de surface carré, pour  $l/d$  suffisamment grand la valeur moyenne du vecteur  $\mathbf{q}$  sur l'élément de surface est indépendante de  $l$  et de l'orientation de l'élément de surface.

On supposera désormais que cette hypothèse est vérifiée. Suivant la démarche de MANDEL [3], soit  $u$  une fonction continue des coordonnées et soit  $u_0$  sa valeur en un point quelconque d'un élément de surface infiniment petit à l'échelle macroscopique. A un infiniment petit du premier ordre près, on a :

$$(5) \quad \overline{u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}} = u_0 \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}$$

les moyennes étant prises sur l'élément de surface infiniment petit. Pour une surface fermée finie, on aura donc par intégration :

$$(6) \quad \int_s u \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}} dS = \int_s \overline{u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}} dS$$

et comme  $\overline{u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}$  résulte de l'intégration de  $u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  sur un élément de surface, on obtient :

$$(7) \quad \int_s u \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}} dS = \int_s u \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$$

Supposant que le champ des vitesses de déplacement est continu, le principe de la conservation de l'énergie montre que le flux de chaleur  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  est continu à travers une surface, même si le vecteur  $\mathbf{q}$  est discontinu. L'application à l'équation (7) de la formule d'Ostrogradsky au sens des distributions donne alors :

$$(8) \quad \int_v (u \operatorname{div} \overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{q}} \cdot \operatorname{grad} u) dv = \int_v (u \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} u) dv$$

Prenons  $u = 1$  et  $V$  infiniment petit à l'échelle macroscopique. On obtient :

$$(9) \quad V \operatorname{div} \overline{\mathbf{q}} = \int_v \operatorname{div} \mathbf{q} dv$$

Appliquant alors la même méthode que celle qui a permis d'établir la formule (7), on voit que les termes en  $u$  disparaissent dans l'équation (8). Choissant alors  $u = x_i$  et  $V$  infiniment petit à l'échelle macroscopique, on obtient :

$$(10) \quad V \overline{q_i} = \int_v q_i dv$$

ce qui fournit une nouvelle définition du vecteur flux de chaleur macroscopique.

### 3. TEMPÉRATURE MACROSCOPIQUE

Pour pouvoir définir une température macroscopique de l'élément polycristallin nous introduisons l'hypothèse fondamentale suivante : *l'inverse  $1/T$  de la température absolue est une fonction continue des coordonnées.*

Cette hypothèse exclut en particulier la possibilité de transformations localement adiabatiques du milieu ou plus exactement suppose que, le milieu étant conducteur, on attendrait un certain temps après une telle transformation de manière à ce que se rétablisse la continuité de  $1/T$ . Cette hypothèse est à rapprocher des conditions d'application du principe de l'état local usuel en thermodynamique des processus irréversibles.

Soit  $S$  un élément de surface petit à l'échelle macroscopique. On définit un vecteur  $\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right)$  par :

$$(11) \quad \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{1}{S} \int \frac{\mathbf{q}}{T} dS$$

Appliquons alors au vecteur  $\frac{\mathbf{q}}{T}$  la même démonstration que celle faite au paragraphe précédent pour le vecteur  $\mathbf{q}$ . On obtient :

$$(12) \quad \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{1}{V} \int_v \frac{\mathbf{q}}{T} dv$$

et :

$$(13) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{1}{V} \int_v \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} dv$$

où  $V$  est un volume infiniment petit à l'échelle macroscopique. Comme  $\frac{1}{T}$  est fonction continue de la position, la formule (12) s'écrit encore :

$$(14) \quad \left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \bar{\mathbf{q}} \frac{1}{\bar{V}} \int_v \frac{1}{T} dv = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\bar{\theta}}$$

où  $\bar{\theta}$ , température macroscopique de l'élément polycristallin est définie par :

$$(15) \quad \frac{1}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\bar{V}} \int_v \frac{1}{T} dv$$

Les équations (12) et (13) s'écrivent alors :

$$(16) \quad \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\bar{V}} \int_v \frac{\mathbf{q}}{T} dv$$

et :

$$(17) \quad \operatorname{div} \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\bar{\theta}} = \frac{1}{\bar{V}} \int_v \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} dv$$

#### 4. LES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

Soient  $u$ ,  $s$ ,  $\rho$  l'énergie interne spécifique, l'entropie spécifique et la masse volumique à l'échelle microscopique. Le premier et le second principes de la thermodynamique s'écrivent localement :

$$(18) \quad \rho \dot{u} = \mathbf{c} \mathbf{d} - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

et :

$$(19) \quad \rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0$$

Soit  $\bar{\rho}$  la masse volumique macroscopique du polycristal,  $U$  et  $S$  son énergie interne et son entropie spécifiques. Comme les cristaux qui le constituent n'interagissent que par des forces de contact, l'énergie interne d'un élément polycristallin est la somme des énergies internes de ses éléments. Pour un volume  $V$  infiniment petit à l'échelle macroscopique, on a donc :

$$(20) \quad \bar{\rho} \dot{u} V = \int_v \rho \dot{u} dv$$

D'autre part, par définition, l'entropie est une quantité additive. Donc :

$$(21) \quad \bar{\rho} \dot{S} V = \int_v \rho \dot{s} dv$$

Compte tenu des équations (3), (9) et (17) l'intégration des relations (18) et (19) dans le volume  $V$  montre que les principes de la thermodynamique s'écrivent pour le polycristal :

$$(22) \quad \bar{\rho} \dot{U} = \mathbf{C} \mathbf{D} - \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}$$

et :

$$(23) \quad \bar{\rho} \dot{S} + \operatorname{div} \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\theta} \geq 0$$

On voit donc que les définitions que nous avons données du vecteur flux de chaleur et de la température macroscopiques permettent d'écrire, pour le polycristal, les principes de la thermodynamique sous leur forme locale usuelle pour un milieu continu.

## 5. COMPORTEMENT THERMOÉLASTIQUE DU POLYCRISTAL

Supposons que le comportement des cristaux constituant le polycristal soit purement élastique. On a alors :

$$(24) \quad \rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

Intégrant cette équation sur un volume  $V$  infiniment petit à l'échelle macroscopique, on obtient, compte tenu de la continuité de  $1/T$  et de l'équation (9) :

$$(25) \quad \bar{\rho} \dot{S} + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}} = 0$$

ce qui signifie que le comportement du polycristal est purement élastique.

Cette équation (25) permet d'écrire le premier principe de la thermodynamique (22) sous la forme :

$$(26) \quad \bar{\rho} \dot{U} = \mathbf{C} \mathbf{D} + \bar{\rho} \theta \dot{S}$$

ce qui montre que  $U$  est fonction de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ , valeur moyenne de la déformation microscopique  $\mathbf{e}$  dans  $V$ , et de l'entropie  $S$ .

Supposons maintenant que les variations de contrainte et de température soient suffisamment faibles pour qu'on puisse linéariser la relation de comportement thermoélastique du cristal élémentaire. Linéarisant l'expression de la déformation  $\mathbf{e}$  par rapport à  $\mathbf{c}$  et  $1/T$ , on obtient :

$$(27) \quad \mathbf{e} = \mathbf{L} \mathbf{c} + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

où  $\mathbf{L}$ , tenseur du quatrième ordre, possède les symétries usuelles, et  $\mathbf{A}$  est un tenseur symétrique du second ordre.

Si en tout point du polycristal la température était  $T_0$ , la contrainte microscopique  $\mathbf{c}^*$  due à la contrainte macroscopique  $\mathbf{C}$  serait de la forme (MANDEL [4], HILL [2]) :

$$(28) \quad \mathbf{c}^* = \mathbf{B} \mathbf{C}$$

où  $\mathbf{B}$  est un tenseur d'influence dépendant de la position dans l'élément polycristallin.

Soit  $\mathbf{c}$  la contrainte microscopique due à la contrainte macroscopique  $\mathbf{C}$  et à la répartition de température  $T(x)$  dans le polycristal. La différence  $\mathbf{c} - \mathbf{c}^*$  est un champ d'autocontraintes, c'est-à-dire statiquement admissible avec  $\mathbf{C} = 0$  (de valeur moyenne nulle) :

$$(29) \quad \mathbf{c} - \mathbf{c}^* = \mathbf{r}_T$$

Comme  $\mathbf{L} \mathbf{c}^*$  est un champ de déformations compatible, la forme (27) de la relation de comportement du cristal montre que le champ  $\mathbf{r}_T$  est le champ d'autocontraintes tel que le champ de déformations  $\mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$  soit compatible.

Ceci signifie en particulier qu'un champ d'autocontraintes  $\mathbf{r}_T$  apparaît même si la température est uniforme dans le polycristal si le champ de déformations  $\mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$  n'est pas compatible.

L'équation (29) permet maintenant d'écrire la relation (27) sous la forme :

$$(30) \quad \mathbf{c} = \mathbf{L} \mathbf{B} \mathbf{C} + \mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

Comme la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  est la valeur moyenne de la déformation  $\mathbf{e}$ , on a :

$$(31) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{V} \int_v \mathbf{L} \mathbf{B} \mathbf{C} \, dv + \frac{1}{V} \int_v \left[ \mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \, dv$$

Comme les champs de contraintes  $\mathbf{c} = 1$  et  $\mathbf{c} = \mathbf{B}$  sont tous deux statiquement admissibles avec  $\mathbf{C} = 1$ , et que le champ de déformations  $\mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$  est compatible, le principe des puissances virtuelles montre que :

$$(32) \quad \int_v \left[ \mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \, dv = \int_v \mathbf{B}^T \left[ \mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \, dv$$

où  $\mathbf{B}^T$  désigne le transposé de  $\mathbf{B}$ .

Mais comme le champ  $\mathbf{r}_T$  est un champ d'autocontraintes et que  $\mathbf{L}\mathbf{B}$  est un champ de déformations solution d'un problème d'élasticité avec  $\mathbf{C}=\mathbf{1}$  et  $T(x) = T_0$ , donc compatible, on a :

$$(33) \quad \int_{\nu} \mathbf{B}^T \mathbf{L} \mathbf{r}_T dv = 0$$

Les équations (32) et (33) permettent alors d'écrire l'équation (31) sous la forme :

$$(34) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\bar{\nu}} \int_{\nu} \mathbf{L} \mathbf{B} \mathbf{C} dv + \int_{\nu} \mathbf{B}^T \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) dv$$

Comme  $1/T$  est une fonction continue des coordonnées, on obtient finalement :

$$(35) \quad \mathbf{E} = \overline{\mathbf{L} \mathbf{B} \mathbf{C}} + \overline{\mathbf{B}^T \mathbf{A}} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{\theta} \right)$$

La relation de comportement du polycristal en fonction du tenseur contrainte macroscopique  $\mathbf{C}$  et de la température macroscopique  $\theta$  a donc la même forme que celle du cristal élémentaire. Remarquons que si la température  $T(x)$  n'est pas partout égale à  $T_0$ , mais que :

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\bar{\nu}} \int_{\nu} \frac{1}{T} dv = \frac{1}{T_0}$$

la relation entre contrainte et déformation du polycristal est la même que si la température y était uniforme et égale à  $T_0$ . Ceci est dû au fait que dans ces conditions le champ  $\mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$  a une valeur moyenne nulle.

## 6. COMPORTEMENT THERMOÉLASTOPLASTIQUE DU POLYCRISTAL

Supposons que le comportement des cristaux constituant le polycristal soit élastoplastique à élasticité linéaire. La déformation est alors la somme de la déformation élastique  $\mathbf{e}^e$  et de la déformation plastique  $\mathbf{e}^p$  :

$$(36) \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$$

Si le polycristal est soumis à une contrainte macroscopique  $\mathbf{C}$  et à une répartition de température  $T(x)$ , le champ de contraintes microscopiques qui y règne est de la forme :

$$(37) \quad \mathbf{c} = \mathbf{r} + \mathbf{c}^E$$

où  $\mathbf{c}^E$  désigne la réponse en contraintes dans l'hypothèse du comportement purement élastique des cristaux et  $\mathbf{r}$  est le champ de contraintes résiduelles, champ d'autocontraintes tel que le champ de déformation  $\mathbf{Lr} + \mathbf{e}^p$  soit compatible. On a donc :

$$(38) \quad \mathbf{e}^e = \mathbf{Lc} + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) = \mathbf{Lc}^E + \mathbf{Lr} + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

Nous allons maintenant établir la relation entre la déformation élastique microscopique  $\mathbf{e}^e$  et la déformation élastique macroscopique  $\mathbf{E}^e$  du polycristal.

Par définition (voir par exemple MANDEL [5]), la déformation élastique  $\mathbf{E}^e$  du polycristal est, au signe près, celle que l'on obtiendrait en ramenant la contrainte  $\mathbf{C}$  à la valeur zéro et la température  $\theta$  à la valeur  $T_0$ , cette décharge étant supposée purement élastique.

Notons tout d'abord que la déformation  $\mathbf{E}^e$  ainsi définie ne dépend ni de la répartition des températures dans le polycristal à la température macroscopique  $\theta$ , ni de cette répartition lorsque  $\theta = T_0$ . En effet la différence des valeurs moyennes des déformations thermoélastiques correspondant à deux répartitions de température de même valeur moyenne de  $1/T$  est nulle.

La définition de  $\mathbf{E}^e$  montre que :

$$(39) \quad \mathbf{E}^e = \frac{1}{V} \int_v \left[ \mathbf{Lc}^E + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] dv$$

Comme le champ de déformations sous le signe somme est compatible, que le champ de contraintes  $\mathbf{B}$  est statiquement admissible avec  $\mathbf{C} = 1$ , que le champ  $\mathbf{LB}$  est un champ de déformations compatible, et que  $\mathbf{r}$  est un champ d'autocontraintes, le principe des puissances virtuelles montre que la relation (39) peut encore s'écrire :

$$(40) \quad \mathbf{E}^e = \frac{1}{V} \int_v \mathbf{B}^T \left[ \mathbf{Lc}^E + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) + \mathbf{Lr} \right] dv$$

soit :

$$(41) \quad \mathbf{E}^e = \frac{1}{V} \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{e}^e dv$$

La relation entre déformations élastiques microscopique et macroscopique est ainsi la même que celle donnée par BUI [1] en élastoplasticité isotherme. En général la déformation élastique macroscopique n'est pas la valeur moyenne de la déformation élastique microscopique.

Par définition la déformation plastique macroscopique  $\mathbf{E}^p$  est la différence entre la déformation totale  $\mathbf{E}$  et la déformation élastique  $\mathbf{E}^e$ . On a donc :

$$(42) \quad \mathbf{E}^p = \mathbf{E} - \mathbf{E}^e = \frac{1}{V} \int_v (\mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p) dv - \frac{1}{V} \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{e}^e dv$$

Comme le champ  $\mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$  est compatible, le principe des puissances virtuelles montre que :

$$(43) \quad \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p) dv = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^T (\mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p) dv$$

Reportant cette équation dans la relation (42), on obtient :

$$(44) \quad \mathbf{E}^p = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}^T \mathbf{e}^p dv.$$

On retrouve ainsi la formule de MANDEL [4], établie par cet auteur dans le cas du comportement isotherme.

Examinons enfin l'expression de la puissance macroscopique dissipée plastiquement  $\mathbf{C} \mathbf{D}^p$ , où  $\mathbf{D}^p = \dot{\mathbf{E}}^p$ . Comme suivant la formule (3) :

$$(45) \quad \mathbf{C} \mathbf{D} = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \mathbf{d} dv$$

on a :

$$V \mathbf{C} \mathbf{D}^p = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \mathbf{d} dv - \mathbf{C} \mathbf{D}^e$$

et la formule (39), où la quantité sous le signe somme est un champ de déformations compatible montre que :

$$(46) \quad V \mathbf{C} \mathbf{D}^p = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \mathbf{d} dv - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \left[ \mathbf{L} \dot{\mathbf{c}}^E - \mathbf{A} \left( \frac{\dot{1}}{T} \right) \right] dv$$

Comme  $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$ , et suivant l'expression de la vitesse de déformation élastique microscopique obtenue par dérivation de la formule (38), on déduit de cette équation (46) :

$$(47) \quad \begin{aligned} V \mathbf{C} \mathbf{D}^p &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \mathbf{d}^p dv + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} dv = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c} \mathbf{d}^p dv \\ &+ \int_{\mathcal{V}} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{L} \mathbf{r} dv + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c}^E \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} dv \end{aligned}$$

Le champ de déformations  $\mathbf{L} \mathbf{c}^E + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$  étant compatible, et  $\dot{\mathbf{r}}$  étant un champ d'autocontraintes, on a :

$$(48) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{c}^E \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} dv + \int_{\mathcal{V}} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) dv = 0$$

Introduisant le champ d'autocontraintes  $\mathbf{r}_T$  du chapitre 5 tel que  $\mathbf{L} \mathbf{r}_T + \mathbf{A} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$  soit compatible, on obtient encore :

$$(49) \quad \int_{\nu} \mathbf{c}^E \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} \, dv = \int_{\nu} \mathbf{r}_T \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} \, dv$$

Finalement la formule (47) s'écrit :

$$(50) \quad \mathbf{C} \mathbf{D}^p = \frac{1}{V} \int_{\nu} \mathbf{c} \, d^p \, dv + \frac{1}{V} \int_{\nu} \mathbf{r} \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} \, dv + \frac{1}{V} \int_{\nu} \mathbf{r}_T \mathbf{L} \dot{\mathbf{r}} \, dv$$

La puissance dissipée plastiquement  $\mathbf{C} \mathbf{D}^p$  est donc la somme d'un terme égal à la moyenne de la puissance dissipée microscopique et de deux termes d'énergie bloquée dus aux contraintes résiduelles.

Notons que le troisième terme apparaît même si la température est uniforme et constante dans le polycristal dès que les déformations  $\mathbf{A} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$  ne sont pas compatibles. Il est absent de la formule établie par MANDEL [4] dans le cas du comportement isotherme parce que cet auteur considère une décharge élastique à température constante en supposant qu'à cette température la déformation élastique du cristal est nulle sous contrainte nulle. Cette hypothèse n'est, on le voit, justifiée, que si les déformations de dilatation thermique à la température étudiée sont compatibles; on peut en effet alors prendre la configuration où  $\mathbf{c} = 0$  à la température  $T$  comme configuration de référence pour la mesure des déformations.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] H. D. BUI. — Étude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écroutissage et relations de comportement élastoplastique des métaux cubiques, *thèse*, Paris, 1969.
- [2] R. HILL. — The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, n° 2, pp. 79-95, 1967.
- [3] J. MANDEL et P. DANTU. — Contribution à l'étude théorique et expérimentale du coefficient d'élasticité d'un milieu hétérogène, mais statistiquement homogène, *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 2, pp. 1-30, 1963.
- [4] J. MANDEL. — Contribution théorique à l'étude de l'écroutissage et des lois de l'écoulement plastique, *Proc. 11th Int. Congr. App. Mech.*, pp. 502-509, 1964.
- [5] J. MANDEL. — Plasticité classique et viscoplasticité, *cours* au C.I.S.M., Springer-Verlag éd., 1971.
- [6] W. NOWACKI et J. ZARKA, Sur le champ des températures obtenues en thermoélasto-viscoplasticité, *Archives of Mechanics*, 26, n° 4, pp. 701-715, 1974.

## TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
	—
Résumé (français, anglais, allemand).....	179
1. INTRODUCTION.....	180
2. FLUX DE CHALEUR MACROSCOPIQUE.....	180
3. TEMPÉRATURE MACROSCOPIQUE.....	182
4. LES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE.....	183
5. COMPORTEMENT THERMOÉLASTIQUE DU POLYCRISTAL.....	184
6. COMPORTEMENT THERMOÉLASTOPLASTIQUE DU POLYCRISTAL.....	186
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	189

---

# UN NOUVEAU MODÈLE THERMODYNAMIQUE DE LA PLASTICITÉ DES MÉTAUX <sup>(1)</sup>

*(A new thermodynamic model of metal plasticity)*

*(Ein neues thermodynamisches Modell  
für die Plastizität der Metalle)*

par

A. BONNET <sup>(2)</sup>

---

RÉSUMÉ. — *On essaie de bâtir un modèle macroscopique de la plasticité des métaux en partant de l'idée d'un changement de phase thermodynamique de l'état élastique à l'état plastique. On en déduit l'existence d'un critère de plasticité et de lois d'écoulement plastique obtenus à partir de la connaissance de la fonction de Gibbs. On envisage finalement le cas particulier de l'isotropie et de l'absence d'écrouissage.*

SUMMARY. — *A tentative macroscopic model of metal plasticity is introduced on the base of thermodynamic phase change from elastic to plastic state. In consequence, yield criteria and flow rule are related to the Gibbs thermodynamic function of the metal. The particular case of isotropy and absence of hardening is finally considered.*

<sup>(1)</sup> Colloque du Groupe français de rhéologie « Thermodynamique des comportements rhéologiques », 7 et 8 décembre 1977.

<sup>(2)</sup> Professeur à l'École nationale des ponts et chaussées.

ZUSAMMENFASSUNG. — *Es wird versucht, ein makroskopisches Modell für die Plastizität der Metalle zu erstellen, ausgehend von dem Gedanken einer thermodynamischen Phasenänderung beim Übergang vom elastischen in den plastischen Zustand. Es wird daraus das Vorhandensein eines Plastizitätskriteriums und von Gesetzen des plastischen Fließvorgangs abgeleitet, die sich aus der Kenntnis der Gibbsschen Beziehung ergeben. Schliesslich wird der Sonderfall der Isotropie und des Fehlens einer Kaltverformung betrachtet.*

## INTRODUCTION

La technique utilisée pour décrire la plasticité consiste à utiliser ce qu'on appelle habituellement des *variables cachées* qui sont utilisées pour caractériser l'opération de plastification.

Pour la plupart des auteurs et en ce qui concerne la plasticité des métaux, le choix de ces variables est assez arbitraire.

Les uns choisissent le travail de plastification (Mandel) :

$$W = \int_0^t T^{ij} \dot{e}_{ij}^p dt.$$

Les autres font appel à des variables microscopiques reliées à la géométrie des dislocations (Rice et al.).

Dans ce travail, l'originalité tient en ce que le choix de ces variables est parfaitement défini à partir de l'idée suivante : la plastification d'une particule de métal n'est autre qu'un *changement de phase* solide élast → plast, changement de phase qui, au lieu d'être piloté par la température comme dans le cas classique, l'est par l'état de contraintes.

Le critère de plasticité n'est autre que la surface de changement de phase.

L'idée physique qui consiste à dire que la plasticité n'est autre qu'un changement de phase repose sur l'existence des dislocations au niveau microscopique. Si celles-ci sont supposées réparties de façon continue dans l'élément matériel, les atomes de métal ne sont plus liés entre eux par les mêmes forces microscopiques que dans l'élasticité : il y a tendance à la décohésion, celle-ci étant contenue par les contraintes élastiques qui subsistent.

Les variables d'état que l'on introduit alors sont celles qui définissent *macroscopiquement* les deux phases, c'est-à-dire température, déformations et composition de chaque phase.

Cette simple idée permet de retrouver à la fois :

- l'existence du critère de plasticité;
- les lois de l'écoulement plastique.

C'est ce que nous allons voir succinctement maintenant en utilisant la fonction thermodynamique adaptée pour cette étude :

$$G_v = U_v - \theta S_v - T^{ij} e_{ij}^{el}$$

$\theta$  : Température de (P, Dm) élément matériel

$S_v$  : Entropie volumique

$U_v$  : Énergie interne volumique

$e_{ij}^{el}$  : Déformations élastiques

$T^{ij}$  : Contraintes.

(Pour la simplicité des calculs, nous supposons que les déformations restent petites.)

## 1. RELATION DE GIBBS POUR L'ÉNERGIE INTERNE

On introduit  $\beta$ , titre volumique de la phase plastique ( $0 \leq \beta \leq 1$ ).

Au cours de la plastification, on a  $d\beta > 0$ . Sinon  $d\beta = 0$ . On ne peut pas avoir  $d\beta < 0$ .

Dans ces conditions, l'énergie interne volumique  $U_v$  d'une particule métallique apparaît comme fonction de :

$S_v$  : Entropie volumique  
 $e_{ij}^{el}$  : Déformation de la phase élastique  
 $e_{ij}^p$  : Déformation de la phase plastique  
 $\beta$  : Titre en volume de la phase plastique.

On a :

$$U_v = U_v(S_v, e_{ij}^{el}, e_{ij}^p, \beta)$$

La relation de Gibbs attachée à  $U_v$  s'écrit alors :

$$(1) \quad dU_v = \theta dS_v + T_{cl}^{ij} de_{ij}^{el} + T_p^{ij} de_{ij}^p + \Phi d\beta$$

- $T_{cl}^{ij}$  et  $T_p^{ij}$  sont les tensions thermodynamiques associées à  $e_{ij}^{el}$  et  $e_{ij}^p$ ,
  - $\theta$  est la température thermodynamique de l'élément matériel,
  - $\Phi$  s'appelle le potentiel plastique :
- $\Phi = \mu_v^p - \mu_v^{el}$ , où les  $\mu_v$  sont les potentiels chimiques des phases par unité de volume.

## 2. IRRÉVERSIBILITÉS

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{dU_v}{dt} = T^{ij} \frac{de_{ij}}{dt} + \frac{d'q}{D\Omega dt}$$

ce qui par comparaison avec (1) permet d'obtenir l'expression du *travail non compensé des irréversibilités*,  $d'f$  :

$$(2) \quad \frac{d'f}{D\Omega dt} = (T^{ij} - T_{el}^{ij}) \dot{e}_{ij}^{el} + (T^{ij} - T_p^{ij}) \dot{e}_{ij}^p - \Phi \dot{\beta} \geq 0$$

Nous allons supposer que l'évolution que l'on fait subir à l'élément métallique est *suffisamment lente* pour qu'on puisse négliger les phénomènes de viscosité (viscoélasticité et viscoplasticité).

Dans ces conditions (2) montre qu'on doit avoir  $T_{el}^{ij} = T^{ij}$ . La relation de Gibbs associée à  $U_v$  devient alors :

$$(3) \quad \boxed{dU_v = \theta dS_v + T^{ij} de_{ij}^{el} + T_p^{ij} de_{ij}^p + \Phi d\beta}$$

et :

$$\frac{d'f}{D\Omega dt} = (T^{ij} - T_p^{ij}) \dot{e}_{ij}^p - \Phi \dot{\beta} \geq 0$$

## 3. FONCTION DE GIBBS ADAPTÉE

Pour étudier la plasticité, les variables « de commande » sont en fait la *température et les contraintes*. Nous allons donc chercher la fonction de Gibbs adaptée aux variables d'état intérieur :

$$\theta, T^{ij} \mid e_{ij}^p, \beta$$

D'après (3), il s'agit de :

$$(4) \quad G_v(\theta, T^{ij} \mid e_{ij}^p, \beta) = U_v - \theta S_v - T^{ij} e_{ij}^{el}$$

En effet, d'après (3) et (4) :

$$(5) \quad \boxed{dG_v = -S_v d\theta - e_{ij}^{el} dT^{ij} + T_p^{ij} de_{ij}^p + \Phi d\beta}$$

Nous avons ainsi les relations :

$$S_v = - \frac{\partial G_v}{\partial \theta}, \quad e_{ij}^{el} = - \frac{\partial G_v}{\partial T^{ij}}, \quad T_p^{ij} = \frac{\partial G_v}{\partial e_{ij}^p}, \quad \Phi = \frac{\partial G_v}{\partial \beta}$$

#### 4. LOIS DE L'ÉLASTICITÉ ET DE LA PLASTICITÉ

Nous allons traduire qu'au cours de l'évolution de  $(P, Dm)$ , les déformations élastique et plastique de celui-ci apparaissent comme les parties *réversible* et *irréversible* de la déformation totale, si l'évolution est *suffisamment lente* (viscosité négligée).

Si on considère une opération de charge-décharge élémentaire, on a le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Charge} & \text{puis} & \text{Décharge} \\
 \left. \begin{array}{l} + d\theta \\ + dT^{ij} \end{array} \right\} \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} + de_{ij}^{el} \\ de_{ij}^p \\ d\beta > 0 \end{array} \right. & \left. \begin{array}{l} - d\theta \\ - dT^{ij} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} - de_{ij}^{el} \\ de_{ij}^p = 0 \\ d\beta = 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

d'après (5) :

$$e_{ij}^{el} = - \frac{\partial G_v}{\partial T_{ij}}$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} de_{ij}^{el} = - d_{\beta, e_i^j} \left( \frac{\partial G_v}{\partial T_{ij}} \right), \text{ ce qui entraîne} \\ d_{\theta, T^i} \left( \frac{\partial G_v}{\partial T_{ij}} \right) = 0 \end{array} \right.$$

On obtient ainsi :

(6) *Thermoélasticité*

$$de_{ij}^{el} = - \frac{\partial^2 G_v}{\partial T^{ij} \partial T^{kl}} dT^{kl} - \frac{\partial^2 G_v}{\partial T^{ij} \partial \theta} d\theta$$

(7) *Plasticité*

$$- \frac{\partial T^{kl}}{\partial T_{ij}^p} de_{kl}^p = d\beta \frac{\partial \Phi}{\partial T_{ij}}, \quad d\beta \geq 0$$

$$M_{ijkl} = - \frac{\partial^2 G_v}{\partial T^{ij} \partial T^{kl}}$$

sont les *coefficients de compliance élastique*.

On notera que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial e_{lm}^p} = - \frac{\partial^2 T_p^{lm}}{\partial T^{ij} \partial T^{kl}} \\ \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \beta} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^{ij} \partial T^{kl}} \end{array} \right.$$

Ceci montre que, dans ce modèle, les coefficients de compliance élastique peuvent dépendre de l'état de plastification.

On remarquera que la relation (7) qui décrit l'écoulement plastique du matériau est plus générale que celle que l'on utilise habituellement.

S'agissant d'un modèle phénoménologique, il faut se donner a priori les expressions de  $\Phi$  et  $T_p^{ij}$  pour obtenir une loi explicite, par exemple en supposant l'isotropie et l'absence d'écrouissage (voir chapitre 6).

## 5. CHANGEMENT DE PHASE ET CRITÈRE DE PLASTICITÉ

Comme l'évolution est supposée lente, on aura au cours du changement de phase :

Élast.  $\rightarrow$  Plast.

$$d_{\theta, T^i} G_v = 0$$

la fonction de Gibbs est stationnaire à  $\theta$  et  $T^{ij}$  fixés, comme le veut un résultat classique de thermodynamique.

D'après (5), cela entraîne qu'au cours de la plastification :

$$(8) \quad - T_p^{ij} de_{ij}^p = \Phi d\beta, \quad d\beta \geq 0$$

Rapprochée de (7), cette relation fournit, en éliminant  $d\beta$  :

$$\left( T_p^{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial T^{ij}} - \Phi \frac{\partial T_p^{kl}}{\partial T^{ij}} \right) de_{kl}^p = 0, \quad \forall i, j$$

Pour que ce système de 6 relations aux 6 inconnues  $de_{kl}^p$  ait une solution non nulle, il faut que :

$$(9) \quad \text{Critère de plasticité} \quad \boxed{\det \left[ T_p^{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial T^{ij}} - \Phi \frac{\partial T_p^{kl}}{\partial T^{ij}} \right] = 0}$$

Cette relation montre que le « changement de phase » ne peut se produire dans l'espace des contraintes que si celles-ci vérifient une relation dépendant de  $\theta$ ,  $E_{ij}^p$  et  $\beta$  : c'est le critère de plasticité sous une forme très générale.

Enfin, compte tenu de (8), le travail non compensé des irréversibilités plastiques a pour expression :

$$(10) \quad \frac{d'f}{D\Omega dt} = T^{ij} \dot{e}_{ij}^p \geq 0 \quad \text{qui est une relation} \\ \text{« bien connue »}$$

En ce qui concerne (9), on notera la relation utile :

$$\frac{\partial T_p^{ij}}{\partial \beta} = \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}^p}$$

## 6. PLASTICITÉ SANS ÉCROUISSAGE

Nous allons maintenant introduire deux hypothèses supplémentaires :

- isotropie du métal;
- absence d'écroutissage.

\* L'isotropie du métal nous dit que seuls les invariants scalaires suivants interviendront dans l'expression de la fonction de Gibbs  $G_p$  :

- $\theta$  : température;
- $\beta$  : titre volumique de la phase plastique.

Invariant du 1<sup>er</sup> degré :

$$\sum = \delta_{ij} T^{ij} = \text{Tr}(T^{ij}), \quad \bar{e}_p = \delta^{ij} e_{ij}^p = 0 \quad (\text{cf Bridgeman})$$

Invariant du 2<sup>e</sup> degré :

( $\tilde{T}^{ij}, \tilde{e}_{ij}^p$  : déviateurs des contraintes et des déformations plastiques).

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{1}{2} \tilde{T}^{ij} \tilde{T}_{ij} \\ w_p = \tilde{T}^{ij} \tilde{e}_{ij}^p \\ E_p = \frac{1}{2} \tilde{e}_{ij}^p \tilde{e}_p^{ij} \end{array} \right.$$

Nous négligerons les invariants d'ordre supérieur car nous avons supposé es déformations petites.

\* L'absence d'écroutissage implique que  $\Phi$  potentiel plastique et  $T_p^{ij}$  ne dépendent ni de  $\beta$ , ni de  $e_{ij}^p$ .

Ceci entraîne que :

$$G_v \text{ est fonction linéaire de } \beta \text{ et de } \tilde{e}_{ij}^p$$

Compte tenu de l'isotropie, on obtient :

$$(11) \quad G_v(\theta, T_{ij} \mid e_{ij}^p, \beta) = g_v^{el}(\theta, \underline{\Sigma}, Y) + \beta \Phi(\theta, Y) - k(\theta) \tilde{T}^{ij} \tilde{e}_{ij}^p$$

$k$  pourrait également être fonction de  $Y$  mais cela ne change pas substantiellement les résultats.

\* Dans ces conditions, on obtient en utilisant (6), (7) et (8) :

<i>Écoulement plastique</i>	$\begin{aligned} d\tilde{e}_{ij}^p &= d\beta \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\Phi}{k} \right) \tilde{T}_{ij}, \\ 2Y \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\Phi}{k} \right) &= \frac{\Phi}{k} \geq 0, \\ \frac{df}{D\Omega} &= \frac{\Phi}{k} d\beta \geq 0. \end{aligned}$	avec $d\beta \geq 0$
(12) <i>Critère de plasticité</i>		(plasticité sans écoulement)
<i>Irréversibilité plastique</i>		

On vérifie, bien entendu, que  $\frac{\Phi}{k}$  joue le rôle de potentiel plastique.

Le critère de von Mises est par exemple obtenu pour

$$\frac{\Phi}{k} = T_0 + \frac{Y}{G_p} \quad (T_0 \text{ et } G_p > 0 \text{ homogènes à une cte}).$$

## CONCLUSION

Cette rapide étude montre qu'il est possible de bâtir un modèle thermodynamique *purement macroscopique* pour rendre compte de la plasticité des métaux en partant de l'hypothèse physique que la plastification est un changement de phase.

Cette hypothèse permet de rendre compte *à la fois* de l'existence du critère de plasticité et des lois de l'écoulement plastique ce qui est un résultat fort intéressant.

Il serait souhaitable enfin que des vérifications expérimentales des conséquences de ce modèle soient entreprises, par exemple des mesures précises des coefficients de compliance élastique pour évaluer leur dépendance en fonction de l'état de plastification.

Ceci permettrait, dans une certaine mesure, de valider l'idée du changement de phase.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] GERMAIN et LEE. — On shock waves in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 21, p. 359, 1973.
- [2] RICE. — Inelastic constitutive relations for solids; an internal-variable theory and its application to metal plasticity, *J.M.P.S.*, vol. 19, p. 433, 1971.
- [3] KELLY et GILLIS. — Thermodynamics and dislocation mechanics, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 297, n° 1, janvier 1974.

## TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Résumé (français, anglais, allemand).....	191
INTRODUCTION.....	192
1. RELATION DE GIBBS POUR L'ÉNERGIE INTERNE.....	193
2. IRRÉVERSIBILITÉS.....	194
3. FONCTION DE GIBBS ADAPTÉE.....	194
4. LOIS DE L'ÉLASTICITÉ ET DE LA PLASTICITÉ.....	195
5. CHANGEMENT DE PHASE ET CRITÈRE DE PLASTICITÉ.....	196
6. PLASTICITÉ SANS ÉCROUISSAGE.....	197
CONCLUSION.....	198
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	199

---

IMPRIMERIE NATIONALE  
0 993003 T 78

---